

# 剛球の梁への衝突における衝撃力の近似計算法

柴田俊文<sup>1</sup>・三上隆<sup>2</sup>・佐藤昌志<sup>3</sup>・須藤敦史<sup>4</sup>

<sup>1</sup>学生会員 修士(工学) 北海道大学大学院工学研究科博士後期課程  
(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

<sup>2</sup>フェロー 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻  
(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

<sup>3</sup>正会員 博士(工学) 北海道開発局 開発土木研究所 構造研究室室長  
(〒062-0931 札幌市豊平区平岸1条3丁目)

<sup>4</sup>正会員 博士(工学) ㈱地崎工業 土木部技術課 主任研究員  
(〒105-8488 東京都港区西新橋2-23-1)

本研究は、剛球と梁の衝撃問題において、衝突点の局所変形の影響をばねで表し解析する際のその剛性の一算定式を提示したものである。算定式(法)は、従来のそれが持つ問題点(算定根拠が不明確等)に考慮を払い、静的に定めればね定数(剛性)を基準にし、剛球の初期速度、剛球と梁の質量及び梁の断面形状で補正する形で陽に表示されたものである。数値計算例では、算定式から得られるばね(剛性)特性について議論するとともに、それが任意支持条件の場合にも、衝撃の様相が一回の衝撃で衝突現象が完了する場合や複数回の衝撃を生じる場合にも適用可能であることを明らかにした。

*Key Words* : impact force, local deformation, spring-mass model, Hertz's law, beam

## 1. はじめに

梁や板等の構造要素の衝撃挙動の把握及び耐衝撃設計を行うための第一歩は、衝撃体と被衝撃体の間に生じる衝撃力の評価である。しかしながら多くの場合は、衝撃力波形(以降、衝撃力と称する)は正弦波、三角形波、台形波等の簡単な波形で代用されているのが実状である<sup>1)</sup>。

衝撃力の算定を厳密に行うには衝撃体と被衝撃体の間の局所変形の影響をどのように解析に取り入れるかが大きな問題であり、Timoshenko<sup>2)</sup>が両端単純支持梁の衝撃力の解析に修正 Hertz 理論を導入し非線形積分方程式に帰着させて解析を行って以来、この修正 Hertz 理論は平板、殻(shell)等の様々な構造要素に応用され<sup>3)-8)</sup>、最近では有限要素法と併用して、非線形代数方程式に帰着させて解析を行う研究も数多い<sup>9), 10)</sup>。しかし衝撃力を算出するには、解析が面倒な非線形方程式を解く必要があり実用的な解析法とは言い難い面もある。さらに、三次元有限要素法などの汎用プログラムを用いれば、接触点の塑性変形を含めた詳細解析が可能になるが、現象を整理する上での指針がなければ、設計に反映させることはできないものと思われる。

以上の理由から、衝撃体と被衝撃体の接触点の局所変形の影響を簡易なばねで表示して解析する例も報告されているが、ばね定数の値(剛性)の算出根拠が不明確であったり、その妥当性についての検討もなされていないのが現状と思われる。従って、ばね定数の値が適切に評価されれば、衝撃応答を支配する諸因子を明らかにすることができ、また応答計算も簡単になり、衝撃現象を理解する上でも有効と考えられる。

著者らは、文献 11)において静的にばね定数の値(剛性)を評価し、剛球が両端単純支持梁の中央に衝突する衝撃問題(剛球と梁が付着した状態と分離した状態を含む)の衝撃力を解析して、その適用可能性を指摘したが、その適用範囲を剛球の衝突速度(初期速度)、剛球と梁の質量比、梁の長さ等のパラメータを用いては明確にできなかった。

そこで本研究では、衝撃力と接触点での非衝撃体と衝撃体の相対変位の間に線形関係が成立し、接触点の塑性変形などを無視できる弾性解析の適用できる範囲内に限定し、また、剛球が正方形断面の梁に衝突する場合を対象にし、まず広範囲のパラメータに適用可能な局所変形のばね定数の値(剛性)の算定式を陽な形で新たに提示する。次にそれが両端単純支持梁のみならず、任意の支持条件の梁の衝撃力

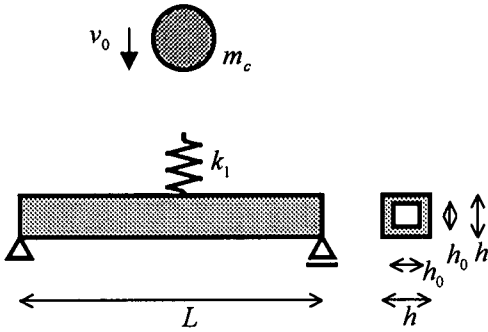


図-1 解析モデル

の解析にも適用可能であることを数値例で明らかにする。

## 2. 解析手法及びばね定数の算定

### (1) 解析モデル及び基礎方程式

図-1 にばね定数の算定のための解析モデルを示す。梁は両端単純支持され、その中央に質量  $m_c$  の剛球が初期速度  $v_0$  で衝突する場合を考える。ただし衝突面積は小さくて衝撃力は衝撃点に集中荷重として作用すると仮定し、梁の変形は微小で線形理論が適用できるものとし、本研究では Bernoulli-Euler 梁理論を採用する。なお解析は正方形断面（中空を含む）を対象にし、梁の長さを  $L$ 、高さと同幅を  $h$ （中空部分の高さと幅を  $h_0$ ）、弾性係数を  $E$ 、及び密度を  $\rho$  と記す。

