

非線形構造システムの線形同定法

佐藤忠信¹・梶啓介²

¹正会員 工博 京都大学防災研究所教授 (〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

²学生会員 京都大学大学院工学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

本論文は強い非線形を有する構造系の同定手法を開発するのが目的である。まず、逐次型線形化法を用いて、復元力特性に関する情報が全く未知である非線形構造系の応答を線形構造モデルで再現する手法を提案する。さらに、非線形復元力モデルが Versatile 型復元力モデルで表現される構造系において、これまで困難とされていた累乗パラメータを含むすべてのパラメータを同定する手法を開発する。また、観測値に異常値が混入した場合を対象として、異常値の影響を受けないロバストカルマンフィルターを開発し、これを Versatile 型復元力モデルのパラメータ同定に適用する。観測値としては、非線形 2 自由度構造系と非線形 8 自由度構造系の応答シミュレーション結果にノイズを混入したものをを用いた。

Key Words: *adaptive Kalman filter, versatile model, recursive linearization, robust Kalman filter*

1. 概説

本研究は構造物の動特性の把握を非線形構造同定と定義して、そのアルゴリズムを開発することを目的としている。著者のこれまでの研究では、その復元力モデルが既知のものとして与えられていなければならなかった^{1), 2), 3)}。しかし、現実には非線形復元力モデルを事前に決定できないことが多い。そこで、本研究では復元力モデルの形状が未知である非線形構造物を対象に、その応答を剛性と粘性定数が時々刻々と変化する線形構造物として再現する手法を最初に述べる。

次に、非線形復元力モデルの設定法に関する考察を行った。非線形復元力モデルとしては、Bi-linear 型復元力モデルや Tri-linear 型復元力モデルなど数多くのモデルが提案されている。しかし、非線形復元力モデルは複雑なものが多く、その適用には困難が伴う。そこで、本研究では比較的少数のパラメータで多様な履歴形状を表現できる Versatile 型復元力モデル⁴⁾に着目した。Versatile 型復元力モデルには累乗のパラメータが存在するため、著者のこれまでの研究^{1), 2), 3)}ではこのパラメータを既知であるとして取り扱ってきた。本研究では、多次元 Versatile 型復元力モデルを提案することにより、観測方程式を線形化し、累乗のパラメータを含むす

べての形状パラメータの同定を行う。

本研究では、モデルのパラメータの決定には、既に開発済みである適応型カルマンフィルター¹⁾を用いたが、観測値に異常値が混入すると、その後の同定値の信頼性は極端に悪くなる。そこで、観測値が有効であるか否かをあらかじめ診断し、有効な観測値のみ同定に用いる必要がある。こうした手法はロバスト推定法と呼ばれ、この概念を導入したロバスト適応型カルマンフィルター³⁾を開発して、観測値に異常値が含まれている場合における Versatile 型復元力モデルの形状パラメータの同定も行う。

2. 適応型カルマンフィルター

ここでは、適応型カルマンフィルターのアルゴリズムについて簡単に説明する。適応型カルマンフィルターの導出については文献⁴⁾を参考にすればよい。今、対象とする系の状態 $t-1$ から状態 t への遷移が次式の状態方程式で与えられているとする。

$$x_t = \Phi_{t-1} x_{t-1} + \Gamma_{t-1} w_{t-1} \quad (1)$$

ここで、 x_t は状態量ベクトル、 Φ は状態遷移行列、 w_t はシステムノイズベクトル、 Γ_t はシステムノイズ

に関する遷移行列である。また、状態量のうち幾つかは観測値として与えられて、次式のような観測方程式が定義できる。

$$y_t = H_t x_t + v_t \quad (2)$$

ここで、 y_t は観測量ベクトル、 H_t は観測行列、 v_t は観測ノイズベクトルである。式(1)、(2)が与えられているとき、適応型カルマンフィルターのアルゴリズムは以下の6ステップで定義できる。

ステップ1: 状態量、誤差共分散行列の初期値 \hat{x}_0 、 P_0 を設定する。

ステップ2: 状態量の事前推定値 \bar{x} と事前誤差共分散行列 M_t を求める。

$$\bar{x}_t = \Phi_{t-1} \bar{x}_{t-1} + \Gamma_{t-1} \bar{w}_{t-1} \quad (3)$$

$$M_t = \Phi_{t-1} P_{t-1} \Phi_{t-1}^T + \Gamma_{t-1} Q_{t-1} \Gamma_{t-1}^T \quad (4)$$

ステップ3: 観測後の誤差共分散行列を求める。

$$P_t = (\lambda_t M_t^{-1} + H_t^T R^{-1} H_t)^{-1} \quad (5)$$

ステップ4: カルマンゲイン K_t を求める。

$$K_t = P_t H_t^T R^{-1} \quad (6)$$

ステップ5: 状態量の最尤推定値 \hat{x}_t を求める。

$$\hat{x}_t = \bar{x}_t + K_t (y_t - H_t \bar{x}_t) \quad (7)$$

ステップ6: 時刻を更新してステップ2へ戻る。

ここで、 R は観測誤差共分散行列である。また、 λ_t は忘却係数と呼ばれ、 $\lambda_t \leq 1.0$ であり、その値が小さいほど過去の観測値を忘却し、新しい観測値に依存した同定を行うことができる。 $\lambda_t = 1.0$ とすると通常のカルマンフィルターになる。カルマンフィルターはすべての観測値の重みを同等として扱うので、対象とする系が非定常の特性を有する場合には同定手法として適さない。そこで、カルマンフィルターに忘却係数を導入し、過去の観測値の重みを小さくす

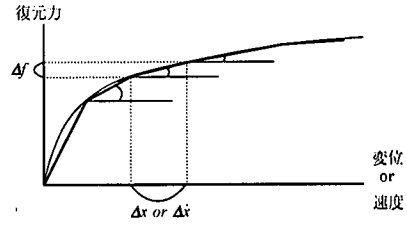


図-1 逐次型線形化法の概念

ることにより、新しい観測値に依存した同定を行えるようにして、対象とする系の非定常性に追従できるようにしたのが適応型カルマンフィルターである。

3. 逐次型線形化法を用いた非線形構造システムの同定

(1) 逐次型線形化法

非線形モデルの応答を線形モデルで再現する研究には、佐藤・竹井¹⁾の研究がある。この研究では非線形モデルの応答を、時々刻々と粘性定数と剛性が変化する線形モデルの応答と考え、適応型カルマンフィルターを用いて応答の再現を行っている。この研究では非線形性の弱いモデルの応答の再現にとどまっておらず、非線形性の強いモデルの応答は再現できていない。この研究では、復元力と変位(あるいは速度)との関係を示す履歴曲線における時刻0(原点)と時刻 t の点を結ぶ割線の傾きを同定していたので、非線形性の強いモデルの応答の追従性が悪かった。そこで、図-1に示すように観測値を増分表現で与えることで、復元力と変位(あるいは速度)との関係を示す履歴曲線における時刻 $t-1$ と時刻 t の点を結ぶ割線の傾きとして、剛性と粘性減衰定数を同定することにより、非線形復元力を同定する。

