

# タイで結合した一对の曲がり部材の圧縮力に 対する挙動と一解析法

石原 元<sup>1</sup>・山尾敏孝<sup>2</sup>・平井一男<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 工修 国土工営コンサルタンツ(株) (〒541-0057大阪市中央区北久宝寺町4-3-5)

<sup>2</sup>正会員 工博 熊本大学教授 工学部環境システム工学科 (〒860-0862熊本市黒髪2-39-1)

<sup>3</sup>正会員 工博 熊本工業大学教授 工学部土木工学科 (〒860-0082熊本市池田4-22-1)

タイで結合した一对の曲がり部材が圧縮力を受ける場合の解析法をアーチ理論に基づいて展開し(提案法)、圧縮力に対する挙動および座屈挙動について検討した。併せて幾何学的非線形性を考慮した骨組要素を用いた弾性有限要素解析(FEM)も行い、提案法との比較を行った。提案法はFEMとよく対応しており、その妥当性を確認した。提案法を用いると、与えられたライズ-支間比に対して座屈変形モードおよび対応する弾性座屈荷重を近似的に計算でき、曲がり部材の圧縮力に対する弾性挙動を把握できることもわかった。また、ライズ-支間比の大きな曲がり部材では圧縮力に対する挙動に及ぼす初期たわみの影響が小さくなることも判明した。

**Key Words** : curved pair members, struts, elastic buckling, rise-to-span ratio, arch theory

## 1. まえがき

外力荷重に対して、主として軸圧縮力で抵抗することを意図した部材としてアーチがある。著者らは部材のアーチ特性を考慮して、図-1(a)に示すような2本の曲がり部材を数本のタイで簡単に結合した構造を提案し、曲がり部材が軸方向の圧縮力 $H$ を受ける場合の挙動について研究を行ってきた<sup>1)</sup>。タイで結合した一对の曲がり部材(図-1(a))に軸方向圧縮力 $H$ を作用させると、1本の真直ぐな部材(図-1(b))やタイで結合した2本の真直ぐな部材(図-1(c))に比べて、座屈強度が増加し、軸直角方向の変形量も抑えられることが明らかになった。また、このときの座屈変形モードは、曲がり部材のライズ-支間比、タイの本数によって、対称1次または逆対称1次となることも判明した。

これより、タイで結合した一对の曲がり部材は、部材両端の位置が安定で圧縮力が卓越する部材として、また特に座屈強度で圧縮強度が決まってくるような細長比の大きな領域で有用な構造である。具体的な適用例としては、高橋脚、アーチ橋、主塔、圧縮力が卓越する構造部材(トラスの圧縮部材、土留工の切梁、クレーンブームなど)として、またはアーチの面外に対する補強や圧縮構造部材の補強として使用することが

考えられる。さらに、将来コスト縮減に向けて構造断面がよりスレンダーなものに変貌していった場合に、圧縮が卓越する部材や構造に適用される可能性が大いにあると予想される。

タイで結合した曲がり部材の座屈強度増加および変形量抑制と、座屈変形モードの形状には、相互に関連性がある。一般に、圧縮部材の弾性座屈荷重はオイラーの座屈荷重 $H_c$ として、次式で表される:

$$H_c = n^2 \pi^2 EI / l^2 \quad (1)$$

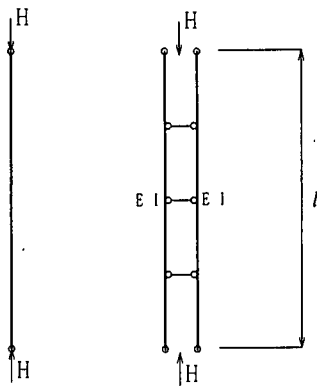
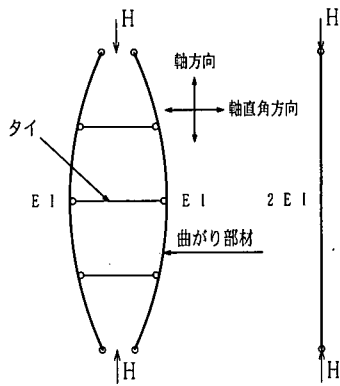
ここに、 $E$ : ヤング係数  $I$ : 断面2次モーメント

$l$ : 部材支間長(部材長)

既往の研究より、曲がり部材の座屈荷重も式(1)を用いて表せることがわかっている。最小座屈荷重 $H_{c1}$ は $n=1$ のときで、座屈変形モードは図-2(a)に示すような対称形をなす。次に、 $n=2$ をとる場合は、座屈荷重は $4H_{c1}$ となり、座屈変形モードは図-2(b)に示すような逆対称形となる。すなわち、 $n$ のとり方により曲がり部材の座屈強度および座屈変形モードが変化することになる。

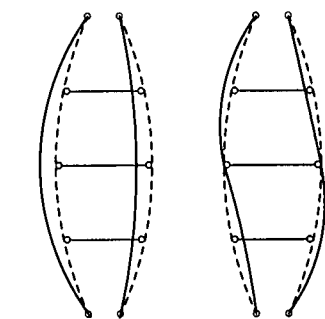
本論文では、曲がり部材の座屈変形モードに対してライズ-支間比が関係すると考え、ライズ-支間比をパラメータを選んで解析し、両者の関係を明らかにすることをひとつの目的とする。

解析方法としては、以下の2方法を採用した。



(a) 曲がり部材 (b) 真直ぐな部材 (1本) (c) 真直ぐな部材 (2本)

図-1 曲がり部材と真直ぐな部材



(a) 対称1次モード (b) 逆対称1次モード

図-2 曲がり部材の座屈変形モード

- ① 構造力学におけるアーチ理論を基本とし、軸方向変形の適合条件式に基づいてアーチ部材を軸力部材と曲げ部材として別々に考え、後で合成して定式化する解析方法。(以下この解析方法を提案法とよぶ。)
- ② 幾何学的非線形性を考慮した骨組要素を用いた弾性有限要素法による解析方法。(以下FEMとよぶ。)

本論文では、まず提案法の解析理論について述べ、その前提条件を確認するため、タイの断面積をパラメータにとり、提案法とFEMの結果比較を行った。

次に、解析結果の精度、座屈荷重算出の妥当性、座屈変形モード発生条件などの検討のため、曲がり部材のライズ-支間比をパラメータにとり、提案法とFEMとの解析結果を対比した。

なお、弾性座屈荷重およびモードは座屈固有値解析で求めるのが一般的だが、今回提案法との比較にFEM解析を用いたのは、それ以外に任意圧縮荷重作用時の変形挙動を比較検討するためである。加えて今までの研究で弾性の載荷実験を行い、FEM解析により変形挙動の比較検討を行ってきたためでもある。

最後に、曲がり部材の製作上、発生が避けられない初期たわみを与えてFEM解析を行い、圧縮力に対する挙動や座屈への影響についても調べた。

## 2. 提案法の解析理論

曲がり部材をアーチ部材として直接的に対応させて解析できることは、両者の形状から判断しても直観的に理解できる。

一般にアーチ部材は、主に軸力が作用する部材として取り扱われるが、その曲げ剛性についても考慮する必要がある。アーチ部材を軸力部材と曲げ部材とに分離して別々に解析を行い、最終的に両者を合体するこ

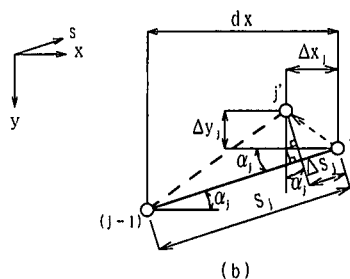
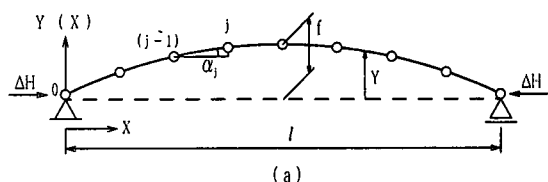


