

# ハイラーキ要素による薄肉構造の 局所応力解析

林 正<sup>1</sup>・渡辺 力<sup>2</sup>・斎藤道生<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部 環境・建設系 (〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)

<sup>2</sup>正会員 工修 函館工業高等専門学校助教授 環境都市工学科 (〒042-8501 函館市戸倉町 14-1)

<sup>3</sup>正会員 川田テクノシステム株式会社 設計部次長 (〒116-0014 東京都荒川区東日暮里 5-51-11)

本論文では、ハイラーキ要素を用いた薄肉構造物の局所応力解析法を提案する。有限要素法 (h 法) では、ズームング手法を用いて部分構造の局所応力を計算することが多いが、本手法により粗い要素分割で全体解析を行うと同時に精度の良い局所応力を計算できる。集中荷重を受ける場合や応力集中度の大きい箇所では解の収束性の悪化を防ぐために特異要素を、さらに計算効率を向上させるために遷移要素を用いる。平面応力解析や曲げ応力解析の数値計算例により効率的な要素分割法と薄板解析への適用性を調べ、薄肉円形ラーメンの補剛部や鋼床版 2 主桁橋の横桁開口部の局所応力解析に適用して実用性を検証する。

**Key Words :** hierarchical finite element method, singular element, transition element, local stress analysis, thin-walled structures.

## 1. まえがき

要素細分割法 (h 法) による有限要素法では、要素分割を多くすると未知数が急激に増大することから、ズームング手法<sup>1)</sup>を用いて部分構造の局所応力を計算することが多い。しかし、このズームング手法では各ズームング段階での誤差が累積され、得られた解の精度を評価する手法はいまだ確立されていない<sup>2)</sup>。さらに、ズームングのための再要素分割に伴うデータ作成作業が複雑で、入力データ数も増加する。また、要素の任意点で応力の計算値は精度が悪いことから、図心点やガウス点の値を用いて平滑化された値が用いられている。

一方、級数を用いて変位の補間関数を高次化する p 法<sup>3),4)</sup>では、粗い要素分割を用いて全体解析を行うことができる。また、応力勾配の急な箇所では、級数項を多く採ることによって解の精度を上げることができる。このとき、ズームング手法のように再度要素分割を行う必要がないので、データ作成に余分な作業が生じない。また、部分構造に対する仮定の境界条件を導入することによる誤差が生じないので、もとの構造モデルに忠実な解析を行うことができる。

本研究では、ハイラーキ要素<sup>5)</sup>を用いた p 法を薄肉構造の局所応力解析に用いて、粗い要素分割で全体解析を行った場合の局所応力の精度を検討する。p 法に関しては、Szabó と Babuška らによる一連の研究<sup>6)~9)</sup>の他に多くの研究<sup>10)~12)</sup>が行われているが、大規模構造の局所応力解析に適用した例は見受けられない。

ハイラーキ有限要素法は、要素内の任意点で精度

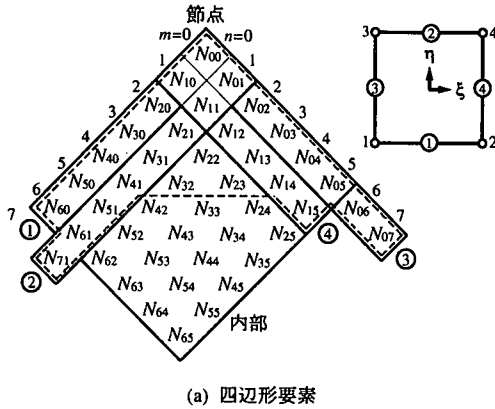
の良い応力を求めることができるので局所応力解析に適した解法であるが、実構造物に適用する際に、h 法による有限要素解析にない p 法特有の問題が生じる。

この問題は、級数解法と大型要素を用いることに起因し、前者については二重級数展開により生じる高次内部 (節面) 自由度の選択方法と級数解法の短所である集中荷重に対する収束性の悪化がある。後者については、曲線要素に対する形状誤差が h 法より厳しくなることや、曲線座標系で所望する点の応力を求めるための計算ルーチンと I/O データが必要になる。また、節線・節面自由度を用いるために、これらの自由度に対する番号付け、内部自由度の効率的な縮約方法や全体剛性行列への組み込み手順など、h 法では使用しないアルゴリズムが必要になる。

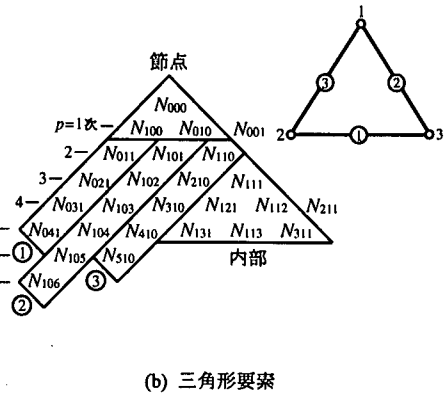
著者らは、自由振動解析についてハイラーキ有限要素法の効率的な数値解析法を開発しているが<sup>13)</sup>、本研究では要素形状が複雑な実構造物の局所応力解析のための数値計算法を提案し、数値計算例により局所応力の精度と薄肉構造解析への適用性を調べる。

## 2. 平面シェル要素

薄肉構造解析に用いるハイラーキ要素には、曲げ変形に Mindlin 理論を用いた平面シェル要素を用いる。ここでは、ハイラーキ要素の長所を生かし、局所応力解析を効率的に行うための数値計算法について説明する。



(a) 四辺形要素



(b) 三角形要素

図-1 遷移要素の階層図

(1) 遷移要素

Mindlin 理論に基づく平面シェル要素では、要素中央面上の並進変位  $u, v, w$  と回転角  $\theta_x, \theta_y$  を同一の変位関数  $d(\xi, \eta)$  で仮定する。ここに、 $(\xi, \eta)$  は正規化座標である。

四辺形要素では、変位関数を 2 方向にハイラーキ多項式で級数展開した形状関数  $N_{mn}$  を用いて表す。

$$d(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N N_{mn}(\xi, \eta) d_{mn} \quad (1)$$

ここに、 $m, n$  は多項式の次数、 $d_{mn}$  は一般化変位である。

三角形要素では、各変位成分を面積座標  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  の方向に級数展開する。

$$d(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N N_{lmn}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d_{lmn} \quad (2)$$

式の詳細については文献 5) を参照されたい。

ハイラーキ要素では、隣接要素との適合性を考慮して、周辺節線上の変位を任意の次数の多項式で級数展開することができるので、常に遷移要素として定式化することになる。四辺形要素の節線①に 6 次式、②、③に 7 次式、④に 5 次式を用いた場合の形状関数の階層図を図-1(a) に示す。

遷移要素では、内部(節面)自由度の採り方が問題になる。一般的に、形状関数は完全多項式の項まで用いられているので、図-1(a)の破線内の項が使用されているようである。しかし、完全多項式より高次の内部自由度を省略すると精度が悪化し、薄板解析では数値計算例で説明するようにせん断ロックが生じることがある。

そこで、四辺形遷移要素では、相対する 2 辺の節線自由度の低次側の級数項までのすべての内部自由度(図-1(a)に示したすべての項)を採用する。三角形要素では、3 本の節線の中の最低次の級数項までの内部自由度を用いる。図-1(b)は、節線①、②、③に 4, 6, 5 次式を用

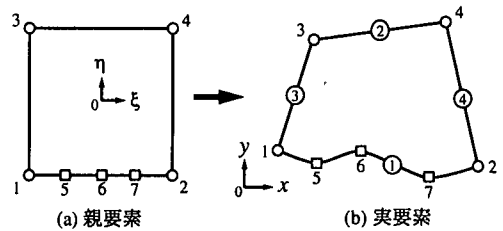


図-2 曲線要素の写像

いた場合の階層図である。

(2) 高次曲線要素

要素分割を粗くすることができるハイラーキ有限要素法では、h 法よりも個々の要素形状を正確に表す必要がある。

h 法ではアイソパラメトリック要素のように、写像関数に変位を補間する形状関数を用いて任意形状の曲線要素を求めることが行われている。しかし、p 法では、式(1)または式(2)の形状関数は多項式の級数であるので、曲線要素では形状関数とは別な写像関数を用いなければならない。

そこで、同一の関数を用いた次式のハイラーキ写像を提案した<sup>5)</sup>。

$$x = \sum_{i=1}^{I_p} N_i(\xi, \eta) \hat{x}_i, \quad y = \sum_{i=1}^{I_p} N_i(\xi, \eta) \hat{y}_i \quad (3)$$

ここに、 $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  はハイラーキ座標値と呼ぶ値で、写像点のデカルト座標値  $(x_i, y_i)$  から求められる。また、 $N_i$  は式(1)の形状関数  $N_{mn}$ (三角形要素では式(2)の  $N_{lmn}$ ) であるが、添字の意味が異なる。例えば、図-2に示すように、節線①を 4 次曲線で表す場合には 3 個の中間節点(写像のための節点)が必要であるので、節線①上で変位を級数展開する場合の 4 次までの形状関

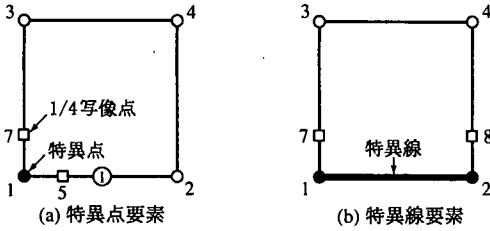


図-3 四辺形特異要素

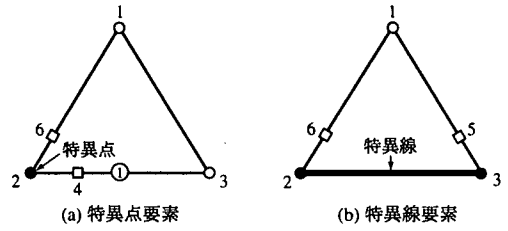


図-4 三角形特異要素

数を用いた次式で与えられる(図-1(a)を参照).

$$x = N_{00} \hat{x}_1 + N_{10} \hat{x}_2 + N_{20} \hat{x}_5 + N_{30} \hat{x}_6 + N_{40} \hat{x}_7 \quad (4)$$

$y$  も同様な式で表される.

