

一般曲線座標系による開水路流れ解析への MacCormack 法の適用性に関する検討

呂福祿¹・藤田裕一郎²

¹正会員 工博 岐阜大学工学部 (501-1193 岐阜市柳戸1-1)

²正会員 工博 岐阜大学工学部 (同上)

一般座標系で記述した2次元浅水方程式を MacCormack 法で差分化し、単純化した盆地状地形の洪水流を解析して妥当な結果を与える方法を見出した。即ち、2方向に分割した差分スキームの演算子の組み合わせについて3つの場合を検討し、差分方向を同一にした2つの場合では打ち切り誤差が累積して、解析結果に方向性を持った偏りが現れることを指摘し、これを避けるには交互に差分方向を変える組み合わせが有効であることを明らかにした。この方法によれば、同一の地形に2種の構造の異なった計算格子を適用しても同じ結果を得ること、流入支川や掘削河道がある場合でも安定的に計算できること、さらに、人工粘性の分布が流況とよく対応していることを示して、提案した数値モデルが高い適用性を持つことを検証した。

Key Words: *generalized coordinate system, MacCormack scheme, basin, numerical grid, artificial viscosity*

1. はしがき

山間河川によく見られる谷底平地などの複雑な地形をした場に適用可能であり、かつ高精度の流れ解析法を見出すために、2次元浅水方程式の MacCormack 差分スキームの適用性について検討と考察を行った。具体的に対象とした地形は、急拡・急縮部があつて、流れ解析には厳しい条件となるが、不合理な結果が容易に判定できる、平坦な底面と掘込み河道のある底面をした2種の対称な楕円形の盆地状地形であつて、さらに前者に支川流入のある場合を追加した。

MacCormack スキームは、衝撃波がよく存在する航空分野に用いられ¹⁾、このことから、常流・射流の混在する水理現象に有効な差分スキームとして水理学の分野でも応用されてきている²⁾⁻⁹⁾。

このスキームは陽的な予測子-修正子の2段階の組み合わせによって、時間的にも、空間的にも、2次精度を持たせるようにしたものであるが¹⁰⁾、現状では、分割スキームにおける演算子の組み合わせが誤差特性に与える影響については詳しく検討されていない。この点について、ここでは3つの組み合わせ方法を検討し、計算結果と実験結果を比較して最も妥当な方法を見出した。

なお、2次精度の MacCormack スキームでは、境界形状が激しく変化する場所を中心に数値的振動が生じるので、適度の振動抑制効果を持つ人工粘性を加える必要がある。しかし、人工粘性は数値的振動と同時に物理的に意味のある境界変化などに起因した変動も抑える傾向が

ある。そこで、ここでは、流れの変化が滑らかな領域では作用せず、振動の激しい領域でのみ効果を持つ Jameson^{8), 9)}による人工粘性を導入しているが、見出した組み合わせ方法ではこの値を小さくできることも示した。

2. 基礎方程式と差分スキーム

(1) 基礎方程式

基礎方程式は連続式と静水圧分布と水深方向の一樣流速を仮定した St. Venant 浅水方程式¹¹⁾であつて、一般座標系で記述すれば式(1)-(3)のようになる¹²⁾。

$$(h/J)_t + (q^\xi/J)_\xi + (q^\eta/J)_\eta = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (M/J)_t &+ \left[(q^\xi M/h + \xi_x gh^2/2)/J \right]_\xi \\ &+ \left[(g_{11}\epsilon_\xi + g_{12}\epsilon_\eta + \mathcal{E}_{11})M \right]_\xi \\ &+ \left[(q^\eta M/h + \xi_y gh^2/2)/J \right]_\eta \\ &+ \left[(g_{22}\epsilon_\eta + g_{12}\epsilon_\xi + \mathcal{E}_{22})M \right]_\eta \\ &= (\mathcal{E}_{11}M)_{\xi\xi} + 2(\mathcal{E}_{12}M)_{\xi\eta} + (\mathcal{E}_{22}M)_{\eta\eta} \\ &+ gh(\xi_x z_\xi + \eta_x z_\eta)/J - gh(S^{1f\xi} + S^{1f\eta})/J \end{aligned} \quad (2)$$