さて図-1 に示すように剛球と梁の接触点の局所変形をばね定数  $k_1$  で表示し、重力の影響を無視すれば、接触時の剛球の運動方程式は次式で表される。

$$m_c \frac{d^2 u_1}{dt^2} + k_1 (u_1 - u_2) = 0 \quad (1)$$

ここで、 $u_1$  は接触点（図-1 の  $k_1$  の上端部分）の変位、 $u_2$  は梁中央の変位、及び  $t$  は時間を表す。

衝撃力  $f$  は式(2a)または式(2b)で評価できる。

$$f = -m_c \frac{d^2 u_1}{dt^2} \quad (2a)$$

$$f = k_1 (u_1 - u_2) \quad (2b)$$

梁の離散化に有限要素法を採用し、減衰の影響を小さいものとして無視すれば、接触時の梁の運動方程式は次のマトリックス方程式で表される。

$$[M] \left\{ \frac{d^2 u}{dt^2} \right\} + [K] \{u\} + k_1 (u_2 - u_1) = \{0\} \quad (3)$$

ここで、 $\{u\}$  は梁のみの変位を成分とする変位ベクトル、 $[M]$  は質量マトリックス、 $[K]$  は剛性マトリックスであり、さらに式(3)の左辺第三項は、剛球の接触点における梁の変位  $u_2$  に関する運動方程式に対してのみ考慮されるものである。

従って、剛球と梁が付着した状態及び分離した状態の運動方程式は、前者に対しては式(1)と式(3)を組み合わせ用い、後者に対しては式(1)と式(3)においてばね定数  $k_1 = 0$  と置き、以下に記述する剛球と梁の付着、分離の状態が生じる時刻の変位、速度の条件を用いて解析することができる。なお、運動方程式の時間に関する離散化には、Newmark  $\beta$  法を採用した。

初期条件；

剛球の初期速度が接触点の初期条件となる。接触点の初期変位と梁の初期変位、初期速度は 0 である。

付着から分離状態に移行する際の条件；

剛球が梁に付着している状態では、 $u_c = u_1$  ( $u_c$  は剛球の変位) であるため、式(2a)より  $d^2 u_c / dt^2 < 0$  が成立しなければならない。従って分離時の条件は  $d^2 u_c / dt^2 = 0$  となった時刻の各変位、速度である。

分離から付着状態に移行する際の条件；

分離に移行した状態では等速直線運動 ( $d^2 u_c / dt^2 = 0$  より) を行う剛球と接触点の相対変位を求め、相対変位 0 となる時刻が付着に移行する時刻 ( $t_1$  と便宜的に記す) となる。従って付着状態の条件には時刻  $t_1$  における梁の変位、速度、剛球の変位及び速度を使用する。

なお本論文では各状態の条件は、剛球の運動を追跡する必要から運動方程式に基づいているが、式(2b)を用いて付着状態、分離状態をそれぞれ  $u_1 - u_2 > 0$  あるいは  $u_1 - u_2 \leq 0$  の関係からも判断することができる。

### (2) 動的等価剛性 $k_{dy}$ の算出

静的等価剛性  $k_1 = k_{st}$  は剛球の衝撃点に対応する梁の上下辺二点に単位の集中荷重を反対方向に作用させ、三次元有限要素法を適用し衝撃点の変位の逆数から求めたものである<sup>11)</sup>。しかし式(2b)において、 $k_{st}$  を用いて算定した衝撃力の妥当性は、剛球の初期速度及び質量に依存した。そこで本研究では、静的等価剛性を基準にし、それに剛球の質量、初期速度、梁の質量等の影響を考慮した新たな等価剛性  $k_1 = k_{dy}$  (以下、動的等価剛性と称する) の算定式を提示する。

衝撃の様相は、一回の衝撃で衝撃現象が終了する

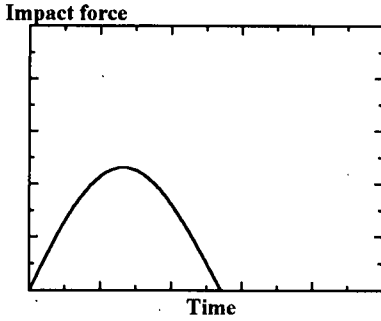


図-2 算定式の誘導に用いた衝撃力波形  
(正弦曲線タイプ)

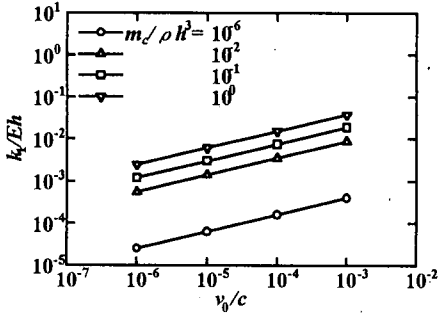


図-3 等価剛性と初期速度の関係  
( $L/h=10$ ,  $h_0/h=0.6$ )

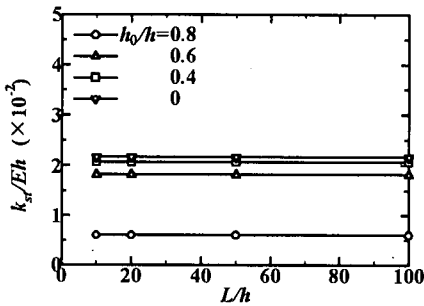


図-4 静的等価剛性  $k_{st}$  と梁の長さの関係

場合と複数回の衝撃を生じる場合があるが、算定式の誘導は前者に相当する図-2 に示す衝突時間の短い衝撃力波形（以下、正弦曲線タイプと称する）の場合を対象にする。

また、算定式は、Hertz の接触理論における衝撃荷重と相対接近量（梁と剛球の）の非線形的な関係を、前述の式(2b)に示すように線形的な関係が成立すると仮定し、両者による衝撃荷重のピーク値と衝突時間がほぼ適合するように定める。なお、修正 Hertz 理論による衝撃力は、有限要素法と Newton-Raphson 法の併用により求める（以下、これによる結果を厳密

解と称する）。

動的等価剛性  $k_1 = k_{dy}$  の算定式の導出に使用した諸元は剛球の質量  $m_c / \rho h^3 = 10^{-6}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0$ 、初期速度  $v_0 / c$  ( $c$  は縦波の速度)  $= 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ 、梁の長さ  $L/h = 10, 20, 50, 100$ 、断面形状  $h_0/h = 0$ （中実に対応）、 $0.4, 0.6, 0.8$  である。