四辺形要素の形状関数は 1 次元多項式の積で与えられる.

$$N_{mn} = f_m(\xi) f_n(\eta) \quad (5)$$

ここに、 $f_m(\xi)$  と  $f_n(\eta)$  は同じハイラーキ多項式である.

$$f_m(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 \mp \xi) & (m = 0, 1) \\ (1 - \xi^2) \xi^{m-2} & (m \geq 2) \end{cases} \quad (6)$$

式(5)に親要素の 1/4 点間隔の正規座標値  $\xi_i=0, \pm 1/2, \pm 1$  と  $\eta_i=-1$  を代入した  $N_{mn}(\xi_i, \eta_i)$  を式(4)に用いると次式が得られる.

$$x_i = \sum_j f_m(\xi_i) \hat{x}_j \quad (7)$$

$(i, j = 1, 2, 5, 6, 7; m = 0 \sim 4)$

ここに、左辺の  $x_i$  は図-2(b)の実要素の節点  $i$  のデカルト座標値である.

式(7)を  $\hat{x}_i$  について解くとハイラーキ座標値が求められる.

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_1, \quad \hat{x}_2 = x_2, \quad \hat{x}_5 = x_6 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \hat{x}_6 &= \frac{2}{3}(x_1 - x_2) - \frac{4}{3}(x_5 - x_7) \\ \hat{x}_7 &= -\frac{2}{3}(x_1 + x_2) + \frac{8}{3}(x_5 + x_7) - 4x_6 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$\hat{y}_i$  は式(8)において  $x_i$  を  $y_i$  に置き換えて得られる. なお、図-2(b)の他の節線が直線のときには、節点 3,4 のハイラーキ座標値は節点のデカルト座標値と同じである.

図-2の例では、実要素の節線①は与えられた 5 点を通る 4 次曲線で表される. これを、円孔板の数値計算例に用いた結果では、1/8 円弧の形状誤差は、半径  $r$  に対する座標値の相対誤差で  $10^{-4} \sim 10^{-6} \%$  である. また、1/4 円弧に適用した場合の最大誤差は  $10^{-2} \%$  である.

### (3) 特異要素

ハイラーキ要素では、集中荷重に対して級数展開した変位の収束性が悪く、要素内で応力が振動する傾向にある. また、線荷重が作用する場合や、要素が L 字形に結合する隅角点で同様なことが起きる. これらの点

や線上は特異であるので、近傍で要素を分割すれば振動は収まるが、特異点(線)近傍の応力を精確に求めるには要素を細分割する必要がある<sup>14)</sup>. その結果、未知数が増加して p 法の長所が活かされない. そこで、要素を分割せずに収束性を改善するために特異要素を用いる.

図-3(a)は節点 1 で要素に特異性が生じるように、親要素の 2 つの中央点 5,7 を 1/4 写像点に移動した特異要素である<sup>15)</sup>. これにより、要素に  $1/\sqrt{r}$  の特異性 ( $r$  は特異点からの距離)を持たせることができる. この場合のハイラーキ座標値は式(3)より次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_i &= x_i \quad (i = 1 \sim 4) \\ \hat{x}_5 &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2), \quad \hat{x}_7 = \frac{1}{4}(x_1 - x_3) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$\hat{y}_i$  も同様である.

図-3(b)のように 2 つの 1/4 写像点 7,8 を用いると、2 次元のヤコビ行列の要素  $J_{ij}$  は次式のようになる.

$$\left. \begin{aligned} J_{11} &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1) + \frac{1}{2} X_2 (1 + \eta)^2 \\ J_{21} &= (X_1 + X_2 \xi) (1 + \eta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) \\ X_2 &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$J_{12}, J_{22}$  は  $J_{11}, J_{21}$  の  $x_i$  を  $y_i$  に置き換えて得られる.

これらの  $J_{ij}$  から、 $\eta = -1$  でヤコビアンはゼロになるので、節線①上で要素は特異である.

三角形要素も図-4に示すように 2 つの 1/4 写像点を用いて特異要素が得られる. この場合のハイラーキ座標値は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_i &= x_i \quad (i = 1 \sim 3), \quad \hat{x}_4 = \frac{1}{4}(x_2 - x_3) \\ \hat{x}_5 &= \frac{1}{4}(x_3 - x_1), \quad \hat{x}_6 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

### (4) 仮想回転剛性

平面シェル要素では面内回転自由度  $\theta_z$  に対する剛性がゼロであるので、Zienkiewicz が提案した仮想回転剛性<sup>16)</sup>の概念をハイラーキ要素に拡張する.

仮想回転剛性は剛性行列の消去演算を可能にするためのものである. この近似剛性は適当な値でよい. ただし、解析結果に及ぼす影響、すなわち計算誤差をできるだけ小さくするために、次のように定める.

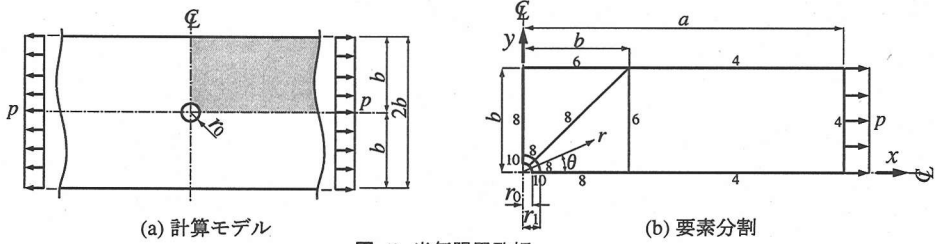


図-5 半無限円孔板

表-1 半無限円孔板の応力集中率の誤差 ( $r_0/b = 1/20$ ) (%)

$m = n$	$\sigma_x/\sigma_0 (x=0)$			$\sigma_\theta/\sigma_0 (r=r_0)$			DOF
	$y/b = 0.05$	$y/b = 0.2$	$y/b = 1.0$	$\theta = 45^\circ(l)$	$\theta = 45^\circ(r)$	$\theta = 0^\circ$	
4	$-1.4 \times 10^{+00}$	$8.4 \times 10^{-02}$	$-9.0 \times 10^{-02}$	$-2.2 \times 10^{-01}$	$-2.8 \times 10^{-02}$	$-4.0 \times 10^{+00}$	202
6	$-9.9 \times 10^{-02}$	$-3.7 \times 10^{-03}$	$1.3 \times 10^{-02}$	$-1.3 \times 10^{-02}$	$3.0 \times 10^{-03}$	$-2.9 \times 10^{-01}$	422
8	$-8.0 \times 10^{-03}$	$-1.8 \times 10^{-04}$	$2.1 \times 10^{-03}$	$-5.9 \times 10^{-03}$	$-1.9 \times 10^{-03}$	$-1.7 \times 10^{-02}$	722
10	$-6.3 \times 10^{-03}$	$-3.4 \times 10^{-05}$	$4.7 \times 10^{-04}$	$-6.6 \times 10^{-03}$	$-5.8 \times 10^{-03}$	$-6.5 \times 10^{-03}$	1102
遷移	$-6.0 \times 10^{-03}$	$-2.3 \times 10^{-02}$	$6.3 \times 10^{-03}$	$-9.2 \times 10^{-03}$	$-1.8 \times 10^{-03}$	$-7.3 \times 10^{-03}$	630
解析解	2.858463	0.987524	0.946551	0.950495		-0.957351	

表-2 半無限円孔板の応力集中率の誤差 ( $r_0/b = 1/1000$ ) (%)

$m = n$	$\sigma_x/\sigma_0 (x=0)$			$\sigma_\theta/\sigma_0 (r=r_0)$			DOF
	$y/b = 0.001$	$y/b = 0.01$	$y/b = 1.0$	$\theta = 45^\circ(l)$	$\theta = 45^\circ(r)$	$\theta = 0^\circ$	
4	$-9.8 \times 10^{+00}$	$8.9 \times 10^{-02}$	$7.0 \times 10^{-04}$	$-1.8 \times 10^{+00}$	$-2.0 \times 10^{+00}$	$-2.6 \times 10^{+01}$	202
6	$-3.0 \times 10^{+00}$	$6.1 \times 10^{-02}$	$9.8 \times 10^{-05}$	$-3.6 \times 10^{-01}$	$-3.1 \times 10^{-01}$	$-8.4 \times 10^{+00}$	422
8	$-8.3 \times 10^{-01}$	$3.6 \times 10^{-02}$	$3.7 \times 10^{-04}$	$-1.0 \times 10^{-01}$	$-7.0 \times 10^{-02}$	$-2.3 \times 10^{+00}$	722
10	$-2.4 \times 10^{-01}$	$1.9 \times 10^{-02}$	$3.4 \times 10^{-04}$	$-5.2 \times 10^{-02}$	$-2.8 \times 10^{-02}$	$-6.4 \times 10^{-01}$	1102
遷移	$-3.1 \times 10^{-01}$	$3.1 \times 10^{-02}$	$-4.5 \times 10^{-04}$	$-8.6 \times 10^{-02}$	$-3.7 \times 10^{-02}$	$-8.0 \times 10^{-01}$	630
解析解	2.997004	1.004146	0.998999	0.999000		-0.999003	

① 付加する回転剛性行列は、特異行列とする。

② 他の曲げ剛性を考慮して、要素の値は計算可能な範囲で小さくする。

具体的には、一般化変位 ( $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ ) に対する文献5)の式(37)の曲げ剛性行列  $k_{b,ij}$  を  $(4 \times 4)$  に拡大し、4番目の  $\theta_{zi}$  に対する対角要素に次式を用いる (拡大部分の非対角要素はゼロとする)。

$$k_{ij} = \begin{cases} \beta & (i=j) \\ -\beta/(I-1) & (i \neq j) \end{cases} \quad (13)$$

$$\beta = Et |J| \times 10^{-7} \quad (14)$$

ここに、 $i, j$  は小行列の番号で、要素の番号ではない。また、 $I$  は節点と節線の自由度数 (図-1(a) では  $I=25$ 、図(b) では  $I=18$ )、 $E$  はヤング係数、 $t$  は板厚、 $|J|$  は要素のヤコビアンである。なお、節面自由度は内部自由度として全体剛性行列を作成する前に縮約するので、 $\theta_z$  の節面自由度に対する仮想回転剛性は用いない。

