

深海ストークス波の不規則化における 分岐メカニズム

池田清宏¹・森 信人²・安田孝志³

¹正会員 Ph.D 東北大学工学研究科土木工学専攻 教授 (〒980-8579 仙台市青葉区)

²正会員 工博 電力中央研究所 主任研究員 (〒270-11 我孫子市我孫子1646)

³正会員 工博 岐阜大学工学部土木工学科 教授 (〒501-11 岐阜市柳戸1-1)

本論文は、側帯波不安定による深海ストークス波の連続スペクトル化の現象に対して、鉛直2次元無限水深領域および周期境界条件下での波のスペクトルの時間発展の仕組みを群論的分岐理論により求め、その不規則化が多段階的分岐によるものであることを解明するものである。

Key Words : Stokes wave, bifurcation, group theory, mode coupling, sideband instability.

1. はじめに

深海域を伝播する重力波の不安定性は、最大波の推定に関連しているだけでなく、大気・海洋間の物質交換に影響を与える深海砕波の現象とも深く関わっている。特にストークス波の1方向伝播については、Benjamin・Feir¹⁾によるClass I (TypeI)の不安定の発見以降、非線形Schrödinger方程式^{2),3)}、Zakharov方程式⁴⁾および水槽実験⁵⁾等、様々な研究が行われてきた。これらストークス波の長距離伝播に関して、これまで得られた研究結果は膨大なものであるが、大まかには以下の様にまとめることができる。

- i) フーリエモードはモード間で複雑なエネルギー授受を行う。少数自由度の下での数値計算においてはFPU再帰を繰り返す場合がある^{6),7),8)}。
 - ii) 数値計算は初期条件に鋭敏に影響を受ける^{7),8)}。
 - iii) 分散関係は線形分散関係式からずれ、高周波成分はほぼ非分散となる。
 - iv) 水槽実験では周波数のダウンシフトが生じる場合があるがポテンシャル理論に基づく数値計算では再現できない⁶⁾。
- i)およびii)の結果は、深海域を伝播する重力波が内在的に不規則化する構造を持つことを示しており、Caponiらは、Class I不安定に起因するフーリエモード間の大規模なエネルギー授受によるストークス波の不規則化をその不安定領域が有限であることから“有限カオス”と名付けた。さらに、Yasuda・Mori⁹⁾は数値計算を行い、ストークス波の側帯波不安定とモード干渉による不規則化の力学的・統計的性質について明らかにした。しかしながら、ストークス波がフーリエモード間でエネルギーを輸送しながら乱れていくメカニズムについ

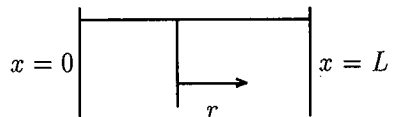


図-1 鉛直2次元無限水深領域

ては未解明である。

自然界の乱れの派生やカオス化には対称性の喪失を伴う「対称性破壊分岐現象」が深く関わっている^{10),11)}。この種の分岐現象の例としてはマンテル対流のモデルであるBenard流¹²⁾や2重円筒間の流れであるTaylor-Couette流¹³⁾が有名である。非線形数学の分野では、群論的分岐理論^{14),15),16),17),18),19)}が対称性破壊分岐現象の記述法として確立されており、パターン流の発生のメカニズムの記述に幅広く適用されている^{20),21),22),23)}。

そこで、本論文は図-1に示す周期境界条件* 下における鉛直2次元無限水深領域に発生するストークス波の乱れの仕組みを群論的分岐理論により解明するものである。波動場の水平方向に周期境界条件を課すことにより、この場合は水平方向の任意の「並進(回転)対称性」に対して不変な系と考えることができ、群論的分岐理論の標準的な結果^{16),18),19)}が直接適用可能である。この物理空間に発生する波のスペクトルの経時変化の仕組みをこの理論により求め、ストークス波のカオス化現象の数値シミュレーション結果との比較・検討を行う。

* Taylor-Couette 流の数学モデルにおいては、中空円筒の上下端に周期境界条件を設けることにより上下方向の並進対称性を表わすことがよく行われている。

2. 群論的分岐理論

群論的分岐理論^{17),18)}と C_∞ 同変系への適用¹⁹⁾の概略を紹介する. ちなみに, 本論文で数値計算例として取り扱う図-1に示す左右端が周期境界によりつながった鉛直2次元無限水深領域は巡回群 C_∞ に対して不変な系であり, この章の結果が直接適用できる.

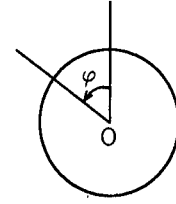


図-2 変換 $r(\varphi)$ の作用

(1) 支配方程式の群同変性

ある非線形の支配方程式 (N 次元) を

$$F(f, u) = 0 \quad (1)$$

とする. ここに f は分岐パラメータを (例えば動的問題では f は時間に対応し, 構造解析では荷重に対応する), u は変位ベクトルを各々表す.

支配方程式の対称性を記述するにあたり, 鏡映や回転等を表す変換写像 g からなる群 G を想定する. 例えば, 群 G の元 g が N 次元ベクトル u に作用すると, u が $g(u)$ に変換される. この座標変換の仕組は $N \times N$ の表現行列 $T(g)$

$$T(g)u = g(u), \quad T(g)F = g(F), \quad \forall g \in G \quad (2)$$

により定義される. 表現行列とは元 g が引き起こす座標変換を, 対応するベクトル空間に対して書き表したものであり, 本論文では $T(g)$ は直交行列と仮定する. 群 G の全ての元 g が引き起こす座標変換に対して,

$$T(g)F(f, u) = F(f, T(g)u), \quad \forall g \in G \quad (3)$$

が成り立つとき, 支配方程式 $F(f, u)$ は群 G に対して同変であると呼ばれる. 条件式 (3) は変数 u を $T(g)$ により変換することと, 式 F 全体を $T(g)$ で変換したものが同一であることを表す, 一般的な幾何学的対称条件である.

群同変性 (3) を持つ支配方程式の解 u の張る空間 X は

$$X = \bigoplus_{\mu \in R(G)} X^\mu \quad (4)$$

と既約表現 μ に対応する部分空間 X^μ の直和の形に標準分解できる²⁵⁾. この各部分空間が分岐前の解や分岐後の解にそれぞれ対応する (既約表現に関する詳細は専門書²⁹⁾を参照).