図-3 アーチの形状と変形

とによって簡明な解析が可能となることは著者の一人がすでに発表している<sup>2)</sup>。

本論文では、このような分離、合体の手法を拡大して用いて、タイで結合した曲がり部材を解析する手法の定式化を行った。

### (1) 1本の曲がり部材の適合条件式

曲がり部材を軸力部材(軸力に対してのみ抵抗する部材)として考える。この曲がり部材の形状は、式(2)で示す放物線として表されるものとする。(図-3(a)参照)

$$Y(X) = \frac{4fX(l-X)}{l^2} \quad (2)$$

今、図-3(a)のように、ひとつの曲がり部材を折線の滑節アーチと仮定する。図-3(b)に示すように、その1部材の(j-1)~jが軸圧縮力 $\Delta H$ を受けて、材長 $s_j$ が $\Delta s_j$ だけ縮み、j点が(j-1)点に対して、x、y方向に $\Delta x_j$ 、 $\Delta y_j$ だけ変位してj'点に移動したとすると、次の関係式が成立する。

$$\Delta s_j = \Delta y_j \sin \alpha_j - \Delta x_j \cos \alpha_j \quad (3)$$

これより、

$$\Delta x_j = \Delta y_j \tan \alpha_j - \Delta s_j \sec \alpha_j \quad (4)$$

このアーチの軸方向(X方向)変位を $\Delta l$ とする。この $\Delta l$ は上式の $\Delta x_j$ の総和として得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} \Delta l &= \sum_{j=1}^k \Delta x_j \\ &= \sum_{j=1}^k \Delta y_j \tan \alpha_j - \sum_{j=1}^k \Delta s_j \sec \alpha_j \end{aligned} \quad (5)$$

と書き直せる。なお、kは格間数である。

式(2)のアーチ軸線の形状を用いると、 $\tan \alpha_j$ は次式となる。

$$\tan \alpha_j = \frac{dY}{dX} = \frac{4f(l-2X)}{l^2} \quad (6)$$

滑節アーチの軸直角方向(Y方向)の変形を、式(7)により与える場合について考える。

$$y_j(x) = \sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (7)$$

この変形に対して、

$$\Delta y_j(x) = \sum_n a_n \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \Delta x \quad (8)$$

となり、式(5)の右辺第1項は次のように表せる。

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^k \Delta y_j \tan \alpha_j \\ &= \sum_n a_n \frac{n\pi}{l} \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot \frac{4f(l-2x)}{l^2} dx \\ &= \frac{16}{\pi} \cdot \frac{f}{l} \sum_n \frac{a_n}{n} \quad (n=1, 3, 5, \dots) \\ &= 0 \quad (n=2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \quad (9)$$

同様に、式(5)の右辺第2項は次式となる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \Delta s_j \sec \alpha_j &= \sum_{j=1}^k \frac{\Delta H \sec^3 \alpha_j}{A_a E} \Delta x \\ &= \frac{\Delta H}{A_a E} \int_0^l \sec^3 \alpha_j dx \\ &= \frac{\Delta H}{A_a E} \int_0^l \left( 1 + \frac{3}{2} \tan^2 \alpha_j + \frac{3}{8} \tan^4 \alpha_j + \dots \right) dx \quad (10) \end{aligned}$$

$A_a$ : アーチの断面積       $E$ : ヤング係数

ここで、

$$\int_0^l \tan^2 \alpha_j dx = \frac{16f^2}{l^4} \int_0^l (l-2x)^2 dx = \frac{16f^2}{3l} \quad (11-1)$$

$$\int_0^l \tan^4 \alpha_j dx = \left( \frac{4f}{l^2} \right)^4 \int_0^l (l-2x)^4 dx = \frac{256 f^4}{5l^3} \quad (11-2)$$

とおくことにより、式(10)は次式となる。

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta H}{A_a E} \int_0^l \sec^3 \alpha_j dx \\ &= \frac{\Delta H l}{A_a E} \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

これより、式(5)の $\Delta l$ は、式(13)で表せる。

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{16}{\pi} \cdot \frac{f}{l} \sum_n \frac{a_n}{n} \\ &\quad - \frac{\Delta H l}{A_a E} \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

( $n=1, 3, 5, \dots$ )

ただし、式(13)でのnは奇数を取り、対称変形であることに注意する必要がある。

## (2) 一对の曲がり部材(曲げ剛性=0)の適合条件式

図-4(a)において、曲げ剛性が0である一对の曲がり部材に、軸圧縮力 $H_0$ が作用する状態を考える。このとき、左側のライズ $l_1$ の曲がり部材に作用する圧縮力を $\Delta H_1$ 、この力による上端軸方向変位を $\Delta l_1$ とし、同様に右側のライズ $l_2$ の曲がり部材に作用する圧縮力を $\Delta H_2$ 、対応する上端軸方向変位を $\Delta l_2$ とする。(ただし、 $l_1 > l_2$ とする。)

これからは、 $\Delta H_1$ 、 $\Delta l_1$ 、 $\Delta H_2$ 、 $\Delta l_2$ 、およびその圧縮力により生じる軸直角方向変位 $w$ を求める式について、適合条件式を導きながら考える。

両部材に作用する圧縮力の合計を $H_0$ とすると次式となる。

$$H_0 = \Delta H_1 + \Delta H_2 \quad (14)$$

一方、タイの伸びは無視して、2本の曲がり部材が軸直角方向に同じ変形をすると仮定すると、2本の曲がり部材の上端軸方向変位 $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$ は、式(13)を参考にして、次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{16}{\pi} \cdot \frac{f_1}{l} \sum_n \frac{a_n}{n} \\ &\quad - \frac{\Delta H_1 l}{A_a E} \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f_1}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f_1}{l} \right)^4 \right\} \end{aligned} \quad (15-1)$$

$$\begin{aligned} \Delta l_2 &= \frac{-16}{\pi} \cdot \frac{f_2}{l} \sum_n \frac{a_n}{n} \\ &\quad - \frac{\Delta H_2 l}{A_a E} \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f_2}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f_2}{l} \right)^4 \right\} \end{aligned} \quad (15-2)$$

つまり、式(15)において $a_n$ がわかれば、 $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$ は求まることになる。

さらに、2本の曲がり部材は軸方向に同じ変形( $\Delta l_1 = \Delta l_2$ )をすると考えると、次式が得られる。

$$\frac{16(f_1 + f_2)}{\pi l} \sum_n \frac{a_n}{n} = \frac{\Delta H_1 l}{A_a E} R_1 - \frac{\Delta H_2 l}{A_a E} R_2 \quad (16)$$

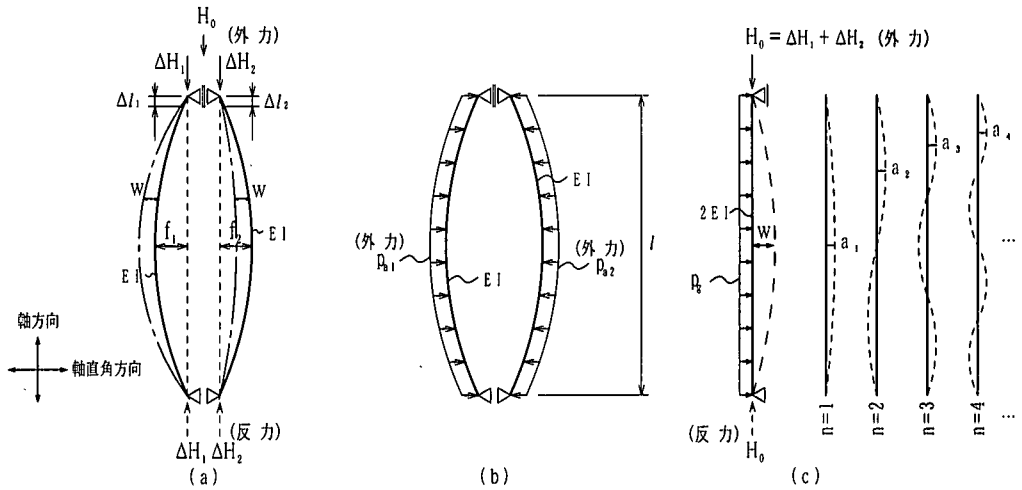


図-4 曲がり部材に作用する荷重

ここで、

$$R_1 = 1 + 8\left(\frac{f_1}{l}\right)^2 + 19.2\left(\frac{f_1}{l}\right)^4 \quad (17-1)$$

$$R_2 = 1 + 8\left(\frac{f_2}{l}\right)^2 + 19.2\left(\frac{f_2}{l}\right)^4 \quad (17-2)$$