### (5) 逆写像

大型要素を用いる  $p$  法で、要素の中央点または  $2 \times 2$  ガウス積分点での応力だけでは設計計算には不十分で

ある。一方、ハイアラーキ要素は、特異点を除けば周辺を含めて要素上の任意点で精度のよい応力が得られる長所がある。しかし、写像によってゆがめられた要素の所望する点 (例えば、全体デカルト座標系で直線上) の値を単純に求めることはできない。このために逆写像の手法を用いる。

変位や応力を求めたい点のデカルト座標値 ( $x_0, y_0$ ) を式(3)の左辺に代入すると、 $(\xi_i, \eta_i)$  に関する2元  $I_p$  次連立方程式が得られる。これをニュートン法で解く場合には、反復公式の係数行列はヤコビ行列の転置行列になるので、要素剛性行列を求めるためのルーチンと共用することができる。

### (6) その他の技法

この他に、節線番号や節面番号の自動番号付け、適合性を満たすための遷移要素の自動生成、非結合自由度を事前に縮約するための縮約順序付け、縮約演算のための要素剛性行列の部分消去演算ルーチンの作成など、実用化のためには計算効率を考慮した様々なアルゴリズムが必要であるが、これらの技法は汎用プログラムでも開発されていると思われるので詳細は省略する。

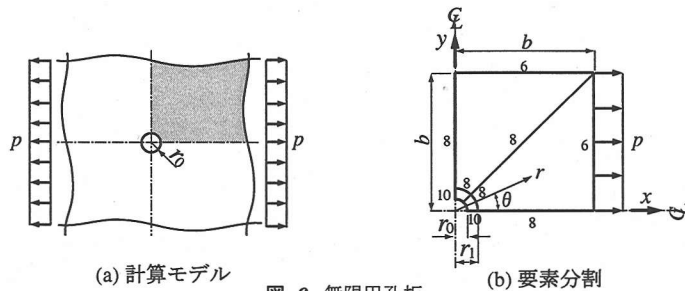


図-6 無限円孔板

表-3 無限円孔板の応力集中率の誤差 ( $r_0/b = 1/1000$ )

$m = n$	$\sigma_x/\sigma_0 (x = 0)$			$\sigma_\theta/\sigma_0 (r = r_0)$			DOF
	$y/b = 0.001$	$y/b = 0.01$	$y/b = 1.0$	$\theta = 45^\circ(l)$	$\theta = 45^\circ(r)$	$\theta = 0^\circ$	
4	$-9.8 \times 10^{+00}$	$9.4 \times 10^{-02}$	$6.4 \times 10^{-04}$	$-1.8 \times 10^{+00}$	$-2.0 \times 10^{+00}$	$-2.6 \times 10^{+01}$	162
6	$-3.0 \times 10^{+00}$	$6.4 \times 10^{-02}$	$1.5 \times 10^{-04}$	$-3.4 \times 10^{-01}$	$-3.3 \times 10^{-01}$	$-8.4 \times 10^{+00}$	338
8	$-8.3 \times 10^{-01}$	$3.8 \times 10^{-02}$	$3.5 \times 10^{-04}$	$-8.9 \times 10^{-02}$	$-8.4 \times 10^{-02}$	$-2.3 \times 10^{+00}$	578
10	$-2.4 \times 10^{-01}$	$2.0 \times 10^{-02}$	$2.6 \times 10^{-04}$	$-4.2 \times 10^{-02}$	$-3.7 \times 10^{-02}$	$-6.4 \times 10^{-01}$	882
遷移	$-3.1 \times 10^{-01}$	$3.2 \times 10^{-02}$	$-5.4 \times 10^{-04}$	$-8.0 \times 10^{-02}$	$-4.4 \times 10^{-02}$	$-8.0 \times 10^{-01}$	590
解析解	2.997000	1.004145	0.999000	0.999000		-0.999000	

### 3. 平面応力解析

#### (1) 半無限円孔板

図-5(a)に示す円孔(半径 $r_0$ )を有する有限幅 $2b$ の平板の無限縁に、一様引張応力 $p$ が作用する応力集中問題を計算する。計算モデルは円孔の大きさを $r_0/b = 1/20$ および $1/1000$ 、ポアソン比を $\nu=0.0$ とする。

図-5(b)に示すように、 $r_0/b = 1/20$ のときに $r_1/b = 1/5$ 、 $r_0/b = 1/1000$ のときに $r_1/b = 1/100$ の位置で同心円状に要素分割して、板の $1/4$ 領域に計5要素を用いて計算する。また、厳密には $x$ 軸に関して無限領域を取り扱う必要があるが、ここでは、形状の影響が無視できる程度の形状比 $a/b = 3$ を用い、円孔は式(4)の4次曲線で近似する。

多項式の次数には、すべての節線で $m=n=4 \sim 10$ 次式を用いた場合と、図-5(b)に示す次数の遷移要素を用いた場合を計算して要素の収束性と精度を検討する。なお、図中に示されていない円孔付近の節線には10次式を用いている。また、応力の計算結果は、狭小部の最小断面における応力 $\sigma_0 = pb/(b - r_0)$ に対する応力集中率を用いて表す。

表-1は、 $r_0/b = 1/20$ の場合における $y$ 軸( $x=0$ )上の直応力 $\sigma_x$ 及び円孔縁( $r=r_0$ )の円周方向の直応力 $\sigma_\theta$ について、応力集中率の解析解<sup>17)</sup>に対する誤差(%)を要素の隅角点(節点)で計算したものである。表より写像によりゆがんだ要素でも収束性は良好で6次式も用いるとすべての点で1%以下の誤差となっている。また、円孔を4次曲線で近似しているために $\sigma_\theta$ は $\theta = 45^\circ$ の要素間で応力は不連続となるが、その差は極めて小さ

いことが分かる。なお、表中のDOFは総自由度数である。

表-2に、 $r_0/b = 1/1000$ の場合の $\sigma_x$ 及び $\sigma_\theta$ の応力集中率の誤差を示す。円孔が極めて小さいために、 $r_0/b = 1/20$ に比べ応力集中箇所の応力は2桁ほど精度が悪いが、10次式を用いるとすべての点で1%以下の誤差となっている。また、遷移要素を用いても同精度の応力を少ない自由度数で効率良く計算できる。

なお、円孔の大きさが $r_0/b=0.1$ 以上の場合には、同心円状の分割を行わずとも3要素で高精度の解が得られる。

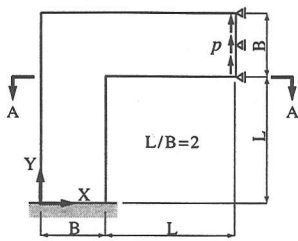
#### (2) 無限円孔板

図-6(a)に示す円孔(半径 $r_0$ )を有する無限平板の無限縁において一様引張応力 $p$ が作用する応力集中問題を計算する。計算モデルは円孔の大きさを $r_0/b = 1/1000$ とし、要素分割は図-6(b)に示すように $r_1/b = 1/100$ の位置で同心円状に分割して、板の $1/4$ 領域に計4要素を用いて計算する。また、他の条件は(1)と同様である。

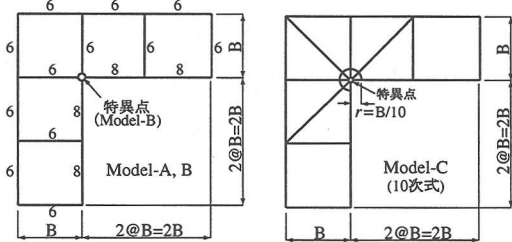
表-3は、表-2と同様に解析解<sup>18)</sup>に対する誤差を示したもので、無限板に対しても(1)と同様なことが言える。

#### (3) L形板

図-7(a)に示す等分布荷重 $p$ を受けるL形板を計算し、特異要素の効果を調べる。計算モデルははりと柱の形状比 $L/B=2$ 、ポアソン比を $\nu=0.3$ とし、境界条件は柱の下端を固定、はりの載荷端は $X$ 軸方向変位を固定し、 $Y$ 軸方向変位は自由とする。



(a) 計算モデル



(b) 要素分割と次数

図-7 L形板

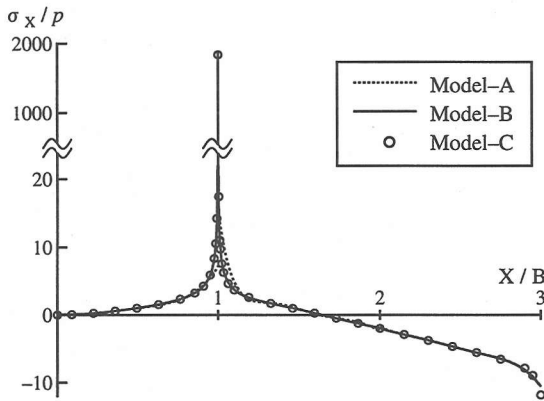


図-8 L形板のA-A線上の応力分布

このようなL形板では内側隅角点の特異となり、隅角点に応力が集中する。この応力を少ない要素分割で計算するために、図-7(b)のように、5要素でモデル化したModel-A、Model-Aの内側隅角点に特異点を設けたModel-B、比較のために内側隅角点近傍を細分割し隅角点に特異点を設けたModel-Cを用いる。また、Model-A,Bでは図中に示した6,8次式の遷移要素を用い、Model-Cでは隅角点周辺を三角形要素でモデル化し全要素について10次式を用いる。

図-8には、はり下縁に沿ったA-A線上の直応力 $\sigma_x$ を無次元化して示してある。非特異要素を用いたModel-Aでは、全体挙動はModel-Cと良く一致しているものの、隅角点近傍で応力が振動し応力集中箇所値を計算できていない。それに対して、特異点を設けたModel-Bでは、解が振動することなく隅角点近傍に生じる応力集中を良く計算できている。

