

拡張 Timoshenko 理論による 骨組構造の自由振動解析

林 正¹・岩崎英治²・斎藤道生³・時 譲太⁴

¹正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部環境・建設系 (〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)

²正会員 工博 徳山工業高等専門学校助教授 土木建築工学科 (〒745-8585 徳山市久米高城 3538)

³正会員 川田テクノシステム株式会社 設計部次長 (〒116-0014 東京都荒川区東日暮里 5-51-11)

⁴学生員 長岡技術科学大学大学院工学研究科 建設工学専攻 (〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)

曲げねじりによる 2 次せん断変形を考慮した拡張 Timoshenko はりの自由振動解析は殆ど研究されていない。本論文では、この問題の厳密解を解析的に求めるとともに、拡張 Timoshenko 理論による C^0 級のハイアラキー棒要素と C^1 級のエルミート棒要素を定式化する。解析的手法により、Timoshenko はりにおけるせん断変形の影響を明らかにして、両要素を用いた p 法と h 法による数値計算により骨組構造における影響を調べる。

Key Words : *extended Timoshenko beam, hierarchical beam element, free vibration analysis, flexural and warping torsional vibration, dynamic condensation*

1. まえがき

曲げによるせん断変形と回転慣性を考慮した Timoshenko はりの自由振動は¹⁾、Timoshenko による研究以後、多数の論文が発表されている。これらの研究で、単純支持ばりの曲げ振動ではたわみ角のモードが異なる 2 種類の振動モード(本論文では、これらを B 及び \hat{B} モードと呼ぶ)が求められている。B モードは Bernoulli-Euler はりの曲げ振動に相当するモードで、 \hat{B} モードは B モードとたわみモードは同じでたわみ角が異なる Timoshenko はりに特有な振動モードである。

Timoshenko はりにおけるこの 2 種類の曲げ振動モードの存在について議論がなされているが²⁾⁻⁴⁾、理論的には、4 階の微分方程式¹⁾の固有値問題を任意の境界条件について解くと、振動数方程式から 2 通りの固有振動数が得られる。また、たわみはゼロで一様なたわみ角のみが生じるせん断モードと、特別な剛性のはりに生ずる振動モードが存在することが明らかにされている⁵⁾。

一方、曲げねじりによる 2 次せん断変形を考慮した拡張 Timoshenko はりの自由振動解析では、藤谷ら⁶⁾と深沢・太田⁷⁾の研究があるだけで、曲げねじり振動におけるせん断変形を考慮したはりの自由振動特性は明らかにされていない。

本論文では、曲げ及び曲げねじりによるせん断変形を考慮した拡張 Timoshenko はり⁸⁾の C^0 級要素と C^1 級要素を定式化し、自由振動解析における p 法(補間関数の高次化法)と h 法(要素細分法)の精度を検討す

る。また、解の精度を調べるために、拡張 Timoshenko 理論による自由振動問題の解析解を求めて、数値計算によりせん断変形の影響を明らかにする。

有限要素法によるはりの曲げ解析では、はり要素の両端の節点変位 v と θ の合計 4 自由度(以上)が必要であるが、振動問題における厳密な変位関数を多項式で表すことができないので、多項式を用いた 4 自由度要素では補間誤差が大きくなる。このために、多節点や多成分を用いた種々の高次要素が開発されている。Dawe¹⁰⁾はこれらの Timoshenko はり要素を概説して、たわみ v に 5 次式、たわみ角 θ に 4 次式を用いた 6 自由度の 3 節点要素を提案した。しかし、 C^1 級要素では、Przemieniecki⁹⁾が提案した 2 節点 4 自由度要素が最も広く用いられているようである。

近年の FEM 解析では、たわみとたわみ角を独立に補間する C^0 級要素が用いられている^{3), 11)-14)}。最も単純な C^0 級要素は、Bhashyam ら³⁾が提案した 2 節点 4 自由度要素である。この要素では 1 次式が用いられているので、解の精度を上げるために h 法を用いなければならない。これに対して、要素に内部自由度を付加して高次関数を用いる p 法の要素が開発されている。Lees ら¹¹⁾は 2 節点要素に内部自由度を付加して高次関数を用いており、Houmat¹²⁾は 3 次式を用いた 4 節点要素に正弦関数で補間した内部自由度を付加している、Surana ら¹³⁾は高次の Lagrange 多項式を用いた 2 次元平面応力要素から 3 節点の平面はり要素を定式化している。上記の 3 つの要素はすべてハイアラキー要素であるので、任意の次数の高次要素を生成することがで

きる。Corn¹⁴⁾は4次式を用いた5節点要素にGuyanの静的縮小法を用いて3節点に縮約した要素を提案している。

2次せん断変形を考慮した曲げねじり振動解析では、先述の藤谷らの C^0 級要素が見受けられるだけである。この要素の剛性行列⁶⁾は、1次式で独立に補間したねじり角とねじり率の変位関数に次数低減積分を用いて求められる。本論文では、著者ら⁸⁾が提案した C^0 級のハイラーキ要素と C^1 級のせん断変形要素を用いた自由振動解析法を示す。ハイラーキ要素は2節点要素で、形状関数は種々の関数のなかで最も簡単な多項式である。 C^1 級要素の形状関数は、エルミートの3次多項式に3次式の曲げねじりによるせん断変形項を加えた式である。この補正項を曲げ変形による式に置き換えると、Przemieniecki⁹⁾の要素が得られる。

ハイラーキ要素による構造解析では、全体解析を行う前に内部自由度を縮約して数値計算の効率化を計ることができる。しかし、固有値問題では自由度の縮約によって、全体解析の精度が悪化する。このために、静的縮小法を用いたFEM解析では、縮約する自由度の最適な選択方法が研究されている¹⁴⁾。本論文では、動的縮小法¹⁵⁾を用いた場合の精度について検討する。

2. 拡張 Timoshenko 理論による解

(1) 無次元パラメータ

はりの振動特性を調べるために、曲げ振動と曲げねじり振動に関する次の無次元パラメータを用いる。

$$Q = p\ell\sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (1)$$

$$\lambda_z = \ell\sqrt{\frac{A}{I_z}}, \quad \chi = \frac{EI_p}{GJ}, \quad \mu = \frac{GJ\ell^2}{EI_\omega} \quad (2)$$

$$\kappa_y = \frac{E}{k_y G}, \quad \kappa_x = \frac{J}{J_s} \quad (3)$$

ここに、 Q は無次元振動数、 p は固有円振動数、 ρ は質量密度、 ℓ は部材長である。 λ_z は z 軸まわりの細長比、 χ と μ はねじりに関するパラメータで、 A は断面積、 I_z は z 軸まわりの断面2次モーメント、 I_p は極断面2次モーメント、 I_ω はそり2次モーメント、 J はサンブナンのねじり定数である。また、式(3)の κ_y と κ_x は曲げ及びねじりに関するせん断変形パラメータで、 k_y は y 軸方向のせん断補正係数、 J_s は次の有効せん断ねじり定数⁸⁾、 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数である。

$$J_s = k_x(I_p - J) \quad (4)$$

k_x はねじりに対するせん断補正係数である⁶⁾。

(2) 曲げねじり振動の振動方程式

はりは2軸対称断面材とし、部材軸を x 、断面主軸を y, z 軸とする。ねじり角を θ_x 、全ねじり率を ψ とすると、拡張 Timoshenko 理論によるはりの支配方程式^{6),8)}に慣性項を加えて、次の曲げねじり振動の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} GJ\theta_x'' + GJ_s(\theta_x'' - \psi') + p^2\rho I_p\theta_x &= 0 \\ EI_\omega\psi'' + GJ_s(\theta_x' - \psi) + p^2\rho I_\omega\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、プライム記号は x に関する微分を表す。下線の項はそり慣性項である。

式(5)から ψ を消去して、 x を正規化座標 $\bar{\xi}$ に変換すると次式が得られる。

$$\frac{d^4\theta_x}{d\bar{\xi}^4} + (Q^2 + Q^2\bar{\chi} - \bar{\mu})\frac{d^2\theta_x}{d\bar{\xi}^2} + Q^2(Q^2\bar{\chi} - \bar{\mu}\chi)\theta_x = 0 \quad (6)$$

ここに、

$$\bar{\xi} = x/\ell \quad (0 \leq \bar{\xi} \leq 1) \quad (7)$$

$$\bar{\chi} = \frac{\kappa_x}{1 + \kappa_x}\chi, \quad \bar{\mu} = \frac{1}{1 + \kappa_x}\mu \quad (8)$$

ここで、 $GJ_s \rightarrow \infty$ ($\therefore \kappa_x = 0$) とすると、せん断変形を無視した式になる。

式(6)の特性方程式を

$$\alpha^4 + b\alpha^2 + c = 0 \quad (9)$$

とにおいて、 $c < 0$ の場合の根 α を

$$\alpha = \pm\alpha_1 i, \quad \pm\alpha_2 \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (10)$$

と表す。ここに、

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{2}(b + \sqrt{D}), \quad \alpha_2^2 = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{D}) \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} b &= Q^2(1 + \bar{\chi}) - \bar{\mu}, \quad c = Q^2(Q^2\bar{\chi} - \bar{\mu}\chi) \\ D &= \{Q^2(1 - \bar{\chi}) - \bar{\mu}\}^2 + 4Q^2\bar{\mu}(\chi - \bar{\chi}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

これより、式(6)の一般解が得られる。

$$\theta_x(\bar{\xi}) = C_1 \sin \alpha_1 \bar{\xi} + C_2 \cos \alpha_1 \bar{\xi} + C_3 \sinh \alpha_2 \bar{\xi} + C_4 \cosh \alpha_2 \bar{\xi} \quad (13)$$

ここで、 C_i は未定係数である。なお、式(10)の α_i は実数であるが、 $c > 0$ ($\therefore Q^2 > \mu/\kappa_x$) のときには α_2 は虚数になる。また、 $c = 0$ のときには $\alpha_2 = 0$ (重根) になる。