曲がり部材に軸圧縮力 $\Delta H_1$ ,  $\Delta H_2$ を作用させたこれまでの状態では、曲がり部材の曲げ剛性を0と仮定してきたので、式(2)の放物線で与えられるこの2本の曲がり部材を安定保持させるためには、図-4(b)に示す等分布荷重 $p_{a1}$ ,  $p_{a2}$ を作用させる必要がある。その大きさは次式で表せる。

$$p_{a1} = \frac{8f_1}{l^2} \Delta H_1 \quad (18-1)$$

$$p_{a2} = \frac{8f_2}{l^2} \Delta H_2 \quad (18-2)$$

しかし、この状態では両曲がり部材のライズが異なるので、等分布荷重の差 $p_a$ が不均衡荷重として残る。

$$p_a = p_{a1} - p_{a2} \quad (19)$$

### (3) 曲げ剛性を有する曲がり部材の変形

次に、1本の曲がり部材の曲げ剛性を $EI$ とすると、一對の逆向きの放物線形状の曲がり部材は、ライズ-支間比が小さければ、これを図-4(c)に示すように、直線状の単純梁に近似的に置換できる。一對の曲がり部材は数本の両端ピンの部材で結合されているだけなので、曲がり部材の間隔には影響されない。つまり、一對の曲がり部材は一体としてでなく、独自に挙動できるものとしているので、曲げ剛性 $2EI$ を持つ単純梁として置換できると考えられる。この単純梁に等分布荷重 $p_g$ と軸圧縮力 $H_0$ が作用するとき、その変形 $w$ は次式で与えられる<sup>3)</sup>。

$$w = \frac{4 p_g l^4}{\pi^5 2EI} \sum_n \frac{1}{n^5} \left( \frac{1}{1 - \zeta/n^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (20)$$

$n=1, 3, 5, \dots$

ここに、

$$\zeta = \frac{H_0 l^2}{2EI \pi^2} \quad H_0 = \frac{2EI \pi^2 \zeta}{l^2} \quad \frac{\zeta}{n^2} = \frac{H_0}{H_g} \quad (21)$$

この等分布荷重 $p_g$ を受ける単純梁に式(19)の $p_a$ を考慮すると、この梁は $p_a + p_g$ の等分布外力を受けている。実際にはこの外力は作用していないので、次の関係が得られる。

$$p_g + p_a = 0$$

$$p_g = -p_a = -p_{a1} + p_{a2} \quad (22)$$

式(22)を式(20)に代入すると、軸圧縮力が作用するときの、軸直角方向変位が次式のように求まる。

$$w = \frac{4 l^4}{\pi^5 2EI} \left( \frac{-8f_1}{l^2} \Delta H_1 + \frac{8f_2}{l^2} \Delta H_2 \right) \times \sum_n \frac{1}{n^5} \left( \frac{1}{1 - \zeta/n^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (23)$$

### (4) 軸力部材と曲げ部材との合成

軸力部材としての曲がり部材は、曲げ剛性 $EI$ を無視した図-3に示す滑節アーチであるので、軸直角方向の変形を拘束するものはない。(このことは式(15)中の $a_n$ 値を自由に選択できることを意味する。)

今、軸力部材としての曲がり部材に、強制的に式(20)の変形を与えることを考える。この操作により軸力部材と曲げ部材の両者の剛性を一對の曲がり部材に取り入れることができる。

式(23)の梁の変形と式(7)とを対応させて、 $a_n$ について表すと次式となる。

$$y = \sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{l} = w \quad (24)$$

$$a_n = \frac{4l^4}{\pi^5 2EI} \left( \frac{-8f_1}{l^2} \Delta H_1 + \frac{8f_2}{l^2} \Delta H_2 \right) \times \frac{1}{n^5} \left( \frac{1}{1-\zeta/n^2} \right) \quad (25)$$

式(25)の $a_n$ を式(16)に代入する。

$$\frac{16(f_1+f_2)}{\pi l} \times \frac{4l^4}{\pi^5 2EI} \left( \frac{-8f_1}{l^2} \Delta H_1 + \frac{8f_2}{l^2} \Delta H_2 \right) \times \sum_n \frac{1}{n^6} \left( \frac{1}{1-\zeta/n^2} \right) = \frac{l}{A_a E} (\Delta H_1 R_1 - \Delta H_2 R_2) \quad (26)$$

式(14)の関係を上式に代入して、次式が得られる。

$$\Delta H_2 = \frac{R_1 + \frac{512 f_1 A_a}{\pi^6 2I} \sum_n \frac{1}{n^6} \left( \frac{1}{1-\zeta/n^2} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{512 f_2^2 A_a}{\pi^6 2I} \sum_n \frac{1}{n^6} \left( \frac{1}{1-\zeta/n^2} \right)} H_0 \quad (27-1)$$

同様に、

$$\Delta H_1 = \frac{R_2 + \frac{512 f_2 A_a}{\pi^6 2I} \sum_n \frac{1}{n^6} \left( \frac{1}{1-\zeta/n^2} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{512 f_1^2 A_a}{\pi^6 2I} \sum_n \frac{1}{n^6} \left( \frac{1}{1-\zeta/n^2} \right)} H_0 \quad (27-2)$$

ここに、 $f = f_1 + f_2$

$H_0$ の軸方向荷重が作用したときの各曲がり部材に作用する力 $\Delta H_1$ 、 $\Delta H_2$ は、部材支間長 $l$ 、曲がり部材の断面積 $A_a$ 、断面2次モーメント $I$ 、ライズ $f_1$ 、 $f_2$ がわかれば、式(27)より求めることが可能となる。また、軸方向変位 $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$ は式(15)で、軸直角方向変位 $w$ は式(23)でそれぞれ計算できることになる。

曲がり部材が対称モードで座屈する場合には $\Delta H_1$ 、 $\Delta H_2 = \infty$ となるので、式(27)の分母 $=0$ とすればよい。すなわち、

$$R_1 + R_2 + \frac{512 f^2 A_a}{\pi^6 2I} \sum_n \frac{1}{n^6} \left( \frac{1}{1-\zeta/n^2} \right) = 0 \quad (28)$$

という対称モード座屈に対する条件式が得られる。ここで、

$$R_1 + R_2 = R \quad \frac{512 f^2 A_a}{\pi^6 2I} = \alpha$$

$$\sum_n \frac{1}{n^6} \left( \frac{1}{1-\zeta/n^2} \right) = F(\zeta)$$

とすると、式(28)は簡単に次式で表せる。

$$F(\zeta) = -\frac{R}{\alpha} \quad (29)$$

### 3. 解析条件と解析モデル

対象とする一対の曲がり部材の解析モデルの構造諸元を図-5および表-1に示す。過去に行った解析モデルや実験の供試体を参考にして、部材支間長は207cm、48cmの2種類とし、両曲がり部材端の間隔 $a$ を16cm、6cmとした。また、1本の部材の細長比を200と一定とし、ライズ差( $\Delta f = f_1 - f_2$ )と支間長( $l$ )との比 $\Delta f/l$ を一律1/500として、提案法およびFEMにより解析を行った。以下に解析の諸条件を箇条書きで記す。

