

# 任意水深水域に拡張された Green 関数法の 素解および境界条件

藤井信太郎<sup>1</sup>・木村孝次<sup>2</sup>・京藤敏達<sup>3</sup>・西村仁嗣<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 Ph.D. 東洋国際石油(株) (〒467-0832 名古屋市瑞穂区神前町2-13-4)

<sup>2</sup>学生員 筑波大学大学院 理工学研究科 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1)

<sup>3</sup>正会員 工博 筑波大学助教授 機能工学系 (同上)

<sup>4</sup>正会員 工博 筑波大学教授 機能工学系 (同上)

本論文では、波浪場解析手法の一つである Green 関数法を任意水深水域に拡張することを目的として、緩勾配方程式に含まれる仮定のみを用いた体系的な Green 関数構成法、および水深変化に伴う波浪変形を考慮した波源強度算定法を提案した。波源強度はその点での波の振幅勾配のみでは決定されず、境界上すべての強度が相互に影響し合う。この手法を用いたモデル港湾に対する波浪場解析の結果、波源間相互作用の効果が無視できないこと、および解析結果が実際の波浪場を適切に再現することが示された。また Green 関数を計算する際に問題となる計算領域外の仮想地形の影響についても検討した。その結果、実港湾のような緩やかな水深変化を持つ地形に対してこの影響が極めて小さいことを示した。

**Key Words :** *the Green function, mild-slope equation, wave refraction, interaction between wave sources*

## 1. はじめに

海岸工学分野の技術開発・計画・設計に従事する者にとって、波の場の解析はもっとも基本的な課題である。近年、経済の発展に伴い、受動的な防災の観点以外に、沿岸域の利用開発というより積極的な観点が重視されるようになったが、これらすべてにおいて波浪場の解析が基本となる。波の平面変形を解析する上で、計算精度および境界条件の取り扱いの簡便さから、Green 関数法は優れた方法であることが示されている。

Barailler<sup>1)</sup>らは計算対象領域の平面形状を凸多角形に分割し、それぞれの部分領域毎に解を求める解析手法を提案している。また西村ら<sup>2)</sup>は分布波源強度の算定法について、半無限境界より発する波を基本に波浪場計算の詳細な議論を行った。その結果、従来の方法に比べて、防波堤開口部から生じる回折波の解析について顕著な改良を加えることに成功している。

近年、郭・西村<sup>3)</sup>は、極座標表記した緩勾配方程式の放物型近似式を Radder<sup>4)</sup>の splitting matrix 法を用いて導出し、その数値解を緩勾配方程式の Green 関数とする拡張 Green 関数法を提案している。この解析法は、一様勾配を持つ港湾モデルの波動場解析に

適用されている。郭・西村の Green 関数は、数値的に取り扱いの困難な特異点近傍に一定水深を仮想して Hankel 関数を用い、数値解と接合している。この場合、波源強度は入射波の境界における振幅勾配のみによって決定される。このように境界近傍に一樣水深を仮定することは、最終的に得られる波浪場の数値解が物理現象を正確に再現できないことが考えられる。著者ら<sup>5)</sup>は郭・西村の方法に従い、緩勾配方程式の特異点周りの級数解および放物型近似式を新たに導出し、この両者を接合することによって Green 関数を構成する手法を提案した。また任意水深水域における波浪変形の効果を考慮した新たな波源強度算定法を確立する必要があることを解析的に示した。しかし、Green 関数を算定する際に必要な仮想地形の影響および境界上の積分方程式の解法について十分な議論を行っていない。

本論文では、緩勾配条件に基づいたオーダ評価により導出過程を単純化した新たな Green 関数構成法を示し、その妥当性を一様・非一様水深場において既に得られている解析解と比較することで検討する。また、Green 関数の基本的性質である相反性について簡単なモデル地形を対象とした数値解析を行って検討する。次に、Green 関数法による波浪場解析において基礎となる閉境界、開境界の分布波源強度算

定式を導き、その算定の際に同一境界上に存在する波源の相互作用を考慮する必要があることを示す。ところで、波浪場解析ではGreen関数値を求める際、計算領域外の仮想地形を仮想して計算を行う必要がある。この仮想地形の波浪場解析への影響を調べるため仮想地形を変化させて波浪場解析を行い、得られる解を比較する。その結果、緩勾配条件のもとではこの影響が無視できることを示す。最後に、一様勾配を持つモデル港湾についてこの波浪場解析手法を適用し、実験結果と比較することでその妥当性を検討する。

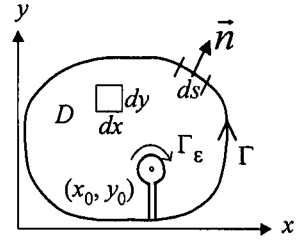


図-1 閉領域と座標系。

## 2. 緩勾配方程式のGreen関数

地形変化を有する波浪場の基礎方程式である緩勾配方程式は、自由表面と水底面を含む流体塊に成立するエネルギー保存則に、微小振幅波の仮定と緩勾配条件を付加することにより導かれる。複素振幅を  $f$ 、水深を  $h$ 、波速および群速度をそれぞれ  $C$ 、 $C_g$  とすると、緩勾配方程式は次の様に書かれる。

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla f) + k^2 CC_g f = 0, \quad \nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y),$$

$$\text{緩勾配条件: } |\nabla h|^2 \approx 0, \quad \nabla^2 h \approx 0. \quad (1)$$

上式は、関数変換  $f = \phi / \sqrt{CC_g}$  により以下の Helmholtz 型の方程式に変換される (Radder<sup>4)</sup>).

$$L[\phi] = 0, \quad L \equiv \nabla \cdot \nabla + k_c^2,$$

$$k_c^2 \approx k^2, \quad k_c^2 \approx k^2 - \nabla^2 \sqrt{CC_g} / \sqrt{CC_g} \quad (2)$$

本論文では緩勾配条件から  $k_c^2 \approx k^2$  とするが、以下の方法はこの近似によらず適用される。上式の一様水深場における Helmholtz 方程式との相違点は、波数  $k$  が水深  $h$  に依存し、空間変数  $x, y$  の緩やかな関数となっている点である。式(2)に滑らかな関数  $\phi^*$  を掛け Green の定理を用いると、

$$\iint_D (\phi^* L[\phi] - \phi L^*[\phi^*]) dx dy = \int_\Gamma \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right) ds \quad (3)$$