(3) 単純支持ばり

両端単純支持の場合を考える。境界条件

$$\theta_x = 0, \quad \psi' = 0 \quad (\text{at } x = 0, \ell) \quad (14)$$

を式(5)の第1式に用いて $\theta_x'' = 0$ が得られるので、式(13)を代入して次の振動数方程式が求められる。

$$\sin \alpha_1 \cdot \sinh \alpha_2 = 0 \quad (15)$$

これより、次の値が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \alpha_2 &= 0 \quad (n = 0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$c \geq 0$ の場合も考慮して、次の無次元振動数 Q_n が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= \frac{\omega_n}{\sqrt{\kappa_x \chi}} \left\{ \beta + \kappa_x \chi \mp \sqrt{\beta^2 + \gamma_n \kappa_x (\chi - 1)} \right\}^{1/2} \\ \hat{Q}_0 &= \sqrt{\mu / \kappa_x} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに、

$$\beta = \frac{1}{2}(1 + \kappa_x - \kappa_x \chi + \gamma_n), \quad \gamma_n = \frac{\mu \chi}{\omega_n^2} \quad (18)$$

$$\omega_n = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (19)$$

そり慣性項またはせん断変形を無視した式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= \omega_n \sqrt{\frac{(1 + \kappa_x)\omega_n^2 + \mu}{(\kappa_x \omega_n^2 + \mu)\chi}} \quad (\text{そり慣性項を省略}) \\ Q_n &= \omega_n \sqrt{\frac{\omega_n^2 + \mu}{\omega_n^2 + \mu\chi}} \quad (\text{せん断変形を省略}) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

境界条件から未定係数を求めると、式(17)の Q_n に対する固有振動モードは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{xn}(\bar{\xi}) &= C_1 \sin \omega_n \bar{\xi} \\ \psi_n(\bar{\xi}) &= C_2 \cos \omega_n \bar{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (21)$$

ここに C_1 は任意定数で、ねじり率 ψ_n は2つの振動数 Q_n, \hat{Q}_n に対して2つの振動モードが存在する。

$$C_2 = C_1 \frac{\omega_n}{\ell} \left\{ \beta - \gamma_n \pm \sqrt{\beta^2 + \gamma_n \kappa_x (\chi - 1)} \right\} \quad (\text{式(17)に複号同順}) \quad (22)$$

ここで、式(17)の小さい方の振動数を Q_n 、大きい方を \hat{Q}_n とし、それぞれの曲げねじり振動を T モード、 \hat{T} モードと呼ぶことにする。

$$\hat{Q}_0 \text{ に対する振動モードは、} C_0 \text{ を任意定数として} \quad \theta_{x0}(\bar{\xi}) = 0, \quad \psi_0(\bar{\xi}) = C_0 \quad (23)$$

となる。この振動モードではそりねじりモーメント(2次ねじりモーメント)のみが生じるので、せん断モードと呼ぶことにする[†]。また、前述の \hat{T} モードとともに、これらの振動モードは曲げねじりによるせん断変形とそり慣性項の両者を考慮した場合に生じる。なお、式(20)に対する振動モードは、式(21)において $C_2 = (\omega_n / \ell) C_1$ とおいた T モードのみである。

(4) 両端固定ばり

固定の条件 $\psi = 0$ を式(5)に用いると、 θ_x に関する固定ばりの境界条件が得られる。

$$\theta_x = 0, \quad \kappa_x \ell^2 \theta_x''' + (\kappa_x Q^2 \bar{\chi} + \tilde{\mu}) \theta_x' = 0 \quad (\text{at } x = 0, \ell) \quad (24)$$

式(13)を式(24)に代入して次の振動数方程式が得られる。

$$2a_1 a_2 (1 - \cos \alpha_1 \cosh \alpha_2) + (a_1^2 - a_2^2) \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2 = 0 \quad (25)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 (1 + \kappa_x) (\alpha_1^2 - Q^2 + \tilde{\mu}) \\ a_2 &= \alpha_2 (1 + \kappa_x) (\alpha_2^2 + Q^2 - \tilde{\mu}) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式(25)を2つの式に因数分解することができる。

$$\left. \begin{aligned} a_2 \tan(\alpha_1/2) + a_1 \tanh(\alpha_2/2) &= 0 \\ a_1 \tan(\alpha_1/2) - a_2 \tanh(\alpha_2/2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

固有振動数 Q_n は、これらの式と式(9)を連立させて求められる。なお、式(27)の第1式は θ_x の対称モード、第2式は逆対称モードに対する式である(式(28)を参照)。

ねじり角の振動モードは、式(27)に対して次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{xn}(\xi) &= C_1 \left(a_1 \operatorname{cosec} \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2} \xi \right. \\ &\quad \left. + a_2 \operatorname{cosech} \frac{\alpha_2}{2} \cosh \frac{\alpha_2}{2} \xi \right) \\ \theta_{xn}(\xi) &= C_1 \left(a_1 \sec \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_1}{2} \xi \right. \\ &\quad \left. - a_2 \operatorname{sech} \frac{\alpha_2}{2} \sinh \frac{\alpha_2}{2} \xi \right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここに、 C_1 は任意定数、 ξ は自然座標 ($\xi = 2\bar{\xi} - 1$) である。

式(28)の θ_{xn} に対するねじり率の振動モードは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_{xn}(\xi) &= -C_2 \left(\operatorname{cosec} \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_1}{2} \xi \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{cosech} \frac{\alpha_2}{2} \sinh \frac{\alpha_2}{2} \xi \right) \\ \psi_{xn}(\xi) &= C_2 \left(\sec \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2} \xi \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sech} \frac{\alpha_2}{2} \cosh \frac{\alpha_2}{2} \xi \right) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここに、

$$C_2 = C_1 \frac{\mu \chi}{\ell} Q_n^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (30)$$

なお、 α_2 が虚数の場合には、式(25)~(29)で $\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 i$ に置き換える。

固定ばりでも、対称モードと逆対称モードについてそれぞれ2つの振動数 Q_n, \hat{Q}_n ($Q_n < \hat{Q}_n$) が求められて、2つの曲げねじり振動モード T と \hat{T} モードが存在する。また、特別な場合の式を付録 I に示す。

(5) 曲げ振動

Timoshenko はりの曲げ振動の式は、 y 軸方向の並進変位を v 、 z 軸まわりの回転角を θ_z とすると次式で与えられる¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} GA_{sy}(v'' - \theta_z') + p^2 \rho A v &= 0 \\ GA_{sy}(v' - \theta_z) + EI_z \theta_z'' + p^2 \rho I_z \theta_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

[†] この他に、パラメータが特別な値をとるときに別な振動モードが存在する。これを付録 I に示す。

ここに、 A_{sy} は有効せん断面積 ($A_{sy} = \kappa_y A$) で、下線は回転慣性項である。

式 (31) から θ_z を消去して x を $\bar{\xi}$ に変換すると次式が得られる。

$$\frac{d^4 v}{d\bar{\xi}^4} + Q^2(1 + \kappa_y) \frac{d^2 v}{d\bar{\xi}^2} + Q^2(\kappa_y Q^2 - \lambda_z^2) v = 0 \quad (32)$$

式 (32) は曲げねじり振動の式 (6) と同じ形をしているので、これから得られる結果も同じ形の式で与えられる。すなわち、式 (32) の特性方程式を式 (9) のように表すと、根 α_1, α_2 は式 (12) を

$$\left. \begin{aligned} b &= Q^2(1 + \kappa_y), \quad c = Q^2(\kappa_y Q^2 - \lambda_z^2) \\ D &= Q^2\{Q^2(1 - \kappa_y)^2 + 4\lambda_z^2\} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

に置き換えたものである。

単純支持ばりの無次元曲げ振動数は以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= \frac{\omega_n}{\sqrt{\kappa_y}} \left\{ \beta \mp \sqrt{\beta^2 - \kappa_y} \right\}^{1/2} \\ \hat{Q}_0 &= \lambda_z / \sqrt{\kappa_y} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} \left(1 + \kappa_y + \frac{\lambda_z^2}{\omega_n^2} \right) \\ \omega_n &= n\pi, \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

また、回転慣性項またはせん断変形を無視する場合には、

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\kappa_y \omega_n^2 + \lambda_z^2}} \quad (\text{回転慣性項を省略}) \\ Q_n &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^2 + \lambda_z^2}} \quad (\text{せん断変形を省略}) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

式 (34) の 2 つの振動数 Q_n, \hat{Q}_n ($Q_n < \hat{Q}_n$) に対して 2 つの振動モードが求められる。

$$\left. \begin{aligned} v_n(\bar{\xi}) &= C_1 \sin \omega_n \bar{\xi} \\ \theta_{zn}(\bar{\xi}) &= C_2 \cos \omega_n \bar{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (37)$$

ここに、

$$C_2 = C_1 \frac{\omega_n}{\ell} (1 - \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \kappa_y}) \quad (\text{式 (34) に複号同順}) \quad (38)$$

式 (37) で与えられる曲げ振動モードを B モード、 \hat{B} モードとする。また、 \hat{Q}_0 に対するせん断モードも式 (23) と同様な式で与えられる。

$$v_0(\bar{\xi}) = 0, \quad \theta_{z0}(\bar{\xi}) = C_0 \quad (39)$$

両端固定ばりの振動数方程式は式 (27) と同じである。ただし、式中の a_1, a_2 には式 (26) の代わりに次式を用いる。

$$a_1 = \alpha_1(\alpha_1^2 - Q^2), \quad a_2 = \alpha_2(\alpha_2^2 + Q^2) \quad (40)$$

たわみ v の振動モードは式 (28)、たわみ角 θ_z の振動モードは式 (29) と同じ式である。ただし、式中の係数 C_2 は次のようになる。

$$C_2 = C_1 \frac{\lambda_z^2}{\ell} Q_n^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (41)$$

3. 拡張 Timoshenko はり要素

C^0 級はり要素と C^1 級はり要素の式を求める。これらの要素の剛性行列は文献 8) に示したので、ここでは質量マトリックスを定式化する。

(1) ハイアラキ要素

はり要素は 2 軸対称断面を有する直線要素とし、直交デカルト座標系 (x, y, z) の座標軸方向の並進変位を u_0, v_0, w_0 、座標軸まわりの回転角を $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 、全ねじり率を ψ とする。これらの任意の変位成分 $d(\xi)$ を、形状関数 $N_k(\xi)$ にハイアラキ多項式を用いて同一の級数で表す。

$$d(\xi) = \sum_{k=1}^m N_k(\xi) d_k \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (42)$$

$$N_k(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k \xi & (k = 1, 2) \\ (1 - \xi^2) \xi^{k-3} & (k \geq 3) \end{cases} \quad (43)$$

ここに、 ξ は自然座標、 m は展開項数、 d_k は一般化変位である。

第 k 項の変位の 7 成分をまとめてベクトル d_k で表す。

$$d_k = \{ u_k \quad v_k \quad w_k \quad \theta_{zk} \quad \theta_{yk} \quad \theta_{xk} \quad \psi_k \}^T \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (44)$$