図-3 は剛球の質量を変化させ、 $L/h = 10$ 、 $h_0/h = 0.6$  の梁について、本解析方法による衝撃力のピーク値と衝突時間が厳密解とほぼ一致（10% 以内）するばね定数  $k_1 / Eh$  と初期速度  $v_0 / c$  の関係を両対数で示したものである。これによれば、 $k_1 / Eh$  は初期速度のべき乗に比例することがわかる。なお、質量についても同様な結果が得られた。

図-4 は、静的等価剛性  $k_{st}$  と梁の長さ  $L/h$  の関係を示したものである。 $k_{st}$  は長さに依存せず、梁断面の形状  $h_0/h$  のみに依存することがわかる。これは、両端単純支持梁に対して求めた  $k_{st}$  は、他の境界条件に対しても成立することを示唆するものであり、その妥当性は後述の数値検討例で確認することにする。

以上の結果に基づき、動的等価剛性  $k_{dy}$  は静的等価剛性  $k_{st}$  で基準化し、次に示す関数で表されると仮定する。

$$\frac{k_{dy}}{k_{st}} = f_1\left(\frac{h_0}{h}\right) \cdot f_2\left(\frac{m_c}{\rho h^3}, \frac{M_0}{\rho h^3}\right) \cdot f_3\left(\frac{v_0}{c}\right) \quad (4)$$

ここで  $M_0$  は梁の質量であり、 $f_1$  は断面形状の関数、 $f_2$  は剛球と梁の質量の関数、 $f_3$  は剛球の初期速度の関数であり、これらは次式で表される。

$$f_1 = \alpha_1 \exp(\beta_1 x) \quad (5a)$$

$$f_2 = \left( \frac{1}{\frac{m_c}{\rho h^3}} + \frac{1}{\frac{M_0}{\rho h^3}} \right)^{\gamma_1} \quad (5b)$$

$$f_3 = \left( \frac{v_0}{c} \right)^{\delta_1} \quad (5c)$$

ただし、 $x = \left( \frac{h_0}{h} \right)^4$ 、 $h_0/h < 1$  である。

式(5)に含まれる係数  $\alpha_1$ 、 $\beta_1$ 、 $\gamma_1$ 、 $\delta_1$  を前述の諸元に対して得られた結果に基づき最小二乗法で決定すると以下に示す値となる。

$$\alpha_1 = 27.6, \quad \beta_1 = 3.17,$$

$$\gamma_1 = -0.333 \cong -1/3, \quad \delta_1 = 0.400 \cong 2/5$$

なお、これらの各係数の決定係数は 0.99 である。

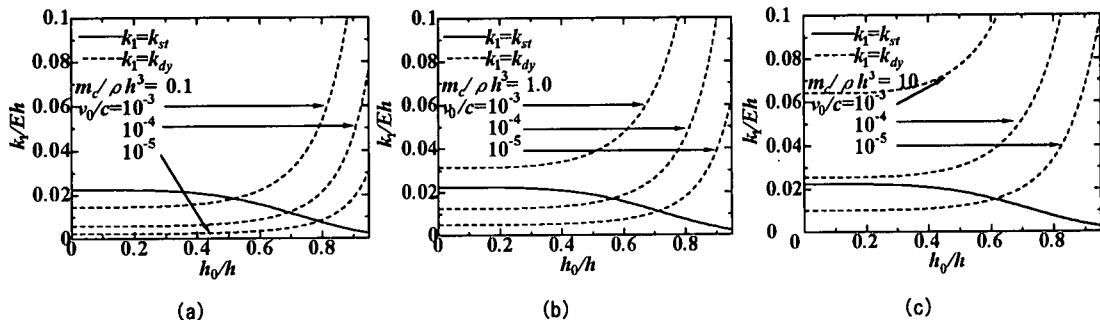


図-5 ばね定数  $k_1$  に及ぼす断面形状の影響

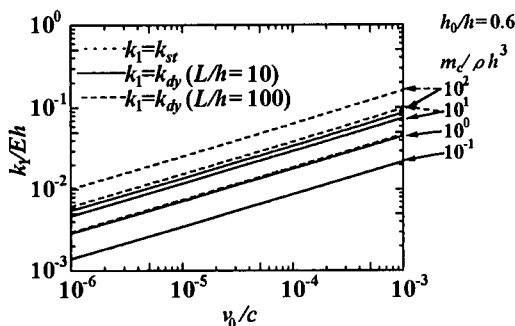


図-6 ばね定数  $k_1$  に及ぼす速度の影響

同様に、 $k_{st}$  を梁の断面形状の関数で表示すれば以下となる。

$$\frac{k_{st}}{Eh} = \alpha_2 \exp(\beta_2 x) \quad (6)$$

ここで係数は以下に示す値で、その決定係数は 0.97 である。

$$\alpha_2 = 2.33 \times 10^{-2}, \quad \beta_2 = -3.17$$

従って、梁の諸元等が与えられれば、式(4)、式(5)及び式(6)を用いることにより動的等価剛性  $k_{dy}$  を算定できることになる。なお、式(4)の算定式は、初期速度  $v_0/c \leq 10^{-3}$  及び剛球と梁の質量比  $m_c/M_0 < 1.0$  に対して求められたものであるが、その範囲外における妥当性については、次の数値検討例で確認する。