ここで、 $\partial/\partial n$  は領域  $D$  の境界  $\Gamma$  の外向き法線方向微分を表す (図-1 参照)。また、Helmholtz 方程式が自己共役であることから  $L^* = L$  となる。ここで、 $\phi^*$  を特異点  $(x_0, y_0)$  を持つ Green 関数とすると、その定義式、

$$L^*[\phi^*] = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \quad (x_0, y_0) \in D \quad (4)$$

より、式(3)は次のようになる。

$$\phi(x_0, y_0) = - \int_\Gamma \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right) ds, \quad (x_0, y_0) \in D \quad (5)$$

これより、式(2)の一般解は、その境界値および境界上の法線方向微係数のみから構成されることがわかる。

Green関数法による波浪場解析の問題は、変数係数偏微分方程式(4)の特異点を持つ解を求めることに帰着する。本研究では、まず特異点の近傍における式(2)の級数解と、遠方における、式(2)の放物型近似式を導出する。この級数解と放物型近似式の数値解を接合することにより素解を構成する。

### (1) 特異点近傍の級数解

特異点を原点とする、Helmholtz 型方程式の極座標表記は、次のようになる。

$$L[\phi^*] = \delta(r), \quad L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \quad (6)$$

上式の変数係数  $k$  は、 $r$  について Taylor 展開して用いる。

$$k = k|_{r=0} + \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right)_{r=0} \cos \theta + \left( \frac{\partial k}{\partial y} \right)_{r=0} \sin \theta r$$

$$\equiv k_0 + k_r r \quad (7)$$

ここで、 $k$  についての2階以上の微分項は緩勾配条件より無視した。変数係数をこのように取り扱うことで、著者ら<sup>5)</sup>の方法に比べて導出過程の単純化がなされる。また特異点周りの級数解を無次元変数  $k_r r$  の関数として次の様に仮定する。

$$\phi^* = \phi_{ser} \equiv \log k_0 r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n (k_0 r)^n + \sum_{n=0}^{\infty} q_n (k_0 r)^n \quad (8)$$

ここで、 $\phi_{ser}$  は級数解を意味する。また Green 関数

の特異性が  $\log k_0 r$  で表現されている。この特異性を、 $(1/r)^n$  等で表現することを考えた場合、Green の定理(3)の右辺経路積分において、経路上に特異点が存在するときは、その積分値は無限大となる。これより  $(1/r)^n$  の特異性を持つ解は、Green 関数として適さないことがわかる。また級数解の  $\theta$  依存性は変数係数  $p_n, q_n$  で考慮する。式(8)を方程式(6)に代入し  $\log k_0 r$  の項および  $k_0 r$  の冪でまとめると、 $p_n, q_n$  に対する方程式を得る。

$$\frac{d^2 p_{n+2}}{d\theta^2} + (n+2)^2 p_{n+2} + p_n + 2 \frac{k_r}{k_0^2} p_{n-1} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d^2 q_{n+2}}{d\theta^2} + (n+2)^2 q_{n+2} + q_n + 2 \frac{k_r}{k_0^2} q_{n-1} = -2(n+2)p_{n+2}$$

式(9)を  $n < 0$  のとき  $p_n, q_n = 0$  として、 $k_0 r$  の 3 次の冪まで解く。ここで式(9)の第 2 式において  $p_n$  が外力項として現れていることに注意する。これより、第 2 式から得られる  $q_n$  が共振を生じない解、すなわち一価関数となる様に  $p_n$  を決定する。最終的に  $p_n, q_n$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} p_0 &= \text{const.}, p_1 = 0, p_2 = -\frac{1}{4} p_0, p_3 = -\frac{p_0}{4k_0^2} k_r, \\ q_0 &= \text{const.}, q_1 = q_{1c} \cos \theta + q_{1s} \sin \theta, \\ q_2 &= \frac{1}{4} (p_0 - q_0) + q_{2c} \cos 2\theta + q_{2s} \sin 2\theta, \\ q_3 &= \frac{1}{8} \left( \frac{3p_0}{2k_0^2} - \frac{2q_0}{k_0^2} \right) k_r - (q_{1c} \cos \theta + q_{1s} \sin \theta) \\ &\quad + q_{3c} \cos 3\theta + q_{3s} \sin 3\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

未定定数  $p_n$  は特異点の強度、 $q_n$  の未定係数は一方方向波との接合条件から決定される。

## (2) 緩勾配方程式の放物型近似式

Helmholtz 型方程式(6)の放物型近似式として

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} = A \phi_s + B \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} + C \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \theta^2}, \quad \phi^* = \phi_s(r, \theta) \quad (11)$$

を仮定する。上式を用いて式(6)に含まれる  $r$  の微係数をすべて  $\phi_s$  および  $\phi_s$  の  $\theta$  微分項に変換する。得られる式が任意の  $\phi_s, \partial \phi_s / \partial \theta$  および  $\partial^2 \phi_s / \partial \theta^2$  に対して成立する条件から、 $A, B, C$  についての非線形連立微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} A^2 + k^2 + \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} + B \frac{\partial A}{\partial \theta} + C \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} &= 0, \\ 2AB + BC + \frac{B}{r} + B \frac{\partial B}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial A}{\partial \theta} C + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} C &= 0, \\ 2AC + B^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{C}{r} + \frac{\partial C}{\partial r} + 2 \frac{\partial B}{\partial \theta} C + B \frac{\partial C}{\partial \theta} + C \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ここで係数  $A, B, C$  は距離  $r$  および緩やかな空間変動スケールの双方に依存する。ここでは  $A, B, C$  を  $1/r$  の冪で展開し、

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \frac{1}{r} A_1 + \frac{1}{r^2} A_2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\ B &= B_0 + \frac{1}{r} B_1 + \frac{1}{r^2} B_2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\ C &= C_0 + \frac{1}{r} C_1 + \frac{1}{r^2} C_2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \end{aligned} \quad (13)$$

と置くことで距離  $r$  の依存性を表現する。また  $A_m, B_m, C_m, m=0, 1, 2$ , が空間変数に緩やかに依存すると仮定して、次の様に展開する。

$$\begin{aligned} A_0 &= a_{00} + \varepsilon a_{01}, \quad A_1 = a_{10} + \varepsilon a_{11}, \quad A_2 = a_{20} + \varepsilon a_{21}, \\ B_0 &= b_{00} + \varepsilon b_{01}, \quad B_1 = b_{10} + \varepsilon b_{11}, \quad B_2 = b_{20} + \varepsilon b_{21}, \\ C_0 &= c_{00} + \varepsilon c_{01}, \quad C_1 = c_{10} + \varepsilon c_{11}, \quad C_2 = c_{20} + \varepsilon c_{21}. \end{aligned} \quad (14)$$