(2) 同定手法

時刻 $t-1$ と時刻 t における、地震外力が作用する n 自由度線形構造システムの運動方程式を応答値 x_t の増分形で表現すると、次式で与えられる。

$$M(\Delta \ddot{x}_t + \Delta \ddot{x}_{g,t}) = -C \Delta \dot{x}_t - K \Delta x_t \quad (8)$$

ここで、 M は質量マトリックス、 C は減衰マトリックス、 K は剛性マトリックス、 x_t は構造物の地盤に対する相対変位、 $\ddot{x}_{g,t}$ は地震による地動加速度を示している。なお、 Δ は増分オペレータであり、 $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ である。減衰マトリックスと剛性マトリックスの各成分はそれぞれ以下のように定義す

る。

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

式(9)、(10)を式(8)に代入すると、次式で得られる。

$$\begin{cases} m_1 (\Delta \ddot{x}_1 + \Delta \ddot{x}_g) \\ m_2 (\Delta \ddot{x}_2 + \Delta \ddot{x}_g) \\ \vdots \\ m_n (\Delta \ddot{x}_n + \Delta \ddot{x}_g) \end{cases} = \begin{bmatrix} h & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & h \end{bmatrix} \begin{cases} c_1^T \\ k_1^T \\ \vdots \\ c_n^T \\ k_n^T \end{cases} \quad (11)$$

ただし、 h は次式で与えられる。

$$h = \{\Delta \dot{x}_1 \quad \cdots \quad \Delta \dot{x}_n \quad \Delta x_1 \quad \cdots \quad \Delta x_n\} \quad (12)$$

式(11)を観測方程式として、適応型カルマンフィルターを用い、減衰マトリックス C と剛性マトリックス K の各成分の同定を行う。なお、状態方程式は定常過程と考え、時刻 t から $t+1$ への未知パラメータの状態遷移行列は単位行列で表されるものと仮定した。

(3) 解析モデル

前節までに展開した逐次型線形化法による非線形構造システムの同定アルゴリズムの有用性を検証するために、非線形2自由度モデルを対象として数値解析を行う。図-2に解析モデルを一般の n 自由度系として示した。質点 $i-1$ と質点 i 間における非線形復元力モデルとしては、次式で表される Versatile 型復元力モデルを用いる。

$$\dot{z}_i = k_i \dot{u}_i - \alpha_i |\dot{u}_i| |z_i|^{p_i-1} z_i - \beta_i \dot{u}_i |z_i|^{n_i} \quad (13)$$

ここで、 z_i は非線形復元力、 u_i は質点 $i-1$ と質点 i の層間変位、 k_i は初期剛性を表すパラメーター、 α_i 、 β_i および n_i は形状パラメーターである。このモデル

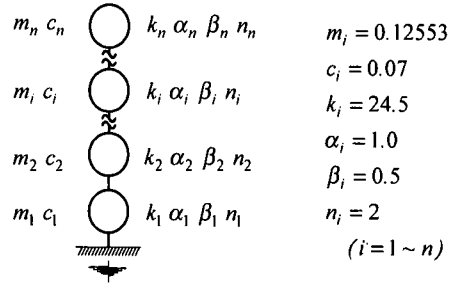


図-2 解析モデルと諸元

を用いて地震応答を模擬する。入力地震動は El Centro 地震観測記録(1940, NS)の最大加速度を 25gal に調整したものをを用いる。なお、応答計算を行う際の数値積分法は Runge-Kutta 4 次精度公式を用い、時間刻みは 0.01 秒で、10 秒間すなわち 1000 ステップを考える。一般に、観測データには観測ノイズが混入している。そこで、得られた応答波形の増分形に観測ノイズを付加して観測波形とする。応答波形に混入するノイズはホワイトノイズとし、ノイズ量は応答値と観測ノイズの標準偏差の比を基準に次式で定義する。

$$v = \frac{\sigma_{noise}}{\sigma_{resp}} \times 100 \quad (\%) \quad (14)$$

ここで、 σ_{resp} はノイズを含まない真の応答値の標準偏差、 σ_{noise} は観測ノイズとして与えたホワイトノイズの標準偏差である。ただし、本章では観測値として増分形の値を用いている。

同定では各質点の質量 m_i を既知とし、また各質点の地盤に対する構造物の相対変位と速度および絶対加速度のそれぞれの増分形 Δx_i 、 $\Delta \dot{x}_i$ 、 $\Delta \ddot{x}_i + \Delta \ddot{x}_g$ が観測値として与えられるものとする。同定の対象となるパラメーターの初期値としては、 c_{ij} は真値の 50%、 k_{ij} は Versatile 型復元力モデルの初期剛性の 50%とすると、状態量ベクトルの初期値は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \{c_{11} \quad c_{12} \quad k_{11} \quad k_{12} \quad c_{21} \quad c_{22} \quad k_{21} \quad k_{22}\}^T \\ &= \{0.07 \quad -0.035 \quad 24.5 \quad -12.25 \\ &\quad -0.035 \quad 0.035 \quad -12.25 \quad 12.25\}^T \quad (15) \end{aligned}$$

また、推定誤差共分散行列の初期値 P_0 と観測誤差共分散行列 R はそれぞれ次式で与える。

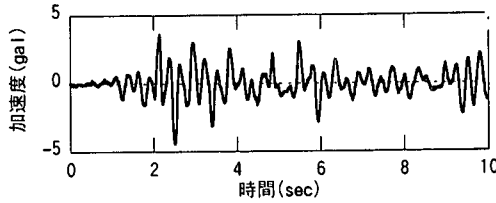


図-3 観測された加速度応答 (増分系, 質点1)