ある群 G に同変な系は分岐に伴い対称性を階層的に喪失することが知られている^{16),17),18),19)}. この種に分岐現象には, 群の連鎖構造

$$G \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow \dots \quad (5)$$

が対応する. ここに, $G_i \rightarrow G_{i+1}$ は G_i 不変な解から G_{i+1} 不変な解が分岐することを示す. この式はこの系の対称性が G 不変な状態から, G_1 不変, G_2 不変と低下して行くことに対応している. 群 G, G_1, G_2, \dots の分岐構造を各々調べて行くことにより群 G に同変な系の分岐ダイアグラムが求められる.

(2) C_∞ 同変なポテンシャル系の分岐構造

本論文では特に C_∞ 同変なポテンシャル系の

$$C_\infty \rightarrow C_n \rightarrow C_m \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \quad (6)$$

という分岐に着目する¹⁹⁾. 式 (6) の C_∞ は任意の回転に関する対称性を表す群であり,

$$C_\infty \equiv \langle r(\varphi) \rangle, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (7)$$

と定義される. 例えば, 定数 c は C_∞ 不変な状態を表す (本論文で解析対象とする鉛直2次元無限水深領域では波がない状態に相当する). 式中, $\langle \cdot \rangle$ は括弧内の要素から生成される群を示し, $r(\varphi)$ は反時計回りの φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) の回転 (図-2の原点 O 回り) である.

$$C_n \equiv \langle r(2\pi/n) \rangle \quad (8)$$

は角度 $2\pi/n$ に対する回転対称性を表す巡回群であり, 例えば, $\cos(n\varphi)$ の対称性を表す. 式 (6) の C_n 以下の部分に現れる C_n の部分群 C_m はその次数 m が n の約数である巡回群である. また $C_1 = \langle r(0) \rangle$ は非対称モードをそれぞれ表す.

a) C_∞ 不変な解からの1次分岐

C_∞ 不変な解からの1次分岐を調べる^{17),18)}. 群 C_∞ の既約表現の全体は

$$R(C_\infty) = ((+)_{C_\infty}, (1)_{C_\infty}, (2)_{C_\infty}, \dots) \quad (9)$$

と表される. 単位既約表現 $(+)_{C_\infty}$ の既約表現行列は

$$T^{(+)}_{C_\infty}(r(\varphi)) = 1 \quad (10)$$

であり, 回転に対する不変性を表わす. 2次既約表現 $(n)_{C_\infty}$ ($n = 1, 2, \dots$) の表現行列は下記の 2×2 の行列である.

$$T^{(n)}_{C_\infty}(r(\varphi)) = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix} \quad (11)$$

空間 X の C_∞ に対する標準分解は

$$X = X^{(+)}_{C_\infty} \bigoplus \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X^{(n)}_{C_\infty} \right) \quad (12)$$

となる. 各既約表現に対応する空間 X^μ は以下のような対称性を持つ.

$$\Sigma(X^{(+)}_{C_\infty}) = C_\infty, \quad \Sigma(X^{(n)}_{C_\infty}) = C_n \quad (13)$$

ここに $\Sigma(\cdot)$ は括弧の中の空間に属するベクトルの対称性を表す群を意味する. 表-1に特異点の分類を示す. ポテンシャル系では, C_n 不変な解が分岐により C_∞ 不変な解から派生する (系がポテンシャルを持たない場合に

表-1 C_∞ 不変なポテンシャル系の分岐解の分類

既約表現 μ	$(+)C_\infty$	$(n)C_\infty$
特異点の種類	f の極大・極小点	2重分岐点
(分岐) 解の対称性	C_∞	C_n
X^μ を張る Fourier 級数の次数		n

表-2 C_n 不変なポテンシャル系の分岐解の分類

既約表現 μ	$(+)C_n$	$(-)C_n$	$(j)C_n$
特異点の種類	f の極大・極小点	単純対称分岐点	2重分岐点
(分岐) 解の対称性	C_n	$C_{n/2}$	$C_{\text{gcd}(j,n)}$
X^μ を張る Fourier 級数の次数	$n, 2n, \dots$	$n/2, 3n/2, \dots$	$j, n+j, \dots$ $n-j, 2n-j, \dots$

1次既約表現 $(-)C_n$ は n が偶数のときにのみ存在する。

は、分岐点において C_n 不変な分岐解は特殊な場合を除いて存在しない。

b) C_n 不変な解からの分岐

C_∞ 同変な系の分岐解として現れる C_n 不変な解の分岐の仕組みを調べる¹⁹⁾。 C_n の既約表現の全体は

$$R(C_n) = \{ (+)C_n, (-)C_n, (1)C_n, \dots, (N_d)C_n \} \quad (14)$$

により与えられる²⁴⁾。 N_d は同値でない2次既約表現の個数であり、 $n/2$ を超えない最大の整数に等しい。 1次既約表現 $(-)C_n$ は n が偶数のときにのみ存在する。 1次既約表現 $(+)C_n$ と $(-)C_n$ の既約表現行列は

$$T^{(+)}C_n(r(2\pi/n)) = 1, T^{(-)}C_n(r(2\pi/n)) = -1 \quad (15)$$

である。 2次既約表現 $(j)C_n$ ($j = 1, \dots, N_d$) の既約表現行列は

$$T^{(j)}C_n(r) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \end{pmatrix} \quad (16)$$

である。 空間 X は群 C_n に関して

$$X = X^{(+)}C_n \oplus X^{(-)}C_n \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m X^{(j)}C_n \right) \quad (17)$$

という形に標準分解される。 部分空間ブロック X^μ は

$$\Sigma(X^{(+)}C_n) = C_n, \quad \Sigma(X^{(-)}C_n) = C_{n/2} \quad (18a)$$

$$\Sigma(X^{(j)}C_n) = C_{\text{gcd}(j,n)}, \quad j = 1, \dots, N_d \quad (18b)$$