式(13)を式(12)に代入し、 $1/r$  の冪の次数ごとにまとめ、これが任意の  $r$  で成立する条件より、 $A_m, B_m, C_m$  についての微分方程式が得られる。これらを式(14)を用いて展開して解くことにより、最終的に一方向波の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_s}{\partial r} &= \left\{ ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{8kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right\} \phi_s \\ &\quad - \frac{i}{2k^2 r^2} \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} + \frac{1}{2kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (15)$$

上式では  $r$  に関して  $1/r^2$  の項まで、緩やかに変化する空間変数に関しては緩勾配条件より 1 階微分までが考慮されている。本手法では郭・西村の方法と同様に、式(11)より点源からの湧き出し波成分と吸い込み波成分を分離できるものと仮定している。また湧き出し波の進行に伴って生じる底面からの散乱波は、非常に小さいとして無視している。しかし、郭・西村の式と比較して式(13)の右辺第 1, 3 項における  $k$  の高次累乗成分と、第 2 項における  $k$  の  $\theta$  依存性を考慮した項が付加される。とくに前者は、次節で解の接合を行う場合および長波を考慮する場合に、その効果が有意になると考えられる。

## (3) 級数解と一方向波の方程式の接合

ここでは、特異点近傍で得られた級数解(8)が放物型方程式(15)を満たすように未定係数を決定する。解の接合半径  $r = r_m$  は内部解(8)と外部解(15)の収束領域内であれば任意に選ぶことが可能であるが、ここでは接合点において級数解(8)が簡易な表式を取り、しかも急激に変化しないという条件から、 $k_0 r_m = 1$  を満たすように選ぶ。級数解を一方向波の式に代入し、これが任意の  $\theta$  に対して成立する条件から、未定係数を求める方程式が得られる。ここで

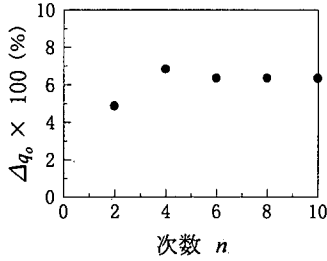


図-2 初項  $q_0$  の相対誤差

$p_0$  は、特異点で単位強度を持つ条件から  $p_0 = 1/2\pi$  となる。最終的に未定係数は次のように定まる。

$$q_0 = \left(-\frac{67}{745} - \frac{1224}{745}i\right)p_0 \quad (16)$$

$$q_{1c} = 2\lambda p_0 \frac{\partial k / \partial x}{k^2} \Big|_{r=0}, \quad q_{1s} = 2\lambda p_0 \frac{\partial k / \partial y}{k^2} \Big|_{r=0}, \quad (17)$$

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad \lambda \equiv \frac{4023047}{17430020} - i \frac{886024}{4357505},$$

$$q_{2c} = q_{2s} = q_{3c} = q_{3s} = 0 \quad (18)$$

従って、級数解は特異点の強度  $p_0$  に比例する相似解であり、 $\theta$  については 1 次のモードのみを持つことがわかる。これは解を接合する際、一方向波の方程式に含まれる  $k$  の  $\theta$  依存性を、緩勾配条件より 1 次までしか考慮しなかったためである。式(17)中の係数  $\lambda$  の値は前報<sup>5)</sup>と異なるが、これは一方向波の方程式が前報と異なるためである。本報では式(17)中右辺第 3 項に精度を上げた表式を用いた。

一方向波の方程式の解は、接合点  $r = r_m$  での級数解を境界条件として、点源に対して外向きに marching scheme によって数値的に求める。接合点での境界条件は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_{ser} \Big|_{r=r_m} &= \frac{68 - 459i}{745\pi} + \frac{1337543 + 119626i}{4357505\pi} \\ &\times \left( \frac{\partial k}{\partial x} \Big|_{r=0} \cos \theta + \frac{\partial k}{\partial y} \Big|_{r=0} \sin \theta \right) \frac{1}{(k|_{r=0})^2} \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる。とくに式(17)に対して近似、

$$\left( \frac{\partial k}{\partial x} \Big|_{r=0} \cos \theta + \frac{\partial k}{\partial y} \Big|_{r=0} \sin \theta \right) r_m \approx k|_{r=r_m} - k|_{r=0} \quad (20)$$

を用いれば、式(19)は簡便な表示

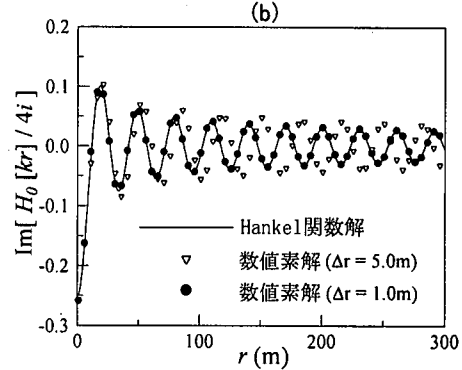
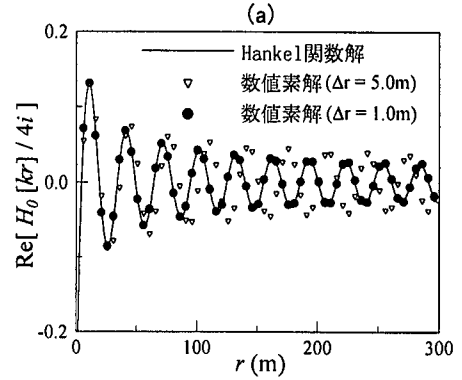


図-3 Hankel 関数との比較  
(a) 実数部, (b) 虚数部

$$\begin{aligned} \phi_{ser} \Big|_{r=r_m} &= -\frac{939811 + 2804317i}{4357505\pi} \\ &+ \frac{1337543 + 119626i}{4357505\pi} \frac{k|_{r=r_m}}{k|_{r=0}} \end{aligned} \quad (21)$$

で置き換えることができる。このように、緩勾配方程式の特異性を 1 つ持つ解（以後、これを素解と呼ぶ）は、接合半径  $r_m$  の円内では級数解を、外側では一方向波の方程式の数値素解を用いることにより構成される。

本研究で提案する Green 関数法の構成法の特徴は、その導出過程において緩勾配方程式の変数係数の空間変数に対する依存性と、その方程式に含まれている仮定である緩勾配条件のみを考慮している点である。ここでは、一様水深場における素解である Hankel 関数を利用するといった付加的な知識を一切用いていない。このため、他の工学分野でも重要となるような変数係数偏微分方程式の Green 関数の導出にも、本方法は応用可能であると考えられる。