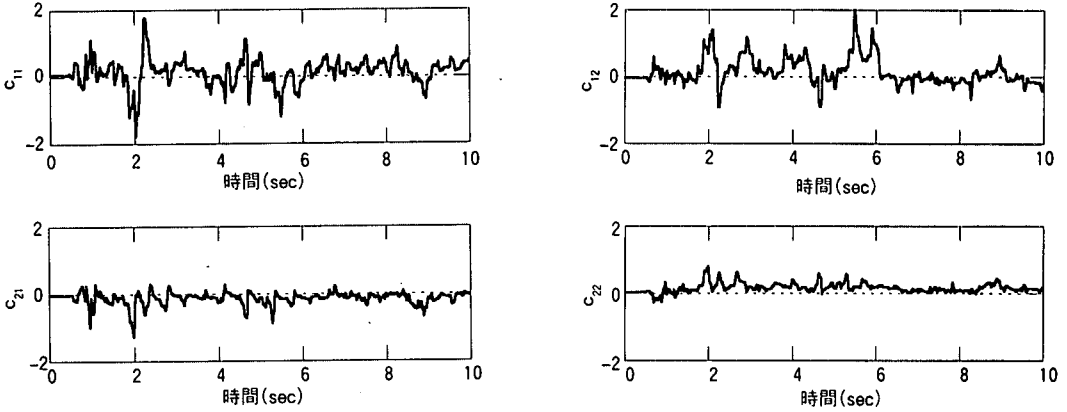


図-4 同定された減衰マトリックス (ノイズ1%, $\lambda_t = 0.825$)

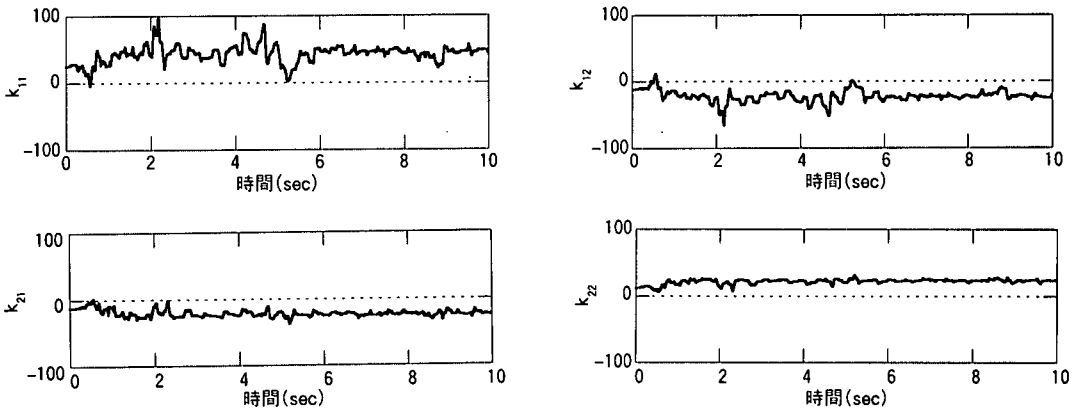


図-5 同定された剛性マトリックス (ノイズ1%, $\lambda_t = 0.825$)

$$P_0 = 0.01 \times \text{diag}\{\dots x_{0i}^2 \dots\} \quad (16)$$

$$R = rI \quad (17)$$

ここで, x_{0i} は \hat{x}_0 の第 i 要素を示し, $r = 0.00001$ とする。以下の解析ではこの r の値を用いる。この値は経験的に求めたものである。

(4) 解析結果及び考察

式(14)の v を 1% とした場合の構造物の応答値を用いて同定を行う。図-3 に与えられた観測値の一例

(質点1における加速度)を示す。線形構造モデルにより非線形応答に追従するためには、より新しい観測値に依存した同定を行う必要がある。そこで、忘却係数は $\lambda_t = 0.825$ とかなり小さい値を設定した。 λ_t の値が与えられた時の有効な観測時間ステップの数は $1/(1-\lambda_t)$ で与えられるので、この場合は約 6 ステップの観測値が有効である。図-4 は同定された減衰マトリックス、図-5 は同定された剛性マトリックスの時刻歴である。これらの同定されたパラメータを用いて応答の再現を行う。その際、増分形に対する Newmark の β 法⁵⁾を用いて応答計算を行う。ま

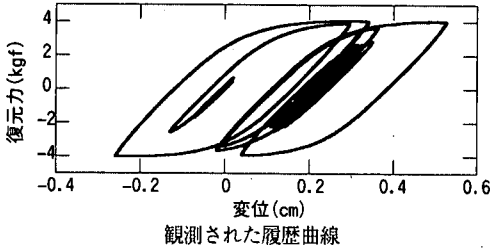


図-6 履歴曲線 (ノイズ 1%, $\lambda_r = 0.825$)

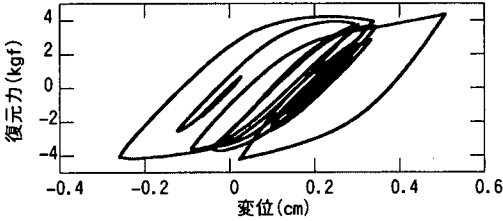


図-7 応答変位 (ノイズ 3%, $\lambda_r = 0.825$)

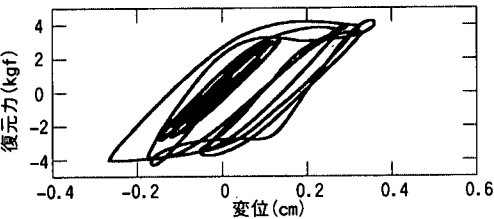


図-8 再現された履歴曲線(ノイズ 3%, $\lambda_r = 0.825$)

た、線形加速度法を用いるため、 $\beta = 0.16667$ とする。図-6は、1層の観測された履歴曲線と再現された履歴曲線の比較である。この図から、十分な応答の再現が行われていることがわかる。

次に、式(14)の v が3%の場合の同定を行う。忘却係数は $\lambda_r = 0.825$ とした。図-7は、質点1における再現された変位応答と観測された変位応答とを比較したものである。応答変位に残留変位が見られる約5.0秒以降、変位が追従できていない。観測ノイズの影響を軽減するためには、できるだけ多くの観測ステップの観測値を用いて同定をする必要があるが、ここでは非定常動特性の追従性を高めるために少ない観測ステップを用いて同定を行っている。したがって、再現応答変位が残留変位に追従できていないのは、ノイズの影響のために同定値が十分収束