という対称性を持つ。 ここに、 $\text{gcd}(j, n)$ は j と n の最大公約数を表す。

表-2に特異点の分類を示す。 単位表現 $(+)C_n$ はパラメータ f の極大・極小点に、 1次既約表現 $(-)C_n$ は2倍の周期を持つ $C_{n/2}$ 不変な解が分岐する単純対称分岐点にそれぞれ対応する。 2次既約表現 $(j)C_n$ に対応する分岐解の対称性は $C_{\text{gcd}(j,n)}$ である (系がポテンシャルを

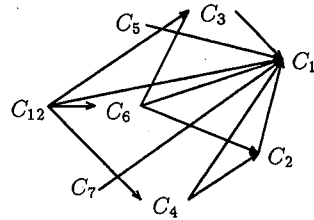


図-3 分岐ダイアグラムの例

持たない場合には、分岐点においてもこの種の分岐解が存在しないことがある)。

以上の結果により、 C_n 不変な経路からの分岐の規則が明らかになった。 さらに、これらの規則を、繰り返して用いることにより C_n 同変系の分岐ダイアグラムが求められる。 図-3に C_n 同変系の分岐ダイアグラムの一部を示す。 図中実線は分岐プロセスを表す。 C_n 不変系の分岐構造は、非常に複雑であるが、しっかりとした規則を持っていることは注目に値する。

3. 水面変位に対する分岐理論の適用

長さ L_0 の領域 ($0 \leq x \leq L_0$) 上のある偏微分方程式

$$F(f, \eta) = 0 \quad (19)$$

を考える。 ここに、 η は水面変位である。 自明解として $\eta = 0$ を持つ分岐問題であることと、 周期境界条件の仮定により変位 η は

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(n\theta) + b_n \cos(n\theta)] \quad (20)$$

という Fourier 級数の形に書ける。 ここに

$$\theta = 2\pi \frac{x}{L_0}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (21)$$

である。変位ベクトル

$$\mathbf{u} = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)^T \quad (22)$$

を定義し、式(19)を離散化すると、離散化された非線形方程式(1)が求められる。

(1) C_∞ 不変な解からの1次分岐

C_∞ 不変な自明解 $\eta = 0$ からの1次分岐解について調べる。変換 $r(\varphi)$ の作用は

$$r(\varphi) : x \rightarrow x + \frac{\varphi}{2\pi} L_0 \text{ or } \theta \rightarrow \theta + \varphi \quad (23)$$

と表される。Fourier級数に対する $r(\varphi)$ の作用は

$$\begin{aligned} r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(n(\theta + \varphi)) \\ \sin(n(\theta + \varphi)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

を満足するので、式(11)より $\cos(n\theta)$ と $\sin(n\theta)$ が2次の既約表現 $(n)C_\infty$ に対応することが分かる。また自明解 $\eta = 0$ が $(+)C_\infty$ に対応する。ゆえに空間 X の標準分解(12)の部分空間を張る項は、

$$\begin{aligned} X^{(+)}C_\infty &= \text{span}[0], \\ X^{(n)}C_\infty &= \text{span}[\sin(n\theta), \cos(n\theta)] \end{aligned} \quad (25)$$

である。ここに、 $\text{span}[\cdot]$ は括弧内の関数により対応する空間が張られていることを示す。

(2) C_n 不変な解からの分岐

Fourier級数に対する $r(2\pi/n)$ の作用

$$\begin{aligned} r(2\pi/n) \begin{pmatrix} \cos(i\theta) \\ \sin(i\theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos[i(\theta + 2\pi/n)] \\ \sin[i(\theta + 2\pi/n)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2i}{n}\pi\right) & -\sin\left(\frac{2i}{n}\pi\right) \\ \sin\left(\frac{2i}{n}\pi\right) & \cos\left(\frac{2i}{n}\pi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(i\theta) \\ \sin(i\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

の仕組を調べることに、 C_n 不変な解からの分岐の構造を調べる。

1次既約表現 $(+)C_n$ に対応する成分 η は式(15)より

$$r(2\pi/n) \cdot \eta = \eta \quad (27)$$

を満足する。式(26)から、この η は波数 i が n の整数倍の項

$$\sin(kn\theta), \quad \cos(kn\theta), \quad k = 1, 2, \dots \quad (28)$$

であることが分かる。このことから空間 $X^{(+)}C_n$ を張る項が

$$X^{(+)}C_n = \text{span}[\sin(kn\theta), \cos(kn\theta)]_{k=1}^\infty \quad (29)$$

と求められる。式(25)では n 次の項しかなかったのに、この式では n の整数倍の次数の項が存在している。このことは C_∞ 不変な主経路から別れた C_n 不変な分岐解は、分岐点の近傍では綺麗な n 次のモードを持つが、モード干渉 (mode coupling) により高次の波を励起し、波形が崩れてしまうことを示している。

1次既約表現 $(-)C_n$ に対応する成分 η は式(15)より

$$r(2\pi/n) \cdot \eta = -\eta \quad (30)$$

を満足する。式(26)からこのような η は波数 $2i/n$ が奇数の項であるので、空間 $X^{(-)}C_n$ を張る項は

$$X^{(-)}C_n = \text{span}[\sin((k+1/2)n\theta)]_{k=0}^\infty \quad (31)$$

であることが分る。

2次既約表現 $(j)C_n$ ($j = 1, \dots, N_d$) には、波数 i が kn と $(k+1/2)n$ 以外の項に対応する。このような i を

$$kn + j, \quad (k+1)n - j, \quad k = 0, 1, \dots \quad (32)$$

と2組に分類しておく。式(16)より $R^j = T^{(j)}C_n$ であることを用いると、波数 $i = kn + j$ に対し、式(26)は

$$\begin{aligned} r(2\pi/n) \begin{pmatrix} \cos((kn+j)\theta) \\ \sin((kn+j)\theta) \end{pmatrix} \\ = T^{(j)}C_n \begin{pmatrix} \cos((kn+j)\theta) \\ \sin((kn+j)\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

となるので、このFourier成分のペアが j 番目の2次既約表現 $(j)C_n$ に対応することが分かる。同様に、波数 $i = (k+1)n - j$ のFourier成分のペアが j 番目の2次既約表現に対応する。空間 $X^{(j)}C_n$ を張る基底は

$$\begin{aligned} X^{(j)}C_n &= \text{span}[\sin((kn+j)\theta), \\ &\quad \sin\{(k+1)n-j\}\theta), \\ &\quad \cos((kn+j)\theta), \\ &\quad \cos\{(k+1)n-j\}\theta)]_{k=0}^\infty \end{aligned} \quad (34)$$