#### (4) 素解の精度

前節までに述べた素解の構成法の妥当性を検証するため、一様および非一様水深地形について既に得られている解析解との比較を試みる。

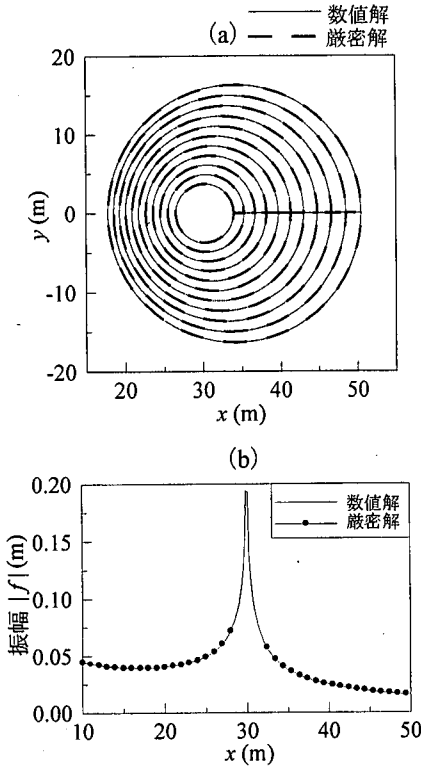


図-4 点源波の等位相面および振幅  
(a) 等位相面, (b) 振幅

#### a) 一様水深場における点源波

Helmholtz 方程式を基礎方程式とする一様水深場の波浪場解析では, Hankel 関数が素解となる. ここではまず, 特異点周りの級数解を  $n=2\sim 10$  次まで変化させ, 接合により決定される未定係数  $q_0$  と, Hankel 関数の級数展開によって得られる  $q_0$  の真値との比較を行った (図-2). その結果  $n=2$  次まで考慮した場合, 相対誤差  $\Delta q_0$  は 4.8% で最小となった. それ以上次数を上げた場合でも誤差は 6.3% 程度で一定となり, 精度の向上は見られなかった. これは放物型方程式が含む誤差のためである. また初項  $q_0$  の誤差が比較的大きいものとなっているが, これは数値素解が特異点近傍で対数的特異性を持つためである. 点源からの距離  $r$  が大きくなるにつれてその依存性は小さくなり, それにつれて数値素解に含まれる誤差も次第に小さくなっていく.

つぎに, 水深 5.0m, 周期 10.0s の素解を,  $r=0\sim 300.0$ m まで計算し, Hankel 関数と比較した. 図-3 (a), (b) は, 両者の実数部と虚数部の値を, それぞれプロットしたものである. その結果, 波長の  $1/30$  の差分間隔となる  $\Delta r=1.0$ m で計算した場合は, Hankel 関数を, 非常に精度よく近似することがわかった.

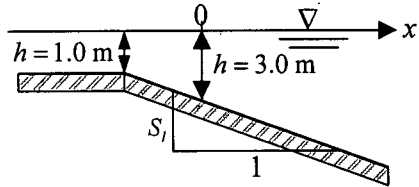


図-5 計算対象領域

#### b) 平行等深線斜面上における点源波

平行等深線斜面上の点源から発する波について, 波向き線法を用いた等位相面の解析解が郭<sup>6)</sup>によって求められている. この波向き線法の適用範囲は,  $\nabla h/kh \ll O(1)$  となる場合である (Mei<sup>7)</sup>). ここでは, 次のような地形を考える.

$$h = \frac{C}{2\omega} \log \frac{g + \omega C}{g - \omega C}, \quad C = 0.1x \quad (22)$$

上式で表される  $h$  は,  $x$  の単調増加関数であり,  $x=0$  で  $g = \omega C$  を満たす  $x$  の値で無限大となる. 点源  $x=30.0$ m より, 周期  $T=2\pi/\omega=4.0$ s の点源波が生じる場合についてスネルの法則およびエネルギー保存則から求めた解析解と比較した. 図-4は, 素解より得られる等位相面および振幅を解析解と比較したものである. 素解は解析解と非常によく一致していることがわかる. このことから, 一方向波の方程式 (15) は  $k_0 r \geq 1$  では極めて良い近似になっていると考えられる.

#### (5) Green関数の相反性

半無限領域内に 2 点  $P_1, P_2$  を考え, これらを特異点とする Green 関数をそれぞれ  $G(Q; P_1), G(Q; P_2)$  とする. 一様水深場の場合, Green 関数つまり Hankel 関数は 2 点間の距離によって値が決定されるので, 一般に  $G(P_2; P_1) = G(P_1; P_2)$  となる. これは Green 関数の相反性と呼ばれている. 一様水深場の波浪場解析では, 素解の計算において相反性を用いることにより, プログラム全体の計算量の低減と使用メモリー量の節約が可能となる. しかし任意水深場では, 波の屈折, 回折, 浅水変形により一般に Green 関数値は 2 点間の距離のみに依存せず, 相反性が成立しないことが考えられる. 従って計算における時間的な負荷の増加という問題が生じる. 本節では, 図-5 のように一様な底面勾配を持つ半無限領域を対象とした数値解析を行い, その結果から任意水深場の相反性を検討する. ここでは原点に  $P_1$  を固定し,  $P_1, P_2$  間の距離を  $\Delta P_1 P_2$ , 2 点を結ぶ線分と  $x$  軸とのなす角を  $\theta$  とし, この 2 つのパラメータを

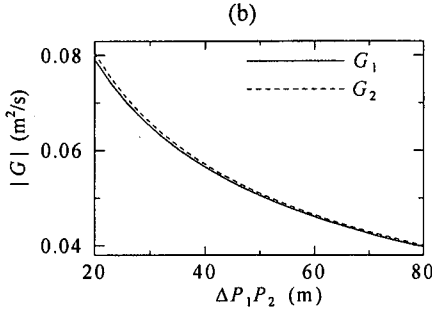
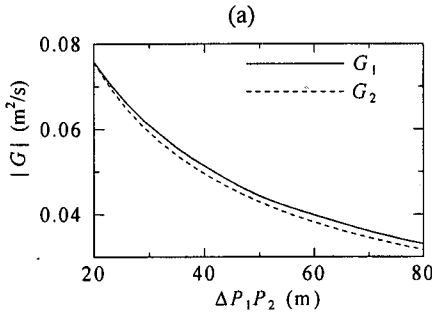


図-6 Green 関数値の変化

(a)  $S_1 = 1/3$ ,  $\theta = 65^\circ$ , (b)  $S_1 = 1/10$ ,  $\theta = 0^\circ$