全級数項の d_k を集めたものを d とすると、Hamilton の原理により次式の棒要素の振動方程式が求められる。

$$[k_L - p^2 m] d = f \quad (45)$$

ここに、 k_L は線形の剛性行列⁸⁾、 m は整合質量マトリックス、 p は固有円振動数、 f は d に対応する一般化力である。

m を級数項ごとに分割すると、第 k, j 項に対する小行列 m_{kj} は次式のようになる。

$$m_{kj} = \rho f_{kj} \begin{bmatrix} A & & & & & & \\ & A & & & & & 0 \\ & & A & & & & \\ & & & I_p & & & \\ & & & & I_y & & \\ 0 & & & & & I_z & \\ & & & & & & I_w \end{bmatrix} \quad (46)$$

ここに、 f_{kj} は次の積分値である。

$$f_{kj} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 N_k N_j d\xi \quad (47)$$

一般化変位 d の順序を並べ換えて、式 (45) を縦振動、曲げねじり振動、 y と z 軸まわりの曲げ振動に分

けると、 m は次式のようになる。

$$m = \begin{bmatrix} m_u & & & \\ & m_w & & \\ & & m_v & \\ & & & m_w \end{bmatrix} \quad (48)$$

各小行列は行列 m_0 を用いて一般的な形で与えられる。4 項用いた場合には次のようになる。

$$m_0 = \frac{\rho \ell}{3} \begin{bmatrix} a & 0 & \frac{a}{2} & 0 & a & 0 & -\frac{a}{5} & 0 \\ & b & 0 & \frac{b}{2} & 0 & b & 0 & -\frac{b}{5} \\ \hdashline & & a & 0 & a & 0 & \frac{a}{5} & 0 \\ & & & b & 0 & b & 0 & \frac{b}{5} \\ & & & & \frac{8a}{5} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{8b}{5} & 0 & 0 \\ \hdashline & & & & & & \frac{8a}{35} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & & & \frac{8b}{35} \end{bmatrix} \quad (49)$$

ここで、式中の a, b には次の値を用いる。

$$\left. \begin{aligned} a &= I_p, & b &= I_w & (\text{曲げねじり振動}) \\ a &= A, & b &= I_y \text{ or } I_z & (\text{曲げ振動}) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

また、縦振動に対する質量マトリックス m_u は、 $a = A$ とおいて b を含む行と列 (回転慣性項) を削除して行列を縮小する。

(2) エルミート要素

慣用の C^1 級はり要素の形状関数には、エルミートの補間多項式が用いられる。これにせん断変形による補間関数⁸⁾を加えると、拡張 Timoshenko 理論による質量マトリックスが求められる。

エルミート要素は部材両端に節点自由度のみを有するので、整合質量マトリックスを式 (48) のように分割すると、各小行列は 4 元 (m_u のみ 2 元) になり、次式のように表すことができる。

$$m_0 = \rho \ell \begin{bmatrix} c & d & f & -g \\ & e & g & -h \\ \hdashline & & c & -d \\ \text{sym.} & & & e \end{bmatrix} \quad (51)$$

曲げねじり振動に対する質量マトリックス m_w の要素は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{I_p}{21} \{7 + (8 + 7\varphi_x)\Phi\} + \frac{12I_w}{\ell^2} \Phi \\ d &= \frac{I_p \ell}{84} \left\{ \frac{7}{2} + (9 + 7\varphi_x)\Phi \right\} + \frac{I_w}{\ell} (1 - 5\varphi_x)\Phi \\ e &= \frac{I_p \ell^2}{84} \left(\frac{7}{10} + \Phi \right) + I_w \left\{ \frac{1}{3} - (2 + 5\varphi_x)\Phi \right\} \\ f &= \frac{I_p}{2} - c, & g &= \frac{I_p \ell}{12} - d \\ h &= \frac{I_p \ell^2}{60} + \frac{I_w}{6} - e \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

$$\Phi = \frac{1}{10(1 + \varphi_x)^2}, \quad \varphi_x = 12 \left(1 + \frac{J}{J_s} \right) \frac{EI_w}{GJ_s \ell^2} \quad (53)$$

式 (50) のように、 I_p を A 、 I_w を I_z に置き換えて、 φ_x に曲げによるせん断変形に関するパラメータ φ_y

$$\varphi_y = 12EI_z/GA_{sy}\ell^2 \quad (54)$$

を用いると、式 (51) はマトリックス法で周知の Timoshenko はりの z 軸まわりの質量マトリックスが得られる⁹⁾。また、式 (49) の 8 行目と 8 列目を除いた (7×7) の行列に文献 8) の付録 I (3) に示した拡張離散 Kirchhoff の拘束条件を課して (4×4) の行列に縮小した式は式 (52) に一致する。なお、式 (52) の c, d, e, h の右辺第 2 項はそり慣性項であり、 $\varphi_x = 0$ とおけばせん断変形を無視した式になる。

4. はりの自由振動解析

(1) 単純ばりの振動モード

せん断変形を考慮したはりの振動では、曲げ及び曲げねじり振動において、B モードと \hat{B} モード及び T モードと \hat{T} モードのそれぞれ 2 種類ずつの振動モードが存在する。

式 (37), (38) で与えられる単純ばりの 1~3 次の曲げ振動モードを図-1 に示す。図中の実線はたわみ v の振動モードで、B と \hat{B} モードは同一の曲線で表すことができる。これに対して、たわみ角 θ_z の振動モードは点線で示す B モードと破線の \hat{B} モードのように、向きと振幅の大きさが異なる。また、図には示していないが、たわみがゼロでたわみ角が一定である式 (39) のせん断モードが存在する。

図中の \circ 印は 10 次式を用いたハイアラキー要素 (p 法) による値、 \square 印は 10 要素に分割したエルミート要素 (h 法) による値である。両要素の総自由度数は同じであるが、 h 法によるたわみ角の \hat{B} モードでは誤差が生じている。

式 (21), (22) の曲げねじり振動のねじり角とねじり率は図-1 と波形のよく似たモード図が得られ、T モードと \hat{T} モードについて曲げ振動と同様なことがいえる。

(2) 固定ばりの振動モード

固定ばりでも B と \hat{B} モード、または T と \hat{T} モードの 2 種類の振動モードが存在するが、これらの振動モードの性状は単純ばりの場合と著しく異なる。

ねじり角 θ_x とねじり率 ψ の T モードを図-2 に示す。曲線は式 (28), (29) から求めたもので、第 1 式から奇数次のモード ($n = 1, 3, \dots$)、第 2 式から偶数次のモードが得られる。せん断変形の影響 ($\theta_x' \neq \psi$) は、図 (a) のねじり角では固定端で顕著に現れており ($\theta_x' \neq 0$)、

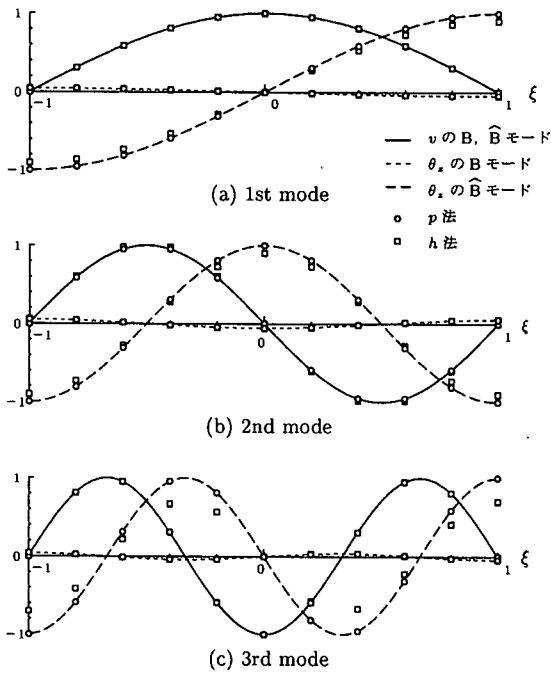


図-1 単純ばりの曲げ振動のモード図 ($\lambda_x = 10, \kappa_y = 5$)

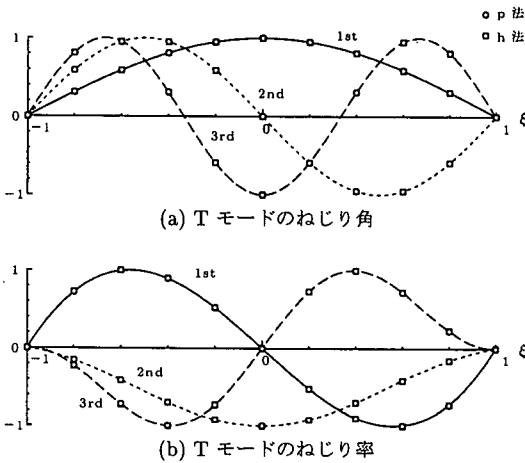


図-2 固定ばりの曲げねじり振動のモード図 ($\chi = \mu = \kappa_x = 10$)

図 (b) のねじり率の振動モードでは、2,3 次の半波形数がねじり角の半波形数より少ない。

次に、 $\hat{Q}_n (> Q_n)$ に対する \hat{T} モードを図-3に示す。T モードとは逆に、奇数次の \hat{T} モードは式 (28), (29) の第 2 式から、偶数次のモードは第 1 式から求められる。したがって、固定ばりでは図-3(b) の \hat{T} モードのねじり率と図-2(a) の T モードのねじり角がほぼ同じ振動モードになっている。また、図-3(a) の \hat{T} モードのねじり角では高次の波形が現れていて、図-2の T モー

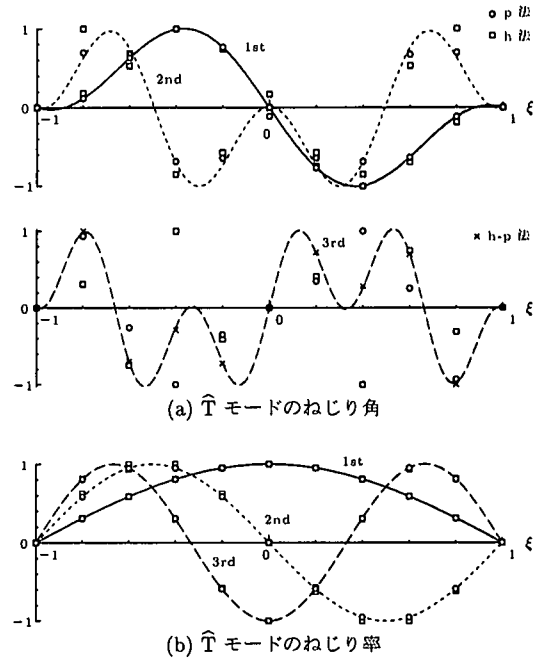


図-3 固定ばりの曲げねじり振動のモード図 ($\chi = \mu = \kappa_x = 10$)