### 3. 数値検討例

ここで数値解析結果を示すが、衝撃力は梁全体の要素分割数を  $N=40, 100$  として解析し、その結果が

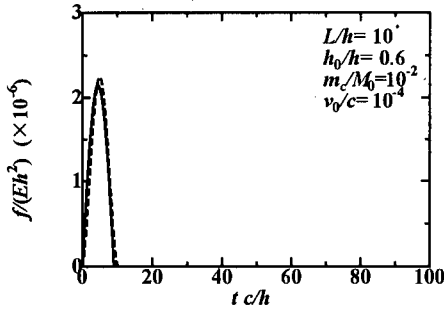
変わらなかったため本研究では以下のすべての解析で  $N=40$  を使用した。また時間刻み  $\Delta t$  は解析対象である梁の基本周期の  $1/1000$  以下となるように設定した。なお、以下に示す衝撃力  $f$  の時刻歴応答の各図では、本解析手法による結果を実線で、比較のために前述の厳密解によるそれを破線で示しグラフの縦軸は無次元化衝撃力  $f/Eh^2$ 、及び横軸は無次元化時間  $t c/h$  である。

#### (1) ばね定数 $k_1$ の特性

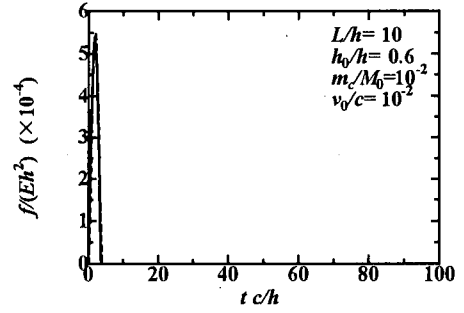
ここでは式(4)、式(5)及び式(6)を用いて、ばね定数  $k_1$  に与える種々のパラメータの影響を検討する。

図-5(a)、(b)及び(c)は  $L/h=50$ 、剛球の質量がそれぞれ  $m_c/\rho h^3 = 0.1, 1.0$  及び  $10.0$  の場合について、動的等価剛性 ( $k_1 = k_{dy}$ ) 及び静的等価剛性 ( $k_1 = k_{st}$ ) に与える断面形状比 ( $h_0/h$ ) の影響を調べたものである。これによれば、 $h_0/h \leq 0.3$  では動的及び静的等価剛性はいずれもほぼ一定の値を示し、剛球の質量が小さい(剛球と梁の質量比  $m_c/M_0$  が小さい)ほど、及び初期速度が小さいほど静的等価剛性  $k_{st}$  を過大に評価し、逆に剛球の質量が大きい(剛球と梁の質量比  $m_c/M_0$  が大きい)場合には初期速度が大きくなるほど静的に求めたばね定数は剛性を過小に評価することがわかる。一方、 $0.3 < h_0/h$  では、 $k_1 = k_{dy}$ 、 $k_1 = k_{st}$  はそれぞれ  $h_0/h$  の増加とともに増加および減少し、剛球の質量 ( $m_c/\rho h^3$ )、断面形状比 ( $h_0/h$ ) 及び初期速度 ( $v_0/c$ ) が大きいほど、静的に求めたばね定数は剛性を過小に評価することがわかる。

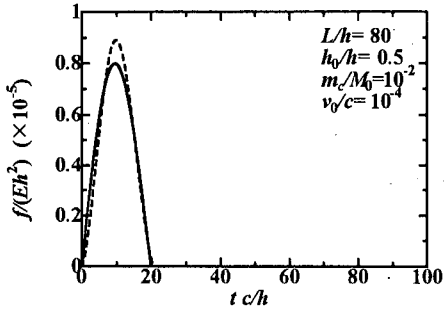
図-6は同様に、 $h_0/h=0.6$  を一定にし、 $L/h=10, 100$  の梁の場合について、初期速度の影響を調べたものである。これによれば静的等価剛性 ( $k_1 = k_{st}$ ) は既に述べたように一定値を示し、一方、動的等価剛性 ( $k_1 = k_{dy}$ ) は初期速度の増加とともに大きく



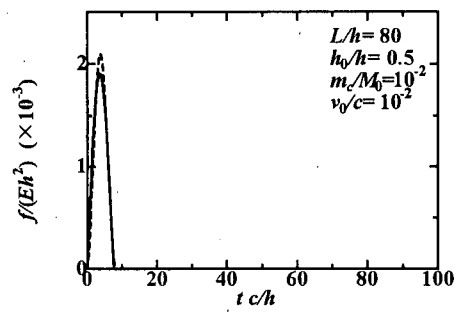
(a)



(b)



(c)



(d)

図-7 両端単純支持梁における衝撃力波形  
(正弦曲線タイプ)

なるが、剛球の質量が小さければ梁の長さ  $L/h$  (梁の質量) に依存せずほぼ同じ値を示し、剛球の質量が大きければ  $L/h$  が大きくなるほど、 $k_{\phi}$  の値は大きくなることわかる。

以上の結果からも理解できるように、衝撃点における局所変形の影響をばね定数で表し、その値を静的に評価する場合には剛性を過大にも過小にも評価することになり注意が必要である。なお、ここでの結果は正方形断面の梁に対するものであるが、ばね定数  $k_1$  の特性 (動的等価剛性  $k_{\phi}$  及び静的等価剛性  $k_{st}$  の関係) は、均一な材料からなる梁で、本研究で用いた静的等価剛性の算定方法がほぼ適用できる他の形状の梁 (上下二点における変位の絶対値が等しいか、ほぼ等しい場合) についても十分に成立することが推察でき、静的な方法で剛性を算定する際の一つの目安になるものと思われる。なお、具体的な解析例は後述する。