変化させながら  $G_1 = G(P_1; P_1)$ ,  $G_2 = G(P_1; P_2)$  を計算し、両者を比較する。図-6(a), (b)は、底面勾配を  $S_1 = 1/3, 1/10$  とした場合の Green 関数の絶対値  $|G|$  を示したものである。この図は  $\theta$  を変化させたときに  $|G|$  の差異が最大となったケースを示している。 $S_1 = 1/3$  の場合、 $|G|$  の差異は最大 3.4% であった。底面勾配が緩やかになるにつれてこの差異は小さくなり、 $S_1 = 1/10$  の場合最大でも約 1% 程度であった。実際の波浪場解析においては、この勾配よりも更に緩やかな勾配を持つ地形を対象とする場合が主であり、実用上は Green 関数の相反性が成立しているとして計算を行うことが可能であると考えられる。

### 3. 半無限平面における波動解

#### (1) 直線境界に到達する波

本研究では任意水深場の半無限領域の Green 関数として、点源  $P$  からの湧き出し波を表現する数値素解  $\phi_s(Q; P)$  を用いる。

$$G(Q; P) = \phi_s(Q; P) \quad (23)$$

$x$  軸に沿う直線境界  $C_0$  と無限遠境界  $C_1$  に取り囲まれている半無限領域  $D$  を考える(図-7)。この領域

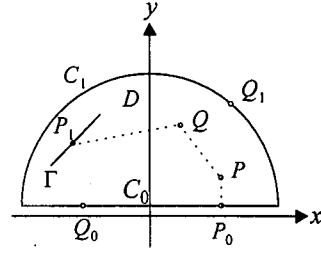


図-7 半無限平面

内の曲線  $\Gamma$  上に、強度  $\mu(P_1)$  となる分布波源が存在し、

$$f_1(Q) = \int_r \mu(P_1) \phi_s(Q; P_1) ds \quad (24)$$

となる波の場  $f_1$  が生じている状況を考える。式(3)について  $\phi = G(Q; P)$ ,  $\phi^* = f_1(Q)$  とすると、

$$\begin{aligned} f_1(P) &= \int_r \mu(P_1) G(P_1; P) \\ &+ \int_{C_0} \left\{ f_1(Q_0) \frac{\partial G(Q_0; P)}{\partial n} - \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial n} G(Q_0; P) \right\} ds \quad (25) \\ &+ \int_{C_1} \left\{ f_1(Q_1) \frac{\partial G(Q_1; P)}{\partial n} - \frac{\partial f_1(Q_1)}{\partial n} G(Q_1; P) \right\} ds \end{aligned}$$

となる。ここでは、無限遠境界で一様水深を想定すると、Sommerfeld の放射条件より式(25)右辺第 3 項は 0 となる。さらに  $P \rightarrow P_0$  とすると、式(25)は相反定理  $G(P_1; P) = G(P; P_1)$  を用いて次の様になる。

$$\begin{aligned} f_1(P_0) &= -2 \int_{C_0-C_1} \left\{ f_1(Q_0) \frac{\partial G(Q_0; P_0)}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial n} G(Q_0; P_0) \right\} ds \quad (26) \end{aligned}$$

ここで  $C_0$  は積分経路から特異点を除外するための半円経路である。これより領域  $D$  内の分布波源より発する波  $f_1$  の、壁面境界での振幅と勾配の関係が得られる。

#### (2) 直線境界から発する波

直線境界  $C_0$  から発して領域  $D$  に伝播する波  $f_2$  を考える。式(3)について  $\phi = G(Q; P)$ ,  $\phi^* = f_2(Q)$  を考える。前節と同様に無限遠で一様水深を想定すると、Sommerfeld の放射条件より  $C_1$  の積分は 0 となり、

$$f_2(P) = \int_{C_0} \left\{ f_2(Q_0) \frac{\partial G(Q_0; P)}{\partial n} - \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial n} G(Q_0; P) \right\} ds \quad (27)$$

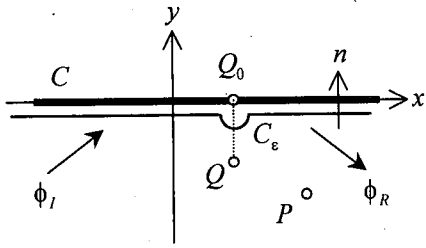


図-8 閉境界

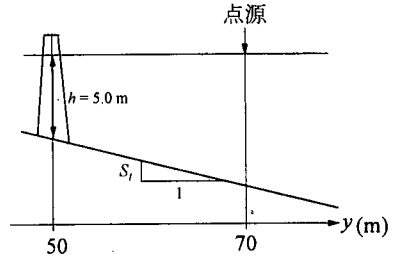


図-9 地形図

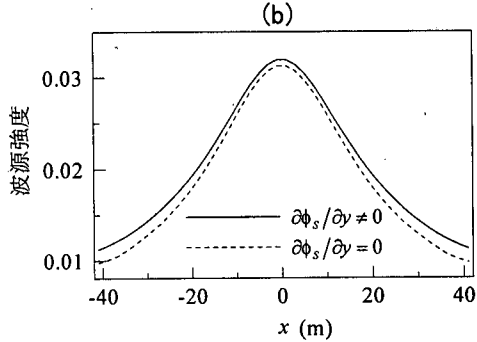
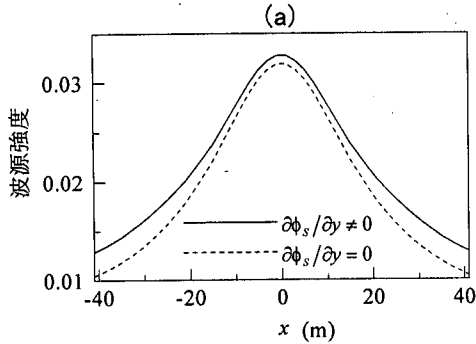


図-10 相互作用項の波源強度への寄与  
(a)  $S_1 = 1/10$ , (b)  $S_1 = 1/15$

が得られる。

式(5)と異なる表式で、壁面境界  $C_0$  上に分布する波源強度  $\mu(Q_0)$  を用いて解を表現するものに密度法がある。これより  $f_2$  は、

$$f_2(P) = \int_{C_0} \mu(Q_0) \phi_s(P; Q_0) ds \quad (28)$$

となる。ここで  $f_2$  の法線方向微分を考え、 $P$  を境界  $C_0$  に近づけると、波源強度と  $f_2$  の勾配の関係式、

$$\begin{aligned} \mu(Q_0) &= -2 \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial n} + 2 \int_{C_0-C_0} \mu(Q'_0) \frac{\partial \phi_s(Q_0; Q'_0)}{\partial n} ds \\ &\cong -2 \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial n} - 4 \int_{C_0-C_0} \frac{\partial f_2(Q'_0)}{\partial n} \frac{\partial \phi_s(Q_0; Q'_0)}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (29)$$