## 4. 平板の曲げ解析

### (1) 薄板解析における板厚比の影響

長さ $a$ 、幅 $b$ の平板に満載等分布荷重 $q$ が作用する場合の計算を行ってハイラーキ要素の板厚比の影響を調べる。計算モデルは周辺単純支持板と周辺固定支持板で、ポアソン比を $\nu=0.3$ 、板厚を $t$ 、板の曲げ剛性を $D$ とする。要素分割は対称条件を用いて板の1/4領域に1要素を用いて計算する。なお、せん断補正係数には $k=5/6$ を用い、要素座標系 $(x,y)$ の採り方は図-14(b)と同様である。

Mindlin理論により定式化された要素を薄板解析に用いるとせん断ロッキングを生じるが、これを防ぐためには次数低減積分を用いれば良い<sup>5)</sup>。ここでは、形状比 $a/b=1$ の正方形板について、形状関数の級数項の選択方法とせん断ロッキングの影響を調べる。多項式の次数には $m=n=3\sim 6$ 次式を用い、内部モードの高次関数を省略し完全多項式状に形状関数を使った場合とすべて考慮して長方形に採った場合とを計算する。

図-9は単純支持板の中央点のたわみ $w$ と板厚比 $t/b$ の逆数の関係を片対数グラフで示したのものである。図-9(a)の完全多項式状に変位関数を使った場合、4次式以下で、薄くなるに従って急激に $w=0$ に近づいており、明かにせん断ロッキングを起こしていることが分かる。それに対して、長方形に採った場合には3次式を用いてもロッキングを起こしていない。なお、図中の○印はMindlin理論による値<sup>19)</sup>である。

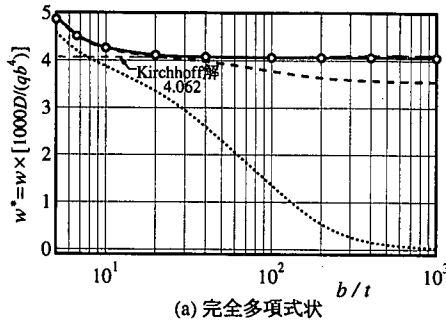
図-10は固定支持板の場合で、完全多項式状に採ったときには5次式を用いてもロッキングが生じているのに対して、長方形に採ったときには3次式を用いてもロッキングは生じていないことが分かる。また、完全多項式状に採った6次式(90DOF)の解は、長方形に採った4次式(75DOF)の解に比べて精度が悪いことから、先の論文<sup>5)</sup>で述べた高次関数を省略せず長方形に形状関数を使った方が計算効率が良いことが分かる。

Kirchhoff理論に忠実な値を求める場合には、面外せん断変形を省略するためにペナルティ数を用いたKirchhoff要素を用いる。表-4は板厚比 $t/b=0.01$ の周辺単純支持板と固定支持板の中央点のたわみ $w$ と直応力 $\sigma_x$ 、1/4点( $x=y=b/4$ )のせん断応力 $\tau_{xy}$ について、次式のペナルティ要素を用いて計算したものである。

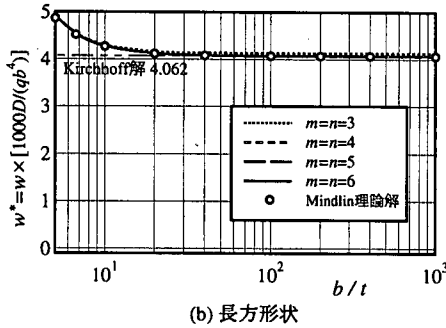
$$D_s = \alpha G t, \quad \alpha = 10^j t^2 / |J|, \quad j = 6 \sim 8 \quad (15)$$

ここに、 $D_s$ は板のせん断剛性、 $G$ はせん断弾性係数である。また、ペナルティ係数 $\alpha$ の指数 $j$ には6~8程度の値を用いればよいが、ここでは縮約演算による桁落ちを考慮して $j=6$ を用いる。

たわみ、応力ともにKirchhoff理論解<sup>20)</sup>に対して極めて高精度な値が得られており、収束性も良好である。

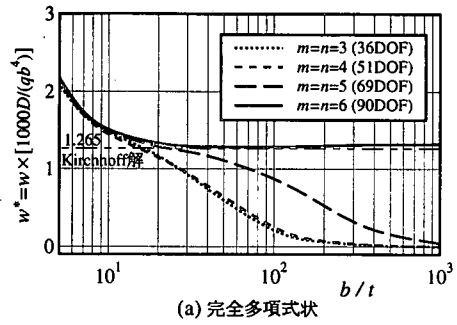


(a) 完全多項式状

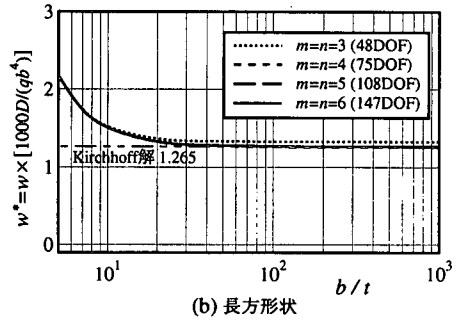


(b) 長方形状

図-9 単純支持板における高次項の効果



(a) 完全多項式状



(b) 長方形状

図-10 固定支持板における高次項の効果

表-4 周辺単純支持と周辺固定支持正方形板のたわみと応力の誤差 (Kirchhoff 要素) (%)

m = n	周辺単純支持			周辺固定支持		
	$w^* = wD/(qb^4)$	$\sigma_x^* = \sigma_x t^2/(qb^2)$	$\tau_{xy}^* = \tau_{xy} t^2/(qb^2)$	$w^* = wD/(qb^4)$	$\sigma_x^* = \sigma_x t^2/(qb^2)$	$\tau_{xy}^* = \tau_{xy} t^2/(qb^2)$
4	$-5.0 \times 10^{-02}$	$-4.2 \times 10^{+00}$	$9.4 \times 10^{-01}$	$-6.7 \times 10^{-01}$	$-2.0 \times 10^{+01}$	$5.9 \times 10^{+00}$
6	$1.5 \times 10^{-04}$	$2.0 \times 10^{-02}$	$7.1 \times 10^{-02}$	$-1.3 \times 10^{-03}$	$-2.4 \times 10^{-01}$	$-1.6 \times 10^{-01}$
8	$3.0 \times 10^{-05}$	$3.9 \times 10^{-03}$	$3.0 \times 10^{-04}$	$-7.7 \times 10^{-05}$	$-4.2 \times 10^{-02}$	$-2.5 \times 10^{-02}$
10	$2.7 \times 10^{-05}$	$7.1 \times 10^{-04}$	$-9.0 \times 10^{-05}$	$8.5 \times 10^{-05}$	$-1.7 \times 10^{-02}$	$-6.2 \times 10^{-04}$
解析解	0.00406235	0.287318	-0.0800969	0.00126532	0.137431	-0.0448508

なお、先の研究<sup>5)</sup>では、ペナルティ数を用いていなかったために、たわみで0.05%程度の誤差となっている。

## (2) 要素分割の影響

周辺単純支持正方形板 ( $a/b=1$ ) に満載等分布荷重  $q$  が作用する場合の計算を行って、要素分割が計算効率に与える影響と  $h$  法との計算効率の違いを調べる。計算では、板厚比  $t/b=0.01$ 、ポアソン比  $\nu=0.3$ 、せん断補正係数  $k=5/6$  を用いる。要素分割は、Mindlin 要素を用いて図-11のように板を分割せずに1要素でモデル化した  $p$  法、 $2 \times 2$  に分割した  $2h$ - $p$  法、 $4 \times 4$  に分割した  $4h$ - $p$  法を用い、多項式の次数はすべての節線で同一 ( $m=n$ ) とする。また、 $h$  法と比較するために汎用構造解析システム NISA の8節点要素<sup>21)</sup>を用いて、 $N \times N$  に偶数分割したときの板中央のたわみ  $w$  (節点変位) および奇数分割したときの板中央の直応力  $\sigma_x$  (圆心点応力) と比較する。

図-12は、縦軸に中央点のたわみ  $w$  と直応力  $\sigma_x$  の Mindlin 理論解<sup>19)</sup> に対する誤差 (%) の絶対値を、横軸

には計算に用いた総自由度数を示したものである。ハイラーキ要素を用いた  $p$  法は極めて良い精度と収束率を示しているが、要素分割を増やすと収束率が悪くなるのが分かる。これは、要素分割による離散化誤差が生じるためであり、 $p$  法では要素分割を少なくして高次関数を用いて計算した方が計算効率が良いと言える。

それに対して、 $h$  法では収束率が極めて悪く、 $p$  法と同精度の解を得るためには、 $p$  法に比べてかなり多くの自由度数を用いる必要がある。

## (3) 形状比の影響

ハイラーキ要素により橋梁構造物のように一方に長い構造をモデル化する場合、細長い要素を用いた方が効率がよい。ここでは、要素の形状比が解に与える影響を調べる。計算モデルは、(1)の計算例で板の形状比  $a/b=1 \sim 6$ 、板厚比  $t/b=0.01$  とし、多項式の次数は  $m=n=8$  次式に固定する。