となる。

C_n 不変な経路から既約表現 $(j)C_n$ に対応する C_m 不変な経路 ($m = \text{gcd}(j, n)$) が分岐する場合には、分岐点の近傍においては、主経路に対応する式(29)の波数

$$kn, \quad k = 0, 1, \dots \quad (35)$$

と分岐経路の波数 (式(34)参照)

$$kn + j, \quad (k+1)n - j, \quad k = 0, 1, \dots \quad (36)$$

とを重ね合わせた解が発生する。しかし分岐点から離れるに従いモード干渉により m の整数倍の波を励起することになる。

4. C_∞ 不変な系における励起モード

ここでは、前章の理論をもとに C_∞ 不変な系において励起されるモードの仕組みを例示することとする。

(1) ポテンシャル系：例1

C_∞ 不変なポテンシャル系の分岐の一例として

$$C_\infty \rightarrow C_{12} \rightarrow C_3 \rightarrow C_1 \quad (37)$$

という3段階の分岐プロセスに伴い励起されるモードの模式図を図-4に示す。 C_∞ 不変な経路上の2次既約表現 $(12)C_\infty$ に対応する2重分岐点における $C_\infty \rightarrow C_{12}$ という分岐に伴い12次の項が発生し (式(25)参照), そ

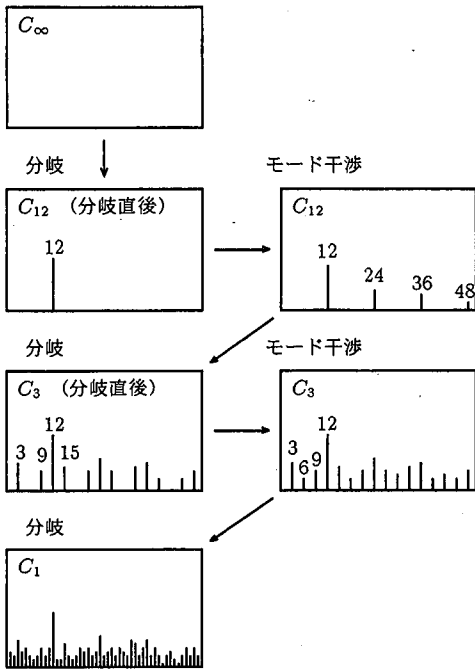


図-4 ポテンシャル系において励起されるモードの例 1 : $C_\infty \rightarrow C_{12} \rightarrow C_3 \rightarrow C_1$

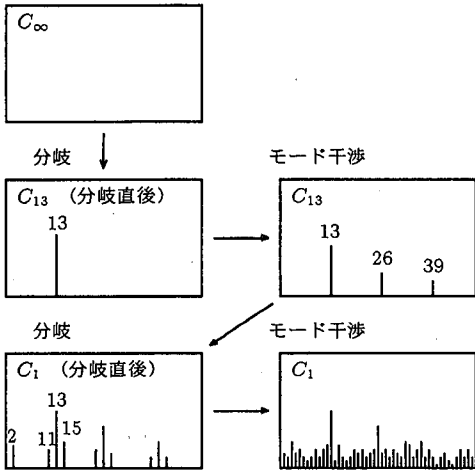


図-5 ポテンシャル系において励起されるモードの例 1 : $C_\infty \rightarrow C_{13} \rightarrow C_1$

の後モード干渉により 12 の整数倍の次数の項が発生する (式 (29) 参照)。

次に C_{12} 不変な経路上の 2 次既約表現 (4) C_{12} に対応する 2 重分岐点における $C_{12} \rightarrow C_3$ という分岐に伴い

$$3, 15, \dots, 9, 21, \dots$$

という項が発生し (式 (34) 参照), その後モード干渉により 3 の整数倍の次数の項が全て発生している。このとき分岐解の対称性 C_3 の次数 $m = \gcd(j, n) = 3$ は既

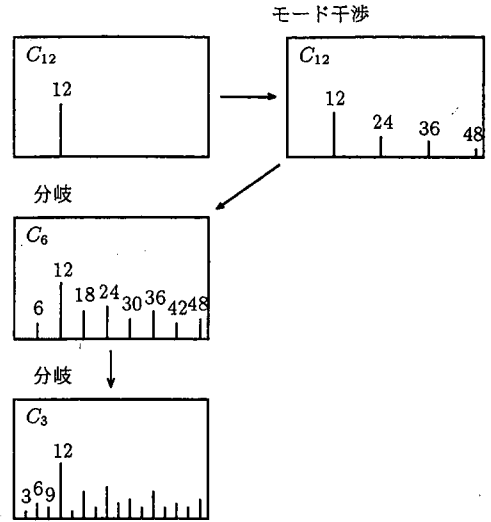


図-6 ポテンシャルを持たない系における励起されるモードの例 : $C_{12} \rightarrow C_6 \rightarrow C_3$

約表現の次数 $j = 4$ と C_{12} 不変な経路の次数 $n = 12$ との最大公約数となっている。

最後に C_3 不変な経路上の 2 次既約表現 (1) C_3 に対応する 2 重分岐点における $C_3 \rightarrow C_1$ という分岐に伴い

$$1, 4, \dots, 2, 5, \dots$$

という項が新たに発生し (式 (34) 参照), 今までに発生した項と合わせて全ての項が発生し完全に乱れた状態に到達している。このように完全に乱れてしまうともはや分岐は起こさない。このとき分岐解の対称性 C_1 の次数 $m = \gcd(j, n) = 1$ は既約表現の次数 $j = 1$ と C_3 不変な経路の次数 $n = 3$ との最大公約数となっている。