ドと著しく異なっている。

マトリクス法による解は、図-2の T モードでは解析解とよく一致しているが、図-3(a)の 3 次モードでは誤差が大きくて、あたかも波形数の異なるモードに対する解のように見受けられる。そこで、ハイアラーキ要素を 2 要素 ($h-p$ 法) 用いて計算した結果を \times 印で示す。計算値は解析解に完全に一致していることから、このような高次波形モードに対して全自由度数が不足していたことが分かる。

曲げ振動の B モードのたわみモード図は省略するが、パラメータの値が異なるものの図-2(a)のねじり角の T モードとほぼ一致する。また、B モードのたわみ角は、1 次モードは図-2(b)のねじり率の 1 次モードと同じで、2,3 次モードはねじり率の 2,3 次モードと固定端近傍で多少の違いが認められる。

曲げ振動の \hat{B} モードを図-4に示す。 \hat{B} モードでは、形状も半波形数も図-3の \hat{T} モードとかなり異なる。

(3) せん断変形の影響

固有振動数に及ぼすせん断変形の影響は、式 (2), (3) のパラメータの値に依存する。そこで、実構造物で取り得る範囲の値を考慮して、式 (1) の無次元曲げ振動数 Q_n, \hat{Q}_n の値を表-1に示す。表中の $\kappa_y = 0^*$ は Bernoulli-Euler ばりの値で、 $\kappa_y = 0$ では回転慣性を考慮している。また、ポアソン比 ν を 0.3 とすると、骨組部材では $\kappa_y = 3 \sim 10$ 程度の値 (長方形断面では

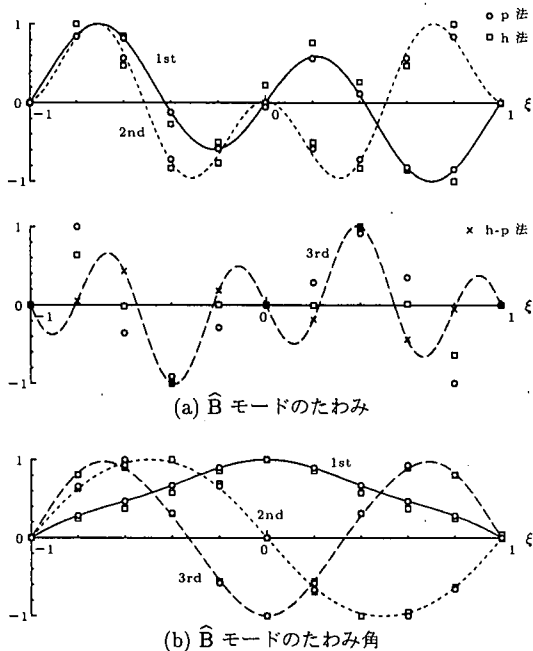


図-4 固定ばりの曲げ振動のモード図 ($\lambda_z = 10, \kappa_y = 5$)

$\kappa_y = 3.12$)である。なお、 \hat{Q}_0 は固定ばりでは現れない。

表-1より、固有振動数は高次モードほど曲げせん断パラメータ κ_y の影響を受けて、 κ_y の値が大きくなるにつれて固有振動数は小さくなる。Bモードでは細長比 λ が小さいほどその影響は大きくなるが、 \hat{B} モードでは逆の傾向を示す。また、 \hat{Q}_n の値は Q_n に比べるとかなり大きいので、 \hat{B} モードは高次振動で現れる。しかし、 $\lambda = 10$ の場合には、単純ばりでは \hat{Q}_0 は全振動モードの4番目、固定ばりでは \hat{Q}_1 は5番目に現れる。

曲げねじり振動の Q_n, \hat{Q}_n の値を表-2, 3に示す。ねじりせん断パラメータ κ_x は0から無限大までの値を取り得るので、 κ_x の影響は曲げ振動における κ_y よりも大きく、かつ、単純支持よりも固定支持の方が影響が大きい。曲げねじり定数比 $\mu = 10$ はI型断面、 $\mu = 100$ は箱型断面を想定した値で、曲げ振動における細長比と同様な影響を及ぼすが、 μ が大きい場合でも高次モードで κ_x の影響が現れる。また、 \hat{T} モードでは κ_x の影響は低次モードで現れていて、表-2の単純支持ばりでは \hat{Q}_0 が最小(基本振動数)になることがある(表-5を参照)。

表-2, 3を比較すると、ねじり定数比 χ の値によりTモードの振動数は3倍ほど異なるが、 \hat{T} モードではほぼ同じである。また、Tモードにおけるせん断変形の影響 ($\kappa_x = 0$ の値に対する振動数の減少率)は、 $\kappa_x \geq 1$ の場合は χ の値によらずほぼ同じである。

表-1, 2の単純支持ばりにおけるパラメータの影響を

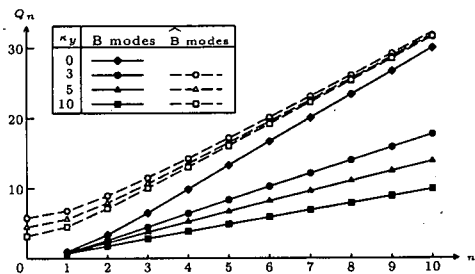


図-5 単純支持ばりの曲げ振動数 ($\lambda_z = 10$)

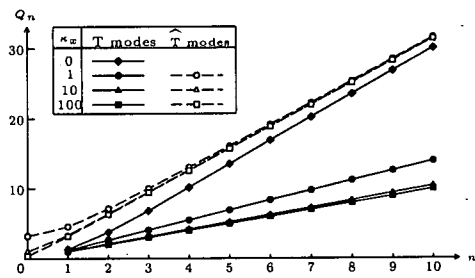


図-6 単純支持ばりの曲げねじり振動数 ($\mu = \chi = 10$)

図-5, 6に示す。 \hat{B}, \hat{T} モードでは高次モードほど κ_y と κ_x の影響は小さくなるが、B, Tモードではせん断変形を無視した $\kappa_y = \kappa_x = 0$ の値と比べることにより、高次モードほどせん断変形の影響は大きくなるのが分かる。

(4) せん断モードの限界振動次数

図-5, 6に示したように、パラメータの値によっては \hat{B} または \hat{T} モードが低次の振動モードで起きることがある。そこで、これらの振動モードが起きる限界の振動次数を求める。

まず、単純支持ばりの曲げ振動で起きる \hat{B} モードの無次元振動数 \hat{Q}_n は、式(34)の第1式の複号の正の式に第2式の \hat{Q}_0 を含めて ($\omega_0 = 0$ とすると) 次式のようにになる。

$$\hat{Q}_n = \frac{\omega_{\hat{n}}}{\sqrt{\kappa_y}} \left\{ \beta + \sqrt{\beta^2 - \kappa_y} \right\}^{1/2} \quad (\hat{n} = 0, 1, 2, \dots) \quad (55)$$

そこで、 \hat{Q}_n の振動モードが起きる最低次の \hat{Q}_0 と Q_n の関係を調べるために

$$Q_n < \hat{Q}_0 < Q_{n+1} \quad (56)$$

を満たす条件を求めると、せん断モードが起きる限界振動次数 n^* が得られる。

$$n^* = \left\lfloor \frac{\lambda_z}{\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_y}} \right\rfloor + 1 \quad (57)$$

表-1 無次元曲げ振動数

モード	λ_n	κ_n	単純支持					固定支持					
			0次	1次	2次	3次	4次	5次	1次	2次	3次	4次	5次
B	10	0*	—	0.9870	3.9478	8.8826	15.791	24.674	2.2373	6.1673	12.090	19.986	29.856
		0	—	0.9416	3.3428	6.4641	9.8329	13.251	2.1109	5.0983	8.5716	12.135	15.674
		3	—	0.8421	2.5574	4.4668	6.4002	8.3212	1.3995	2.8912	4.6318	6.2768	9.0747
		5	—	0.7900	2.2354	3.7440	5.2332	6.7007	1.1870	2.3943	3.8096	5.1581	6.6694
	30	0*	—	0.3290	1.3159	2.9609	5.2638	8.2247	0.7458	2.0558	4.0301	6.6620	9.9519
		0	—	0.3272	1.2880	2.8248	4.8551	7.2863	0.7407	2.0051	3.8253	6.1052	8.7506
		3	—	0.3221	1.2163	2.5264	4.1032	5.8407	0.6874	1.7335	3.0887	4.6341	6.3030
		5	—	0.3188	1.1744	2.3699	3.7457	5.2077	0.6574	1.6020	2.7784	4.0824	5.4646
	100	0*	—	0.0987	0.3948	0.8883	1.5791	2.4674	0.2237	0.6167	1.2090	1.9986	2.9856
		0	—	0.0986	0.3940	0.8843	1.5668	2.4375	0.2236	0.6153	1.2031	1.9817	2.9469
		3	—	0.0985	0.3917	0.8730	1.5320	2.3558	0.2220	0.6056	1.1712	1.9043	2.7904
		5	—	0.0984	0.3902	0.8657	1.5100	2.3055	0.2209	0.5993	1.1513	1.8573	2.6986
B)	10	3	5.774	6.766	8.912	11.481	14.245	17.119	6.9376	9.0747	11.537	14.227	17.013
		5	4.472	5.587	7.898	10.610	13.495	16.468	5.6727	7.9106	10.549	13.506	16.416
		10	3.162	4.514	7.094	9.990	12.998	16.056	4.5238	7.1226	9.8482	12.853	15.851
	30	3	17.321	17.693	18.739	20.299	22.220	24.390	17.689	18.756	20.355	22.290	24.441
		5	13.416	13.847	15.033	16.762	18.854	21.189	13.851	15.056	16.781	18.843	21.097
		10	9.487	10.038	11.500	13.543	15.934	18.539	10.043	11.500	13.450	15.925	18.541
	100	3	57.735	57.849	58.188	58.745	59.511	60.471	57.849	58.282	57.849	59.521	60.553
		5	44.721	44.853	45.246	45.889	46.768	47.862	44.854	44.914	45.877	46.762	47.863
		10	31.623	31.794	32.300	33.121	34.228	35.589	31.793	32.300	33.122	34.229	35.585

Note: 0* は Bernoulli-Euler ぼり

表-2 無次元曲げねじり振動数 ($\chi = 10$)