図-13は、板の中心線上の直応力  $\sigma_x$  と  $\sigma_y$  を示したものである。8次式を用いたハイラーキ要素では、形

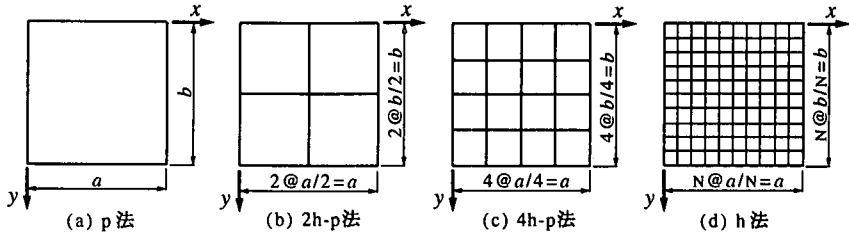


図-11 要素分割

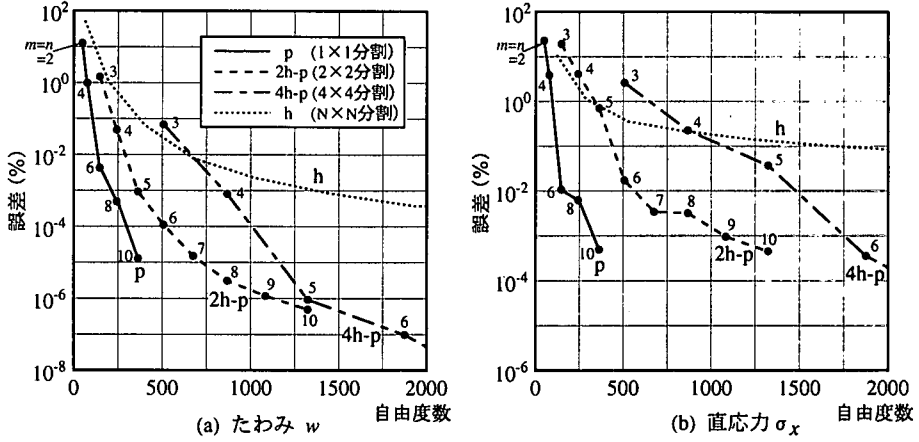


図-12 要素分割の影響 ( $t/b=0.01$ )

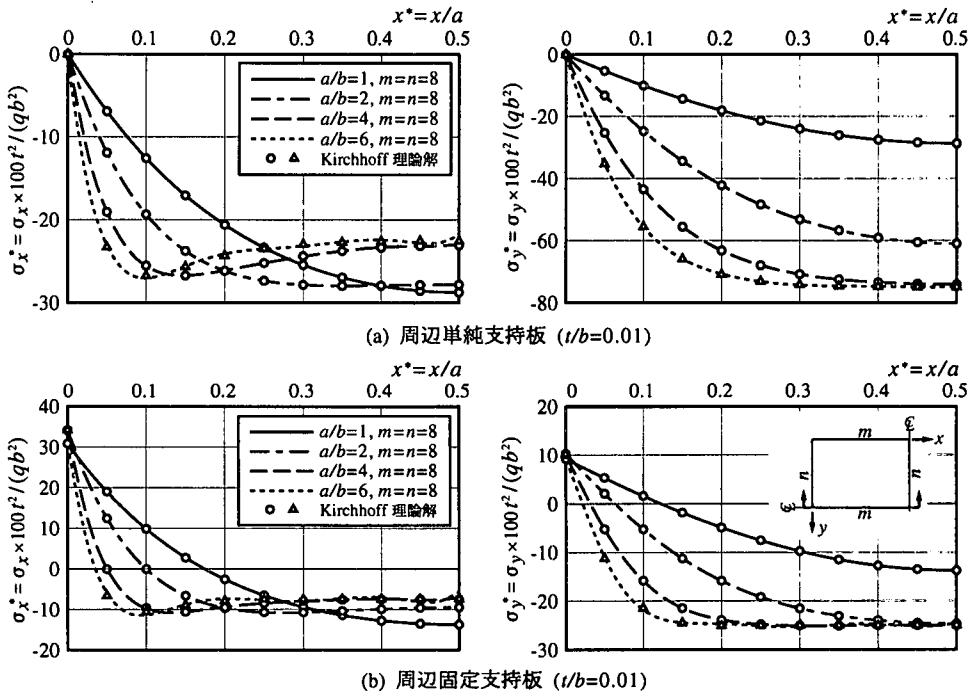


図-13 中心線上の応力

状比  $a/b=6$  程度の場合にも十分な精度を有することが分かる。



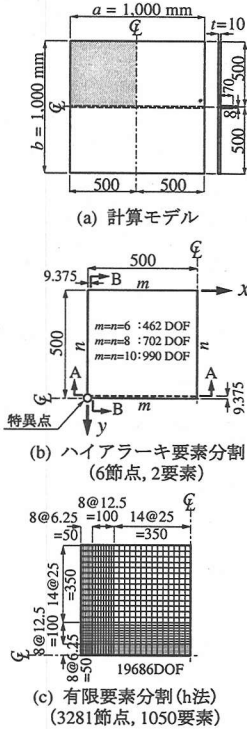


図-14 補剛板

#### (4) 補剛板の局所応力解析

図-14(a)に示す板の中央に高さ70mm、厚さ8mmの補剛材を有する補剛板に満載等分布荷重 $q$ が作用する場合を計算して、特異要素の効果を調べる。計算モデルは、 $a=b=1\text{m}$ 、板厚 $t=10\text{mm}$ の正方形板で、境界条件は板の周辺のみを単純支持とし、補剛材端部の境界条件は自由とする。材料定数にはポアソン比を $\nu=0.3$ 、せん断補正係数 $k=5/6$ とし、対称条件を考慮して板の1/4領域を計算する。

要素分割と多項式の次数は図-14(b)のように、p法では板に1要素、補剛材に1要素の計2要素でモデル化する。また、特異要素の効果を調べるために補剛材取り付け位置端部に特異点を設けたモデルと設けないモデルの2ケースを計算し、多項式の次数には $m=n=6, 8, 10$ 次式を、補剛材の高さ方向には4次式を用いる。h法では、8節点要素<sup>21)</sup>を用いて1/4領域で板を $30 \times 30$ 、補剛材を $30 \times 5$ に不等分割したFEM要素(図-14(c))の図心点での上・下面の応力度と比較する。

図-15,16に、A-A線上とB-B線上の直応力 $\sigma_x$ を示す。本計算例のような境界条件を有する補剛板では、補剛材取り付け位置端部付近に大きな局所応力を生じる。特異点を設けない要素では次数を10次式まで高めても補剛材の端部付近の精度が悪いが、特異点を設けることで6次式も用いればほぼ収束し、局所応力も細分割

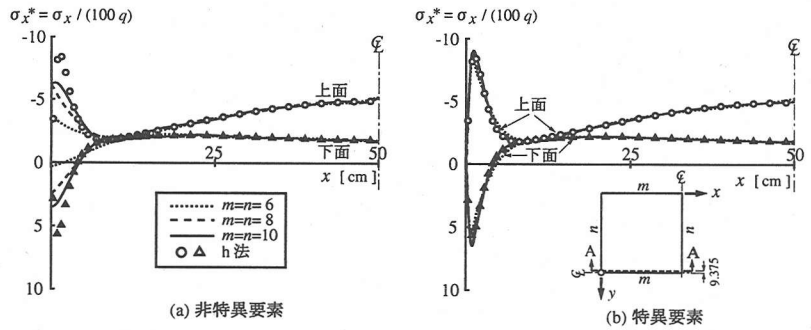


図-15 A-A線上の応力

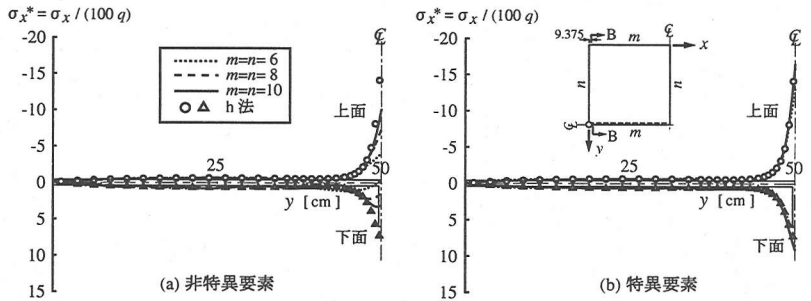


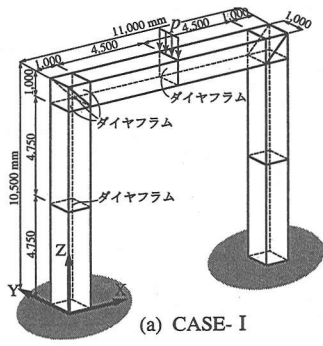
図-16 B-B線上の応力

したh法による解と良く一致している。

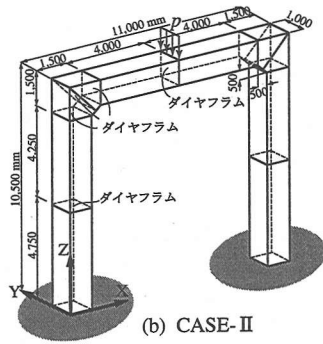
#### 5. 隅角部と補剛部の応力

図-17に示す薄肉箱形断面の門形ラーメンを計算して、平面シェル要素の効率的な要素分割法および、薄肉構造の隅角部と補剛部での特異要素と遷移要素の適用性を調べる。計算モデルは、隅角部にハンチの無いCASE-Iと $0.5 \times 0.5\text{m}$ のハンチ有するCASE-IIの2ケースとし、板厚を16mm、はりと柱の中央と隅角部に板厚16mmのダイヤフラムを有する。材料定数には、ヤング係数 $E=2.1 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$ (206GPa)、ポアソン比を $\nu=0.3$ 、せん断補正係数 $k=5/6$ を用いて、対称条件を考慮して構造全体の1/2領域を計算する。また、荷重ははりの中央に $p=200\text{tf/m}$ (2.0MN/m)の線荷重とはりの上フランジに $w=1\text{tf/m}^2$ (9.8kPa)の分布荷重を満載する。

要素分割は図-18(a)のように、CASE-Iでダイヤフラムの取り付け位置でのみ分割したModel-A、Model-Aにおいて線荷重載荷位置近傍で分割し隅角部に特異点を設けたModel-B、CASE-IIでModel-Bと同様に線荷重載荷位置近傍で分割し、隅角部に特異点を設けたModel-Cを用いる(Model-B,Cでは、奥行き方向に相対する特異点を結ぶ節線は、特異線となっている)。多項式の次数は図に示すように、柱の固定端側を4次式と