表-1 差分方向の組み合わせ方法

	第1項 $L_\xi(\Delta t)L_\eta(\Delta t)$				第2項 $L_\eta(\Delta t)L_\xi(\Delta t)$			
	$L_\xi(\Delta t)$		$L_\eta(\Delta t)$		$L_\eta(\Delta t)$		$L_\xi(\Delta t)$	
	予	修	予	修	予	修	予	修
①	後	前	後	前	後	前	後	前
②	前	後	前	後	前	後	前	後
③	後	前	後	前	前	後	前	後

注： 予：予測子段階， 修：修正子段階，
前：前進差分， 後：後退差分

$$\begin{aligned}
 & (N/J)_i + \left[(q^\xi N/h + \xi_y gh^2/2)/J \right]_\xi \\
 & + \left[(g_{11}\varepsilon_\xi + g_{12}\varepsilon_\eta + \varepsilon_{f11}N) \right]_\xi \\
 & + \left[(q^\eta N/h + \xi_y gh^2/2)/J \right]_\eta \\
 & + \left[(g_{22}\varepsilon_\eta + g_{12}\varepsilon_\xi + \varepsilon_{f22}N) \right]_\eta \\
 & = (\varepsilon_{g11}N)_{\xi\xi} + 2(\varepsilon_{g12}N)_{\xi\eta} + (\varepsilon_{g22}N)_{\eta\eta} \\
 & + gh(\xi_y z_\xi + \eta_y z_\eta)/J - gh(S^{2f\xi} + S^{2f\eta})/J
 \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $q^\xi = \xi_x M + \xi_y N$ 、 $q^\eta = \eta_x M + \eta_y N$ であり、 M 、 N はそれぞれ x と y 方向の流量フラックスで、 $M=uh$ 、 $N=vh$ 、 u 、 v はそれぞれ x 、 y 方向流速、 h は水深、 z は河床高、 g は重力加速度であり、 ε は渦動粘性係数で $\varepsilon = \kappa u_* h/6$ 、 κ はカルマン定数で $\kappa = 0.4$ 、 u_* は次式の摩擦速度である。

$$u_* = n\sqrt{g(M^2 + N^2)}/h^{7/6}$$

また、河床摩擦勾配に関する $S^{f\xi}$ 、 $S^{f\eta}$ ($i=1,2$)項にも Manning 則による次式を用いている。

$$S^{1f\xi} = \eta_y n^2 q^\xi \sqrt{M^2 + N^2} / Jh^{10/3},$$

$$S^{1f\eta} = -\xi_y n^2 q^\xi \sqrt{M^2 + N^2} / Jh^{10/3},$$

$$S^{2f\xi} = -\eta_x n^2 q^\eta \sqrt{M^2 + N^2} / Jh^{10/3},$$

$$S^{2f\eta} = \xi_x n^2 q^\eta \sqrt{M^2 + N^2} / Jh^{10/3},$$

ヤコビアン J と形状テンソル g_{ij} 、 f_{ij} は

$$J = \xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x, \quad g_{11} = (\xi_x^2 + \xi_y^2)/J,$$

$$g_{12} = (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)/J, \quad g_{22} = (\eta_x^2 + \eta_y^2)/J,$$

$$f_{11} = (\xi_{xx} + \xi_{yy})/J, \quad f_{22} = (\eta_{xx} + \eta_{yy})/J$$

である。なお、式中の下付き添え字の t, x, y, ξ, η はいずれもその方向の偏導関数を表す。

(2) 差分スキーム

多次元問題では、スキームが複雑になり、安定条件も厳しくなるので¹³⁾、以下のような次元分割法を用いて計算を行った。この方法は多次元方程式を近似的に1次元の方程式に分割し、それぞれに1次元差分法を適用して、それらの解の重ね合わせとして元の方程式の解を求めるものである。例えば、式(1)は式(4)と(5)のように分割される。

$$\xi \text{方向: } (h/J)_i + (q^\xi/J)_\xi = 0 \quad (4)$$

$$\eta \text{方向: } (h/J)_i + (q^\eta/J)_\eta = 0 \quad (5)$$

ここで、ある変数 F について、 ξ 、 η 方向のそれぞれに適用する1次元差分スキームを $L_\xi(\Delta t)F$ 、 $L_\eta(\Delta t)F$