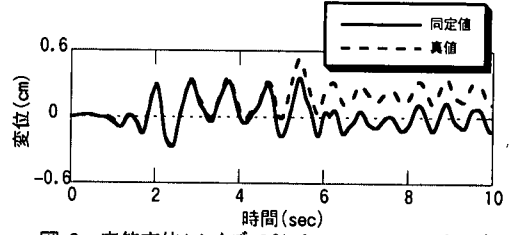


図-9 応答変位(ノイズ 3%, $\lambda_r = 0.825$, ローカルな繰り返し 2回, $w = 1.0$)

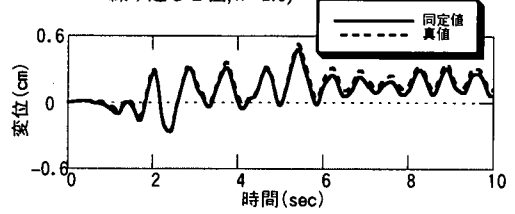


図-10 応答変位(ノイズ 3%, $\lambda_r = 0.825$, ローカルな繰り返し 2回, $w = 1.05$)

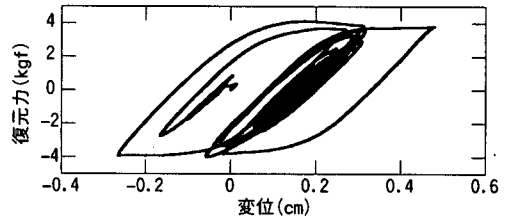


図-11 履歴曲線(ノイズ 3%, $\lambda_r = 0.825$, ローカルな繰り返し 2回, $w = 1.05$)

していないためと考えられる。図-8は再現された1層の履歴曲線である。変位の再現性が悪いので履歴曲線もうまく再現されていない。そこで、重み付きローカルな繰り返し⁶⁾を適応型カルマンフィルタに導入する。重み付きローカルな繰り返しとは、時刻 t において同定された状態量と推定誤差共分散行列を時刻 $t-1$ に同定された状態量とみなして、再び時刻 t で同定を行い、それを繰り返すというものである。その際、推定誤差共分散行列には重みを掛ける。

$$\hat{x}_t^{(j)} = \hat{x}_{t-1}^{(j-1)} \quad (18)$$

$$P_{t-1}^{(j)} = \frac{1}{\lambda'} P_t^{(j-1)} \quad (19)$$

ここで、 j はローカルな繰り返しの回数、 λ' はローカルな繰り返しにおける忘却係数であり、 λ' の逆数はローカルな繰り返しにおける重みに等しい。したがって、グローバルな計算(時刻 $t-1$ から t への遷移)では λ 、ローカルな繰り返しでは λ' と2種類の忘却係数を用いていることになる。

v が 3% の場合に、ローカルな繰り返し 2 回、 $\lambda' = 0.825$ として同定を行った結果を用いて再現された質点 1 における変位応答と観測された変位応答の比較を図-9 に示す。この図から明らかなように、残留変位に対する追従性は改善されていない。そこで、 $\lambda' = 0.785$ として同定を行った。図-10 は同定された構造パラメータを用いて再現した質点 1 の応答変位である。 λ' を少し小さくすることにより、残留変位への追従性が良くなったことがわかる。また、質点 1 における再現された履歴曲線を図-11 に示す。この図より、重み付きローカルな繰り返しを行うことで、残留変位にも追従でき、応答の再現性が向上していることがわかる。

4. Versatile 型復元力モデルの同定

(1) 同定手法

非線形 n 自由度モデルの質点 i における運動方程式は次式で与えられる。

$$m_i(\ddot{x}_i + \ddot{x}_g) + c_i \dot{u}_i + z_i - (1 - \delta_m)(c_{i+1} \dot{u}_{i+1} + z_{i+1}) = 0 \quad (20)$$

ここで、 m_i は質点 i の質量、 x_i は質点 i の地盤に対する相対変位、 c_i は質点 i の粘性減衰定数、 u_i は質点 $i-1$ と質点 i の層間変位であり、 $u_i = x_i - x_{i-1}$ で表され、 $i=0$ のとき $x_0 = 0$ とする。 δ_m はクロネッカーのデルタであり、 $i=n$ のとき値 1 をもち、それ以外では 0 となる。 z_i は質点 $i-1$ と質点 i 間の層間復元力であり、式(13)で表される Versatile 型復元力モデルを用いる。

著者の一人が行ったこれまでの研究^{1), 2)}では、Versatile 型復元力モデルの形状パラメータ n_i を既知として、 α_i 、 β_i および k_i を同定している。本研究では、 n_i を含めたすべてのパラメータを同定するために、式(13)の右辺第 2 項と第 3 項の n_i に 1 から m までの自然数を代入した項の和として、多次元 Versatile 型復元力モデルを次式のように定義する。

$$\dot{z} = k_i \dot{u}_i - \sum_{j=1}^m \left\{ \alpha_{ij} |\dot{u}_i| |z_i|^{j-1} z_i + \beta_{ij} \dot{u}_i |z_i|^j \right\} \quad (21)$$

ここで、 α_{ij} 、 β_{ij} は質点 i と質点 $i-1$ 間の Versatile 型復元力モデルにおける形状パラメータ n_i に j を代入した項のパラメータを示す。したがって、多次元 Versatile 型復元力モデルには、 n_i の値が 1 から m 間で変化するのに対応した m 個の α_i と β_i が存在する。非線形復元力 z_i は式(20)を z_i の漸化式と考えると、以下のように与えられる。