モード	μ	κ_n	単純支持					固定支持					
			0次	1次	2次	3次	4次	5次	1次	2次	3次	4次	5次
T	10	0*	—	1.4004	4.4196	9.3693	16.284	25.169	2.4957	6.5292	12.493	20.411	30.294
		0	—	1.3360	3.7423	6.8183	10.140	13.517	2.3562	5.4008	8.8565	12.391	18.902
		1	—	1.1993	2.6395	4.0846	5.5167	6.9401	1.3462	2.6588	4.0901	5.5346	6.8630
		10	—	1.0371	2.0813	3.1241	4.1665	5.2087	1.0410	2.0806	3.1241	4.1668	5.2085
	30	0*	—	1.1453	3.0237	5.9315	9.9455	15.087	1.6968	4.1540	7.6552	12.260	17.986
		0	—	1.1269	2.8425	5.2101	8.0500	11.176	1.6640	3.8700	6.6393	9.7777	13.119
		1	—	1.0991	2.4554	3.8979	5.3487	6.7925	1.2727	2.5640	3.9497	5.3529	6.7860
		10	—	1.0298	2.0764	3.1206	4.1638	5.2066	1.0393	2.0759	3.1208	4.1651	5.2062
	100	0*	—	0.6021	1.8180	2.8773	3.9055	4.9217	0.9984	1.9967	2.9952	3.9936	4.9920
		0	—	1.0413	2.3466	4.0955	6.3819	9.2496	1.2963	2.8860	4.9457	7.5544	10.748
		1	—	1.0362	2.3016	3.9249	5.9307	8.2839	1.2890	2.8237	4.7197	6.9809	9.5806
		10	—	1.0329	2.2273	3.5667	4.9808	6.4242	1.1671	2.3969	3.7089	5.0805	6.4879
T)	10	1	3.162	4.517	7.100	9.995	13.002	16.060	4.5043	7.1726	9.9925	13.017	16.056
		10	1.000	3.298	6.363	9.478	12.607	15.740	3.2983	6.3631	9.4783	12.607	15.740
		100	0.316	3.157	6.291	9.430	12.570	15.711	3.1575	6.2911	9.4301	12.570	15.711
	30	1	5.477	6.375	8.447	11.018	13.816	16.732	6.3833	8.4404	10.905	13.818	16.835
		10	1.732	3.591	6.520	9.584	12.686	15.804	3.5897	6.5197	9.5842	12.686	15.804
		100	0.548	3.189	6.307	9.441	12.578	15.718	3.1890	6.3070	9.4407	12.578	15.718
	100	1	10.000	10.525	11.934	13.924	16.269	18.837	10.501	11.882	13.990	16.276	18.804
		10	3.162	4.463	7.040	9.946	12.962	16.026	4.4670	7.0370	9.9453	12.962	16.026
		100	1.000	3.297	6.362	9.478	12.606	15.740	3.2970	6.3623	9.4777	12.606	15.740

表-3 無次元曲げねじり振動数 ($\chi = 100$)

モード	μ	κ_n	単純支持					固定支持					
			0次	1次	2次	3次	4次	5次	1次	2次	3次	4次	5次
T	10	0*	—	0.4428	1.3976	2.9628	5.1494	7.9592	0.7892	2.0647	3.9505	6.4544	9.5799
		0	—	0.4407	1.3708	2.8394	4.7854	7.1282	0.7845	2.0189	3.7686	5.9630	8.5208
		1	—	0.3839	0.8418	1.2981	1.7500	2.1993	0.4263	0.8526	1.3029	1.7515	2.2003
		10	—	0.3281	0.6582	0.9880	1.3176	1.6472	0.3292	0.6583	0.9880	1.3176	1.6472
	30	0*	—	0.3157	0.6314	0.9472	1.2629	1.5786	0.3157	0.6314	0.9472	1.2629	1.5786
		0	—	0.3622	0.9562	1.8757	3.1451	4.7708	0.5366	1.3136	2.4208	3.8768	5.6878
		1	—	0.3616	0.9500	1.8485	3.0654	4.5860	0.5355	1.3038	2.3819	3.7706	5.4530
		10	—	0.3506	0.7859	1.2447	1.7036	2.1593	0.4034	0.8187	1.2617	1.7121	2.1641
	100	0*	—	0.3260	0.6568	0.9870	1.3168	1.6466	0.3287	0.6571	0.9871	1.3169	1.6466
		0	—	0.3157	0.6314	0.9472	1.2629	1.5786	0.3157	0.6314	0.9472	1.2629	1.5786
		1	—	0.3293	0.7421	1.2951	2.0181	2.9250	0.4099	0.9126	1.5640	2.3889	3.3987
		10	—	0.3291	0.7406	1.2894	2.0024	2.8895	0.4097	0.9106	1.5564	2.3688	3.3548
T)	10	1	—	0.3278	0.7110	1.1414	1.5937	2.0529	0.3698	0.7627	1.1838	1.6237	2.0733
		10	—	0.3218	0.6529	0.9839	1.3144	1.6445	0.3272	0.6543	0.9845	1.3146	1.6447
		100	—	0.3156	0.6314	0.9471	1.2629	1.5786	0.3157	0.6314	0.9471	1.2629	1.5786
	30	1	3.162	4.463	7.040	9.946	12.962	16.026	4.4260	7.0399	9.7687	13.769	18.880
		10	1.000	3.297	6.362	9.478	12.606	15.740	3.9538	6.2603	9.4777	12.606	15.740
		100	0.316	3.157	6.291	9.430	12.570	15.711	3.7887	6.2911	9.4301	12.570	15.711
	100	1	5.477	6.320	8.346	10.911	13.717	16.644	6.1946	8.3433	10.912	13.715	16.643
		10	1.732	3.588	6.518	9.583	12.685	15.803	3.5878	6.5178	9.5828	12.685	15.816
		100	0.548	3.189	6.307	9.441	12.578	15.718	3.1573	6.3070	9.4407	12.578	15.718
	100	1	10.000	10.486	11.822	13.759	16.079	18.640	10.486	11.821	13.759	16.079	18.523
		10	3.162	4.458	7.035	9.942	12.959	16.023	4.4580	6.9186	10.543	12.850	15.815
		100	1.000	3.297	6.362	9.478	12.606	15.740	3.2969	6.3623	10.103	12.606	15.740

表-4 曲げ振動の限界振動次数

λ_z	$\kappa_y=3$	$\kappa_y=5$	$\kappa_y=10$
10	4	4	4
30	12	11	11
100	37	35	34

表-5 曲げねじり振動の限界振動次数

χ	μ	$\kappa_x=1$	$\kappa_x=10$	$\kappa_y=100$
10	10	3	1	1
	30	5	2	1
	100	8	4	2
100	10	8	4	2
	30	13	6	2
	100	23	10	4

ここに、[] はガウス記号である。

式(57)より、 $\lambda_z = 10$ のときには、 $\kappa_y (> 2.6)$ 。ただし、 $\nu=0.3$ の値によらず4次モード ($n^* = 4$) はせん断モードになり、 $\hat{Q}_n (\hat{n} \geq 0)$ はこれより高次振動で起きる。 κ_y と λ_z を変化させたときの n^* の次数を表-4に示す。

曲げねじり振動では、単純支持の式(17)から次式が得られる。

$$n^* = \left\lceil \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu(1 + \kappa_x \chi)}{\kappa_x(1 + \kappa_x)}} \right\rceil + 1 \quad (58)$$

パラメータの種々の値に対する n^* の次数を表-5に示す。

固定支持のはりでは、 Q_n の陽な式が得られないので、 $\hat{Q}_n (\hat{n} \geq 1)$ が起きる次数を一般的な式で表すことはできないが、表-1~3より、式(57)または式(58)の n^* よりも高次振動で起きる。

5. p 法と h 法の精度

ハイラーキ要素による p 法とエルミート要素による h 法の精度を調べる。

(1) 縦振動

一端固定、他端自由の片持ばりの縦振動を、5次式と10次式を用いたハイラーキ要素と、5要素と10要素に分割したエルミート要素で計算する。両解法における軸方向の自由度数は同じで、5DOFと10DOFである。

解析解に対する無次元振動数 Q_n の誤差 (%) を表-6に示す。p 法は h 法に比べてかなり精度がよくて、低次モードでの差は著しい。また、h 法では自由度数を2倍にすると精度は4倍になるが、p 法では $10^5 \sim 10^7$ 倍になって収束性のよいことが分かる。なお、p 法では最高次数の精度は悪くなるが、実構造物の解析では使用しないので問題ない。

(2) 曲げ振動

単純支持ばりの曲げ振動を、5次式を用いたハイラーキ要素と5要素に分割したエルミート要素で計算

したときの無次元振動数 Q_n 、 \hat{Q}_n の誤差を表-7に示す。この場合の自由度数はともに10DOFである。

表中の空白の箇所は誤差が100%を越えているために省略した。また、負の誤差は計算値が解析解よりも小さいことを表しており、0.0%の誤差は約16桁まで解析解と一致することを意味する。

Bモードの3~4次以上では、p法はh法よりも誤差は大きい。また、h法は細長比 λ_z の大きい方が誤差は小さいが、p法では逆に、せん断変形の影響が大きく現れる λ_z の小さい方が誤差は小さい。これはp法の特徴で⁸⁾、 \hat{B} モードの精度がよいことから推論できる。

縦振動の場合と同様に、自由度数を2倍にした結果を表-8に示す。曲げ振動でもh法の精度は約4倍になるのに対して、p法では 10^4 倍以上の精度が得られる。

固定ばりについての計算結果は省略するが、表-8と同じ要素を用いた場合の誤差はh法ではほぼ同じで、p法では1桁程度悪い。ただし、 \hat{B} モードでは、たわみモードが図-4(a)のような高次波形になるために、自由度数が少なくて該当するモードが求められなかった(表-10を参照)。

(3) 曲げねじり振動

10次式を用いたハイラーキ要素と10要素に分割したエルミート要素による両端単純支持ばりの曲げねじり振動解析の結果を表-9に示す。表-8の曲げ振動の誤差と比べると大差ないが、h法ではやや悪く、p法では同精度か1桁曲げねじり振動の方がよい。

両端固定ばりの結果を表-10に示す。表-9の単純ばりの場合と同精度の値が得られているが、 \hat{T} モードは曲げ振動と同様に、該当するモードが求められなかった。

(4) せん断変形とペナルティ要素

拡張 Timoshenko 要素を用いた計算でせん断変形を省略する場合には、エルミート要素では式(53)、(54)のパラメータを $\varphi_x = \varphi_y = 0$ とする。ハイラーキ要素では、剛性行列の曲げと曲げねじりに対するせん断剛性 GA_{sy}, GJ_s に次の無次元ペナルティ数 α_y, α_x を掛ける。

$$\alpha_y = 10^7 \kappa_y / \lambda_z^2, \quad \alpha_x = 10^7 \kappa_x / \mu \quad (59)$$