CASE①：提案法ではタイの伸びを無視することを前提としているので、FEMと比較してタイの伸びの影響を調べた。部材支間長 $l=207$ cmでライズ-支間比 $f_1/l$ を0.05と固定し、パラメータとしてタイの断面積を部材の1/3から1/1000へと変化させた。

CASE②：提案法による解析値の精度、提案法により算出した座屈荷重の妥当性、ライズ-支間比と座屈変形モードの関係を調べた。タイの断面積を部材の1/10と固定し、部材支間長 $l=207$ cm、48cmの場合について、解析パラメータとしてライズ-支間比 $f_1/l$ を0.05から0.01まで変化させた。

CASE③：圧縮力に対する挙動や座屈に及ぼす初期たわみの影響を調べた。部材支間長 $l=207$ cmの場合について、タイの断面積、ライズ-支間比 $f_1/l$ をCASE②と同様とし、図-6に示す4種類の形状の初期たわみ $v_0$  ( $=l/1000=0.207$ cm)を与えた。

提案法は「2. 提案法の解析理論」で誘導した式に基づいた解析である。一方、FEMは幾何学的非線形性を考慮した弾性有限要素解析プログラムを使用し、曲がり部材の両上端の軸方向変位を等しくして荷重が作用するよう変位制御により行った解析である。

なお、本解析ではモデルの細長比が大きく弾性範囲で考えてよい範疇にあり、かつ煩雑な要因をできるだけ排除するため、材料非線形性ならびに残留応力は考慮しないものとした。

### 4. 解析結果と考察

#### (1) タイの断面積による影響

提案法ではタイの伸びを無視するという条件で定式化しているので、タイの伸びが大きくなる場合には、FEMと比較して結果に差が生じてくると考えられる。

タイの伸びには、曲がり部材の剛性、タイの本数や剛性が関係していると考えられるので、ここではタイの断面積をパラメータとして解析を行った。解析条件はCASE①であり、提案法およびFEMによる解析結果を比較したものを表-2に示す。また、FEMによる解析結果として、左側曲がり部材の上端から1/4点の荷重-軸直角方

表-1 解析モデルの構造諸元

|                |                           |             |        |
|----------------|---------------------------|-------------|--------|
| 部材支間長          | $l$ (cm)                  | 207         | 48     |
| ヤング係数          | $E$ (kN/mm <sup>2</sup> ) | 205.940     |        |
| 部材 断面積         | $A_a$ (cm <sup>2</sup> )  | 14.13       | 1.66   |
| 部材 断面 2次モーメント  | $I_a$ (cm <sup>4</sup> )  | 15.142      | 0.0953 |
| 細長比            | $l/r_a$                   | 200         |        |
| タイ 本数          | (本)                       | 7           |        |
| タイ 断面積 (1本あたり) | $A_t$ (cm <sup>2</sup> )  | 1.413       | 0.166  |
| ライズ-支間比        | $f_1/l$                   | 0.01 ~ 0.05 |        |
| 両部材 ライズ差       | $(f_1-f_2)/l$             | 1/500       |        |
| 部材 端部間隔        | $a$ (cm)                  | 16          | 6      |

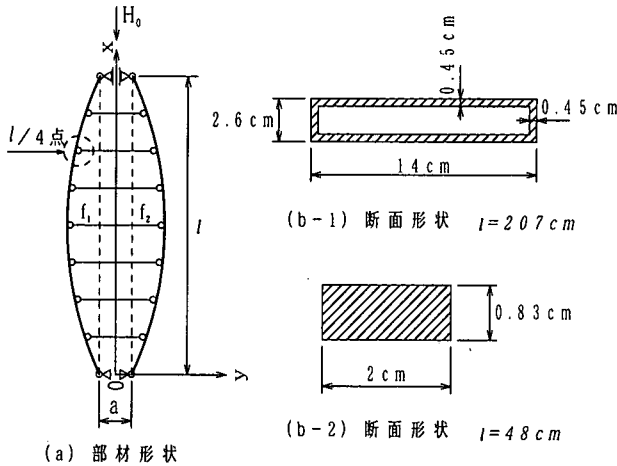


図-5 解析モデル図

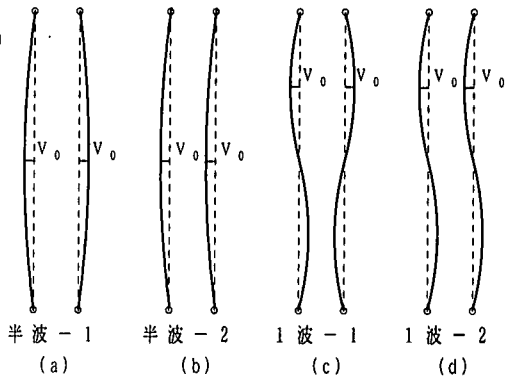


図-6 初期たわみ形状 ( $V_0=0.207$ cm)

表-2 タイの断面積を変化させた場合の提案法とFEMとの比較 ( $f_1/l=0.05$ )

| タイの断面積 (対曲がり部材比) |   | 1/3     | 1/10    | 1/50    | 1/100   | 1/500   | 1/1000  |
|------------------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 荷重               | $H_{0f}(=H_{0p})$ (kN)                            | 559.493 | 560.681 | 559.222 | 562.253 | 559.100 | 559.597 |
|                  | $\zeta(=H_{0f}/H_E)$                              | 3.895   | 3.903   | 3.893   | 3.914   | 3.892   | 3.896   |
| 作用側              | $\Delta H_{1p}$ (kN)                              | 273.693 | 274.273 | 273.561 | 275.041 | 273.501 | 273.744 |
|                  | $\Delta H_{1f}$ (kN)                              | 273.709 | 274.246 | 273.598 | 275.092 | 274.006 | 274.778 |
|                  | $(\Delta H_{1f}-\Delta H_{1p})/\Delta H_{1p}$ (%) | 0.01    | -0.01   | 0.01    | 0.02    | 0.18    | 0.38    |
| 力側               | $\Delta H_{2p}$ (kN)                              | 285.800 | 286.407 | 285.661 | 287.212 | 285.598 | 285.853 |
|                  | $\Delta H_{2f}$ (kN)                              | 285.784 | 286.435 | 285.625 | 287.160 | 285.094 | 284.818 |
|                  | $(\Delta H_{2f}-\Delta H_{2p})/\Delta H_{2p}$ (%) | -0.01   | 0.01    | -0.01   | -0.02   | -0.18   | -0.36   |
| 軸変位              | $\Delta l_{1p}=\Delta l_{2p}$ (cm)                | -0.203  | -0.203  | -0.203  | -0.204  | -0.203  | -0.203  |
|                  | $\Delta l_{1f}=\Delta l_{2f}$ (cm)                | -0.204  | -0.206  | -0.216  | -0.230  | -0.338  | -0.498  |
|                  | $(\Delta l_{1f}-\Delta l_{1p})/\Delta l_{1p}$ (%) | 0.49    | 1.48    | 6.40    | 12.75   | 66.50   | 145.32  |

条件:  $l=207$ cm,  $H_E=143.652$ kN

※ 上段は提案法による結果 (添字 p)  
 中段はFEMによる結果 (添字 f)  
 下段は提案法とFEMによる結果の誤差

向変位曲線を図-7に示す。図-7では、外側への変位を正とし、作用荷重 $H_0$ と式(1)で $n=1$ としたオイラーの弾性座屈荷重 $H_E$ との比を縦軸にとり、座屈荷重 $H_0/H_E$ の値も記した。