## (2) 衝撃力波形について

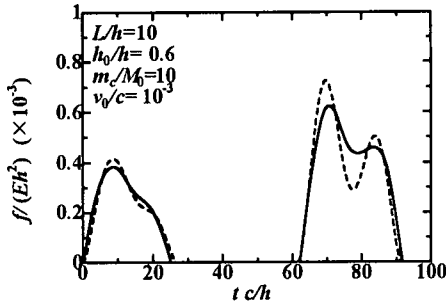
### a) 両端単純支持の場合

図-7 は剛球がスパン中央に衝突するときの結果で、算定式の誘導のために用いた条件 (支持条件と

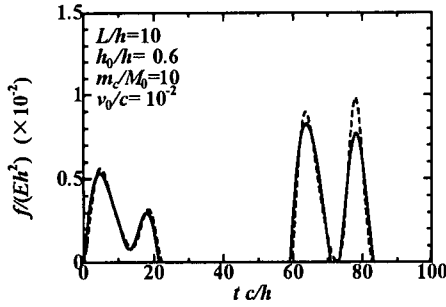
図-2 の正弦曲線タイプ) を満たす場合の衝撃力の時間分布を示している。なお、図の (b) と (d) は、剛球の初期速度が  $v_0/c = 10^{-2} > 10^{-3}$  の結果である。本解析方法から得られる衝撃力は、厳密解と比較してピーク値にやや差 (最大で 10%) が認められるものの、 $v_0/c > 10^{-3}$  の場合も含めて実用的には十分な精度を有していると判断できる。

図-8 はスパン中央に衝突する剛球と梁の質量比が  $m_c/M_0 = 10 > 1$  の場合で、衝撃力波形が正弦曲線タイプ以外の様相を示す結果である。これによれば、複数回の衝突がある場合 (図の (a) 及び (b))、剛球と梁の再衝突時の波形のピーク値に差が認められ、衝撃が一回であるが衝突時間の長い場合 (図の (c)) は応答の立ち上がりやや早く、応答の後半部で短周期の波が出現しているものの、いずれの場合も厳密解を良く近似していると判断できる。

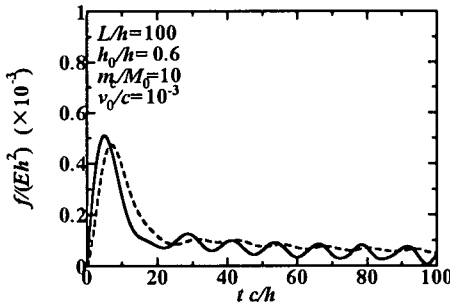
次に図-8 (a) の衝撃力波形を用いて、運動量の変化と力積の関係及びエネルギー保存則について検討を加えてみる。式(1)の左辺第二項を式(2b)の衝撃力  $f$  で置き換え、時間について積分すれば、剛球の運動量の変化と力積の関係について次式が成立する。



(a)



(b)



(c)

図-8 両端単純支持梁における衝撃力波形  
(正弦曲線タイプ以外)

$$m_c \dot{u}_1 (1+e) = \int_{t_1}^{t_2} f dt \quad (7)$$

ここで、上付添字のドット(・)のある変数は速度を表し、 $t_1$ 及び $t_2$ は、剛球と梁との接触開始及び終了時刻を表し、複数回の衝突においても同様とする。また $e$ は次式で表される。

$$e = -\dot{u}_1(t_2)/\dot{u}_1(t_1) \quad (8)$$

衝突時の全エネルギー $U_{tot}$ は次式で表される。

$$U_{tot} = KE_i + KE_t + SE_t + WE_f \quad (9)$$

ここで、

$$KE_i = m_c \dot{u}_1^2 / 2 \quad (10a)$$

$$KE_t = \{\dot{u}\}^T [M] \{\dot{u}\} / 2 \quad (10b)$$

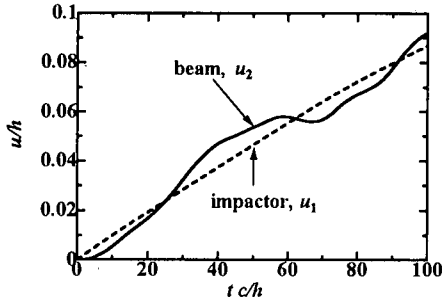
$$SE_t = \{u\}^T [K] \{u\} / 2 \quad (10c)$$

$$WE_f = \int_{t_1}^{t_2} f (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) dt \quad (10d)$$

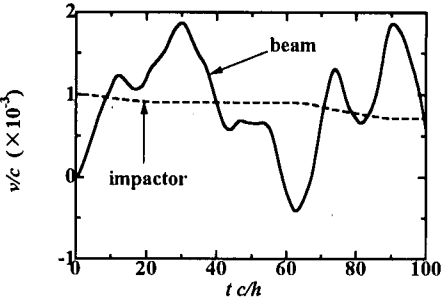
ただし、 $KE_i$ は剛球の運動エネルギー、 $KE_t$ は梁の運動エネルギー、 $SE_t$ は梁のひずみエネルギー及び $WE_f$ は衝撃力 $f$ のなす仕事を表し、式(10d)に現れる $\dot{u}_2$ は衝撃点における梁の速度であり、また $t_1 \leq t \leq t_2$ である。

図-9(a)及び(b)にそれぞれ、剛球と梁中央の変位及び速度の時刻歴応答を示す。図-9(a)より $u_1 > u_2$ なる相対変位の最大は時刻 $t_1 c/h = 70.6$ であり、この時刻で衝撃力が最大になっている(図-8(a))。また図-9(b)より $e$ (式(8))を求めれば、最初の衝突では $e = -0.903$ 、二回目の衝突では $e = -0.788$ と負の値となる。これは剛球の運動がその落下方向であることを意味し、剛球の複数回衝突の可能性を示唆している。図-9(a)及び(b)より、式(7)の計算に必要な諸量を示せば、最初の衝突に対しては $t_1 c/h = 0$ 、 $t_2 c/h = 25.2$ 、 $\dot{u}_1(t_1) = 10^{-3}c (= v_0)$ 、 $\dot{u}_1(t_2) = 0.903 \times 10^{-3}c$ であり、再衝突においては $t_1 c/h = 62.2$ 、 $t_2 c/h = 91.7$ 、 $\dot{u}_1(t_1) = 0.903 \times 10^{-3}c$ 、 $\dot{u}_1(t_2) = 0.712 \times 10^{-3}c$ である。上述の諸量より式(7)の左辺の値を求めれば、 $m_c \dot{u}_1(t_1)(1+e) = 6.19 \times 10^3 Eh^3/c$