(2) ポテンシャル系 : 例 2

ポテンシャルを持つ系の分岐のもう一つの例として

$$C_\infty \rightarrow C_{13} \rightarrow C_1 \quad (38)$$

という 2 段階の分岐プロセスに伴う励起モードの模式図を図-5 に示す。 $C_\infty \rightarrow C_{13}$ という分岐に伴い 13 次の項が発生し, モード干渉により 13 の整数倍の次数の項が発生する。次に C_{13} 不変な経路上の 1 次既約表現 (2) C_{13} に対応する 2 重分岐点における $C_{13} \rightarrow C_1$ という分岐に伴い

$$2, 15, \dots, 11, 24, \dots$$

という項が発生し (式 (34) 参照); その後モード干渉により全ての次数の項が発生している。 C_{13} 不変な経路の全ての 2 次既約表現が C_1 不変な分岐解と対応するために, 既約表現と部分群とが 1 対 1 に対応しないので, この分岐においては, どの既約表現に対応しているかによりモードの発生の仕組みが異なることには注意を要する。

(3) ポテンシャルを持たない系

ポテンシャルを持たない系（非保存系）の分岐の例として

$$C_{12} \rightarrow C_6 \rightarrow C_3 \quad (39)$$

という2段階の分岐プロセスに伴う励起モードの模式図を図-6に示す。最初に12次の項のみが存在したとすると、モード干渉により12の整数倍の次数の項が次に発生することになる。その後は既約表現 $(-)_C_n$ に対応する周期が倍になる分岐 $C_6 \rightarrow C_3$ により乱れが発生している。ちなみに、ポテンシャルを持たない系では、周期が2倍または3倍になる分岐が一般的であり、周期倍分岐がカオスの発生の一因であることがよく知られている¹¹⁾。

5. 数値計算結果との比較

前節までに行った水面変位の分岐予測理論を、Yasuda・Mori⁸⁾による不規則波の数値計算結果の記述に適用する。数値計算は、周期境界条件の下で疑似スペクトル法を用いて3次以上の非線形干渉を考慮したものであり^{26), 27)}、詳細な計算手法およびその精度については文献²⁸⁾に譲ることとする。また、解析対象とする系はポテンシャル系である。

鉛直2次元無限水深の非圧縮回転流体場での重力場を考え、平均水面周りの水面変位 η および水面での速度ポテンシャル ϕ^s とすれば、支配方程式は次式のように書かれる。

$$\eta_t + \phi_x^s \eta_x - (1 + \eta_x^2) \phi_z = 0 \quad (40)$$

$$\phi_t^s + \eta + \frac{1}{2} \phi_x^s{}^2 - \frac{1}{2} (1 + \eta_x^2) \phi_z^s = 0 \quad (41)$$

ここに、

$$\phi_z = \sum_{m=1}^M \sum_{j=0}^{M-m} \frac{\eta^j}{j!} \sum_{n=1}^N \phi_n^{(m)}(t) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{j+1} \psi_n(x, z) \Big|_{z=0} \quad (42)$$

$$\psi_n(x, z) = \exp(k_n z + i k_n x) \quad (43)$$

であり、添え字 x, z, t はそれぞれの変数に関する偏微分を、 k_n は n 番目のフーリエモードの波数($k_n = 2\pi n/L_0$)を、 N はフーリエモードの個数を、 M は ϕ_z に対して評価する非線形干渉の次数を、 $\phi_n^{(m)}(t)$ は次式を逐次的に解くことによって決まるフーリエ係数をそれぞれ表す。

$$\sum_{n=1}^N \phi_n^{(1)}(t) \psi(x, 0) = \phi^s \quad (44)$$

$$\sum_{n=1}^N \phi_n^{(m)}(t) \psi(x, 0) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\eta^j}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^j \sum_{n=1}^N \phi_n^{(m-j)} \psi_n(x, z) \Big|_{z=0} \quad (45)$$

$$m = 2, \dots, M$$

式(40)と(41)をフーリエ空間上で4次のRunge-Kutta-Gill法により解くことにより時間発展を計算し

た。初期条件としては、 $0 \leq k/k_p \leq 4$ の波数空間上に128個のフーリエモードを与えた。ここで、添字の p は主波のモードであることを示し、 $k_p = 32$ である。搬送波としてはストークス波の厳密解を与え、初期攪乱として主波の振幅の1/100(エネルギーで1/10000)の側帯波を与え $t = 2500T_p$ まで伝播させた場合のスペクトルの時間変化を調べた。図-7にフーリエスペクトルの時間発展を、図-8に特定時刻 $t = 0, \dots, 1500T_p$ におけるスペクトル図をそれぞれ示す。ケース(a), (b)ではそれぞれ $k = k_p \pm 8$ と $k = k_p \pm 6$ の位置に、ケース(c)では $k = k_p \pm 10, k_p \pm 11$ の位置に側帯波を与えた。ケース(a)では4回、ケース(b)では2回FPU再帰した後、突然ピークモードのエネルギーが他のモードへ移送している。これに対し、ケース(c)では一度もFPU再帰しないまま、 $t = 800T_p$ 前後でフーリエモード間の複雑なエネルギー移送が見られる。図-7と8から明らかなように、初期の微小な側帯波の与え方の違いにより、その後スペクトルの時間発展の状況が全く異なることがわかる。

実は、これらの時間発展の大幅な違いは、前節までに行った分岐理論により予測可能なものである。 $t = 0$ のときに、主波とその整数倍の位置($k/k_p = 1, 2, 3$)に存在する線スペクトルは C_{32} 不変な分岐以前のモードに相当する($k_p = 32$)^{**}。一方、側帯波は分岐理論では、分岐モードを励起する初期不整と解釈できる。表-3に群 C_{32} の分岐解の分類と対応する波数を分類し、図-9に C_{32} 不変系の分岐ダイアグラムを示す。以後、この表をもとに各ケースの分岐の仕組みを調べることにする。ケース(a), (b), (c)はそれぞれ C_8, C_2, C_1 不変であり、この順に側帯波は高い対称性を持っている。側帯波の対称性は主波との一種の相性(両波の波数の最大公約数)により定まる面白い性質を持っている。