10要素または10次式を用いたh法とp法において、せん断変形の影響を省略し、回転慣性項またはそり慣性項を考慮した計算結果を表-11、12に示す。これらの値は、表-1、2の $\kappa_y = 0$ と $\kappa_x = 0$ の解析解に対する誤差 (%) である。なお、ハイラーキ要素の剛性行列の計算では次数低減積分法を用いている⁸⁾。

表-8~10と比べると、h法では1~3桁精度がよくになっているのに対して、p法ではかなり悪くなっているが、低次モードではh法よりも1~2桁精度はよい。な

表-6 縦振動数の誤差 (%)

DOF	解法	1次	2次	3次	4次	5次
5	h法	0.412	3.73	10.3	18.1	18.2
	p法	4.3×10^{-7}	1.6×10^{-2}	1.08	10.7	65.3
10	h法	0.103	0.928	2.59	5.08	8.37
	p法	2.8×10^{-14}	1.2×10^{-10}	2.1×10^{-6}	8.3×10^{-4}	4.6×10^{-2}

表-7 単純支持ばりの曲げ振動数の誤差 ($\kappa_y = 5, 10\text{DOF}$) (%)

モード	解法	λ_z	0次	1次	2次	3次	4次	5次
B	h法	10	—	5.1×10^{-1}	4.01	11.0	18.1	
		100	—	1.9×10^{-2}	0.28	1.33	3.72	
	p法	10	—	1.2×10^{-3}	0.19	8.47	17.6	
		100	—	1.5×10^{-3}	0.42	14.5	66.4	
\hat{B}	h法	10	3.23	5.88	11.2	14.5	6.59	
		100	-71.5					
	p法	10	0.0	-4.7×10^{-4}	2.4×10^{-1}	3.0×10^{-3}	48.7	
		100	2.8×10^{-14}	1.8×10^{-4}	7.7×10^{-3}	2.62	5.06	

表-8 単純支持ばりの曲げ振動数の誤差 ($\kappa_y = 5, 20\text{DOF}$) (%)

モード	解法	λ_z	0次	1次	2次	3次	4次	5次
B	h法	10	—	1.3×10^{-1}	1.00	2.84	5.60	9.16
		100	—	2.7×10^{-3}	4.2×10^{-2}	0.20	0.61	1.38
	p法	10	—	2.8×10^{-14}	7.8×10^{-8}	3.3×10^{-5}	1.5×10^{-2}	0.10
		100	—	-8.4×10^{-11}	1.2×10^{-7}	1.1×10^{-4}	2.6×10^{-2}	0.41
\hat{B}	h法	10	0.83	1.52	3.10	5.34	8.21	11.5
		100	-3.75					
	p法	10	0.0	2.8×10^{-14}	-1.8×10^{-8}	8.9×10^{-5}	-3.6×10^{-4}	0.31
		100	2.8×10^{-14}	2.8×10^{-14}	3.5×10^{-7}	5.2×10^{-6}	2.7×10^{-2}	4.2×10^{-2}

表-9 単純支持ばりの曲げねじり振動数の誤差 ($\chi = \kappa_x = 10, 20\text{DOF}$) (%)

モード	解法	μ	0次	1次	2次	3次	4次	5次
T	h法	10	—	0.34	1.56	3.61	6.49	10.1
		100	—	0.10	0.98	2.78	5.39	8.73
	p法	10	—	7.1×10^{-14}	6.0×10^{-8}	5.6×10^{-6}	1.4×10^{-2}	6.2×10^{-2}
		100	—	1.3×10^{-13}	6.1×10^{-8}	6.7×10^{-6}	1.4×10^{-2}	6.3×10^{-2}
\hat{T}	h法	10	3.4×10^{-4}	0.80	2.06	4.11	6.92	10.3
		100	3.5×10^{-3}	2.46	4.85	6.97	9.05	10.5
	p法	10	1.4×10^{-14}	1.1×10^{-13}	-2.4×10^{-10}	1.1×10^{-4}	1.3×10^{-3}	0.34
		100	0.0	4.3×10^{-14}	-1.1×10^{-8}	9.7×10^{-5}	4.5×10^{-4}	0.33

表-10 固定ばりの曲げねじり振動数の誤差 ($\chi = \kappa_x = 10, 18\text{DOF}$) (%)

モード	解法	μ	1次	2次	3次	4次	5次
T	h法	10	0.40	1.53	3.61	6.52	10.0
		100	0.36	1.09	2.87	4.63	8.61
	p法	10	0.0	6.0×10^{-8}	5.6×10^{-6}	1.3×10^{-2}	6.1×10^{-2}
		100	-4.3×10^{-14}	6.3×10^{-8}	6.7×10^{-6}	1.3×10^{-2}	6.3×10^{-2}
\hat{T}	h法	10	0.80	2.11	3.89		
	p法	10	0.0	2.8×10^{-4}	-6.2×10^{-4}	1.3×10^{-2}	6.0×10^{-2}

お、式(59)は解の精度が剛性の変化によらず一定になるように求めた最適なペナルティ数である。実際の数値計算では、式(59)に式(2),(3)を代入して、せん断剛性に次の値を用いればよい。

$$\alpha_y G A_{sy} = 10^7 E I_z / \ell^2, \quad \alpha_x G J_s = 10^7 E I_w / \ell^2 \quad (60)$$

以上の結果から、部材長 ℓ が長くてせん断剛性の影

響が現れない場合 (λ と μ が大きい部材。表-1~3参照) でも、ハイアラキー要素には実断面のせん断剛性を用いなければならないので、あえてペナルティ数を用いる必要はないと考えられる。

表-11 せん断変形を無視したはりの無次元曲げ振動数の誤差 (%)

解法	λ_z	単純支持					固定支持				
		1次	2次	3次	4次	5次	1次	2次	3次	4次	5次
h法	10	6.7×10^{-4}	1.1×10^{-2}	5.3×10^{-2}	0.16	0.38	3.5×10^{-3}	2.8×10^{-2}	0.11	0.28	0.60
	100	6.7×10^{-4}	1.1×10^{-2}	5.3×10^{-2}	0.17	0.39	3.5×10^{-3}	2.6×10^{-2}	9.9×10^{-2}	0.26	0.57
p法	10	-4.1×10^{-5}	8.5×10^{-4}	-1.1×10^{-5}	1.1×10^{-2}	0.38	-2.0×10^{-4}	-2.7×10^{-4}	2.9×10^{-3}	0.11	1.97
	100	-4.9×10^{-5}	7.6×10^{-4}	-3.2×10^{-4}	2.5×10^{-2}	0.45	-2.5×10^{-4}	-5.3×10^{-4}	8.1×10^{-4}	0.16	1.57

表-12 せん断変形を無視したはりの無次元曲げねじり振動数の誤差 ($\chi = 10$) (%)

解法	μ	単純支持					固定支持				
		1次	2次	3次	4次	5次	1次	2次	3次	4次	5次
h法	10	3.4×10^{-4}	8.5×10^{-3}	4.8×10^{-2}	0.15	0.37	2.9×10^{-3}	2.4×10^{-2}	9.9×10^{-2}	0.27	0.58
	100	6.2×10^{-5}	3.1×10^{-3}	2.6×10^{-2}	0.10	0.28	1.6×10^{-2}	2.4×10^{-2}	6.8×10^{-2}	0.19	0.44
p法	10	-1.6×10^{-5}	7.0×10^{-4}	1.2×10^{-5}	9.8×10^{-3}	0.36	-1.7×10^{-4}	-2.4×10^{-4}	2.6×10^{-3}	0.10	1.91
	100	-3.5×10^{-6}	2.3×10^{-4}	-8.2×10^{-5}	1.8×10^{-2}	0.33	-1.7×10^{-4}	-3.1×10^{-4}	3.3×10^{-5}	0.10	1.21

表-13 動的縮小法による単純支持ばりの無次元曲げ振動数の誤差 ($\kappa_y = 5$) (%)

モード	n_L	$\lambda_z = 10$					$\lambda_z = 100$				
		1次	2次	3次	4次	5次	1次	2次	3次	4次	5次
B	0	32.2	92.6				11.3	28.8			
	2	7.7×10^{-3}	0.11	—	23.1		8.0×10^{-3}	7.3×10^{-2}	42.0	53.1	
	5	4.8×10^{-3}	1.8×10^{-2}	0.11	8.1×10^{-2}	—	1.6×10^{-5}	3.6×10^{-3}	1.1×10^{-2}	0.30	0.63
	10	8.4×10^{-4}	3.9×10^{-3}	1.7×10^{-2}	2.8×10^{-2}	0.14	1.9×10^{-9}	1.5×10^{-6}	1.2×10^{-4}	8.2×10^{-2}	0.41
	15	6.7×10^{-5}	1.4×10^{-3}	1.3×10^{-3}	2.0×10^{-2}	0.11	1.4×10^{-9}	1.5×10^{-6}	1.2×10^{-4}	8.2×10^{-2}	0.41
	18	-1.1×10^{-13}	9.0×10^{-8}	3.3×10^{-5}	1.5×10^{-2}	0.10	-8.6×10^{-11}	1.4×10^{-6}	1.1×10^{-4}	8.2×10^{-2}	0.41
\hat{B}	n_L	0次	1次	2次	3次	4次	0次	1次	2次	3次	4次
	2	31.9									
	5	0.80	21.4								
	10	0.16	1.08	1.16	18.6	19.0	0.23	36.2	38.6		
	15	5.5×10^{-2}	7.5×10^{-2}	0.35	0.29	1.37	0.20	0.44	0.76	0.72	1.14
18	3.1×10^{-11}	1.7×10^{-11}	9.8×10^{-10}	8.9×10^{-5}	1.2×10^{-3}	-3.6×10^{-11}	3.3×10^{-10}	-1.9×10^{-11}	5.2×10^{-6}	1.1×10^{-4}	

(5) 動的縮小法

p法による骨組構造物の計算では、全体解析の計算を行う前に内部自由度である節線自由度を要素の平衡方程式から消去して数値計算の効率を上げることができる。しかし、固有値問題では、理論的には内部自由度を事前に縮約することはできないので、FEM解析で用いられる動的縮小法を使用する¹⁵⁾。

動的縮小法では、内部自由度による局所振動モードの使用数 n_L によって、解の精度が異なる。そこで、表-8の両端単純支持ばりの曲げ振動解析において、局所モードを0からすべての18モード ($n_L = 0 \sim 18$) まで用いた結果の解析解に対する無次元振動数の誤差を表-13に示す。空白の箇所は、自由度数が少ないために求められなかった。