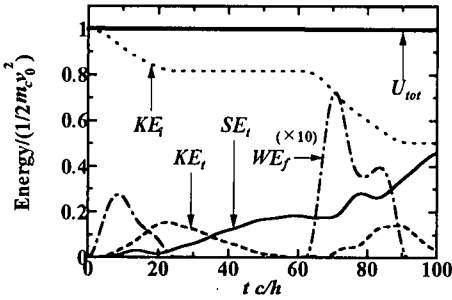
(最初の衝突に対して)、 $1.22 \times 10^2 Eh^3/c$ (再衝突に対して)と得られ、この場合は再衝突時の運動量の変化が大きいがわかる。なお、これらの値は、図-8(a)の衝撃力波形の時刻歴データを基に台形則より求めた式(7)の右辺の力積の値に等しくなり、運動量の変化は力積に等しいことも数値的に確認できる。図-9(c)に全エネルギー $U_{tot}$ 及びそれを構成する各成分( $KE_i, KE_t, SE_t, WE_f$ )の時間方向分布を剛球の初期運動エネルギー( $m_c v_0^2/2$ )で基準化して示す。これによれば、減衰の効果を考慮していないので、全エネルギーは一定であり、またそれは剛球の初期運動エネルギーに等しいことがわかる。 $WE_f$ (図では10倍の結果を表示)は、式(10d)を用いて台形則により数値的に求めた結果であるが、そのピーク値は衝撃力 $f$ が最大となる時刻と対応している。なお、 $WE_f$ は、式(2b)を用いれば、



(a) 変位波形



(b) 速度波形



(c) エネルギー波形

図-9 各応答波形

$$WE_f = \int_{t_1}^t f(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) dt = \frac{1}{2} k_1 (u_1 - u_2)^2 \quad \text{の関係}$$

も成立するが、これについても数値的に確認できる。さらに式(8)の  $e$  は、エネルギーの損失係数とも呼べるもので、剛球の衝突時・分離時の梁のエネルギー ( $KE_i$  と  $SE_i$  の和) の変化量  $\Delta E$  と次の関係がある<sup>12)</sup>。

$$\Delta E / KE_i(t_1) = 1 - e^2 \quad (11)$$

ここで、 $KE_i(t_1)$  は衝突時の剛球の運動エネルギーである。図-9(c)より最初の衝突時及び二回目の衝突時の  $\Delta E / KE_i(t_1)$  はそれぞれ、0.185 及び

0.378 であり、これらの値は前述の  $e$  の値による式(11)の右辺の値に一致している。

正方形断面以外の梁に対する適用性を検討するため、円形断面に対する結果を図-10及び図-11に示す。断面は外径  $h$ 、内径  $h_0$  とし、式(4)による動的等価剛性  $k_{dy}$  の評価は、円形断面の断面積に等しくなるように正方形断面の寸法を求めて行った。図-10及び図-11は、 $m_c/M_0 = 10, 10^2, v_0/c = 10^2, L/h = 10$  及び  $L/h = 100$  の場合について、それぞれ  $h_0/h = 0$  (中実), 0.6の結果であるが、これまでと同様に本算定式による衝撃力波形は良好な結果を与えている。

以上は動的等価剛性の導出に用いたスパン中央に剛球が衝突する両端単純支持梁について示したが、以下では剛球が任意支持条件の梁の任意の位置に衝突する場合を取り上げ、式(4)の有効性の検討を行う。

#### b) 両端固定及び一端固定-他端単純支持の場合

図-12及び図-13にそれぞれ、 $m_c/M_0 = 10, v_0/c = 10^3$  (剛球がスパン中央に衝突)で、両端固定及び一端固定-他端単純支持の場合の衝撃力波形を示す。本解析方法から得られる結果は図-8と同様であり、このことは両端単純支持の条件で求めた算定式(式(4))が他の支持条件の梁に対しても有効であることを示している。

#### c) 一端固定-他端自由の場合

図-14は  $m_c/M_0 = 10, L/h = 10$  及び  $L/h = 100$ ,  $v_0/c = 10^3$  の片持ち梁に対する検討例で、剛球の衝突位置が固定端より  $L/2, 3L/4, L$  (自由端) の場合の衝撃力波形を示す。これによれば、衝突位置が自由端でかつ細長い梁 ( $L/h = 100$ ) の結果は、算定式(式(4))に現れる静的なばね定数  $k_{st}$  の評価の影響で、応答初期を除けば衝撃の様相が厳密解と大きく異なっているものの、他の結果はこれまでの結果と同様なものである。このことは、剛球が細長い梁の自由端近傍に衝突する場合を除けば、算定式(式(4))は剛球の衝突位置に依存することなく適用可能なことを示唆している。

以上限られた数値例であるが、算定式(式(4))は、実用的に重要と思われるパラメータ範囲 (剛球と梁の質量比  $m_c/M_0 \leq 10$ , 剛球の初期速度  $v_0/c \leq 10^2, 10 \leq L/h$  (スパン比)  $\leq 100$ ) に適用可能であり、また梁の支持条件が任意及び剛球の衝突位置が任意の場合に対しても実用的には十分な精度を有するものと判断される。なお、式(4)の適用は正方形断面の梁に限定されるが、それをを用いた結果は他の解析法の精度確認にも有効に使えるものと思われる。