(1) ケース(a)の場合

ケース(a)で与えた側帯波の波数 $k = k_p \pm 8 = 24, 40$ は表-3より、既約表現 $(8)_C_8$ に対応している。この場合には、

$$C_{32} \rightarrow C_8 \quad (46)$$

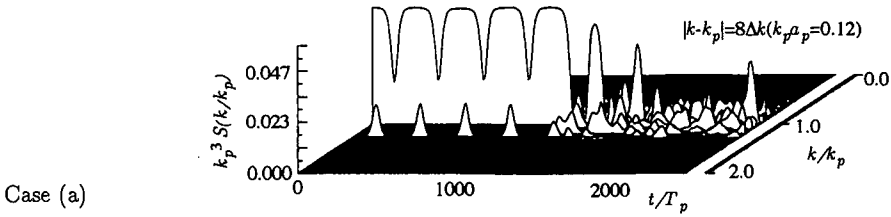
という対称性破壊分岐に伴い、

$$8, 24, 40, 56, 72, 88, 104, 120 \quad (47)$$

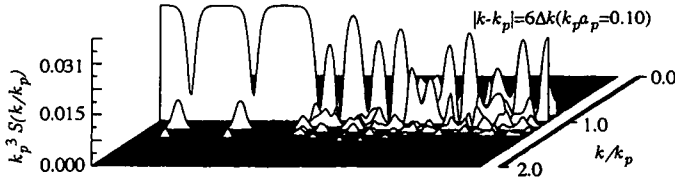
という波数の波が発生し、さらにモード干渉により8の整数倍の波を励起することになる。

実際、 $t = 140T_p$ の時点でこの分岐の芽が発生し、 $t = 282T_p$ の時点ではモード干渉により8の整数倍の波が全て励起されている。この C_8 不変な状態は $t = 1000T_p$ まで安定的に保存されているが、 $t = 1500T_p$ の時点では、

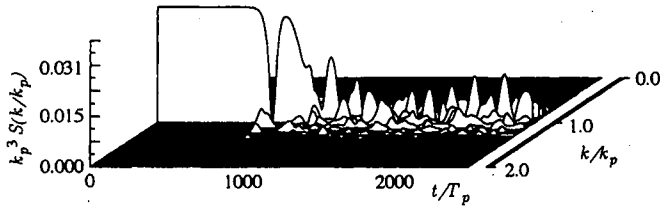
^{**} C_{32} の32という数字は、数値計算における搬送波のピークモードの番号に起因しており、初期および境界条件等の条件設定により変化するものである。励起されるモードのパターンのみが分岐理論では示されるので、対象とする系固有の情報と併せて考える必要がある。



Case (a)



Case (b)



Case (c)

図-7 側帯波を持つ波のフーリエスペクトルの時間発展⁸⁾

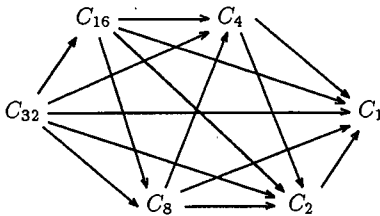


図-9 C_{32} 不変なポテンシャル系の分岐ダイアグラム

全ての波数が励起された連続スペクトルの状態になっている。この連続スペクトル化は

$$C_8 \rightarrow C_1 \quad (48)$$

という再度の分岐によるものと思われる。このように連続スペクトル化してしまうと、もはや分岐を起こし得なくなる。

(2) ケース(b)の場合

表-3より、ケース(b)で与えた側帯波の波数 $k = k_p \pm 6 = 26, 38$ は、既約表現 $(6)_{C_8}$ に対応していることがわかる。この場合には、

$$C_{32} \rightarrow C_2 \quad (49)$$

という対称性破壊分岐に伴い、

$$6, 26, 38, 58, 70, 90, 102, 122 \quad (50)$$

という波数の波が発生し、さらにモード干渉により偶数波を励起することになる。

実際、図-8(b)では $t = 196T_p$ の時点でこの分岐の芽が発生し、 $t = 398T_p$ の時点ではモード干渉によりさらに多くの波が励起され、 $t = 1500T_p$ の時点では偶数波が全て励起されている。この C_2 不変な状態は $t = 1500T_p$ まで安定的に保存されている。この場合には、さらに

$$C_2 \rightarrow C_1 \quad (51)$$

という分岐を起こす可能性を持っている。

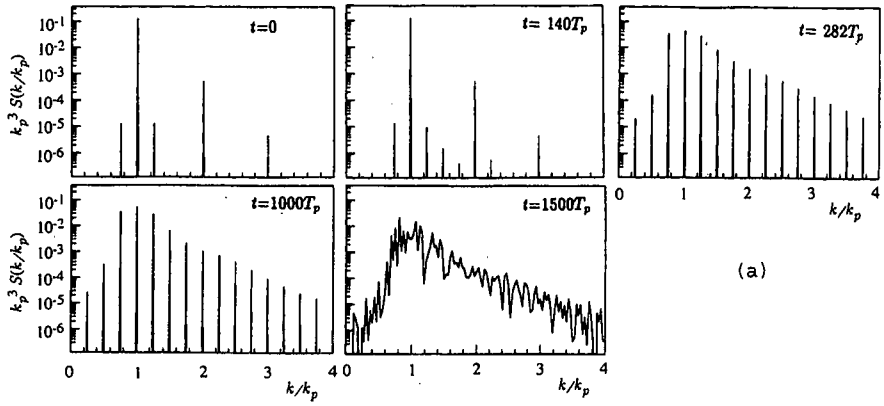
(3) ケース(c)の場合

ケース(c)で与えた側帯波の波数 $k = k_p \pm 10 = 22, 42$ と $k = k_p \pm 11 = 23, 41$ は表-3より、それぞれ既約表現 $(10)_{C_8}$ と $(11)_{C_8}$ に対応している。従って、