$$z_i = -c_i \dot{u}_i - \sum_{j=1}^m m_j (\ddot{x}_i + \ddot{x}_g) \quad (22)$$

観測値として、各質点の絶対加速度応答 $\ddot{x}_i + \ddot{x}_g$ と地盤に対する相対速度応答 \dot{x}_i が得られ、各質点の質量 m_i は既知とする。また、各質点の粘性減衰定数 c_i は線形領域での同定が可能であるから、ここでは既知とすると、式(22)より非線形復元力 z_i が観測値として得られる。式(21)から明らかなように非線形復元力 z_i は z_i の一階微分の形で与えられているので、式(21)を式(20)に代入するためには z_i を積分して z_i にしなければならない。そこで、台形公式²⁾を用いて式(21)を時間積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta z_i(t) &= \frac{1}{2} k_i \{ \dot{u}_i(t) + \dot{u}_i(t-1) \} \Delta t \\ &- \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{2} \alpha_{ij} \{ \dot{u}_i(t) |z_i(t)|^{j-1} z_i(t) + \dot{u}_i(t-1) |z_i(t-1)|^{j-1} z_i(t-1) \} \Delta t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \beta_{ij} \{ \dot{u}_i(t) |z_i(t)|^j + \dot{u}_i(t-1) |z_i(t-1)|^j \} \Delta t \right] \quad (23) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta z_i(t)$ は時刻 t における非線形復元力の増分である。式(23)では、非線形復元力が増分形で表現されているので、式(20)も増分形で表現しなければならない。時刻 t と時刻 $t-1$ における式(20)を考え、その差を取ると運動方程式が増分形で与えられる。その式を変形すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} m_i (\Delta \ddot{x}_i + \Delta \ddot{x}_g) + c_i \Delta \dot{u}_i - (1 - \delta_m) c_{i+1} \Delta \dot{u}_{i+1} \\ = -\Delta z_i + (1 - \delta_m) \Delta z_{i+1} \quad (24) \end{aligned}$$

式(23)を式(24)に代入すると以下のような観測方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} m_1 (\Delta \ddot{x}_1 + \Delta \ddot{x}_g) - c_1 \Delta \dot{u}_1 + c_2 \Delta \dot{u}_2 \\ m_2 (\Delta \ddot{x}_2 + \Delta \ddot{x}_g) - c_2 \Delta \dot{u}_2 + c_3 \Delta \dot{u}_3 \\ \vdots \\ m_n (\Delta \ddot{x}_n + \Delta \ddot{x}_g) - c_n \Delta \dot{u}_n \end{Bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} h_1 & -h_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & -h_3 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & h_i & -h_{i+1} & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & h_{n-1} & -h_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & h_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (25) \end{aligned}$$

$$h_i = \{K_i, A_{i1}, B_{i1}, \dots, A_{ij}, B_{ij}, \dots, A_{im}, B_{im}\} \quad (26)$$

$$x_i = \{k_i, \alpha_{i1}, \beta_{i1}, \dots, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \dots, \alpha_{im}, \beta_{im}\}^T \quad (27)$$

$$K_i = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_i(t) + \dot{u}_i(t-1) \} \Delta t \quad (28)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_i(t) z_j(t) \}^{j-1} z_j(t) + \{ \dot{u}_i(t-1) z_j(t-1) \}^{j-1} z_j(t-1) \} \Delta t \quad (29)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_i(t) z_j(t) \}^j + \{ \dot{u}_i(t-1) z_j(t-1) \}^j \} \Delta t \quad (30)$$

式(25)を観測方程式としてカルマンフィルターを用いて、パラメータ k_i , α_{ij} , β_{ij} の同定を行う。前述のように、 n_i の値が1から m まで変化するのに対応してそれぞれ m 個の α_{ij} と β_{ij} が存在するが、同定を行うと真値の n_i に対応する α_{ij} , β_{ij} のみが値を持ち、それ以外の α_{ij} , β_{ij} がほぼ0.0に収束することによって、パラメータ n_i を同定することができる。なお、未知パラメータの状態方程式は定常過程とし、時刻 t から $t+1$ への状態遷移行列は単位行列で表されると仮定した。

(2) 解析モデル

前節までに展開した多次元 Versatile 型復元力モデルの形状パラメータを同定するアルゴリズムを用いて、図-2に示した非線形多自由度モデル(2自由度系と8自由度系を対象)を用いて数値解析を行う。3.(3)で述べた方法と同様にして応答波形を作成する。さらに3.(3)で述べた方法と同様にして1%のホワイトノイズを付加し、観測波形とする。

同定は式(24)からわかるように、各質点の絶対加速度 $\ddot{x}_i + \ddot{x}_g$ と地盤に対する相対速度 \dot{x}_i 、及びそれらの増分形 $\Delta \dot{x}_i + \Delta \dot{x}_g$, $\Delta \dot{x}_i$ が観測値として与えられなければならない。各質点の質量、粘性減衰定数は既知とする。また、多次元 Versatile 型復元力モデルは式(21)において $m=5$ としたものを考える。同定の対象となるパラメータの初期値は、 k_i については真値の50%を、 α_{ij} , β_{ij} については0.0を与える。したがって、状態量ベクトルの初期値は次式で与えられる。

$$x_{i0} = [12.25 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (31)$$

推定誤差共分散行列の初期値は、式(16)と同様に与える。ただし、 α_{ij} と β_{ij} の初期値に0.0を与えてい

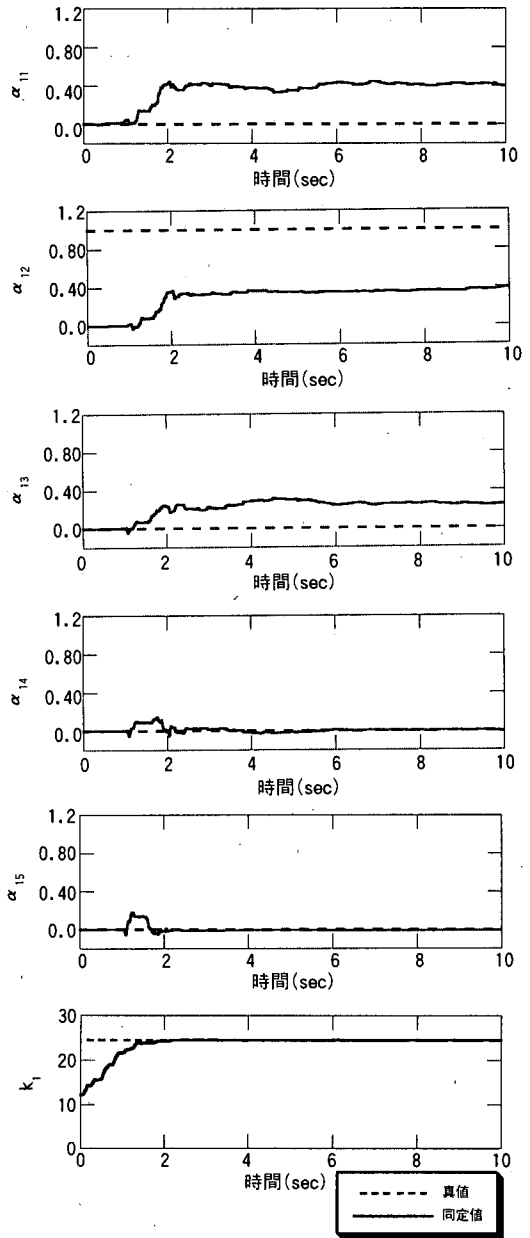


図-12 同定されたパラメータ α_{ij} , k_i の時刻歴

るため、その部分については $x_{0i} = 1.0$ と仮定する。観測誤差共分散行列は式(17)を用いる。

(3) 解析結果と考察

図-12は非線形2自由度モデルを対象に解析した場合における各質点の多次元 Versatile 型復元力モデルのパラメータ α_{ij} , k_i の同定値の時刻歴である。これらの図より、真値である $n_i = 2.0$ に近い j の値に対応する α_{ij} はある値を持ち、それ以外の j に対応す