$n_L = 0$ は Guyan の静的縮小法による結果で、本計算例のような縮約後の自由度数の少ない (2DOF) 問題では精度は悪い。しかし、これに2~5モードを加えると精度は飛躍的に良くなり、細長比の大きい $\lambda = 100$ の場合では $n_L = 10$ 以上用いる必要の無いことが分かる。なお、 $n_L = 18$ の場合でも2段階動的縮小法を用いている。

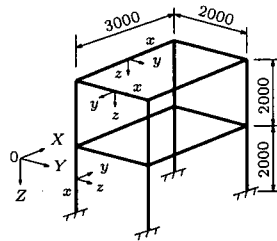


図-7 2層立体ラーメン

6. 立体ラーメンの自由振動解析

(1) 計算例1

図-7に示す2層立体ラーメン¹⁶⁾について自由振動解析を行う。数値計算では曲げねじりを考慮し、柱脚では変位の7成分をすべて固定支持とする。

柱及びはりには同一の2軸対称断面材を使用し、断面諸量には表-14の値を用いる。表の右欄は、部材長 $l=2m$ と $3m$ の部材の無次元量である。また、図-7に部材の断面主軸 y, z の方向 (要素座標系) を示す。

材料定数 E, G と部材の質量密度 ρ (文献¹⁶⁾からの換算値) には次の値を用いる。

表-15 計算例1の固有円振動数の比較

(%)

解法	DOF	1次	2次	3次	4次	5次	6次	7次	8次	9次	10次	
h法	2分割	168	0.008	0.002	0.015	0.076	0.059	0.060	0.036	0.096	1.012	1.017
	4分割	392	0.002	0.000	0.004	0.006	0.005	0.004	0.003	0.007	0.073	0.074
p法	3次式	280	0.002	0.001	0.021	0.034	0.073	0.084	0.030	0.151	4.280	4.297
	4次式	392	0.001	0.000	0.001	0.003	0.004	0.005	0.005	0.021	0.130	0.131
	3-4-6	392	0.002	0.001	0.010	0.024	0.029	0.027	0.023	0.059	0.022	0.022
	6次式	616	0.001	0.000	0.003	0.001	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001
固有円振動数 ¹⁶⁾		27.557	31.022	33.369	87.584	108.768	115.657	118.166	165.628	182.077	182.309	
固有振動モード		Y-1	X-1	XY-1	Y-2	XY-2	XY-3	X-2	XY-4	Z-1	Z-2	

表-16 局所固有円振動数の誤差

(%)

解法	1次	2次	3次	4次	5次	6次	7次	
h法	2分割	1.621	1.621	3.842	32.92	32.92	21.39	10.27 [△]
	4分割	0.133	0.133	0.440	0.925	0.925	0.889	2.136
p法	3次式	9.483	9.483	-2.551	0.658 [△]	3.144 [△]		
	4次式	0.343	0.343	0.753	24.34	24.34	9.70	0.001 [△]
	6次式	0.002	0.002	0.033	0.526	0.526	0.134	5.565
解析解		239.647	359.500	500.393	660.597	990.975	1110.23	1295.03
振動モード		y-1	z-1	x-1	y-2	z-2	x-2	y-3

表-14 断面諸量 (cm)

断面諸量		無次元パラメータ	
A	11.75	ℓ	200, 300
I_y	41.66	λ_y	106.2, 159.3
I_z	93.75	λ_z	70.8, 106.2
J	1.823	χ	192.6, 192.6
I_w	603.6	μ	46.6, 104.8

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (206GPa)}$$

$$G = 8.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (79.4GPa)}$$

$$\rho = 7.8516 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$$

文献 16) では、曲げねじり振動の支配方程式の解である固有関数を変位関数に用いて振動数方程式を導き、この超越方程式の固有値問題を解いて固有振動数を求めている。ただし、せん断変形と回転慣性は考慮されていないので、数値計算ではこれらの効果を省略する。なお、ハイラーキ要素では、式 (60) のペナルティ係数を使用する。

16部材のすべてに3次式、4次式、または6次式を用いたハイラーキ要素によるp法と、すべての部材を2分割または4分割して32要素または64要素のエルミート要素を用いたh法で求めた固有円振動数 (rad/sec) を表-15に示す。数値は文献 16) に示された値に対する差 (%) である。また、3-4-6次式を用いたp法は後述の局所振動を考慮した解法で、この解法と4次式のp法及び64要素のh法の固定端を除いた総自由度は同じ392DOFである。

振動モードの欄の記号X,Yは、XまたはY方向の変位成分が卓越した曲げ振動、XYはねじり振動、Zは3mの4本のはりのみが上下に振動する局所的な曲げ振動を表し、数字は各モードの次数を示す。

全般的な傾向として、低次モードではp法、高次モー

ドではh法の方が精度がよくて、8次モードまでは1つの値を除いて0.1%以下の差でよく一致している。しかし、9次と10次モードの値は、h法と3、4次式のp法では低次モードに比べてかなり悪くなっている。

p法ではすべての場合で2段階動的縮小法¹⁵⁾を用いている。この解法では、全体モード解析と各部材ごとの局所モード解析を分離して行い、これらの連成モード解析は両モードから振動数の小さいモードを選び出して縮約した式で計算する。本計算例では、15個の全体モードと各部材ごとに7個の局所振動モードを用いている。局所モードはそれぞれの部材を両端固定ばりとしたときの振動モードで、固定ばりの解析解に対する局所振動数の誤差 (%) を、3mのはりについて表-16に示す。振動モードの記号は、断面主軸y,z軸まわりの曲げ振動とx軸まわりの曲げねじり振動を表す。なお、△印のモードは縦振動の誤差で、下欄の振動モードではない(1次の縦振動の解析解は5361.3rad/sec)。h法では縮小法を用いていないが、参考のために、1本のはりを2要素と4要素に分割した場合の誤差を示した。

一般的に、各部材の局所振動数は全体モードの振動数に比べてかなり大きいので、構造物の振動数に及ぼす局所振動数の影響は少ないが、9次と10次モードのように局所振動が卓越する場合には大きく影響する。3次式を用いたp法では、表-16の1次振動の誤差のために表-15の9、10次モードの誤差が大きくなったものと考えられる。同様なことは、はりを2要素に分割したh法でも、はりの自由度数が少ないために誤差が大きくなっている。

そこで、4次式を用いたp法において3mのはりのみに6次式を用いて、全自由度数を同じにするために柱要素に3次式を用いた3-4-6次式の場合には、表-15

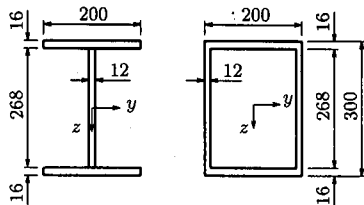


図-8 断面形状

表-17 断面諸量(計算例2) (cm)

断面諸量		無次元パラメータ			
I形	箱形	I形断面		箱形断面	
		200	300	200	300
A	96.16	128.32	ℓ		
I_y	14843	16768	λ_y	16.1	24.1
I_z	2137	7824	λ_z	42.4	63.6
J	70.97	16098	χ	620.3	620.3
I_w	430165	86278	μ	2.55	5.73
k_x	0.623	0.198	κ_x	0.00674	
k_y	0.666	0.499	κ_y	3.89	
k_z	0.334	0.561	κ_z	7.76	
				9.57	5.20
				2879	6477
				4.62	

のように9, 10次モードの誤差は減少している。なお、数値計算に用いた局所モード数は、全局所モード数の1/3(=112/336DOF, 4次式のp法も同じ)である。

(2) 計算例2

計算例1の剛性はかなり低いので、部材剛性を変更してせん断変形の影響を調べる。

図-7のラーメンの全部材に、図-8のI形断面材または箱形断面材を用いる。断面諸量には表-17に示す値を使用し、このときの無次元量は表のようになる。材料定数E,Gは計算例1と同じで、 $\rho = 7.85 \times 10^{-3} \text{kg/cm}^3$ とする。

正確な値を求めるために、10次式を用いたp法による固有円振動数を表-18に示す。表中の6,7DOFはせん断変形と回転慣性を無視した場合の誤差(増加率%)を表す。ここで、6DOFは曲げねじりの影響を調べるために、サンプナンのねじりのみを考慮している。振動モードの記号は表-15と同じで、全部材が3方向に振動するモードをXYZで表す。なお、xyは8本のはりのみがX-Y平面内で振動する局所的な部材の曲げ振動である。

I形断面の6DOFの計算では、曲げねじりを考慮した場合には現れない局所振動モード(3mのはりのねじり振動)が4~7次モードに存在するが、表-18ではこれらを省略している。また、空白のモードは7DOFのモードと異なるために比較していない。表に示した振動モードでは曲げねじりの影響はわずかである。また、せん断変形の影響は振動モードによってかなりの差があるが、箱形断面では3~8%程度でほぼ一様に現れている。

次に、解法の精度を比較するために、4要素に分割し

たh法と4次式を用いたp法の計算誤差を表-19に示す。I形断面の場合の誤差は0.1%以下で、解法による差はあまりないが、箱形断面ではp法の方がかなり精度がよい。

7. 結 論

拡張 Timoshenko 理論に基づく自由振動問題の解析解を求め、せん断変形とそり慣性を考慮した曲げねじり振動では、曲げ振動と同様に2種類の振動モードが存在することを解析的に示し、これらの振動特性を明らかにした。また、両端単純支持のはりでは振動波形が一定であるせん断モードが存在し、そのモードが生じる限界振動次数を求めた。さらに、ハイラーキ要素とエルミート要素を定式化した。p法とh法による自由振動解析について以下のことがいえる。

- (1) 変位関数を区分的に近似するh法に比べて、高次関数を用いるp法では離散化誤差が小さくなることから、収束性は格段に優れている。ただし、ある次数以上の高次関数(5次程度)を用いないとその効果は現れない。
- (2) せん断変形を考慮するとh法の精度は悪くなるが、 C^0 級要素を用いたp法は逆によくするので、ハイラーキ要素によるp法はせん断変形解析に適している。
- (3) 2段階動的縮小法を用いたp法による骨組構造の振動解析では、全自由度を用いた非縮約計算と同精度の値が得られるので、計算効率を上げることができる。
- (4) また、全体振動モードとの連成効果を考慮した精度のよい局所振動モードを求めることができる。

本論文をまとめるにあたって、大学院生の須藤光紀君(現、川田工業勤務)と学部学生の嘉指智子君の協力を得た。記して謝意を表す。

付録 I $c = 0$ の場合の振動モード

式(9)のcが0の場合の振動モードを調べる。

(1) 一般解

$c = 0$ ($\therefore Q^2 = \mu/\kappa_x$) の場合の式(9)の解 α は、

$$\alpha = \pm \alpha_1 i, \quad 0 \text{ (重根)} \quad (\text{I.1})$$

となる。曲げねじり振動の場合は式(12)のbを用いると

$$\alpha_1^2 = b = \bar{\mu}(\chi + 1/\kappa_x) \quad (\text{I.2})$$

表-18 曲げねじりとせん断変形の影響

(%)