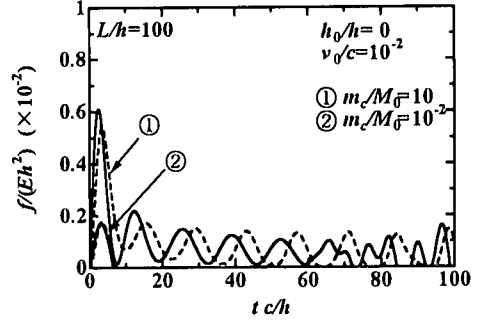
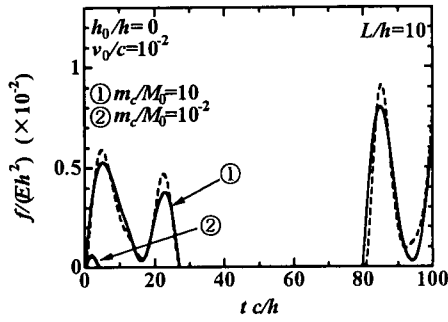


図-10 円形断面（中実）の梁における衝撃力波形

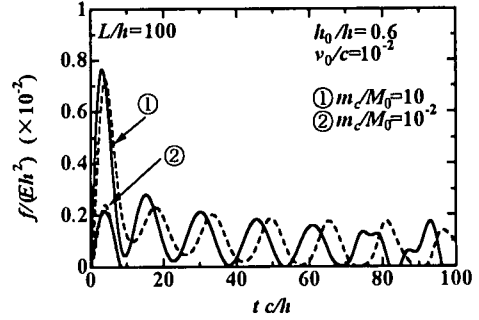
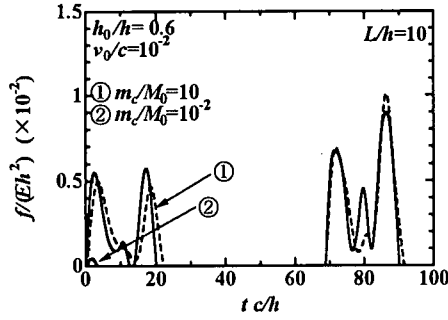


図-11 円形断面（中空）の梁における衝撃力波形

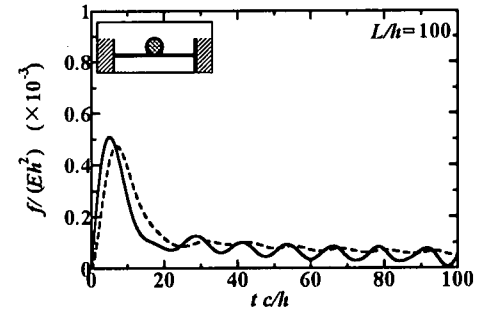
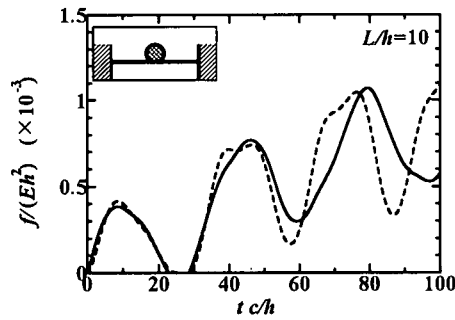


図-12 両端固定梁における衝撃力波形

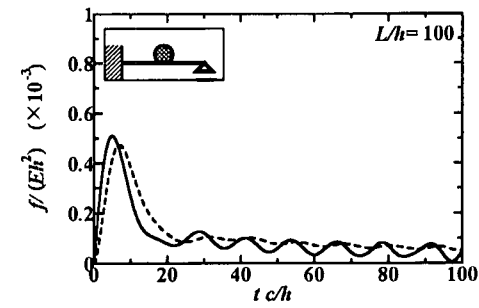
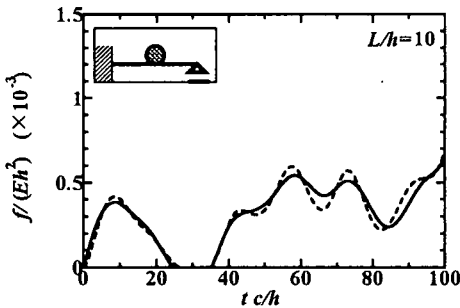