表-2より、主部材に作用する力 $\Delta H_1$ 、 $\Delta H_2$ については、タイの断面積によらず、提案法とFEMの結果は概ね一致

する。しかし、部材の軸方向変位 $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$ については、タイの断面積が1/3から1/50の範囲までは、提案法とFEMの結果はよい対応をしているが、さらにタイの断面積が小さくなると、タイの伸びの影響が無視できなくなり、提案法とFEMの結果に誤差が生じてくる。このことは、図-7において、タイの断面積が1/100以下になると

表-3 提案法とFEMとの比較

| ライズ-支間比 $f_1/l$ |   | 0.050    | 0.030    | 0.020    |          |          |          |          |          |          |
|-----------------|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 荷重              | $H_{0f}(=H_{0p})$ (kN)                            | 554.778  | 561.178  | 562.144  |          |          |          |          |          |          |
|                 | $\zeta(=H_{0f}/H_E)$                              | 3.862    | 3.907    | 3.913    |          |          |          |          |          |          |
| 左側              | $\Delta H_{1p}$ (kN)                              | 271.391  | 269.035  | 257.101  |          |          |          |          |          |          |
|                 | $\Delta H_{1f}$ (kN)                              | 271.405  | 269.047  | 257.196  |          |          |          |          |          |          |
|                 | $(\Delta H_{1f}-\Delta H_{1p})/\Delta H_{1p}$ (%) | 0.01     | 0.00     | 0.04     |          |          |          |          |          |          |
| 右側              | $\Delta H_{2p}$ (kN)                              | 283.387  | 292.143  | 305.043  |          |          |          |          |          |          |
|                 | $\Delta H_{2f}$ (kN)                              | 283.373  | 292.130  | 304.948  |          |          |          |          |          |          |
|                 | $(\Delta H_{2f}-\Delta H_{2p})/\Delta H_{2p}$ (%) | 0.00     | 0.00     | -0.03    |          |          |          |          |          |          |
| 軸変位             | $\Delta l_{1f}=\Delta l_{2p}$ (cm)                | -0.201   | -0.201   | -0.201   |          |          |          |          |          |          |
|                 | $\Delta l_{1f}=\Delta l_{2f}$ (cm)                | -0.204   | -0.202   | -0.202   |          |          |          |          |          |          |
|                 | $(\Delta l_{1f}-\Delta l_{1p})/\Delta l_{1p}$ (%) | 1.49     | 0.50     | 0.50     |          |          |          |          |          |          |
| 直角変位            | 部材位置 (上端より)                                       | 3/4点     | 1/2点     | 1/4点     | 3/4点     | 1/2点     | 1/4点     | 3/4点     | 1/2点     | 1/4点     |
|                 | $w_p$ (cm) (式(23)より 符号逆)                          | -0.01189 | -0.01748 | -0.01189 | -0.03868 | -0.05695 | -0.03868 | -0.12344 | -0.18173 | -0.12344 |
|                 | $w_f$ (cm) (両主部材の平均値)                             | -0.01184 | -0.01693 | -0.01125 | -0.03847 | -0.05650 | -0.03882 | -0.12216 | -0.17961 | -0.12268 |
|                 | $(w_f-w_p)/w_p$ (%)                               | 0.40     | 3.17     | 5.39     | 0.54     | 0.80     | -0.36    | 1.04     | 1.17     | 0.62     |

条件:  $l=207\text{cm}$ ,  $H_E=143.652\text{kN}$ ,  $A_f/A_n=1/10$

※ 上段は提案法による結果 (添字 p)  
 中段はFEMによる結果 (添字 f)  
 下段は提案法とFEMによる結果の誤差

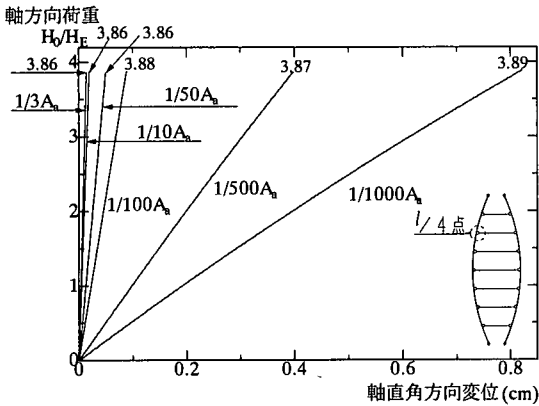


図-7 荷重-軸直角方向変位曲線  
 ( $l=207\text{cm}$   $f_1/l=0.05$  左側部材 1/4点)

軸直角方向変位が大きくなることと対応している。

したがって、提案法ではタイの伸びが無視できるという前提で定式化していることを考えると、今回のモデルをFEMで解析する場合には、タイの断面積は主部材の1/50程度以上までは提案法と対応すると考えられる。これを踏まえて、以下のFEM解析ではタイの断面積を部材の1/10とした。

(2) 提案法とFEMとの結果比較

解析条件CASE②の場合について、提案法とFEMによる解析を行った。ここでは、提案法による解析結果の精度を確認するため、FEMでの座屈直前の結果を例にとり両者の比較を行い、ライズ-支間比 $f_1/l=0.05, 0.03, 0.02$ の場合について表-3にまとめた。提案法とFEMによ

る結果をみると、両者の誤差は非常に小さく、特に作用圧縮力 $\Delta H_1$ ,  $\Delta H_2$ と軸方向変位 $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$ についてはよく対応していることがわかる。最大の誤差でも、 $f_1/l=0.05$ の場合の1/4点での軸直角方向変位で、5.39%である。しかし、このときの変位は非常に小さく、実用上問題ないといえる。

この比較表より、タイで結合した弾性曲がり部材が任意の圧縮力を受ける状態において、部材作用力や上端部軸方向変位、および部材任意点の直角方向変位の大きさを、提案法により精度よく求めることができるといえる。

(3) 提案法による座屈荷重の算出法とその妥当性

提案法により曲がり部材の座屈荷重を計算することを検討する。

曲がり部材の支間長 $l$ とライズの和 $f(=f_1+f_2)$ および断面積 $A_n$ と断面2次モーメント $I$ が与えられれば、式(29)より $\zeta$ が決まり、式(21)を用いて座屈荷重 $H_{0p}$ を求めることができる。ここで、式(29)が対象としているのは対称座屈モードであり、逆対称座屈モードに対しては別に考慮する必要がある。なぜなら、2章における一連の式の中の $n$ が偶数をとる場合、すなわち逆対称変形を考慮する場合は式(9)において $\sum \Delta y_j \tan \alpha_j = 0$ となり、推力は作用せず( $\Delta H=0$ となる)、アーチの作用効果は現れてこない。したがって、逆対称1次モードの座屈荷重は別の方法、すなわち式(1)において $n=2$ として、または式(21)において $\zeta=4$ として求められる。これより式(29)を満足する $\zeta$ に対して次の2つの場合に分けて考える必要があり、それぞれにおいて曲がり部材の座屈荷重を計算することになる。