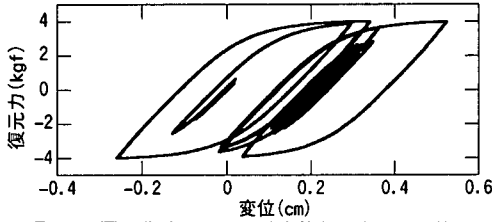


図-13 履歴曲線(1回目の同定値と同定モデル使用)

表-1 パラメータの同定値

パラメータ	同定回数	1	2	3	4	真値	
α_1	n_1	1	0.4145	0.3760	-0.0905		
		2	0.3636	0.3743	1.1315	1.0057	1.0000
		3	0.2465	0.3241	-0.0308		
		4	0.0011	-0.0508			
		5	-0.0084				
	削除基準値	0.1243	0.1128	0.3395			
α_2	n_1	1	0.3318	0.3263	0.1548		
		2	0.4982	0.7303	0.9474	1.0200	1.0000
		3	0.3445	0.0573			
		4	-0.1057				
		5	0.0114				
	削除基準値	0.1489	0.2191	0.2842			
β_1	n_1	1	0.1350	0.2401	0.0875		
		2	0.2296	0.3185	0.4188	0.5046	0.5000
		3	0.2306	0.0127	0.0213		
		4	-0.0951				
		5	0.0141				
	削除基準値	0.0692	0.0956	0.1258			
β_2	n_1	1	0.1416	0.1201	-0.0690		
		2	0.1872	0.2894	0.4928	0.4621	0.5000
		3	0.1132	0.0528			
		4	-0.00226				
		5	-0.00261				
	削除基準値	0.0562	0.0868	0.1478			
k_1		24.5472	24.5914	24.5689	24.5638	24.5000	
k_2		24.4046	24.4185	24.4008	24.4221	24.5000	

α_{ij} はほぼ 0.0 に収束しているが、完全に 0.0 になってはいないことがわかる。また、 k_i は約 2.0 秒で真値に収束している。図-13 は質点 1 における α_{ij} 、 β_{ij} 及び k_i のすべての同定値を用いて再現した履歴曲線である。履歴曲線の再現にあたっては、同定値がわずかであるが振動しているため、801 ステップから 1000 ステップまでの 200 ステップ、すなわち 8.0 秒から 10.0 秒までの 2.0 秒間における同定値の平均値を用いている。図-13 を観測された履歴曲線である図-6 と比較すると、真値と異なるパラメータの値を用いても、精度良く履歴曲線が再現されている。したがって、多次元 Versatile 型復元力モデルは非常に柔軟性があるモデルだといえる。1 回の同定では図-12 に示したように複数の α_{ij} と β_{ij} が値を持ち、 n_i を同定することはできない。そこで、各質点における α_{ij} と β_{ij} の絶対値の最大値の 30% を削除基準値とし、 $n_i = j$ に対応する α_{ij} と β_{ij} がともに削除基準値以下の場合、それらの項を削除して新たな多次元 Versatile 型復元力モデルを作る。 $n_i = j$ に対して α_{ij} 、 β_{ij} のいずれか一方のみが削除基準値を下回る場合は、その項は削除しない。新たに作られた多次元 Versatile 型復元力モデルを用いて 2 回

表-2 多次元 Versatile 型復元力モデルの累乗の係数

質点	同定回数				
	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
1	1,2,3	1,2	1,2	1,2	1,2
2	1,2,3	2	2	2	2
3	1,2,3	2	2	2	2
4	2,3,4	2	2	2	2
5	1,2,3,4	1,2	2	2	2
6	1,2,3,4	1,2	1,2	2	2
7	1,2,3,4	1,2	1,2	1,2	1,2
8	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5

表-3 パラメータの同定値(5回目)

質点	n	α	β	質点	n	α	β
1	1	0.0280	0.2018	7	1	-0.1688	0.1342
	2	1.0185	0.4377		2	1.0918	0.3990
2	2	1.0324	0.4863	8	1	0.0013	0.1103
	3	2	1.0177		0.5047	2	0.0357
3	2	1.0446	0.4535	3	0.8455	0.0143	
	5	2	0.9868	0.5190	4	0.1374	-0.3858
6	2	0.9939	0.4893	5	-0.1627	0.1784	

目の同定を行う。1 回目の同定における α_{1j} については、 $|\alpha_{11}| = 0.4145$ が最大値であり、その 30% である 0.1243 が削除基準値となる。したがって、削除基準値以下である α_{14} 、 α_{15} すなわち $n_i = 4.0$ と 5.0 に対応する項は削除の候補となる。 β_{1j} については、 $|\beta_{11}| = 0.2306$ が最大値なので削除基準値は 0.06918 となり β_{15} すなわち $n_i = 5.0$ に対応する項が削除の候補となる。質点 1 において α_{1j} 、 β_{1j} に共通して削除されるのは $n = 5.0$ に対応する項だけである。したがって、質点 1 においては α_{15} と β_{15} が削除され、 α_{14} は削除されない。 α_{2j} 、 β_{2j} についても同様の操作をすると α_{24} 、 α_{25} 、 β_{24} 、 β_{25} の項が削除される。1 回目 ($i \geq 2$) 以降の同定を行う際の α_{ij} 、 β_{ij} 及び k_i の初期値は、 $i-1$ 回目の同定値とする。また、推定誤差共分散行列の初期値は 1 回目の同定と同様に式 (16) で与える。ただし、1 回目の推定誤差共分散行列の初期値と同じオーダーにするために 100 倍する。表-1 に 2, 3, 4 回目の同定値を示す。2, 3 回目の同定後に 1 回目の同定後と同様に項の削除を行った。2 回目の同定で、 α_{14} 、 α_{23} 、 β_{14} 、 β_{23} が削除され、3 回目の同定で α_{11} 、 α_{13} 、 α_{21} 、 β_{11} 、 β_{13} 、 β_{21} が削除され、真値である $n_i = 2.0$ に対応する項だけが残った。4 回目の同定で α_{12} 、 β_{12} がほぼ真値に収束している。したがって、4 回同定を繰り返すことで多次元 Versatile 型復元力モデルのすべての形状パラメータ α_{ij} 、 β_{ij} 、 k_i 、 n_i を同定することができた。次に非線形 8 自由度モデルを対象に、非線形 2 自由度モデルを対象にした場合と同様に解析した結果を表-2、表-3 に示す。表-2 には同定後に削除されずに残った項の n_i の値を示している。したがって、1 回目の同定後に質点 1 では、 $n_i = 4, 5$ に対応する α_{ij} 、 β_{ij} の項が削除され、 $n_i = 1 \sim 3$ に対応する α_{ij} 、 β_{ij} の項が残ったことになる。表-3 は 5 回目の同定における各パラメータの収束値を示す。表-2、表-3 より、