図-13 一端固定-他端単純支持梁における衝撃力波形



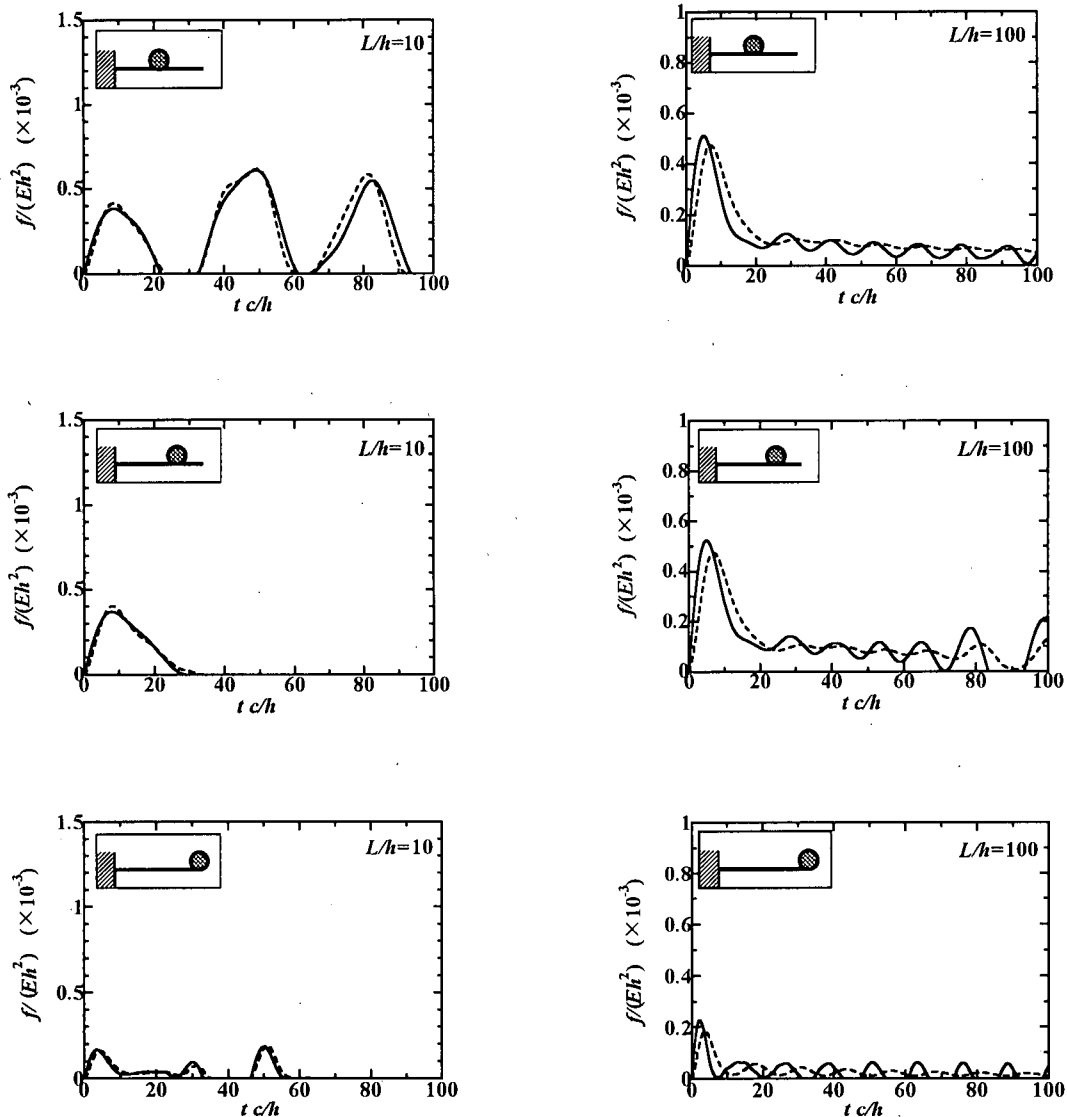


図-14 片持ち梁における衝撃力波形

#### 4. まとめ

本論文では、梁と剛球の衝突問題において接触点の局所変形の影響を簡易なばねで表示し、解析する場合のばね定数の値の算定式を正方形断面の梁に対して提示し、その妥当性、有効性の検討を行ったものである。以下に本研究で得られた結果を示す。

(1)提示したばね定数の算定式は剛球と梁の質量比  $m_c/M_0 \leq 10$ 、剛球の初期速度  $v_0/c \leq 10^{-2}$ 、梁の長さ  $10 \leq L/h \leq 100$  に適用可能であり、静的に定めたばね定数を基準にし、剛球の初期速度、剛

球と梁の質量及び梁の断面形状で表されたものである。

(2)静的方法のみで評価されたばね定数は、初期速度及び断面形状比が小さいと過大に、大きいと過小に評価する傾向にある。

(3)解析の結果、細長い片持ち梁で剛球が先端に衝突する場合を除けば、任意の支持条件、衝突位置に対して適用が可能であり、また正弦曲線タイプのみならず他の様相を示す衝撃力波形にも良好な数値妥当性が示された。

(4)提示した解法は非線形方程式を解くことなしに

解を得ることができるので、梁の衝撃力特性及び応答特性の把握に有効に利用することができる。

#### 参考文献

- 1) 衝撃問題研究小委員会：構造物の衝撃挙動と設計法，土木学会，1993.
- 2) Timoshenko, S.: Zur Frage nach der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Vol. 62, pp. 198-209, 1914.
- 3) Sun, C. T. and Chattopadhyay, S.: Dynamic response of anisotropic laminated plates under initial stress to impact of a mass, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, pp. 693-698, 1975.
- 4) Shivakumar, K. N., Elber, W. and Illg, W.: Prediction of impact force and duration due to low-velocity impact on circular composite laminates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 674-680, 1985.
- 5) Lee, Y., Hamilton, J. F. and Sullivan, J. W.: The lumped parameter method for elastic impact problems, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 823-827, 1983.
- 6) 神宮利夫, 松本浩之, 根津紀久雄, 坂本賢治：球の平板への衝突における衝撃荷重に及ぼす衝突接触挙動の影響, 日本機械学会論文集 (A編), 53 巻 496 号, pp. 2331-2335, 1987.
- 7) 戸部俊美, 加藤正名：はりの横衝撃に関する研究, 日本機械学会論文集 (第 1 部), 38 巻 314 号, pp. 2506-2513, 1972.
- 8) Christoforou, A. P. and Swanson, S. R.: Analysis of simply-supported orthotropic cylindrical shells subject to lateral impact loads, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 376-382, 1990.
- 9) Hsi-Yung, T. Wu and Fu-Kuo Chang : Transient dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact, *Computers & Structures*, Vol. 31, No. 3, pp. 453-466, 1989.
- 10) Liao, C. L. and Tsai, J. S.: Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact using a partial mixed 3-D finite element, *Computers & Structures*, Vol. 53, No. 1, pp. 53-61, 1994.
- 11) 柴田俊文, 三上隆, 佐藤昌志, 須藤敦史, 菟澤憲吉：局所変形の影響を考慮した梁の衝撃力の一計算法, 構造工学論文集, Vol. 44A, pp. 1753-1759, 1998.
- 12) Lee, E. H.: The impact of a mass striking a beam, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 7, pp. 129-138, 1940.

(1999. 1. 22 受付)

## AN APPROXIMATE METHOD FOR IMPACT FORCE DUE TO COLLISION BETWEEN A BEAM AND A SPHERE

Toshifumi SHIBATA, Takashi MIKAMI, Masashi SATOH and Atsushi SUTOH

In this study, the local deformation of beams is approximated by a linear spring-mass model, and then the equivalent spring parameter is determined by an approximate method. The spring parameter is the function of the stiffness constant determined by a static solution, the initial velocity, mass of the impactor, mass of the beam, and the cross section. The validity and effectiveness are illustrated by numerical examples. The comparison of impact forces using proposed method and Hertz's law shows that this method yields very good results.