のように演算子で表すと元の方程式の解は式(6)のように表される。

$$F_{i,j}^{n+1} = L_\xi(\Delta t)L_\eta(\Delta t)F^n \quad (6)$$

式(6)は $L_\eta(\Delta t)F^n$ の結果に $L_\xi(\Delta t)$ を作用させることを意味する。すなわち、 $L_\xi(\Delta t)\{L_\eta(\Delta t)F^n\}$ である。しかし、個々の演算子が2次精度を有していても、式(6)のように単純に組み合わせると、一般に1次精度に落ちるので、2次精度を保つには、例えば式(7)のようなスキーム¹⁴⁾を用いなければならない。

$$F_{i,j}^{n+1} = [L_\xi(\Delta t)L_\eta(\Delta t) + L_\eta(\Delta t)L_\xi(\Delta t)]F_{i,j}^n/2 \quad (7)$$

式(7)における各演算子の差分方向とそれらの組み合わせにはいくつかの方法が考えられる。そこで、ここでは、表-1に示した基本的な3種類の方法について計算を行い、不合理な結果を生じない方法を見出すこととした。

(3) 人工粘性

本研究で用いた Jameson による人工粘性の与え方は式(8)の通りである。

$$\begin{aligned}
 F_{i,j} = & F_{i,j} + \left[\varepsilon_{i+1/2}^\xi (F_{i+1,j} - F_{i,j}) - \varepsilon_{i-1/2}^\xi (F_{i,j} - F_{i-1,j}) \right] \\
 & + \left[\varepsilon_{i,j+1/2}^\eta (F_{i,j+1} - F_{i,j}) - \varepsilon_{i,j-1/2}^\eta (F_{i,j} - F_{i,j-1}) \right] \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{i+1/2}^\xi = \alpha \max (v_{i+1,j}^\xi, v_{i,j}^\xi)$$

$$\varepsilon_{i,j+1/2}^\eta = \alpha \max (v_{i,j+1}^\eta, v_{i,j}^\eta)$$

$$\varepsilon_{i-1/2}^\xi = \alpha \max (v_{i-1,j}^\xi, v_{i,j}^\xi)$$

$$\varepsilon_{i,j-1/2}^\eta = \alpha \max (v_{i,j-1}^\eta, v_{i,j}^\eta)$$

$$v_{i,j}^\xi = \frac{|h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}|}{|h_{i+1,j}| + |2h_{i,j}| + |h_{i-1,j}|}, v_{i,j}^\eta = \frac{|h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}|}{|h_{i,j+1}| + |2h_{i,j}| + |h_{i,j-1}|}$$

ここに、 α は発散振動の緩和係数であり、数値振動を抑えられるできるだけ小さい値が望ましいことから、打

切り誤差の偏りにくい場合についての数回の試行計算によって、 $\alpha=0.1$ と設定した。

3. モデルの設定と計算結果

(1) モデルの設定

実際の盆地の形状には種々のものがあるが、ここでは、既述のように不合理な計算結果を容易に判断できる単純なものであって、同時に、解析には厳しい条件となるような急変部を有する平面形状を与えている。すなわち、河川上流部におけるいくつかの小規模な盆地の平面形状を地形図や空中写真で検討して設定した既往の水力実験¹⁵⁾に合わせて、図-1のように、幅が1.8m、長軸と短軸の比が1.5:1の楕円形をした盆地部と幅が短軸の1/4の流入水路と1/5の流出水路を有する、3種類の単純な山間盆地のモデルを設定した。なお、流入・出水路の長さはいずれも2mであり、それらの幅を変えた理由は少しでも変化を付けるためと盆地では出口の方が狭い場合が多いためである。モデル1は全体を単一の様勾配の長方形断面としたものであり、モデル2はモデル1の上下流水路間を直線的に結んで全計算領域にわたる、図-2のような最大深さ7.5cmの円弧断面の掘り込み河道を設けたものである。モデル3は盆地によく見られる支川合流を考慮した場合であって、流入する本川流路幅は盆地部幅の1/5であり、本川の1/3の幅を有する支流が盆地の中心に向かって角度30°で流入するように設定した。