5 回同定を繰り返すことにより、削除される項がなくなっている。質点 2~6 では真値の $n_i = 2.0$ に対応する項だけが残し、 k_i , α_{ij} , β_{ij} は真値に収束している。しかし、質点 1, 7, 8 では真値の $n_i = 2.0$ に対応する項が削除されるということはないが、複数の α_{ij} と β_{ij} が値を持ってしまい、一つに絞り込むことはできなかった。質点 1 では、 $n_i = 1.0$ に対応する α_{11} はほぼ 0.0 になっているが、 β_{11} は 0.2018 と比較的大きな値となっている。しかし、式(21)より β_{11} を含む項は $\beta_{11} \dot{u}_1 |z_1|$ と $|z_1|$ に比例しているのに対し、 β_{12} を含む項は $\beta_{12} \dot{u}_1 |z_1|^2$ と $|z_1|^2$ に比例している。したがって、 β_{11} が比較的大きな値であっても、履歴に与える影響は小さいので、 $n_i = 1.0$ に対応する項が削除されずに残った。一方、質点 7, 8 では、履歴は膨らみが小さく、線形に近い形状になっている。したがって、Versatile 型復元力モデルとしての非線形特性が十分に現れていなかったため、 n_i を同定できなかった。また、紙面の関係で図示はしていないが、5 回目の同定値を用いて再現した履歴は、観測された履歴に極めて近い形状となった。

(4) ロバスト性の導入

a) 理論の概要

ロバスト適応型カルマンフィルタはカルマンフィルタにおける式(5)の誤差共分散行列と式(6)のカルマンゲインを以下のように書きかえることにより得られる。なお、ロバスト適応型カルマンフィルタの誘導は付録に示した。

$$P_i = (\lambda_i M_i^{-1} + H_i^T W_i R^{-1} H_i)^{-1} \quad (32)$$

$$K_i = P_i H_i^T W_i R_i^{-1} \quad (33)$$

ここで、 W_i は対角行列であり観測値の信頼性を示す重みを対角要素に配した行列であり、重みの各成分は観測値の残差 $v_i = y_i - H_i \hat{x}_i$ に基づいて次式で与えられる。

$$w_i = \begin{cases} \left\{ 1 - \left(\frac{v_i}{as} \right)^2 \right\}^2 & |v_i| < as \\ 0.0 & |v_i| \geq as \end{cases} \quad (34)$$

ここで、 w_i と v_i は各々 W_i と v_i の i 成分であり、 s はスケール定数と呼ばれ、残差の標準的な大きさを示す。また、 a はスケール定数の何倍まで観測値として許容するかを決める定数である。ロバスト適応型

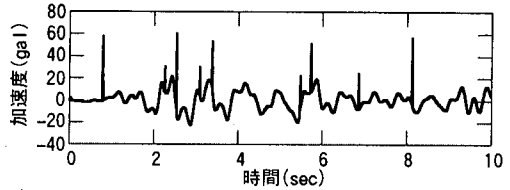


図-14 観測された加速度応答(異常値 10 個混入, 質点 1)

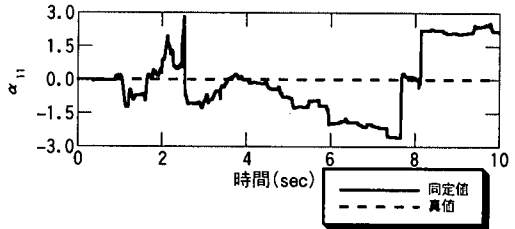


図-15 パラメータ α_{11} の同定時刻歴(カルマンフィルタ使用)

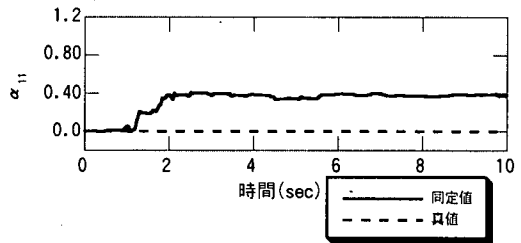


図-16 パラメータ α_{11} の同定時刻歴(ロバストカルマンフィルタ使用)

カルマンフィルタで、 $\lambda_i = 1.0$ とすれば適応型の形容詞が取れ、さらに $w_i = 1.0$ であればロバストの形容詞が取れ、通常のカルマンフィルタになる。

b) 異常値の混入した観測値の作成

非線形 2 自由度モデルを対象に数値解析を行う。

3. (3) で述べた方法と同様にして応答波形を作成し、1% のホワイトノイズを付加する。さらに、ロバストカルマンフィルタの有用性を検証するために、異常値を混入させる。異常値は、応答値の 5 倍の標準偏差を持つホワイトノイズを作成し、それを応答値 1000 ステップのうち任意の 10 ステップと入れ替えることにより混入する。また、同定の対象となるパラメータの初期値と推定誤差共分散の初期値は 4. (2) と同様に与える。多次元 Versatile 型復元力モデルにおいて $m = 5$ 、スケール定数 s は過去 10 ステップの残差の中央値とし、 $a = 10$ とする。

c) 解析結果及び考察

ここで取り扱う問題では非線形構造パラメータは定常であるので $\lambda_i = 1.0$ とする。図-14 に与えられた観測値の一例(質点 1 における加速度)を示す。図-15 に通常のカルマンフィルタを用いた場合の 1 層の