表-4 提案法とFEMとの比較 (座屈および最大荷重時)

| 部材支間長           |   | l=207cm |         |         |         |          | l=48cm |        |        |        |          |
|-----------------|---|---------|---------|---------|---------|----------|--------|--------|--------|--------|----------|
| ライズ-支間比 $f_1/l$ |   | 0.050   | 0.030   | 0.020   | 0.015   | 0.010    | 0.050  | 0.030  | 0.020  | 0.015  | 0.010    |
| 荷重              | $H_{0p}$ (kN)                                     | 574.609 | 574.609 | 574.609 | 574.609 | 390.332  | 67.257 | 67.257 | 67.257 | 67.257 | 45.785   |
|                 | $H_{0f}$ (kN)                                     | 560.681 | 567.671 | 568.189 | 563.887 | 378.143  | 65.873 | 66.059 | 66.923 | 66.554 | 44.262   |
|                 | $(H_{0f}-H_{0p})/H_{0p}$ (%)                      | -2.42   | -1.21   | -1.12   | -1.87   | -3.12    | -2.06  | -1.78  | -0.50  | -1.05  | -3.33    |
| 作用側             | $\Delta H_{1p}$ (kN)                              | 281.074 | 275.399 | 262.334 | 212.945 | $\infty$ | 32.899 | 32.236 | 30.712 | 25.008 | $\infty$ |
|                 | $\Delta H_{1f}$ (kN)                              | 274.246 | 272.097 | 259.643 | 213.613 | -291.032 | 32.226 | 31.671 | 30.587 | 25.077 | -33.921  |
|                 | $(\Delta H_{1f}-\Delta H_{1p})/\Delta H_{1p}$ (%) | -2.43   | -1.20   | -1.03   | 0.31    | -        | -2.05  | -1.76  | -0.41  | 0.27   | -        |
| 力側              | $\Delta H_{2p}$ (kN)                              | 293.535 | 299.210 | 312.275 | 361.664 | $\infty$ | 34.358 | 35.021 | 36.544 | 42.249 | $\infty$ |
|                 | $\Delta H_{2f}$ (kN)                              | 286.435 | 295.573 | 308.547 | 350.274 | 669.175  | 33.648 | 34.388 | 36.336 | 41.477 | 78.184   |
|                 | $(\Delta H_{2f}-\Delta H_{2p})/\Delta H_{2p}$ (%) | -2.42   | -1.22   | -1.19   | -3.15   | -        | -2.07  | -1.81  | -0.57  | -1.83  | -        |
| 座屈変形モード         |   | 逆対称1次   |         |         |         |          | 対称1次   |        |        |        |          |

条件:  $H_F=143.652kN$  ( $l=207cm$ ),  $H_F=16.814kN$  ( $l=48cm$ ),  $A_1/A_n=1/10$

※ 上段は提案法による結果 (添字 p)

中段はFEMによる結果 (添字 f)

下段は提案法とFEMによる結果の誤差

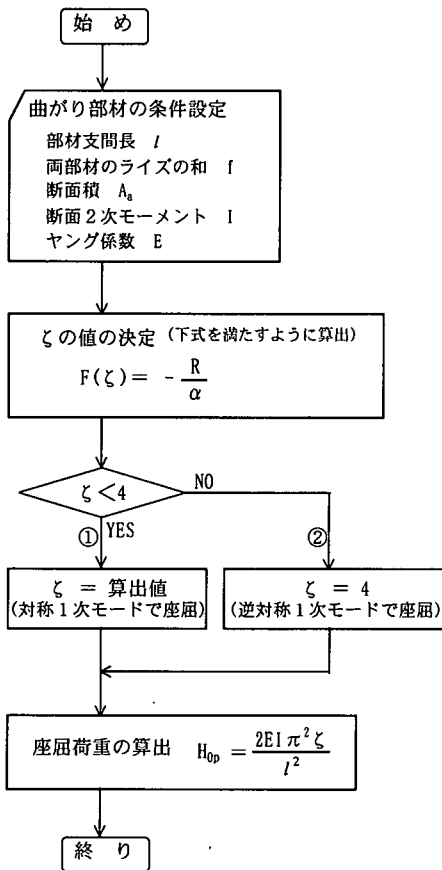


図-8 提案法による座屈荷重算出のフロー

①  $\zeta < 4$  のとき

$\zeta$  の値より、座屈荷重  $H_{0p}$  を式 (21) により算出する。この場合の座屈モードは対称1次となる。

②  $\zeta > 4$  のとき

$\zeta > 4$  ということは、対称1次モードでの座屈荷重よりも逆対称1次モードでの座屈荷重 ( $\zeta = 4$  のとき)

の方が小さいことを意味するので、 $\zeta = 4$  とおいて座屈荷重  $H_{0p}$  を式 (21) により算出する。この場合の座屈モードは逆対称1次となる。

上記の手法で、 $\zeta$  の値により、対称1次モード、逆対称1次モードでの座屈荷重を提案法により計算できる。図-8にこの過程のフロー図を示す。

この手法の妥当性を確認するために、CASE②で行った解析結果より、ライズ-支間比  $f_1/l$  ごとこの座屈および最大荷重の比較を表-4に示す。

提案法については、各  $f_1/l$  に対して  $\zeta$  を求め、上述した手法で座屈荷重  $H_{0p}$  を算出した。FEMについては、 $f_1/l$  が 0.05 から 0.015 の場合は座屈時について、0.01 の場合は最大荷重時の結果 (図-10参照) を記し、提案法と対比した。

これを見ると、両者の結果の誤差は最大でも 3.15% で、 $f_1/l$  により微小な差はあるものの、提案法とFEMとはよく対応しているものと判断できる。

したがって、提案法により弾性座屈荷重を求める手法は妥当であるといえる。

なお、表では  $f_1/l = 0.015 \sim 0.01$  で座屈荷重が著しく小さくなるが、これはこの間におけるあるライズ-支間比を境に、支配的な座屈モードが逆対称1次モードから対称1次モードへと変化し、座屈荷重が極端に小さくなるためである。

ところで、FEM は個々の構造物の特性を精確に計算できるが、たとえば設計の際のように、いくつかのパラメータがある複数の構造物の耐力力を計算する場合は、本論文で提案する方法における式 (29) のような表記式を用いれば簡単に求めることができる。すなわち、曲がり部材の構造条件 (両部材の断面積、断面2次モーメント、支間長、ライズ) が与えられ、 $F(\zeta) (= -R/\alpha)$  を計算し、図-9のグラフを用いて  $\zeta$  を決めれば、座屈荷重を手計算で求めることができる。



(4) ライズ-支間比の座屈モードに及ぼす影響

曲がり部材の座屈変形モードとライズ-支間比との関係を調べるため、CASE②によるFEM解析結果をもとに考察する。

図-10には、ライズ-支間比 $f_1/l$ ごとに曲がり部材の上端から $l/4$ 点の荷重-軸直角方向変位曲線を示した。また、図-11には、ライズ-支間比 $f_1/l$ が0.01および0.015の場合について荷重増加に伴う左側部材の変形図を示す。

図-10より、部材支間長 $l=207\text{cm}$ 、 $48\text{cm}$ の場合とも $f_1/l=0.015$ 以上であれば、実線で示すような変形が急激に大きくなる極大点(分岐点)が現れる。そのときの(座屈)荷重 $H_0/H_E$ はグラフに記すように3.9前後で、前節で述べたの提案法において逆対称1次座屈モードとなる条件の4( $=\zeta$ )に近い値をとるという結果が得られた。また、 $f_1/l=0.015$ 以上では、図-11の $f_1/l=0.015$ の場合に示すように、荷重増加とともに対称モードの変形が大きくなって、最終状態では逆対称1次の変形モードとなる。これより、座屈変形モードも逆対称1次になると考えられる。

一方、図-10の $f_1/l=0.013$ 以下の場合をみると、点線で示すように明確な極大点は現れず、荷重増加に伴って徐々に変形が大きくなるような挙動を示す。これら各々の座屈荷重を提案法により求めた結果を( )内に記したが、FEMによる解析結果とよい対応がみられる。 $f_1/l=0.013$ 以下では、図-11の $f_1/l=0.01$ の場合に示すように、荷重増加とともに対称1次の変形が大きくなっていくモードとなる。

提案法とFEMの解析結果を比較するため、両者を対比させて、座屈および最大荷重とライズ-支間比の関係を図-12にグラフ化した。

図では、 $l=207\text{cm}$ の場合について、縦軸には対数目盛で座屈荷重および最大荷重 $(H_0/H_E)$ を、横軸にはライズ-支間比 $f_1/l$ をとった。グラフをみると、提案法では $f_1/l$ が大きくなるにしたがいは漸増し、 $f_1/l=0.0129$ において $\zeta=4$ をとる。FEMでは、 $f_1/l=0.013$ 付近まで $H_0/H_E$ は漸増し、それ以上の $f_1/l$ での座屈変形モードは逆対称1次となり、座屈荷重は一定( $H_0/H_E=3.9$ )となる。