なお、路床勾配は1/160、Manningの粗度係数 n は実験の粒径1.41mmからManning・Stricker式により $n=0.0143$ を、流量は30、50及び70L/sを与えた。

上流端の境界条件としては、 ξ 方向の流量フラックスに単位幅の供給流量を、 η 方向の流量フラックスに0を与え、下流端条件としては、実験結果と比較した場合は実験における下流端水深を、一方、比較しない場合は等流状態を仮定して、 ξ 方向の流量フラックスを一つ前の格子点の流量フラックスと同一として等流水深を与え、 η 方向の流量フラックスはともに0とした。なお、右左の両側壁にはslip条件を採用した⁹⁾。

(2) 計算結果

図-3は表-1の①の組み合わせで計算した30L/sの場合の盆地モデル1における流速ベクトルの平面分布図である。他の時点でも、この図と同様、最大の平面渦は流路の中心線に対して対称となっておらず、盆地流出部では左壁向き(上方向き)の流速ベクトルが右壁向き(下方向き)のものよりも常に大きくなっている。一方、図-4に示した②の組み合わせによる流速ベクトルの平面分布にも非対称性が明らかで、図-3の場合とは逆に流

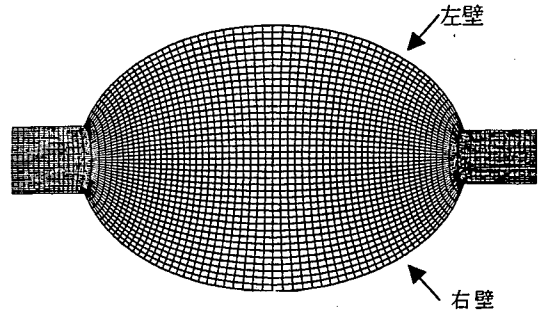


図-1 盆地モデル1の計算格子

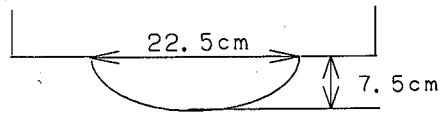


図-2 盆地モデル2の横断面図

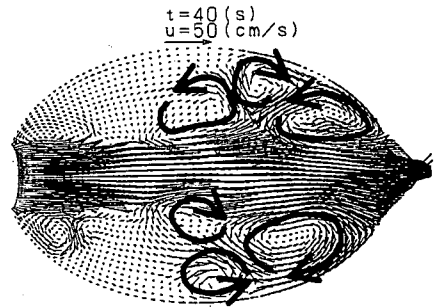


図-3 第1方法による流速ベクトル

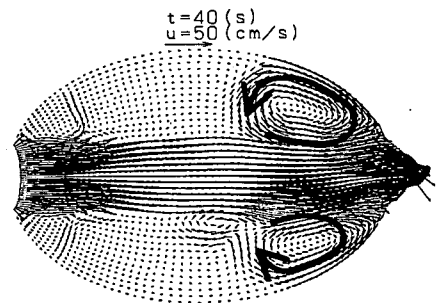


図-4 第2方法による流速ベクトル

出部では右壁向きの流速ベクトルの方が大きくなっている。なお、流入出の水路区間における流速ベクトルの状況はいずれの場合でも盆地部上下流端におけるものと大差がなかったため、図-3以下の平面図ではこれらの区間を省略して示している。

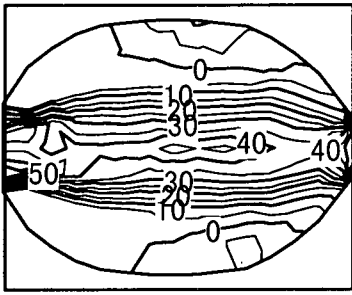


図-5 流量 30L/s の実験の等流速分布(cm/s)