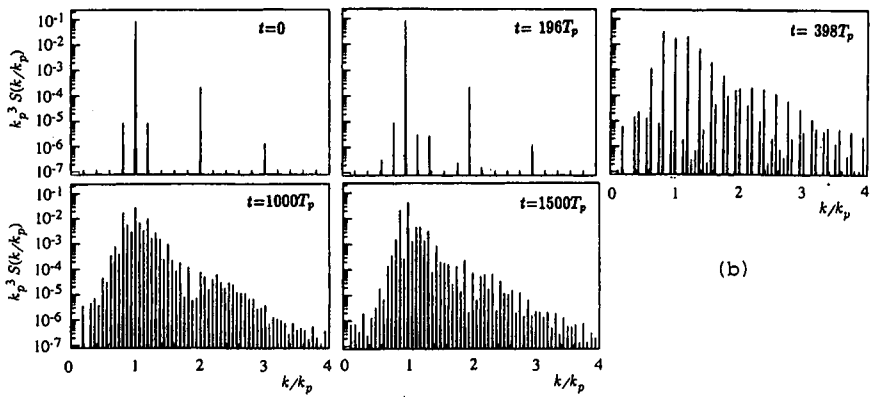
$$C_{32} \rightarrow C_1 \quad (52)$$

という対称性破壊分岐に対応し

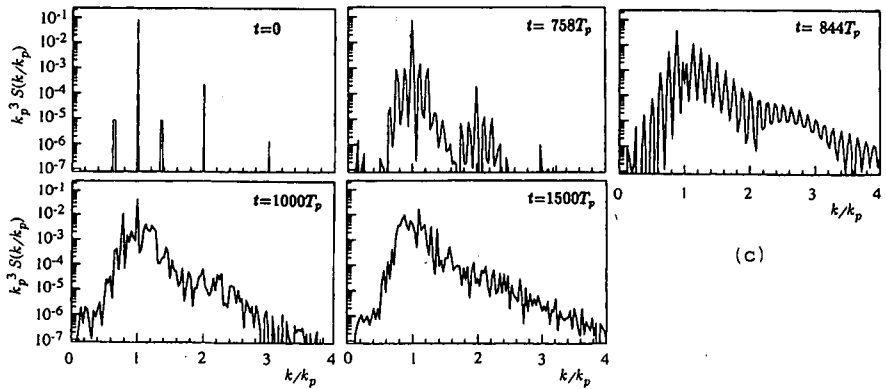
$$\begin{cases} 10, 22, 42, 54, 74, 86, 106, 118 & (10)_{C_8} \text{ の場合} \\ 11, 21, 43, 53, 75, 85, 107, 117 & (11)_{C_8} \text{ の場合} \end{cases} \quad (53)$$



Case (a)



Case (b)



Case (c)

図-8 フーリエスペクトルの時間発展⁸⁾

表-3 C_{32} 不変な系の分岐解と対応する波数の分類 ($N = 128$)

既約表現 μ	対称群	波数				
(+) C_{32}	C_{32}	32	64	96		
(-) C_{32}	C_{16}	16	48	80	112	
(1) C_{32}	C_1	1, 31	33, 63	65, 95	97, 127	
(2) C_{32}	C_2	2, 30	34, 62	66, 94	98, 126	
(3) C_{32}	C_1	3, 29	35, 61	67, 93	99, 125	
(4) C_{32}	C_4	4, 28	36, 60	68, 92	100, 124	
(5) C_{32}	C_1	5, 27	37, 59	69, 91	101, 123	
(6) C_{32}	C_2	6, 26	38, 58	70, 90	102, 122	
(7) C_{32}	C_1	7, 25	39, 57	71, 89	103, 121	
(8) C_{32}	C_8	8, 24	40, 56	72, 88	104, 120	
(9) C_{32}	C_1	9, 23	41, 55	73, 87	105, 119	
(10) C_{32}	C_2	10, 22	42, 54	74, 86	106, 118	
(11) C_{32}	C_1	11, 21	43, 53	75, 85	107, 117	
(12) C_{32}	C_4	12, 20	44, 52	76, 84	108, 116	
(13) C_{32}	C_1	13, 19	45, 51	77, 83	109, 115	
(14) C_{32}	C_2	14, 18	46, 50	78, 82	110, 114	
(15) C_{32}	C_1	15, 17	47, 49	79, 81	111, 113	

のいずれかの場合に対応する波数の波が発生し、さらにモード干渉により全ての波を励起することになる。

実際、 $t = 844T_p$ の時点でこの分岐の芽が発生し、時間発展に伴うモード干渉によりさらに多くの波が励起され、 $t = 1500T_p$ の時点では全ての波数が励起された連続スペクトルの状態になっている。

(4) 考察

以上の3ケースの結果をまとめると

$$\begin{array}{l}
 \nearrow C_8 \rightarrow C_1 : \text{ケース (a)} \\
 C_{32} \rightarrow C_2 : \text{ケース (b)} \\
 \searrow C_1 : \text{ケース (c)}
 \end{array} \quad (54)$$

という分岐が発現していることが分かる。しかし、これは図-9 に示す C_{32} 不変なポテンシャル系の分岐ダイアグラムのごく一部でしかないことには注意を要する。一般に、この種の分岐現象は数多くの分岐枝を持つ複雑なものであり、また初期値依存性が高い不安定なものである。

ところで、ケース (a), (b), (c) の側帯波はそれぞれ、 C_8 , C_2 , C_1 不変であったが、側帯波と同じ対称性を持つ分岐解を励起することにより不規則化を進行させたことになる。一般に、対称性が高い側帯波を入れると多段階の分岐を通じて不規則化は緩やかに進行し、低い側帯波を入れる程不規則化は一気に進行することとなり、数値計算結果はこれを支持している。

以上、側帯波による Stokes 波の分岐について検討を行った。中でも計算の最終状態におけるスペクトルの分布図は3ケースともに酷似していることは注目に値

する。このことは、分岐の道筋はたとえ異なっても最終状態は比較的近い、すなわち最終状態の初期値依存性の低さを表している。

本研究では、フーリエモード分割として $N = 128$ の場合を取り上げた。しかし、第3・4章で説明したように、分岐 $C_N \rightarrow C_m$ は m が N の約数であるという規則に基づき発生する。従って、フーリエモード分割がどのような約数を持つかにより、発生する分岐モードの種類が全く異なることになる。例えば、 $N = 256, 512$ のように $N = 128$ を約数として持つ分割数を用いる場合には、式(54)で表される分岐は再現可能である。一方、 $N = 300, 500$ のように、約数が $N = 128$ と全く異なる分割数を用いると、これらの分割数が32で割り切れないことから、式(54)の分岐モード C_{32} はもはや再現できないために、全く別のコースの分岐を起こすことになる。このような、フーリエモード分割数依存性は、カオスでよく取り上げられる初期値依存性ととも、この種の現象の数値解析に際し重要である。