すなわち、ライズ-支間比 $f_1/l=0.0129$ が $\zeta=4$ となる座屈変形モードの変化点であり、それより小さい場合は $\zeta$ =算出値とし、それ以上の場合は $\zeta=4$ として提案法により座屈荷重を計算でき、それがFEMの結果と対応することを確認できた。

ここで図-11(a) $l=207\text{cm}$ の場合の座屈モード発生現象を、図-12を利用して考察してみる。提案法による対称1次モード座屈が発生する $\zeta$ をそれぞれのライズ-支間比に対してグラフ(破線)から読みとると、

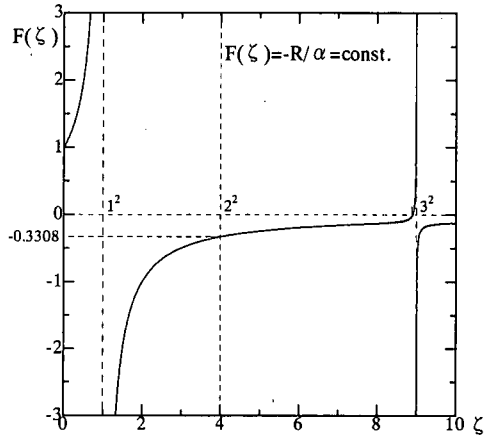
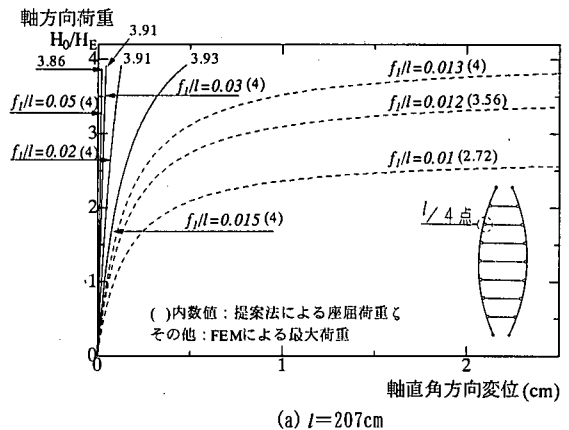
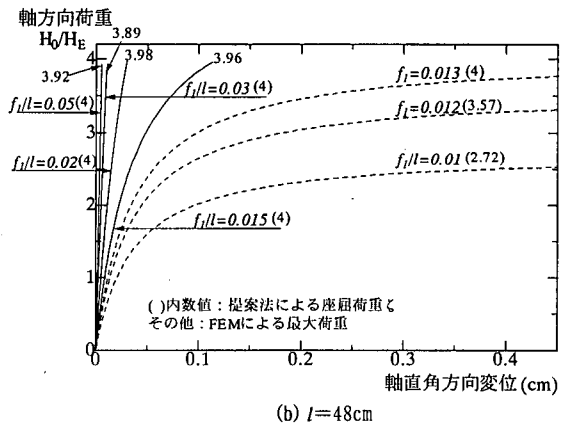


図-9  $F(\zeta) = -R/\alpha$ のグラフ



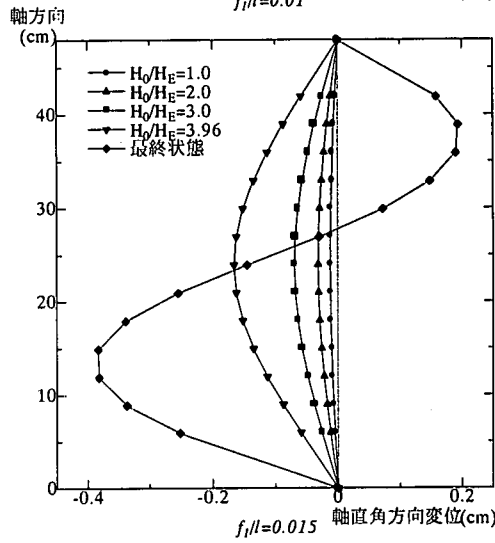
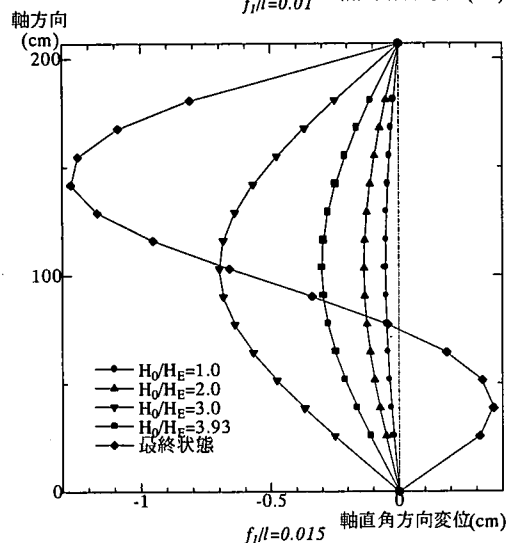
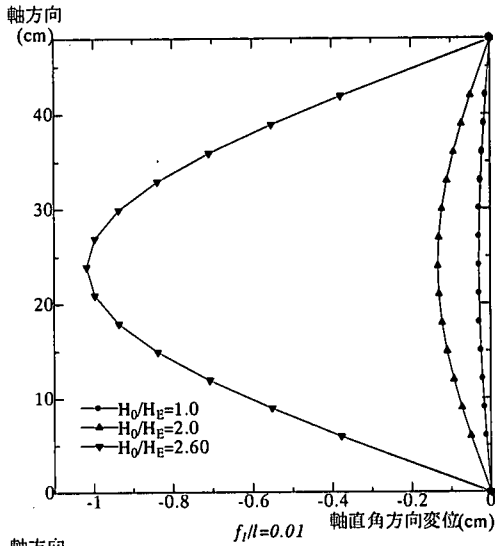
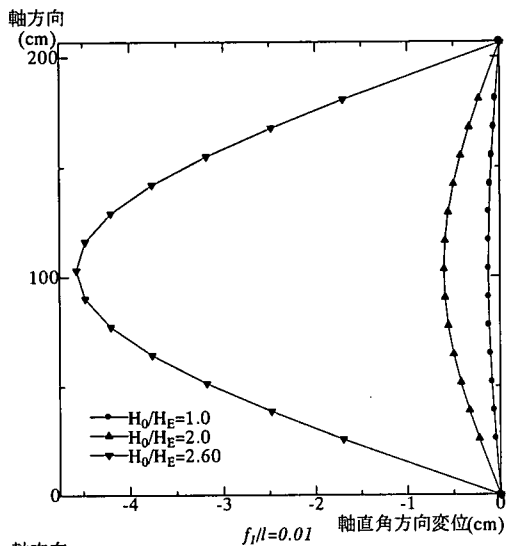
(a)  $l=207\text{cm}$



(b)  $l=48\text{cm}$

図-10 荷重-軸直角方向変位曲線(左側部材  $l/4$ 点)

$f_1/l=0.01$ では $\zeta=2.72$ 、 $f_1/l=0.015$ では $\zeta=5.11$ となる。図-8のフロー図より、前者は $\zeta < 4$ で対称1次モード座屈が逆対称1次モード座屈より先に発生し、後者は $\zeta > 4$ で逆対称1次モードが対称1次モードより先に発生する。このことは、図-11(a)での発生座屈モードと対応していることは明らかである。