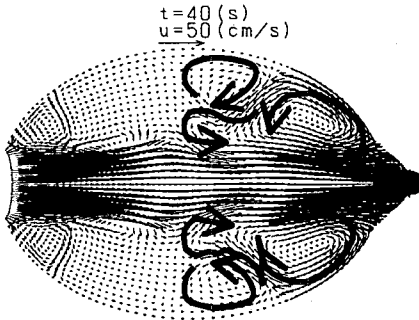


図-6 第3方法の流速ベクトル分布

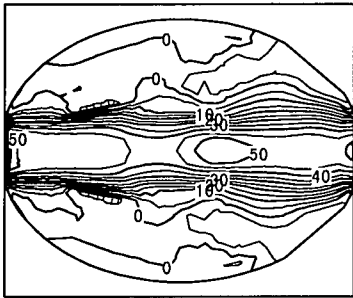


図-7 第3方法の等流速分布(cm/s)

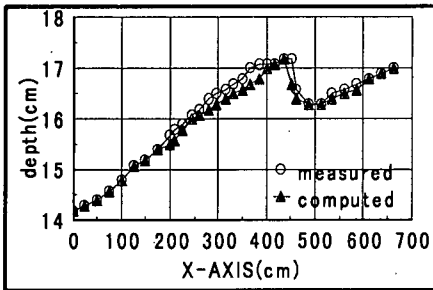


図-8 流量 30L/s の場合の流路中央線の水深

一方、図-5 は実験によって得た流下方向の時間平均流速の等流速線図である。盆地の入り口付近には装置の製作誤差による非対称領域があるが、盆地の循環領域は中心線に対して完全に近い対称形を示している。このように、①と②の組み合わせで生じた非対称性の強い流速分布は実験の結果と一致しておらず、これらの組み合わせで打切誤差が一方に累積しやすいものと思われる。

このような誤差の累積を避けるには、差分方向を組み合わせて誤差を相殺することがまず考えられる。その最も単純な③の組み合わせによって計算した結果は図-6に示すようである。盆地の中心線に沿って主流が存在し、その両側に対称な2つの大きな水平渦が形成されている。図-7の時間平均した計算流速の等値線図を図-5と比べると、計算結果と実験結果とはよく一致しており、③のような組み合わせによれば、前2者のような打ち切り誤差の累積は避けられることが判る。図-8には、この場合について、最も変化の激しかった流路中央線に沿った水深を比較している。同図でも、実験値と計算値とはよく合致しており、水深は盆地出口の直上流で最大に達した後、出口を過ぎて急激に低下して最小になり、再び上昇している。なお、図-8に最も変化の急な $X=435(\text{cm})$ と $511.8(\text{cm})$ における横断方向の最大水深差はそれぞれ 2.1mm と 5.1mm で、水深の 1.2% と 3.1% であった。これは実験で観察された横断方向にほぼ一定であった水位変化と合致していた。

以上のような合致は 50L/s と 70L/s の場合にも確認されており、③の方法によれば、妥当な計算結果の得られることが判ったので、より複雑な場への適用性に関して、2, 3の検討を加える。

4. アルゴリズムの適用性

(1) 計算格子構造の相違による適用性の検討

良い格子の条件の一つは格子の滑らかさであり¹⁶⁾、境界に直交しているのが望ましく、計算手順の単純さからいえば、 ξ 方向、 η 方向それぞれに格子点の数は変化しない方が有利である。けれども盆地モデル2のような場合、低水路境界線を同一座標値(ここでは η 値)とする方が路床高や流速などの初期値を合理的な設定できる。しかしながら、この場合には格子点数の変化を避けることはできず、計算空間は図-1の場合の単一の長方形とは異なり、左右側氾濫原と河道に対応して図-9のようになる。こうした計算空間の相違によって、同一の物理空間についての解析結果にかなりの差異が生じるようであれば、そのスキームは好ましいものではない。