(a) CASE-I



(b) CASE-II

図-17 薄肉門形ラーメン

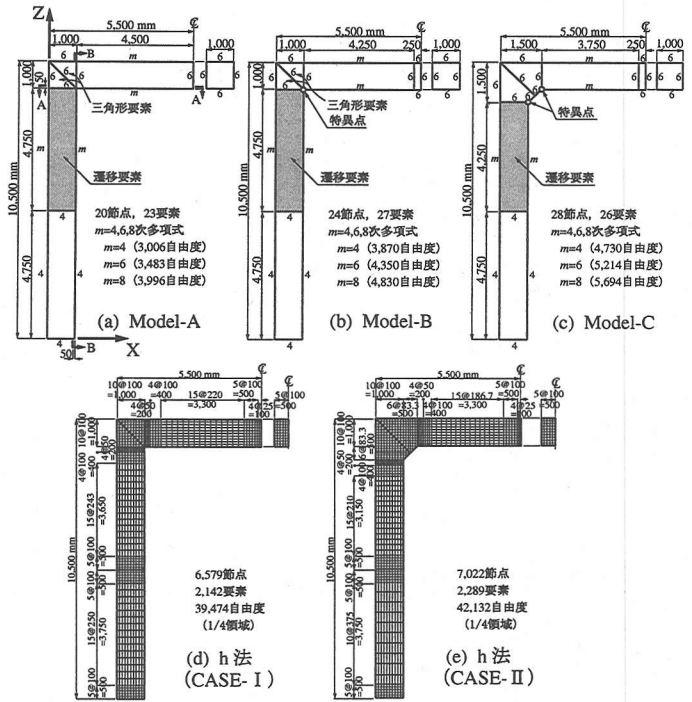


図-18 要素分割と次数

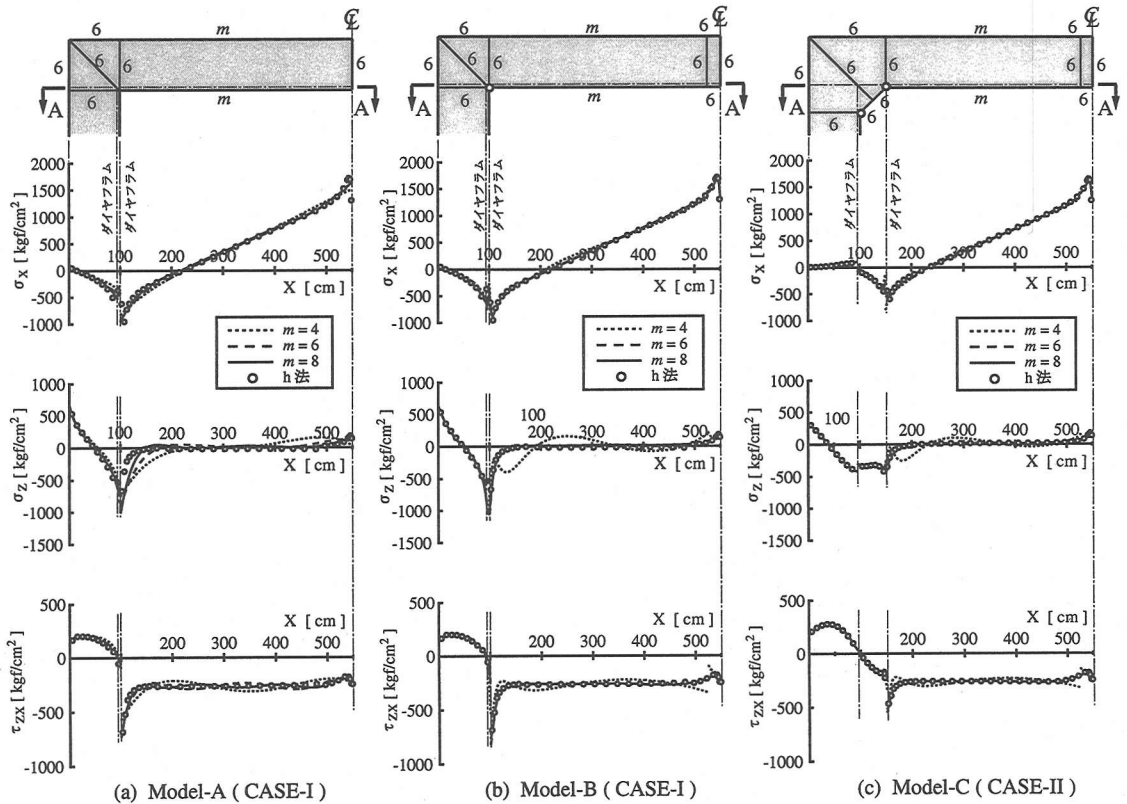
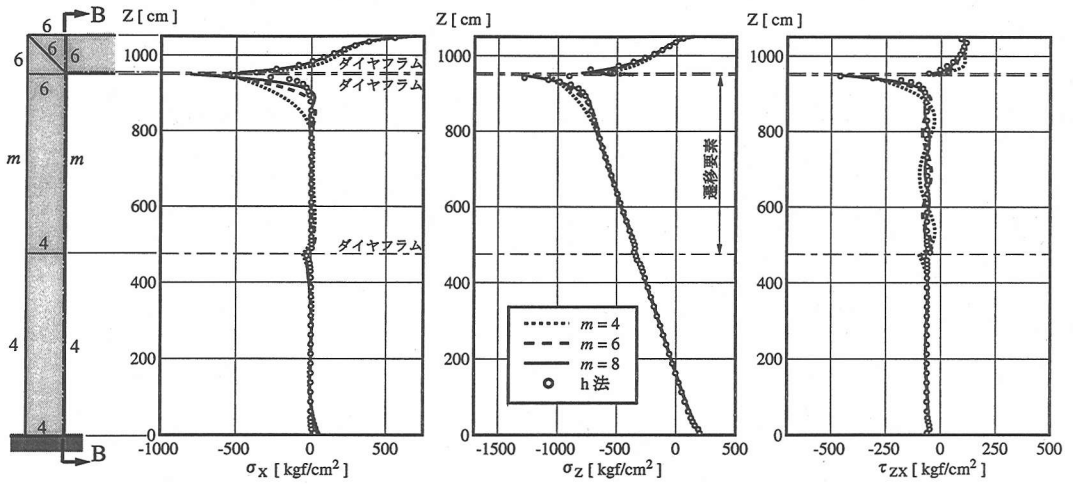
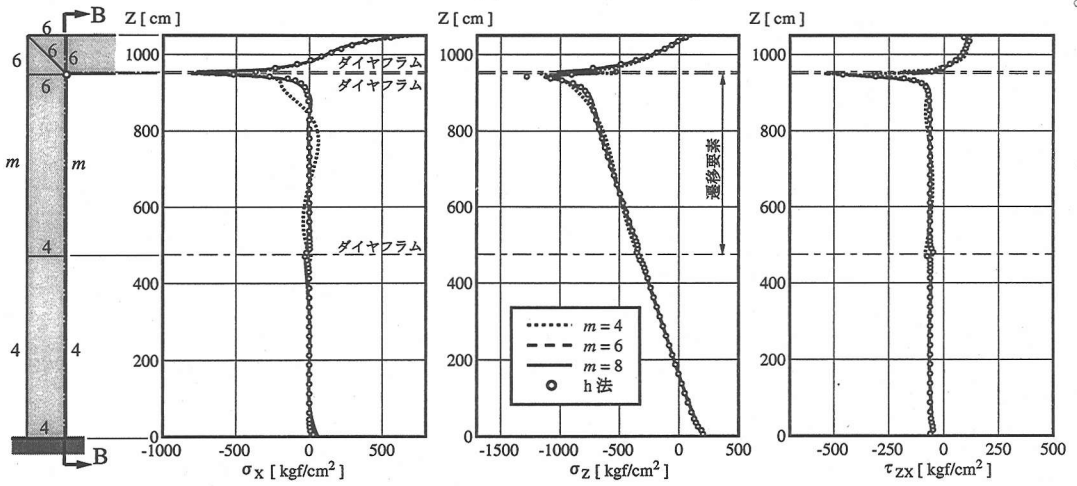


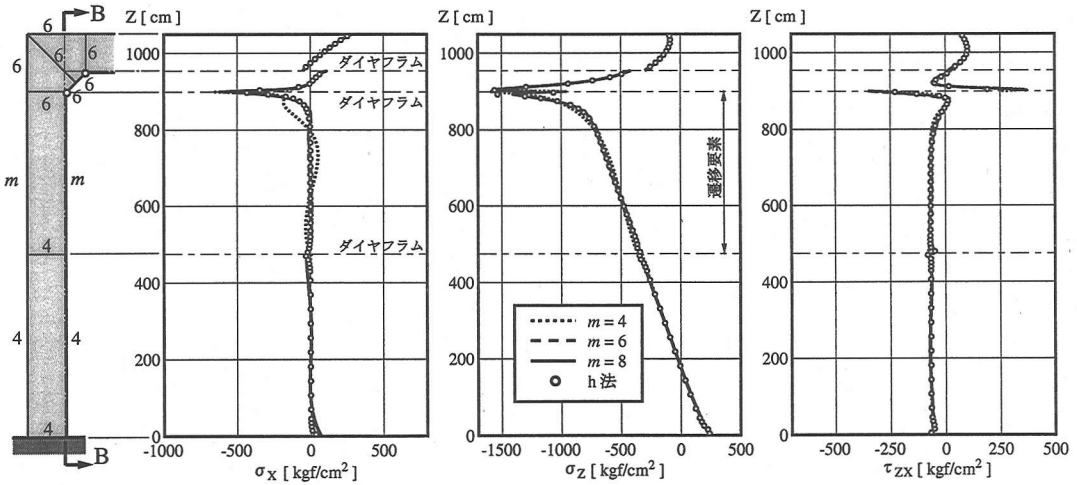
図-19 A-A 線上の応力 (1kgf/cm<sup>2</sup>=98kPa)



(a) Model-A (CASE-I)



(b) Model-B (CASE-I)