(a)  $l=207\text{cm}$

(b)  $l=48\text{cm}$

図-11 左側部材変形図

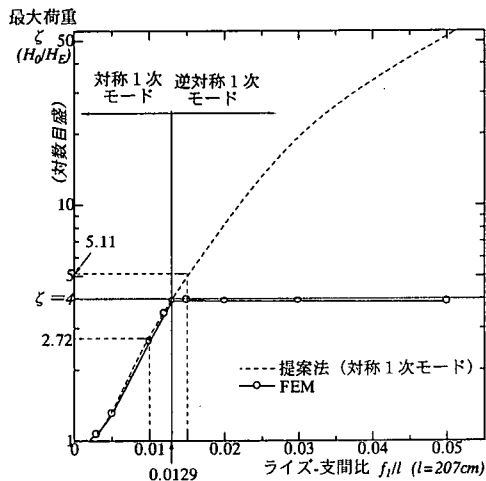


図-12 ライズ-支間比と座屈モードの変化

(5) 初期たわみによる影響

解析条件CASE③により行ったFEM解析の結果において、左側曲がり部材の上端から $l/4$ 点の荷重-軸直角方向変位曲線をライズ-支間比 $f_1/l$ ごとに図-13に示す。なお、 $f_1/l=0.05\sim 0.015$ の1波-2(図-6(d))の場合は内側への変形(その他は外側への変形)となるが、ここでは比較しやすいよう絶対値をとってグラフ化した。

図-13より、ライズ-支間比 $f_1/l$ が大きくなるにしたがい、初期たわみが軸直角方向変位や座屈および最大荷重に与える影響は1波-2(図-6(d))以外は小さくなっていく傾向があり、 $f_1/l=0.05$ になるとその影響はほとんどなくなる。

しかし、1波-2(図-6(d))の初期たわみを与える

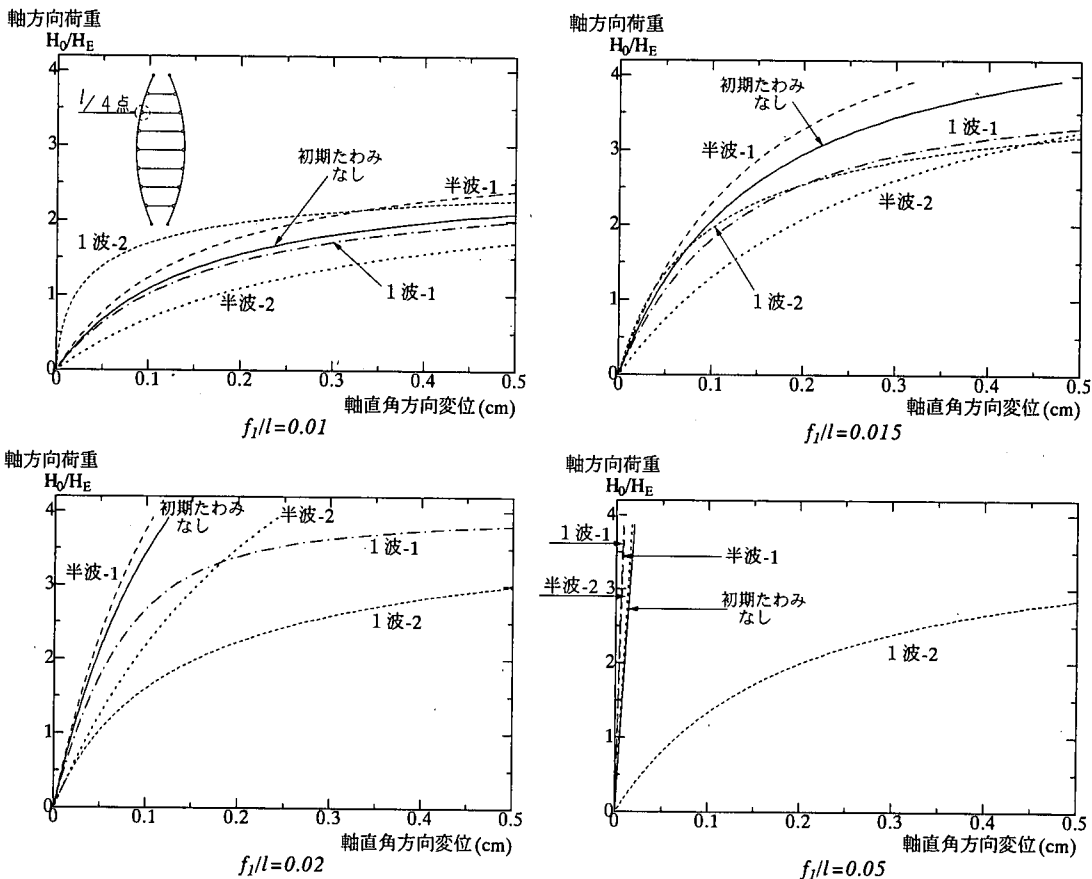


図-13 荷重-軸直角方向変位曲線 (初期たわみあり  $l=207\text{cm}$  左側部材 $l/4$ 点 ライズ差 $\Delta f=l/500=0.414\text{cm}$ )

と、ライズ-支間比によらず同荷重下での軸直角方向変位が大きくなり、座屈および最大荷重が減少するので、実用の際には注意を要する。

## 5. 結論

タイで結合した曲がり部材の軸方向圧縮力に対する挙動について、提案法による解析方法を示し、FEMによる結果との整合性の検討を踏まえながら、検証を行った。本論文では弾性部材としての検討ではあったが、両者の解析結果より、以下のことが明らかとなった。

- ① タイの伸びが無視できる範囲で、任意の軸方向圧縮力が作用して対称1次モードで変形する弾性曲がり部材について、提案法を用いて部材作用力および変形量を精度よく求めることができた。
- ②  $\xi$  を決定することにより、タイで結合した曲がり部材の弾性座屈荷重を提案法で計算できることがわかり、その有用性を示すこともできた。今回対象とした曲がり部材では、ライズ-支間比0.015~

0.01 (0.013付近) を境にして、それより小さい場合は対称1次モード、大きい場合は逆対称1次モードと、座屈変形モードが変化する結果となった。

- ③ 初期たわみを考慮せず、弾性範囲という条件においては、曲がり部材のライズ-支間比は0.015程度あればよく、それ以上のライズ-支間比を与えても座屈荷重はほとんど増加しなかった。
- ④ 曲がり部材のライズ-支間比が大きくなるほど、圧縮力に対する挙動に及ぼす初期たわみ (1波-2 (図-6(d))以外) の影響は小さくなり、 $f_1/l=0.05$  になるとその影響はほとんどなくなった。

なお一般的に考えて、一対の曲がり部材では、ライズ-支間比の大小に関わらず分岐座屈になると予想されるが、本論文での解析対象はあくまで最大荷重までの弾性域内のことで、座屈荷重やモードに関する検証は別の機会に譲る。

謝辞：本研究において、熊本大学崎元教授に貴重な助言をいただいた。ここに記して感謝申し上げます。

参考文献

- 1) 山尾敏孝, 石原 完, 平井一男: タイで結合した2本の曲がり部材の座屈強度と挙動について, 構造工学論文集, Vol.41A , pp.229-234, 1995. (1999. 3. 25受付)
- 2) 吉村虎蔵, 平井一男: ランガー桁の動的解析, 土木学会論文集第101号, 1964.1.
- 3) Timoshenko, S. : Strength of Materials Part II, pp50-53, Van Nostrand.

AN ANALYTICAL METHOD OF CURVED PAIR MEMBERS  
TIED WITH STRUTS SUBJECTED TO AXIAL COMPRESSION

Hajime ISHIHARA, Toshitaka YAMAOKA and Itio HIRAI

This paper presents an analytical method based on the arch theory for the curved pair structures tied with struts subjected to axial compression. Numerical calculation is performed by using the proposed analytical method and the frame-analysis based on the elastic finite element method changing rise-to-span ratio and initial crookedness shapes to check the practical use for the curved pair structures. Both the elastic strength and deformation found from the proposed analytical method show good agreement with those of FEM. Also the equations derived from the proposed analytical method are able to estimate the buckling strength by definition of the buckling deformation modes. It was found that the curved pair structures with larger rise-to-span ratio members are less effected by crookedness of each curved member.