盆地モデル1に図-9の格子を適用し、3.において妥当な結果を与えた③の組み合わせで計算した結果は図-10のようである。

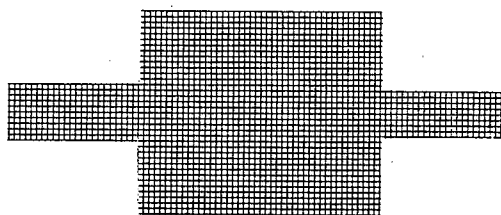


図-9 モデル2の地形に適合した格子の計算空間

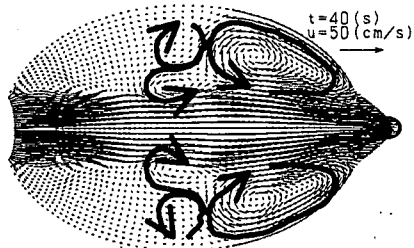


図-10 図-9の計算空間によるモデル1の流速分布

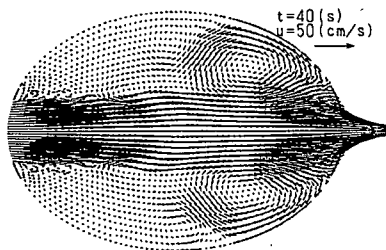


図-11 緩和係数 $\alpha=0.3$ の流速分布

図-10と図-6とでは、盆地内の主流と大きな水平渦との間に生じた非定常性の強い小規模渦の形状が違うのみで、主流と主な渦の状況はよく一致している。このように③のスキームによれば、計算格子構造にかなりの差異があっても解析はほとんど影響されず、ほぼ同一の結果を得ることができる。

(2) 人工粘性に関する検討

以上の解析では人工粘性項の係数値 α を0.1としているが、これは既述のように試算によって与えた値である。当然のことながら、値が大きすぎると解が鈍ってしまい、逆に小さすぎると不安定な数値振動が起こるので、現実には、計算結果を実験結果等と比べて判断せざるを得ない。いずれにしても、できるだけ小さくして解の発散を招かないことが望ましい条件といえる。図-11は元論文と同じ $\alpha=0.3$ の時のモデル1の流速ベクトル図である。この場合、係数が大きすぎて解は鈍くなり、図-6と違って、実験中主流域の両側に見られたの一連の小さい渦が現われていない。

一方、図-12には α 値を0.1とした図-6の場合について人工粘性 ν の値の分布を示している。流速ベク

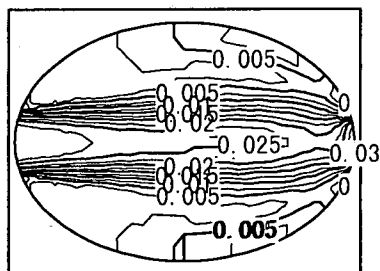


図-12 人工粘性係数の分布

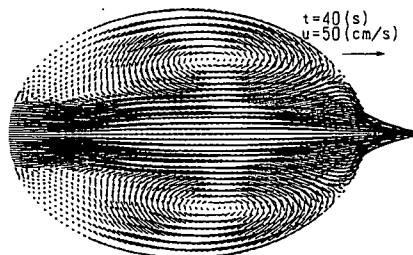


図-13 モデル2の流速ベクトル

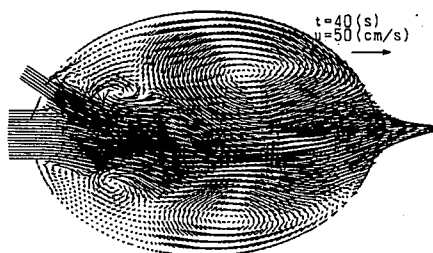


図-14 モデル3の流速ベクトル

トルの僅かな収束・発散が水面変動に繋がる流速の大きい領域で ν の値が大きく、盆地の出口付近で最大値を示し、次いで流入部が大きくなっている。このような領域では、仮定した $\varepsilon = \kappa u_* h / 6$ では十分に運動量混合が表されていない可能性もあって、それを人工粘性が補っている面がある。

(3) 盆地モデル2及び3への適用

これまでの結果から、表-1の③の組み合わせの適用性をさらに調べるために、条件のより複雑な盆地モデル2及び3における洪水流について平面形状の適合性を高めた格子を作成して解析した。

図-13は流量30L/sでのモデル2の流速ベクトル図である。低水路の存在で主流は低水路に強く収束し、小規模の非定常渦は明瞭でなく、大きな2つの水平循環が氾濫原上に形成されている。

図-14は本川流量を20L/s、支川流量を10L/sとしたモデル3における流速ベクトルを示したものである。支川の合流に伴って、2個の非定常な渦が主流の両側に非対称に発生している。支川流入部に沿って一連の小さ