表-4 パラメータの同定値

パラメーター	同定回数	1	2	3	4	真値	
α_1	n_1	1	0.3797	-0.0916			
		2	0.3858	1.1464	1.0023	1.0024	1.0000
		3	0.2655	-0.0361			
		4	-0.0200				
		5	-0.0041				
	削除基準値	0.1157	0.3438				
α_2	n_1	1	0.3361	0.1672	0.1072		
		2	0.4839	0.9581	0.9679	1.0177	1.0000
		3	0.3268	-0.0089			
		4	-0.0934				
		5	0.0102				
	削除基準値	0.1452	0.2874	0.2903			
β_1	n_1	1	0.2428	0.0679			
		2	0.2524	0.4229	0.5058	0.5060	0.5000
		3	0.0310	0.0208			
		4	0.0180				
		5	-0.0031				
	削除基準値	0.0757	0.1289				
β_2	n_1	1	0.1170	0.1187	-0.0365		
		2	0.1796	0.3182	0.4833	0.4670	0.5000
		3	0.1235	0.0462			
		4	0.0122				
		5	-0.0082				
	削除基準値	0.0539	0.0955	0.1450			
k_1		24.5430	24.5647	24.5536	24.5500	24.5000	
k_2		24.3999	24.4504	24.4212	24.4273	24.5000	

$n=1$ に対応するパラメータ α_{11} の時刻歴を示す。また、図-16にはロバスト適応型カルマンフィルターを用いた場合の α_{11} の時刻歴を示す。両図より、通常のカルマンフィルターの場合には異常値の影響を受けて同定値が乱れているのに対し、ロバストカルマンフィルターを用いると異常値の影響を全く受けずに同定が行われていることがわかり、ロバストカルマンフィルターの有用性が示されている。表-4に同定されたパラメータを示す。ここでも、4回同定を繰り返すことでVersatile型復元力モデルのすべての形状パラメータを同定することができた。

5. まとめ

本研究では、非線形構造物を対象とし、その応答を線形構造物で再現する手法と、非線形復元力モデルであるVersatile型復元力モデルのべき乗項を含む全ての形状パラメータを同定する手法を提案した。得られた結果を以下にまとめる。

- (1) 非線形復元力に関する情報が未知である場合でも、逐次型線形化法を用いることで、非線形構造物の応答を剛性と粘性定数が時々刻々と変化する線形構造物の応答として再現することができた。
- (2) 非線形復元力がVersatile型復元力モデルで表現される非線形構造物の観測方程式を多次元Versatile型復元力モデルにより線形化し、自由度が低い場合はVersatile型復元力モデルのすべての形状パラメータを精度良く同定することができた。自由度が高い場合には、すべてのパラ

メータを同定することはできなかったが、履歴の再現は精度良く行われた。

- (3) 観測値に異常値が含まれている場合、ロバストカルマンフィルターを用いることで、異常値の影響を受けることなく、Versatile型復元力モデルのすべての形状パラメータを同定することができた。

付録A ロバスト適応型カルマンフィルターの誘導

適応型カルマンフィルターにおける評価関数は次式で与えられる。

$$J = \frac{1}{2} (y_t - H_t x_t)^T R_t^{-1} (y_t - H_t x_t) + \frac{1}{2} \lambda_t (x_t - \bar{x}_t)^T M_t^{-1} (x_t - \bar{x}_t) \quad (A1)$$

ここで、 x_t は状態量ベクトル、 y_t は観測量ベクトル、 \bar{x}_t は状態量の事前推定量ベクトル、 H_t は観測行列、 R_t は観測誤差共分散行列、 M_t は \bar{x}_t の推定誤差共分散行列、 λ_t は忘却係数である。適応型カルマンフィルターの評価関数では、忘却係数によって事前情報の信頼性に関する重み付けを行っている。観測値が有効であるか否かを診断するロバスト推定を行うためには、式(A1)で与えられる評価関数に、観測値の信頼性に関する重み W_t を導入して次式のように書き換える。

$$J' = \frac{1}{2} (y_t - H_t x_t)^T W_t R_t^{-1} (y_t - H_t x_t) + \frac{1}{2} \lambda_t (x_t - \bar{x}_t)^T M_t^{-1} (x_t - \bar{x}_t) \quad (A2)$$

重み行列 W_t は各観測値の重みを対角要素に配した行列であり、本研究では式(40)で与えている。式(A2)の両辺の変分を取り θ とおくと、最尤推定値 \hat{x}_t とカルマンゲイン K_t がそれぞれ式(38)、(39)で求められる。

参考文献

- 1) 佐藤忠信, 竹井賢二: 適応型カルマンフィルタの構築とその応用, 土木学会論文集, No584/I-42, pp.163-173, 1998.
- 2) 佐藤忠信, 菊川雅士: 非線形構造システム方程式の線形同定法, 土木学会論文集, No584/I-42, pp.175-184, 1998.
- 3) 佐藤忠信, 竹井賢二: 構造物の非線形動特性のロバスト同

- 定法, 第4回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集, pp.191-196, 1995.
- 4) Vi-Kwei Wen : Method for random vibration of hysteretic systems, Journal of the engineering mechanics division Vol.102 No.EM2, pp.249-263, 1976.
- 5) 柴田明德 : 最新耐震構造解析, 森北出版, 1981
- 6) 星谷勝, 斎藤悦郎 : データ解析と応用, 鹿島出版会, 1991.
- 7) 瀧本幸, 星谷勝 : カルマンフィルターを用いた非線形構造物の同定, 土木学会論文集, No556/ I -38, pp.179-187, 1997.
- (1998. 11. 27 受付)

LINEAR ALGORITHM TO IDENTIFY NON-LINEAR STRUCTURAL SYSTEMS

Tadanobu SATO and Keisuke KAJI

The purpose of this paper is developed efficient algorithm to identify strong non-linear characteristics of structural systems. To apply a linear optimization technique to system identification problems we proposed a method to linearize the observation equation which possesses intrinsic nonlinear characteristics. To identify non-stationary dynamic change of structural parameters we used an adaptive Kalman filter scheme in which the function of memory fading for the past observation data was added to the Kalman filter that often is used as a time marching identification algorithm. We also assigned robustness to the adaptive Kalman filter to eliminate the effect of abnormal signals contained in observed structural response. Using the developed identification scheme we can identify the structural hysteresis characteristics without any information on the constitutive relation of structural elements. For the case that the hysteresis is defined by Versatile model we can identify all shape parameters including power parameter.