断面	解法	1次	2次	3次	4次	5次	6次	7次	8次	9次	10次
I形断面	6DOF	2.38	6.77	13.45	7.06	1.73	1.09				
	7DOF	2.38	7.00	13.48	7.08	1.75	1.65	0.86	0.91	6.43	1.36
	振動数モード	83.788 X-1	144.345 XY-1	150.886 Y-1	224.657 XY-2	237.960 X-2	305.891 XY-3	339.650 xy-1	344.866 xy-2	375.129 Y-2	492.438 XYZ
箱形断面	6DOF	4.13	7.50	6.01	3.64	4.48	7.87	4.16	3.07	7.40	3.87
	7DOF	4.13	7.50	6.21	3.66	4.48	7.91	4.29	3.15	7.42	4.23
	振動数モード	116.747 X-1	150.066 Y-1	175.042 XY-1	323.701 XY-2	359.956 X-2	451.407 Y-2	485.039 XY-3	564.319 xy-1	599.584 XY-4	637.100 xy-2

表-19 計算例2の固有円振動数の比較

(%)

断面	解法	1次	2次	3次	4次	5次	6次	7次	8次	9次	10次
I形	4分割	0.001	0.004	0.010	0.014	0.010	0.015	0.073	0.076	0.091	0.100
	4次式	0.000	0.008	0.000	0.086	0.013	0.050	0.049	0.052	0.039	0.042
箱形	4分割	0.002	0.008	0.189	0.041	0.025	0.108	0.148	0.233	0.106	0.488
	4次式	0.000	0.000	0.013	0.032	0.006	0.006	0.025	0.054	0.212	0.085

式 (I.1) より式 (5) の一般解は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x(\bar{\xi}) &= C_1 \sin \alpha_1 \bar{\xi} + C_2 \cos \alpha_1 \bar{\xi} + C_3 \\ \ell \psi(\bar{\xi}) &= -\frac{\mu}{\alpha_1 \kappa_x} (C_2 \sin \alpha_1 \bar{\xi} - C_1 \cos \alpha_1 \bar{\xi}) \\ &\quad + \mu \chi C_3 \bar{\xi} + C_4 \end{aligned} \right\} \quad (I.3)$$

(2) 単純ばり

はりの両端における境界条件 $\theta_x = \psi' = 0$ に式 (I.3) を代入すると、 $\sin \alpha_1 \neq 0$ のときは $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ となり、1つの任意定数 C_4 に対して式 (23) のせん断モードが存在する。

しかし、 $\alpha_1 = n\pi$ のときには、 C_i に関する係数行列の階数が2になるため、2つの任意定数 C_1, C_4 に対して次の2つの振動モードが存在する。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x = 0 \\ \psi = C_4 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \theta_x = C_1 \sin n\pi \bar{\xi} \\ \psi = \frac{Q_0^2}{n\pi \ell} C_1 \cos n\pi \bar{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (I.4)$$

ここに、 Q_0 は式 (17) の \hat{Q}_0 で与えられる。

また、2つの振動モードが存在するための条件として、パラメータは式 (I.2) から得られる次式を満たすことが必要である。

$$\tilde{\mu}(1 + \kappa_x \chi) = \kappa_x (n\pi)^2 \quad (I.5)$$

(3) 固定ばり

両端固定の条件 $\theta_x = \psi = 0$ に式 (I.3) を代入して、2つの振動数方程式が求められる。

$$\tan \frac{\alpha_1}{2} + \kappa_x \chi \frac{\alpha_1}{2} = 0 \quad (I.6)$$

$$\sin \frac{\alpha_1}{2} = 0 \quad (I.7)$$

式 (I.6) から θ_x の対称モードが得られる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= C_2 (\cos \frac{\alpha_1}{2} \xi - \cos \frac{\alpha_1}{2}) \\ \psi &= -\frac{Q_0^2}{\alpha_1 \ell} C_2 (\sin \frac{\alpha_1}{2} \xi - \xi \sin \frac{\alpha_1}{2}) \end{aligned} \right\} \quad (I.8)$$

ここに、 ξ は自然座標である。このモードが存在するための条件は次式のようにになる。

$$\tilde{\mu}(1 + \kappa_x \chi) = \kappa_x \alpha_1^2 \quad (I.9)$$

また、式 (I.7) から θ_x の逆対称モードが得られる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= C_1 \sin n\pi \bar{\xi} \\ \psi &= -\frac{Q_0^2}{n\pi \ell} C_1 (1 - \cos n\pi \bar{\xi}) \end{aligned} \right\} \quad (n = 2, 4, \dots) \quad (I.10)$$

このモードが現れる条件は式 (I.5) と同じであるが、 n を偶数とする。なお、式 (I.8) は n が奇数の場合のモードに対応する。

(4) 曲げ振動モード

単純ばりと固定ばりの曲げ振動において、式 (33) の c が0になる場合にたわみ v と回転角 θ_z に現れる特別な振動モードは、式 (34) の \hat{Q}_0 を式 (I.4), (I.8), (I.10) の Q_0 に用いた式で与えられる。また、これらの振動モードが現れる条件は次のようになる。

$$\lambda_x^2 (1 + \kappa_y) = \kappa_y \alpha_1^2 \quad (I.11)$$

ここに、 α_1 は曲げねじり振動における値と同じであるが、固定ばりにおける v の対称モードに対しては、式 (I.6) の代わりに次の振動数方程式の解を用いる。

$$\tan \frac{\alpha_1}{2} + \kappa_y \frac{\alpha_1}{2} = 0 \quad (I.12)$$

なお、単純ばりの曲げ振動モードの式は文献5)の式と一致する。

(5) 特別な振動モード

式 (I.5) を式 (17) の小根 Q_n に用いると、多少冗長な計算を行って

$$Q_n = \sqrt{\mu/\kappa_x} \quad (I.13)$$

が得られる。また、式 (I.5) を式 (22) の正符号の式に代入すると、 C_2 は式 (I.4) の ψ の係数に一致する。

したがって、パラメータが式 (I.5) の関係を満たすときには、 Q_n とせん断モードの無次元振動数 \hat{Q}_0 が一致して重根になることが判る。

一方、固定ばりでは、式 (I.5) または式 (I.9) を満たすパラメータに対しても、式 (I.3) の未定係数 C_i に関する係数行列の階数が 3 であるので、重根に対して 2 つの振動モードは現れない。なお、これらの条件式と式 (26) 及び $\alpha_2 \rightarrow 0$ を式 (27) ~ (30) に用いると式 (I.6) ~ (I.8), (I.10) が得られるので新たな振動モードが生じるものではない。

以上の特別なパラメータの値に対する振動モードを p 法で求められることを確認している。

参考文献

- 1) Weaver, W. Jr., Timoshenko, S. P. and Young, D. H. : *Vibration Problems in Engineering*, 5th ed., John Wiley & Sons, pp.433-436, 1990.
- 2) Abbas, B. A. H. and Thomas, J. : The second frequency spectrum of Timoshenko beams, *J. Sound and Vibration*, Vol.51, pp.123-137, 1977.
- 3) Bhashyam, G. R. and Prathap, G. : The second frequency spectrum of Timoshenko beams, *J. Sound and Vibration*, Vol.76, pp.407-420, 1981.
- 4) Levinson, M. and Cooke, D. W. : On the two frequency spectra of Timoshenko beams, *J. Sound and Vibration*, Vol.84, pp.319-326, 1982.
- 5) O'Reilly, O. M. and Turcotte, J. S. : Another mode of vibration in a Timoshenko beam, *J. Sound and Vibration*, Vol.198, pp.517-521, 1996.
- 6) 池上隆三, 窪田浩司, 藤谷義信 : 有効せん断係数を用いた薄肉はりの曲げ及び曲げねじりの有限要素解析, JSSC 第 17 回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集, pp.173-178, 1983.
- 7) 深沢泰晴, 太田貞次 : ティモシェンコ理論の薄肉開断面ばりの曲げねじり理論への拡張, 構造工学論文集, Vol.33A, pp.217-228, 1987.
- 8) 林 正, 岩崎英治 : ハイアラキー要素による骨組構造解析, 土木学会論文集, No.570/I-40, pp.163-174, 1997.
- 9) Przemieniecki, J. S. : *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1968 (山田嘉昭, 川井忠彦共訳 : マトリックス構造解析の基礎理論, 培風館, pp.262-270, 1971).
- 10) Dawe, D. J. : A finite element for the vibration analysis of Timoshenko beams, *J. Sound and Vibration*, Vol.60, pp.11-20, 1978.
- 11) Lees, A. W. and Thomas, D. L. : Modal hierarchical Timoshenko beam finite elements, *J. Sound and Vibration*, Vol.99, pp.455-461, 1985.
- 12) Houmat, A. : Vibration of Timoshenko beams by variable order finite elements, *J. Sound and Vibration*, Vol.187, pp.841-849, 1995.
- 13) Surana, K. S. and Nguyen, S. H. : Completely hierarchical two-dimensional curved beam element for dynamics, *Computer & Structures*, Vol.40, pp.957-967, 1991.
- 14) Corni, S., Bouhaddi, N. and Piranda, J. : Transverse vibrations of short beams: Finite element models obtained by a condensation method, *J. Sound and Vibration*, Vol.201, pp.353-363, 1997.
- 15) 林 正, 渡辺 力 : 2 段階動的縮小法を用いたハイアラキー要素による自由振動解析, 土木学会論文集, No.619/I-47, pp.35-46, 1999.
- 16) 林川俊郎, 武村信也, 佐藤浩一 : そりねじりを考慮した立体骨組構造の固有振動数の精度について, 土木学会第 51 回年次学術講演会, I-B70, 1996.

(1999. 5. 7 受付)

FREE VIBRATION ANALYSIS OF FRAMED STRUCTURES BASED ON EXTENDED TIMOSHENKO BEAM THEORY

Masa HAYASHI, Eiji IWASAKI, Michio SAITOH and Jota TOKI

Free vibration analysis of extended Timoshenko beams considering secondary shear deformation due to warping torsion has hardly been investigated. In this paper, the exact solutions of this problem are obtained analytically, and hierarchical and Hermite beam elements with C^0 and C^1 continuity, respectively, are formulated with the extended Timoshenko theory. The effects of shear deformation are clarified for Timoshenko beams by analytical method and examined for frames by numerical calculations with p - and h -versions using the each element.