(c) Model-C (CASE-II)

図-20 B-B 線上の応力 (1kgf/cm\$^2\$=98kPa)

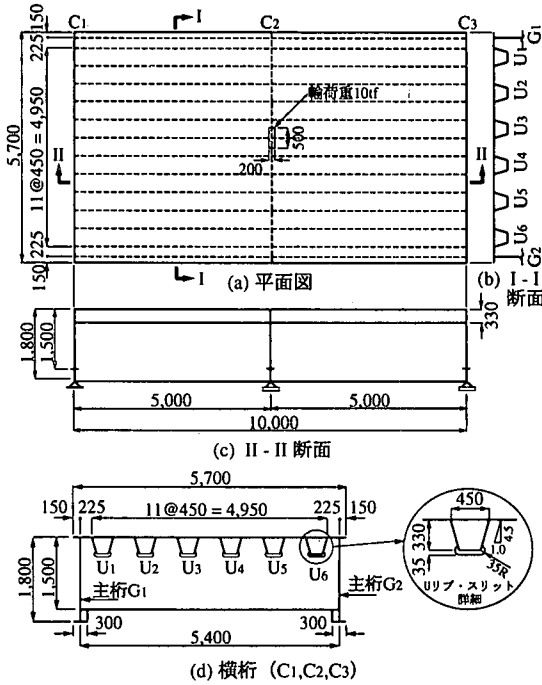


図-21 鋼床版 2 主桁橋

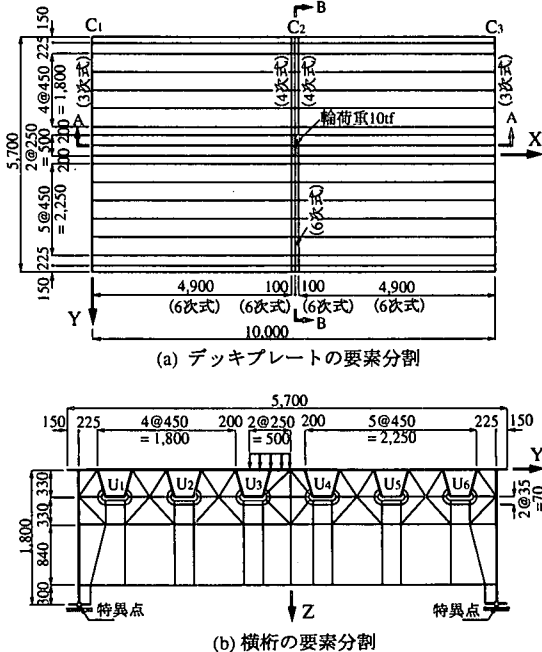


図-22 要素分割と次数

し、隅角部側の要素を遷移要素とする。なお、Model-A,B では隅角部に三角形要素を用いる。また、比較解には、1/4 領域を 8 節点四角形要素と 6 節点三角形要素<sup>21)</sup>を用いて図-18(d),(e)のように細分割した FEM 要素の図心点応力を用いる。

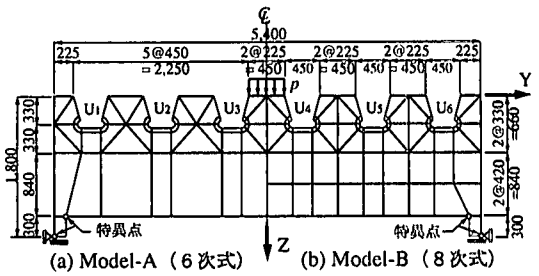


図-23 横桁の要素分割の検討

表-5 部材断面諸量 (mm)

デッキプレート	板厚 $t = 19$
Uリブ	板厚 $t = 8$
主桁	Web-PL 1800 × 10
	Flg-PL 300 × 12
横桁	Web-PL 1500 × 10
	Flg-PL 250 × 12

図-19,20に、A-A 線上と B-B 線上の板表面(外側)の直応力とせん断応力を示す。図-19では、隅角部のダイヤフラムの取り付け位置で大きな局所応力が生じる。ダイヤフラムの取り付け位置でのみ要素分割を行った Model-A では、線荷重載荷位置とダイヤフラム取り付け位置の精度が悪く、次数を高めても応力が振動している。それに対して、線荷重載荷位置で分割し隅角点を特異点とした Model-B では、 $m=6$  次式も用いると収束しており、線荷重載荷位置とダイヤフラム取り付け位置でも細分割した h 法による値と良く一致している。

図-20の柱の応力も図-19と同様な傾向で、特異点を設けることで応力の振動も止まり、6 次式も用いれば収束している。遷移要素を用いても精度の良い解が得られ、特に柱の隅角部付近の複雑な応力も要素分割することなく、応力集中箇所に特異要素を用いることで効率良く計算できる。また、CASE-I と CASE-II の応力を比較すると、ハンチを設けた CASE-II のほうが応力が小さくなる傾向にあるが、柱の  $\sigma_2$  は CASE-I に比べてかなり大きな応力が生じている。

## 6. 補剛リブ開孔部応力

### (1) 計算モデル

Uリブを有する鋼床版 2 主桁橋の全体解析を行って、Uリブとの交差部に設けた横桁開口付近に生じる局所応力を計算する。

解析モデルは、支間 10m、幅員 5.7m、主桁間隔 5.4m、主桁高 1.8m の図-21に示す 2 径間連続鋼床版 2 主桁橋で、2 本の主桁 ( $G_1, G_2$ ) 及び、デッキプレートに 6 本の Uリブ ( $U_1 \sim U_6$ ) と支点上に 3 本の横桁 ( $C_1 \sim C_3$ ) を図-21(a),(b),(c)のように配置し、Uリブと横桁の交

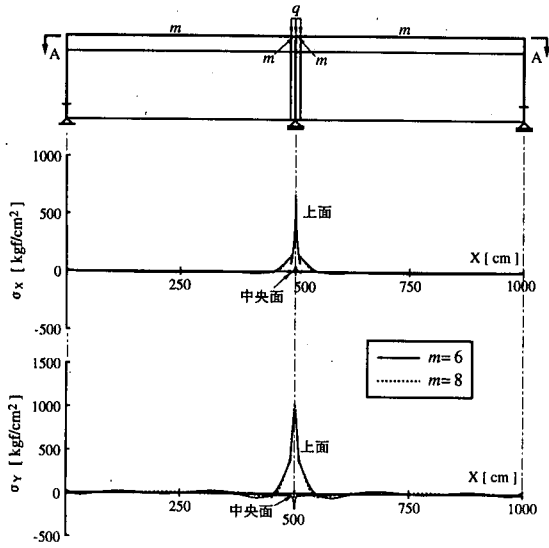


図-24 A-A 線上の直応力 ( $1\text{kgf/cm}^2=98\text{kPa}$ )

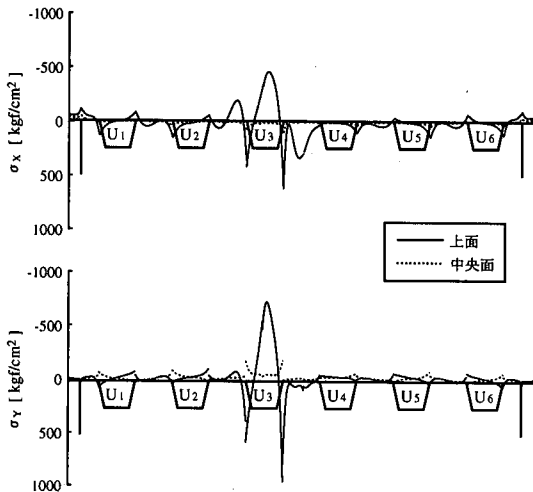


図-25 B-B 線上の直応力 ( $1\text{kgf/cm}^2=98\text{kPa}$ )

差部には図-21(d)のような開口を設ける。なお、これらの部材の諸量を表-5に示す。また、材料定数は5.と同様である。

境界条件は支点上の主桁下フランジを線支持とし、橋軸(X軸)方向の変位は $C_1$ 横桁位置の主桁ウェブと下フランジの交点(2点)を固定し、橋軸直角(Y軸)方向の変位は $C_1$ と $C_3$ 横桁位置の主桁 $G_1$ のウェブと下フランジの交点(2点)を固定する。荷重は、自重( $7.85\text{t/m}^3$ )を物体力として与え、さらに、輪荷重 $10\text{tf}(98\text{kN})$ を分布幅 $20\times 50\text{cm}$ で図-21(a)の位置に載荷する。

なお、本解析モデルは、文献23)で合理化鋼床版2主桁橋として提案されているモデルを参考としている。

## (2) 要素分割

横桁の要素分割は、円孔板の計算結果より開口部で同心円状に要素分割を行い、輪荷重の載荷する $U_3$ と $U_4$ リブ間で開口部付近のみを細分割した図-22(b)のような粗い要素分割を用いるが、横桁のみを取り出したモデルによる平面応力解析を行って、この要素分割の妥当性を調べる。

図-23は横桁のみを取り出したもので、横桁下フランジは考慮していない。境界条件は補剛材下端でZ軸方向の変位を線支持、Y軸方向には2つの補剛材下端の端点2点を固定し、荷重 $10\text{tf}(98\text{kN})$ は $U_3$ と $U_4$ リブ間に線荷重として載荷する。Model-Aは、図-22(b)の分割で、多項式の次数にはすべての節線で6次式を用いる。比較解には、細分割し多項式の次数に8次式を用いたModel-Bを用いる。なお、両モデルとも横桁と補剛材の交差部の隅角点と、Y軸方向変位を固定する位置に特異点を設けている。また、三角形部分には、縮退三角形要素を用いている。

図-26に主応力の等応力線を示す。Model-A(点線, 7502DOF)とModel-B(実線, 19650DOF)では、横桁下端付近に若干の差があるものの円孔部付近では良く一致しており、円孔付近に生じる最大応力の誤差は2%以下となっている。このことから、横桁は図-22(b)のような粗い分割を用いても十分な精度が得られる。