6. 結論

本論文では、群論的分岐理論により側帯波不安定による深海ストークス波の不規則化のメカニズムを解明した。多数の分岐枝を持つ複雑な物理現象を解明するには、何がわかり得る性質であり、何がカオス的な性質であるかを認識することが本質的に重要である。分岐理論は、非線形性により励起されるモードの道筋を説明するものであり、本論文中で議論されている有限

な自由度を持つ系における計算結果の初期条件依存性のメカニズムを記述するものである。励起されたモードに有意なエネルギーが輸送されるか否かは対象とする系に依存する個別の問題であるので、波の安定性・波形勾配についてはここでは触れていない。

この種の対称性の段階的な喪失を伴う現象は、一見非常に複雑に見えるが、実際は体系的な規則に従う。この規則を踏まえた本格的な分岐計算並びにストークス波の不規則化波数スペクトルのメッシュ依存性や散逸が入る非保存系の場合についての検討を行うことが今後の課題である（この種の分岐計算にあたり、ブロック対角化原理が対称性の利用法及び分岐の仕組みの記述法として確立されている^{24),30)}）。

参考文献

- 1) Benjamin, T.B. and Feir, J.E.: The distribution of wavetrains on deep water. Part I: Theory. *Journal of Fluid Mechanics* 27, pp. 417-430, 1967.
- 2) Hashimoto, H. and Ono, H.: Nonlinear modulation of gravity waves. *J. Phys. Soc. Japan* 33, pp. 805-811, 1972.
- 3) Yuen, H. and Ferguson Jr., W.: Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear schrödinger equation. *Phys. Fluids* 21, pp. 1275-1278, 1978.
- 4) Zakharov, V.E.: Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Tech. Phys.*, 9, pp. 190-194, 1968.
- 5) Lake, B., Yuen, H., Rangaldier, H. and Ferguson Jr., W.: Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. part 2. evolution of a continuous wave train. *Journal of Fluid Mechanics* 83, pp. 49-74, 1977.
- 6) Yuen, H.C. and Lake, B.M.: Nonlinear Dynamics of Deep-Water Gravity Waves. *Advances in Applied Mech.*, 22, pp. 67-327, 1982.
- 7) Caponi, E., Saffman, P. and Yuen H.: Instability and confined chaos in a nonlinear dispersive wave system. *Phys. Fluids* 25, pp. 2159-2166, 1982.
- 8) Yasuda, T. and Mori, N.: Roles of sideband instability and mode coupling in forming a water-wave chaos. *Wave Motion* 26, pp. 163-185, 1997.
- 9) 安田孝志, 森 信人: カオスによる不規則波の生成とその特性について. 土木学会論文集, II-34(533), pp. 181-192, 1996.
- 10) スチュアート, I., ゴルビッキー, M. (須田不二夫, 三村和男訳): 対称性の乱れが世界を創る. 白揚社, 1995.
- 11) 高安秀樹 編著: フラクタル科学. 朝倉書店, 1987.
- 12) Koschmieder, E.L.: On convection of a uniformly heated plane. *Beiträge zur Physik der Atmosphäre* 39, pp. 1-11, 1966.
- 13) Taylor, G.I.: The stability of a viscous fluid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. Royal Society of London* 223, pp. 289-343, 1923.
- 14) Sattinger, D.H.: Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory. *Lecture Notes in Mathematics* 762, Springer, 1979.
- 15) Sattinger, D.H.: Branching in the Presence of Symmetry. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics* 40, SIAM, Philadelphia, 1983.
- 16) Fujii, H. and Yamaguti, M.: Structure of singularities and its numerical realization in nonlinear elasticity. *J. Math. Kyoto Univ.* 20, pp.498-590, 1980.
- 17) Golubitsky, M. and Schaeffer, D.G.: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* Vol.1. Springer, Berlin, 1985.
- 18) Golubitsky, M., Stewart, I., and Schaeffer, D.G.: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* Vol.2. Springer, Berlin, 1988.
- 19) Ikeda, K., Murota, K., and Fujii, H.: Bifurcation hierarchy of symmetric structures. *Int. J. Solids Structures* Vol.27, No.12, pp.1551-1573, 1991.
- 20) Schaeffer, D.G.: Qualitative analysis of a model for boundary effects in the Taylor problem. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 87, pp. 307-337, 1980.
- 21) looss, G.: Secondary bifurcations of Taylor vortices into wavy inflow or outflow boundaries. *Journal of Fluid Mechanics* 173, pp. 273-288, 1986.
- 22) Crawford, J.D. and Knobloch, E.: Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid dynamics. *Annu. Rev. Fluid Mechanics* 23, pp. 341-387, 1991.
- 23) Chossat, P. and looss, G.: *The Couette-Taylor Problem*. Applied Mathematical Sciences 102, Springer, 1994.
- 24) Murota, K. and Ikeda, K.: Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures. *SIAM J. Sci. Statistical Computing* 12(2), pp.273-297, 1991.
- 25) Serre, J.-P.: *Linear Representations of Finite Groups*. Springer, 1977.
- 26) West, B.J., Brueckner K.A. and Janda, R.S.: A New Numerical Method for Surface Hydrodynamics. *Journal of Geophysical Research*, 92(11), pp. 803-811, 1987.
- 27) Dommermuth, D.G. and Yue, D.K.P.: A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 184, pp. 267-288, 1987.
- 28) 森 信人: 不規則波に及ぼす高次の非線形干渉の影響: 博士論文, 岐阜大学, 1996.
- 29) 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝: 応用群論 - 群表現と物理学 -. 裳華房, 1976.
- 30) Zloković, G.: *Group Theory and G-vector Spaces in Structural Analysis*. John Wiley and Sons, Chichester, 1989.

(1999. 3. 31 受付)

BIFURCATION MECHANISM FOR GENERATION OF RANDOM DEEP-WATER STOKES WAVES

Kiyohiro IKEDA, Nobuhito MORI and Takashi YASUDA

The mechanism of the long-time evolution of deep-water Stokes waves due to the sideband instability and the mode coupling is explained by the group-theoretic bifurcation theory. It has been found that random waves are created as a consequence of repeated bifurcations.