な渦が現れていて、全ての渦は発散することなく、規模のみが周期的に変化していた。

以上の結果から、比較的複雑な場における流れの解析に対しても③の方法は適用可能であることが確認される。

5. あとがき

本研究では、一般座標系で記述した2次元浅水流方程式のMacCormackスキームによる解法について3種の差分方向の組み合わせを検討し、実験結果と比較して、妥当な結果を与える方法を見出した。すなわち、空間分解した1次元演算子として単純に同じ方向に差分化したものを用いると、非対称に打ち切り誤差が累積するが、それを相殺するような組み合わせを用いれば、誤差の累積は押さえられ、計算空間の変化への対応や人工粘性の設定に極めて良好な結果を得ることができることを示した。これは対称ではあるが変化の激しい場を設定して初めて見出されたものである。さらに、より複雑な盆地モデルの洪水流も妥当に解析できることを示して、見出した方法の高い適用性を検証した。

今後、この結果の理論的背景を解明することも重要であるが、この方法を各種の洪水流解析や沖積地形の形成過程に適用して河床変動や地形変化の予測に役立てたいと考えている。

参考文献

- 1) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法，東京大学出版会，p. 121, 1994.
- 2) 岡部健士，天羽誠二，石垣昌邦：上流・射流の遷移を伴う不等流の計算法，水工学論文集，第36巻，pp.337-342, 1992.
- 3) 河村三郎，中谷 剛：TVD—MacCormack法による常・

射流混在流の数値計算法，水工学論文集，第37巻，pp.763-768, 1993.

- 4) 岡部健士，山下秀基，天野裕仁：常・射流が混在する2次元浅水流の数値計算法，水工学論文集，第39巻，pp.403-410, 1995.
- 5) 日下部重幸，道上正規，藤田正治，檜谷治 宮本邦明：マッコーマック法を用いた砂防ダム上流の堆砂計算法に関する研究，水工学論文集，第40巻，pp.977-982, 1996.
- 6) 秋山壽一郎，浦勝，山口学，重枝未玲：MacCormack法を用いた平面2次元数値モデルの浅水流への適用性について，水工学論文集，第42巻，pp.679-684, 1998.
- 7) 清水康行，畑 敏夫，板倉忠興：一般座標系を用いた2次元流れと河床変動の計算，北海道開発土木研究所，pp.191-192, 1992.
- 8) Bhallamudi, S.M. and Chaudhry, M.H.: Computation of flows in open-channel transitions, Journal of Hydraulic Research, Vol.30, No.1, pp.77-93,1992.
- 9) Rahman, M. and Chaudhry, M.H.: Computation of flow in open-channel transitions, Journal of Hydraulic Research, Vol.35, No.2, pp.243-256,1997.
- 10) Fletcher, C.A.J.: Computational Techniques for Fluid Dynamics Vol. II, Springer-Verlag, pp. 410-413, 1991.
- 11) Garcia, R. and Kahawita, R.A.: Numerical solution of the St.Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme, International Journal for Numerical Method in Fluids, Vol. 6, pp. 259-274, 1986.
- 12) 前出10), pp.47-80.
- 13) 前出1), p. 177, pp. 140-142.
- 14) 日本機械学会：流れの数値シミュレーション，コロナ社，pp.107-113, 1991.
- 15) 藤田裕一郎，呂 福祿，細江良太：洪水による山間盆地の地形変化に関する基礎実験，土木学会第53回年次学術講演会，pp.438-439, 1998.
- 16) 前出1), p. 177.

(1998.10.12 受付)

STUDY ON APPLICABILITY OF MacCormack FINITE DIFFERENCE SCHEME IN GENERALIZED COORDINATE SYSTEM FOR OPEN CHANNEL FLOWS

Fu-lu LU and Yuichiro FUJITA

This paper discusses the applicability of a MacCormack finite difference scheme in a generalized coordinate system to flood flows in simplified basin models located in mountainous areas. The calculated results show that among three kinds of combinations of 1-D operators in the MacCormack finite difference scheme employing direction splitting method, the scheme with alternating difference directions is the best to eliminate truncation errors resulting from the fixed direction difference scheme. This scheme can produce almost similar results for different grid systems and can use small artificial viscosity to simulate experimental results stably. The scheme proves to predict well flood flow characteristics in basins with an incised channel or a tributary.