## (3) 全体解析

デッキプレート、Uリブ、主桁の要素分割は図-22に示す通りで、橋軸(X軸)方向には横桁の取り付け位置と輪荷重の外側縁の位置で分割(計4分割)する。特異点は支点上の主桁ウェブと下フランジの交点(計6点)に設ける。

多項式の次数には、橋軸方向にすべて6次式を、橋軸直角方向の断面内には $C_1$ と $C_3$ 横桁で3次式、 $C_2$ 横桁では6次式、輪荷重縁で分割した位置では4次式を用いる。なお、横桁下フランジの幅方向には3次式を用いる。

以上より、要素数656、節点数681、全自由度数75174で、縮約後の自由度数は26226である。

図-24には $U_3$ リブと交わるA-A線上、図-25には $C_2$ 横桁の取り付けB-B線上でのデッキプレート板上縁と中央面の直応力 $\sigma_x$ と $\sigma_y$ を示す。なお、図-24では、収束の確認のために橋軸(X軸)方向に8次式を用いた $m=8$ も計算してある。

A-A線上では $\sigma_y$ が若干振動しているものの、橋軸方向に8次式を用いた $m=8$ と良く一致していることから、解はほぼ収束していることが分かる。B-B線上では、輪荷重が作用する $U_3$ リブ取り付け位置に応力が集中していて、板中央面の応力度は極めて小さく、デッ

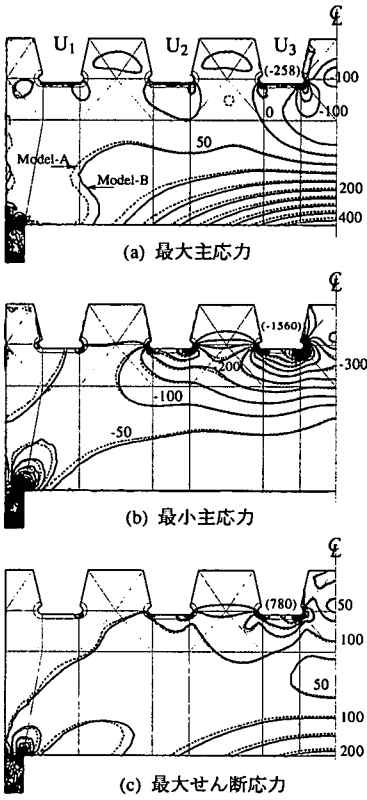


図-26 平面応力解析による横桁の主応力  
(単位  $\text{kgf/cm}^2$ ,  $1\text{kgf/cm}^2=98\text{kPa}$ )

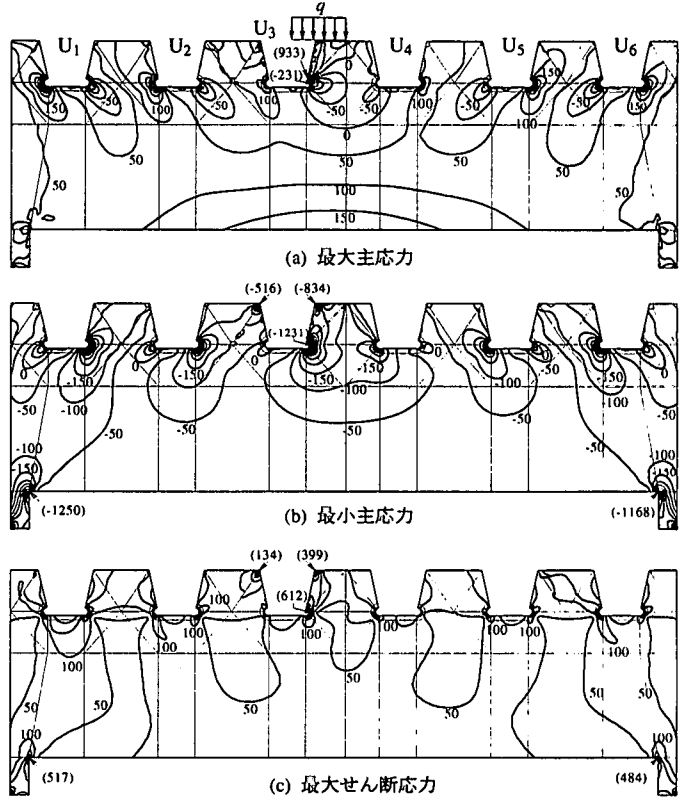


図-27 全体解析による横桁の主応力 (単位  $\text{kgf/cm}^2$ ,  $1\text{kgf/cm}^2=98\text{kPa}$ )

キプレートでは曲げ応力がかなり大きいことが分かる。

図-27には  $C_2$  横桁の主応力の等応力線を示す。図より応力は円孔部及び、補剛材と結合する位置の隅角点に集中しているのがよく分かる。この図は、各要素内で  $10 \times 10$  に分割した位置での計算値から作成しもので、要素間での補間が行っていない。そのため要素間で若干不連続となっている箇所もあるが、ほとんどの要素間でほぼ連続した応力が得られている。

なお、部分分布荷重を受ける場合には、本計算例のように荷重載荷位置で要素分割を行うのが効果的である。

## 7. 結 論

以上の数値計算例から、ハイラーキ要素による薄肉構造物の局所応力解析について、以下のことが言える。

- (1) 本手法により、ズームング手法を用いずに粗い要素分割で全体解析を行うと同時に、精度の良い局所応力を計算できる。
- (2) 形状関数の選択において、内部モードの高次項を省略せずに長方形に用いれば、せん断ロックは生じずに、要素の任意点で精度の良い解が得

られる。

- (3) ハイラーキ有限要素法では、要素分割を少なくして高次式を用いて計算した方が効率的である。ただし、線荷重や部分分布荷重が作用する場合などのように応力分布に不連続性が生じるときには、荷重載荷位置で要素分割するのが効果的である。
- (4) 特異要素を用いれば、応力集中度が高い場合でも要素分割を行わずに、局所応力を効率的に計算できる。
- (5) 遷移要素により、所要の点の応力をより少ない自由度で効率的に計算できる。
- (6) h 法に比べ、入力データ数が大幅に減少し、データ作成作業を省力化できる。

以上のことから、薄肉構造物の局所応力解析において、本手法は h 法に比べ解の精度が高く、有限要素解析を効率的に行うことができる。

## 参考文献

- 1) 川井忠彦, 川島矩郎, 三本木茂夫: 薄板構造解析, コンピュータによる構造工学講座 II-7-A, 倍風館, pp.107-120, 1973.
- 2) 横山正明: 高精度計算力学, 朝倉書店, pp.151-168, 1998.
- 3) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol.1, McGraw-Hill, pp.139-148, 1987.
- 4) Szabó, B. and Babuška, I.: *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 1991.
- 5) 林 正, 山中崇直, 加瀬部弘, 佐藤敏亮: ハイアラーキ要素による有限要素解析の効率化, 土木学会論文集, No.591/I-43, pp.71-84, 1998.
- 6) Babuška, I., Szabó, B. and Katz, I.N.: The p-version of finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.18, No 3, pp.515-545, 1981.
- 7) Szabó, B. and Sahrman, G.J.: Hierarchic plate and shell models based on p-extension, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.26, pp.1855-1881, 1988.
- 8) Babuška, I., Griebel, M. and Pitkäranta, J.: The problem of selecting the shape functions for a p-type finite element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.28, pp.1891-1908, 1989.
- 9) Babuška, I. and Guo, B.Q.: Approximation properties of the h-p version of the finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 133, pp.319-346, 1996.
- 10) Surana, K.S. and Sorem, M.: p-Version hierarchical three dimensional curved shell element for elastostatics, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.31, pp.649-676, 1991.
- 11) Suri, M.: Analytical and computational assessment of locking in the hp finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 133, pp.347-371, 1996.
- 12) Rank, E., Krause R. and Preusch, K.: On the accuracy of p-version elements for the Reissner-Mindlin plate problem, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.43, pp.51-67, 1998.
- 13) 林 正, 渡辺 力: 2段階動的縮小法を用いたハイアラーキ要素による自由振動解析, 土木学会論文集, No.619/I-47, pp.35-46, 1999.
- 14) 前掲 4): pp.188-192.
- 15) 鷲津久一郎, 宮本 博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦: 有限要素法ハンドブック I, 基礎編, 倍風館, pp.416-421, 1981.
- 16) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol.2, McGraw-Hill, pp.114-120, 1991.
- 17) Howland, R.C.J.: On the stress in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A, Vol.229, pp.48-86, 1930.
- 18) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.: *Theory of Elasticity*, 3rd. ed., McGraw-Hill, pp.90-97, 1982.
- 19) Hinton, E. and Owen, D.R.J.: *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge Press, pp.1-48, 1984.
- 20) Timoshenko, S.P. and Woinowski-Krieger, S.: *Theory of Plates and Shells*, 2nd. ed., McGraw-Hill, pp.105-228, 1959.
- 21) NISAI ユーザーズ・マニュアル Version 93.0: Engineering Mechanics Research Corporation, 1994.
- 22) 勝俣 盛, 小笠原照夫, 町田文孝, 川瀬篤志, 溝江慶久: 合理化鋼床版のUリブ・横桁交差部の局部応力特性について, 構造工学論文集, Vol.45A, pp.1241-1252, 1999.

(1999.11.4 受付)

## LOCAL STRESS ANALYSIS OF THIN-WALLED STRUCTURES BY HIERARCHICAL FINITE ELEMENTS

Masa HAYASHI, Chikara WATANABE and Michio SAITOH

Hierarchical finite element method is presented for the local stress analysis of thin-walled structures. In the local stress analysis, the zooming technique is used for the substructures in the h-version finite element method, while the over-all structure is analyzed and highly accurate local stresses can be calculated simultaneously by the proposed method. The singular elements are used to prevent the deterioration of convergence of the solution when concentrated forces are applied and stress concentration is received, and transition elements can improve on the efficiency of the numerical calculation. The adaptability of this method in regard to analyze local stress of thin-walled structures is demonstrated by several examples, and local stress analysis of thin-walled portal-frame and steel deck bridge with trapezoidal ribs are shown.