が得られる。ここで上式右辺第2項が第1項に比べて小さいとして近似を行った。上式は一様水深場の場合と比べて右辺第2項が付加されている。この項は、境界より発した波が屈折により同一境界に再入射する効果を表現している。これは波源強度が、その点での波の振幅勾配のみでは決定されず、同一境界上の他の波源強度すべてが相互に影響し合うことを示している。

#### 4. 境界条件

##### (1) 閉境界

$x$  軸に平行な直線状の壁境界  $C$  が存在し、これに波が入射する状況を考える(図-8)。入射波の場を  $\phi_I$ 、壁面による反射波の場  $\phi_R$  とすると、これが重畳して形成する重複波の場は  $\phi_I + \phi_R$  となる。このときの境界条件は一様な反射率  $\beta$  を考慮すれば、式(29)と同様にして、

$$\beta \frac{\partial \phi_I}{\partial y}(x_0, 0) + \frac{\partial \phi_R}{\partial y}(x_0, 0) = 0 \quad \text{on } C \quad (30)$$

となる。3-(2)節の議論と同様に、 $x$  軸上に反射波の波源分布  $\mu_R(x)$  を想定すれば、

$$\phi_R(x, y) = \int_C \mu_R(x_0) \phi_s(x, y; x_0, y_0) ds \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mu_R(x) &= -2\beta \frac{\partial \phi_I(x, 0)}{\partial y} \\ &\quad + 4\beta \int_{C-C_0} \frac{\partial \phi_I(x_0, 0)}{\partial y} \frac{\partial \phi_s(x, 0; x_0, 0)}{\partial y} ds \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ここでは波源強度に及ぼす相互作用項の寄

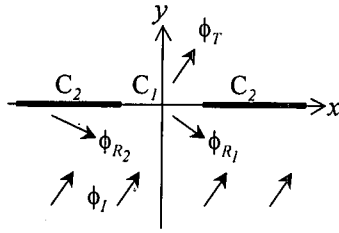


図-11 開境界

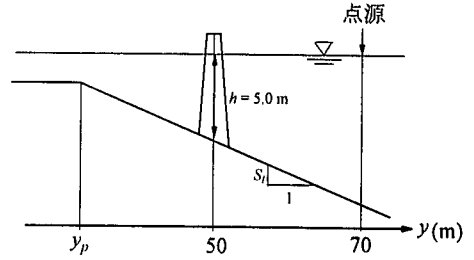


図-12 地形図

与を調べるため、一様勾配  $S_1$  の斜面上  $y=50.0\text{m}$  に完全反射を生じる壁面境界 ( $\beta=1$ ) を想定し、そこに点源波が入射することにより生じる反射波源強度を算定する(図-9)。点源は  $x=0.0\text{m}$ ,  $y=70.0\text{m}$  地点に存在する。図-10(a), (b) は、それぞれ底面勾配  $S_1=1/10, 1/15$  とした場合の波源強度分布(絶対値)を示している。図中の実線は式(32)の相互作用項を評価した場合、破線はこの項を無視した場合の波源強度であり、両者の差が相互作用項の寄与である。底面勾配が緩やかになるほど波の屈折の効果は小さくなり、相互作用項の値もそれに従って小さくなるが、波源強度に及ぼす寄与としては十分に有意なものであることがわかる。

## (2) 開境界における解の接続

図-11 に示されるような、 $x$  軸上の部分区間  $C_1$  が開境界、残余の区間  $C_2$  が閉境界となる場合を考える。このとき、境界  $C_1$  に入射する波  $\phi_I$  は一部透過して透過波の場  $\phi_T$  を形成し、一部は開境界  $C_1$  で反射する。ここでは  $C_1$  および  $C_2$  からの反射波を  $\phi_R$  とする。開境界  $C_1$  上では、両側の水域の振幅、流速およびそれらの位相が一致しなければならない。従って接続条件は次の様になる。

$$\phi_I(x_1, 0) + \phi_R(x_1, 0) = \phi_T(x_1, 0) \quad \text{on } C_1 \quad (33)$$

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial y}(x_1, 0) + \frac{\partial \phi_R}{\partial y}(x_1, 0) = \frac{\partial \phi_T}{\partial y}(x_1, 0) \quad \text{on } C_1 \quad (34)$$

また  $C_2$  上での境界条件は式(30)で与えられる。 $C_1, C_2$  上での反射波の分布強度を、それぞれ  $\mu_{R1}, \mu_{R2}$  とすると反射波  $\phi_R$  は次のように表される。

$$\phi_R(x, y) = \int_{C_1} \mu_{R1}(x_1, 0) \phi_S(x, y; x_1, 0) ds + \int_{C_2} \mu_{R2}(x_2, 0) \phi_S(x, y; x_2, 0) ds \quad (35)$$

同様に、透過波  $\phi_T$  は、 $C_1$  上の分布強度  $\mu_T$  を用いて表すと、

$$\phi_T(x, y) = \int_{C_1} \mu_T(x_1, 0) \phi_S(x, y; x_1, 0) ds \quad (36)$$

となる。式(35), (36)の境界法線方向微分を境界条件(30), (34)を用いて整理すると、最終的に  $\mu_{R1}, \mu_{R2}, \mu_T$  は、 $\partial \phi_I / \partial y, \partial \phi_T / \partial y$  を用いて次の様に表される。

$$\begin{aligned} \mu_{R1}(x_1) &= 2 \frac{\partial \phi_I}{\partial y}(x_1) + 4 \left\{ \int_{C_1-C_2} \frac{\partial \phi_I}{\partial y}(x'_1) \frac{\partial \phi_S}{\partial y}(x_1; x'_1) ds \right. \\ &\quad \left. + \beta \int_{C_1} \frac{\partial \phi_I}{\partial y}(x'_1) \frac{\partial \phi_S}{\partial y}(x_1; x'_1) ds \right\} \\ &\quad - 2 \frac{\partial \phi_T}{\partial y}(x_1) - 4 \int_{C_1-C_2} \frac{\partial \phi_T}{\partial y}(x'_1) \frac{\partial \phi_S}{\partial y}(x_1; x'_1) ds \\ &\equiv R_1(x_1) - 2 \frac{\partial \phi_T}{\partial y}(x_1) - 4 \int_{C_1-C_2} \frac{\partial \phi_T}{\partial y}(x'_1) \frac{\partial \phi_S}{\partial y}(x_1; x'_1) ds \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mu_{R2}(x_2) &= 2\beta \frac{\partial \phi_I}{\partial y}(x_2) + 4 \left\{ \int_{C_1} \frac{\partial \phi_I}{\partial y}(x'_1) \frac{\partial \phi_S}{\partial y}(x_2; x'_1) ds \right. \\ &\quad \left. + \beta \int_{C_1-C_2} \frac{\partial \phi_I}{\partial y}(x'_1) \frac{\partial \phi_S}{\partial y}(x_2; x'_1) ds \right\} \\ &\quad - 4 \int_{C_1} \frac{\partial \phi_T}{\partial y}(x_1) \frac{\partial \phi_S}{\partial y}(x_2; x_1) ds \\ &\equiv R_2(x_2) - 4 \int_{C_1} \frac{\partial \phi_T}{\partial y}(x_1) \frac{\partial \phi_S}{\partial y}(x_2; x_1) ds \end{aligned} \quad (38)$$

$$\mu_T(x_1) = 2 \frac{\partial \phi_T}{\partial y}(x_1) - 4 \int_{C_1-C_2} \frac{\partial \phi_T}{\partial y}(x'_1) \frac{\partial \phi_S}{\partial y}(x_1; x'_1) ds \quad (39)$$

ここでは、簡便のため  $y=0$  を省略した。 $R_1(x_1), R_2(x_2)$  は、式(37), (38)の右辺第1, 2項を意味し、入射波の場が既知であれば求められる。透過波の振幅勾配  $\partial \phi_T / \partial y$  は、式(37), (38)を  $C_1$  上での複素振幅の関係式(33)に代入して得られる積分方程式を解くことにより求められ、次式を満足する。

$$\begin{aligned} &\int_{C_1-C_2} \frac{\partial \phi_T}{\partial y}(x'_1) \cdot \phi_S(x_1; x'_1) ds \\ &\quad + \int_{C_1} \left( \int_{C_1} \frac{\partial \phi_T}{\partial y}(x'_1) \cdot \frac{\partial \phi'_S}{\partial y}(x_2; x'_1) ds \right) \cdot \phi_S(x_1; x_2) ds \\ &= \frac{1}{4} \left[ \phi_I(x_1) + \int_{C_1-C_2} R_1(x'_1) \cdot \phi_S(x_1; x'_1) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{C_2} R_2(x_2) \cdot \phi_S(x_1; x_2) ds \right] \end{aligned} \quad (40)$$



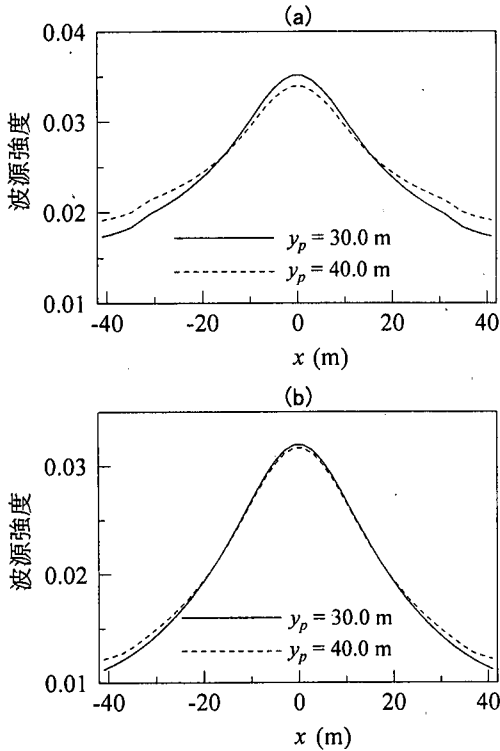


図-13 反射波波源強度分布  
(a)  $S_i = 1/5$ , (b)  $S_i = 1/15$

### 5. 計算領域外地形の影響

Green 関数法を用いた波浪場解析では、素解を数値的に求める際、計算領域外の地形を仮想して計算を行う必要がある。ここでは、図-12 のように  $y = 50.0\text{ m}$  に、完全反射を生じる半無限長壁面境界が存在し、一様な底面勾配  $S_i$  を持つモデル地形を考える。このとき境界背後では斜面を  $y = y_p$  の地点まで保ち、 $y < y_p$  の地点では一定水深となる地形とする。  $y_p = 30.0\text{ m}$  および  $y_p = 40.0\text{ m}$  の 2 ケースについて、  $x = 0.0\text{ m}$ 、  $y = 70.0\text{ m}$  の地点より発する点源波によって生じる重複波解を求め、得られる解を比較することで、計算領域外地形の影響を調べることとする。

図-13(a) は、  $S_i = 1/5$  とした場合の波源強度  $|\mu_n|$  を示している。わずかながら両者に差異が現れている。この差異は波源強度の算定式(32)における右辺第2項、すなわち境界上の分布波源の相互作用を代表する項より生じている。この式中の  $\phi_s$  は、仮想した背後地形上を伝播する円環状の波から算定されるため背後地形の影響を受けることになる。同様の解析を底面勾配  $S_i = 1/15$  の場合についても行った

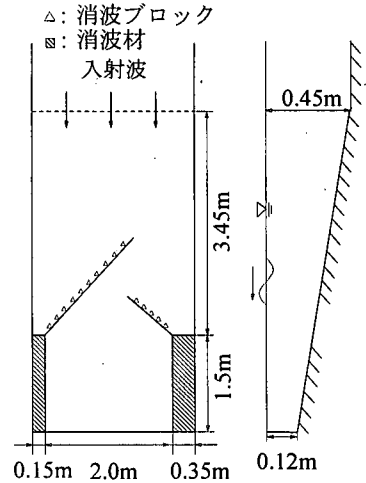


図-14 実験模型概略図

(図-13(b))。その結果、背後地形の影響は底面勾配  $1/5$  の場合に比べてかなり小さくなった。これより、実際の波浪場計算において、境界背後の地形を仮想することによる数値解への影響は、十分に小さいと考えられる。

### 6. 一般化したGreen関数法の適用性

水理模型実験による結果と比較することで、本研究で提案した波浪場解析手法の妥当性を検証する。実験に用いた港湾モデルとしては、図-14に示すような形状で、水深は港湾最奥部で  $0.12\text{ m}$  とし、そこから沖方向に向かって  $1/15$  の一様勾配で深くなっていく。入射波は沖方向より垂直に入射し、その周期は  $0.70\text{ s}$  とした。

計算手順<sup>2)</sup>の概略は次のとおりである。

- ① 計算対象水域を凸多角形の領域に分割する。
- ② 各領域の境界を波長に比べて十分に短い線分(本計算では波長の  $1/20$ )に分割し、各境界要素を発する波の点源として代表させる。ここで波源強度は線分上で一定値とした。
- ③ 4章で述べた境界条件の下で、まず沖側の凸多角形領域の波源強度を算出する。続いて岸側の凸多角形領域の波源強度を同様に計算する。この操作を解が収束するまで繰り返す。
- ④ 各領域において、その領域内に属する各点源から手順③で得られた波源強度を持つ波が発すると想定し、それらを線形重ね合わせることにより領域内の波の場を合成する。

図-15に実験結果と上記の手順にしたがって行った計算結果を比波高の等高線図で示す。ここでは、相互作用項を無視して解析を行った結果についても併せて示す。これらの図を比較すると、まず相互作

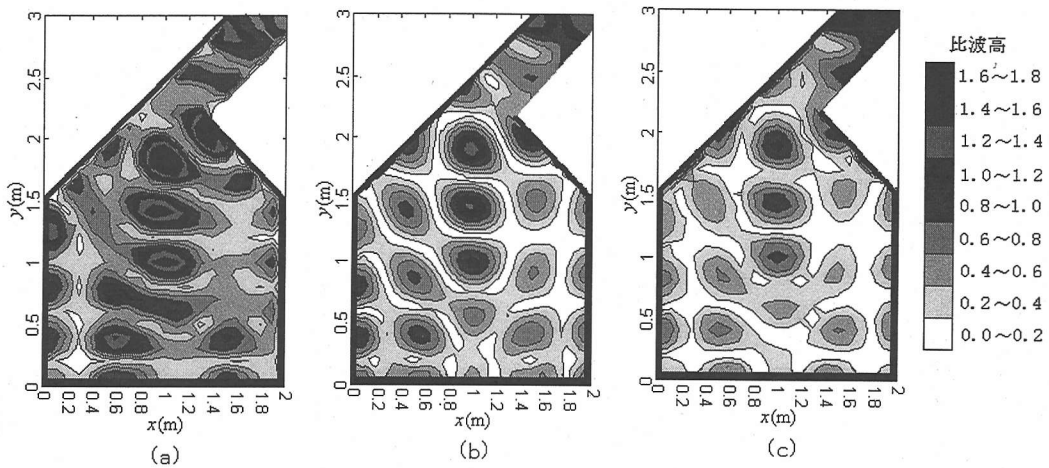


図-15 港内波高分布  
(a) 実験値, (b) 計算値, (c) 相互作用項無し

用項を無視した計算結果に比べ相互作用項を考慮した計算結果の方が防波堤開口部付近の比波高の高まりを適切に表現していることがわかる。これより、水深変化のある波浪場においては、境界条件を取り扱う上で相互作用項を導入することの必要性が示される。また、相互作用項を考慮した計算結果と実験結果とを比較すると、全体的に若干計算結果の比波高が小さくなるものの、その分布パターンは概ね再現できている。このことから水深が変化する波浪場に対しても、放物型波動方程式の数値解を素解として利用することでGreen関数法を適用できることがわかる。

## 7. 結論

本研究で得られた結論を以下に列記する。

1. 緩勾配方程式のグリーン関数の導出手法を示した。一様水深場における厳密解である Hankel 関数と本手法による解を比較した結果、実用上十分な精度を持つことがわかった。本手法は緩勾配方程式に限らず、様々な工学分野で問題となる変数係数偏微分方程式の解析に応用可能である。
2. 密度法を用いた任意水深場の波浪場解析では、波源強度はその点での振幅勾配のみでは決定されず、境界上のすべての強度が相互に影響し合う。これは境界より発した波が屈折により同一境界に再入射する効果を表わす。モデル港湾に対する波浪場解析の結果を実験値と比較した結果、この効果は有意であることが分かり、本論文で提案する波浪場解析手法の妥当性が示された。

3. Green関数として点源波を用いる場合、計算領域外の地形を仮想して計算を行う必要がある。仮想地形を変化させて波浪場解析を行い、その解を比較した結果、得られる波浪場の数値解に生じる差異は極めてわずかであった。これより波浪場解析において、計算領域外の地形を仮想するという技法が成立すると判断される。また計算領域が緩やかな底面勾配を持つ場合、Green関数の相反定理が近似的に成立しているとして解析を行うことが可能である。

## 参考文献

- 1) Barailler, L. and Gaillard, P.: Evolution recente des modeles mathematiques dagitation due a la houl : Calcul de la diffraction en profondeur non uniforme, *La Houille Blanche*, Vol.22, No.8, pp.861-869, 1967.
- 2) 西村仁嗣, 松岡道男, 松本朗, 篠田伸昌: グリーン関数法による港内静穏度解析, *海岸工学論文集*, 第40巻, pp.51-55, 1993.
- 3) 郭文秀, 西村仁嗣: Green関数法による任意水深水域の波浪場解析, *海岸工学論文集*, 第44巻, pp.26-30, 1997.
- 4) Radder, A. C.: On the parabolic equation method for water-wave propagation, *J. Fluid Mech.*, vol.95, part 1, pp.159-176, 1979.
- 5) 藤井信太郎, 福島雅紀, 郭文秀, 京藤敏達, 西村仁嗣: 緩勾配方程式のグリーン関数および一般解の導出, *海岸工学論文集*, 第45巻, pp.1-5, 1998.
- 6) 郭文秀: Green関数法による任意水深水域の波浪場解析に関する研究, 筑波大学工学研究科博士論文, 157p., 1998.
- 7) Mei, C.C.: *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, World Scientific Publishing, 740p., 1989.

(1999. 4. 5 受付)

# FUNDAMENTAL SOLUTION AND BOUNDARY CONDITION OF THE GREEN FUNCTION METHOD FOR VARIABLE DEPTH

Shintaro FUJII, Kouji KIMURA, Harumichi KYOTOH and Hitoshi NISHIMURA

In order to extend Green function method of constant depth to apply for variable depth, a systematic derivation of Green's function based on the mild-slope equation is proposed in this paper. A new method to determine density of wave source is also proposed. Because of wave refraction, wave sources on boundary are mutually related each other. Hence these densities satisfy an integral equation on the boundary. Result of wave analysis for a model harbor shows that the effect of the interaction between wave sources is quite significant. Moreover, it is shown that virtual topography outside wave field, which is necessary to assume for the calculation of the Green function, gives almost no influence on the wave field inside, provided the mild-slope condition is fulfilled in the harbor.