

ハイラーキ要素による平板の座屈解析

林 正¹・渡辺 力²・増井 由春³・上田 隆博⁴

¹正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部 環境・建設系 (〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)

²正会員 工修 函館工業高等専門学校助教授 環境都市工学科 (〒042-8501 函館市戸倉町 14-1)

³正会員 長岡技術科学大学文部技官 (〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)

⁴長岡技術科学大学大学院 建設工学専攻 (〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)

本論文では、全ラグランジュ表記法によるハイラーキ平面シェル要素とソリッド要素の接線剛性行列を求め、線形座屈理論に基づいたハイラーキ要素による座屈解析法を開発する。本解析法の精度を調べるために平板の座屈解析を行って、提案する要素と各非線形項の影響を検討する。平板の解析では、一般に Kirchhoff 理論、Mindlin 理論と 3 次元弾性論が用いられるが、ハイラーキ要素による解法では、それぞれの理論解に対して高精度の値が得られることを示す。また、実用的な観点から、計算効率の良い Mindlin 要素を用いて、弾性論による解に匹敵する値が得られるせん断補正係数を提案する。

Key Words : hierarchical finite element method, buckling analysis, tangent stiffness matrix, thin and thick plates.

1. まえがき

圧縮力を受ける板構造の不安定現象を解析的に評価する場合、微小変位理論では適切な評価ができないので有限変位理論を用いた構造解析が必要になる。しかし、反復計算を伴う有限変位解析では多くの計算コストを強いられることから、比較的容易に解が求まる線形座屈解析が実用的に重要である。

平板の座屈解析¹⁾は Kirchhoff の薄板理論に基づくものが多いが、面外せん断力による変形と回転変位成分に及ぼす面内力の非線形性(回転変位によるひずみの非線形項)を無視しているために、適用できる板厚比に制限がある。一方、Mindlin 理論ではこれらの影響を考慮することができて、圧縮力が作用する四辺単純支持板の座屈荷重は、本文中に示すように陽な式で求められる。ただし、回転変位による非線形項は高次の非線形項と考慮して省略する定式化²⁾やせん断変形を単純化した解法³⁾が用いられることもある。また、Mindlin 理論では板厚方向のひずみを近似的に扱っているので、厚板解析では誤差が生じる。これらの理論に対して、Srinivas と Rao^{5),6)}は 3 次元弾性理論に基づいた正確な解法を発表している。

分岐座屈問題は、全ラグランジュ表記による接線剛性を用いて固有値問題として定式化される。このとき、初期応力と初期変位に関する非線形項が現れる。座屈前に生じる変位は微小と仮定する線形座屈解析では、通常、初期変位による影響は少ないものとしてこの項を省略する。Xiang⁴⁾らはこの非線形効果を初期変形で表して、厚板ほどその非線形項が大きくなる結果を得て

いる。なお、この論文では非線形固有値問題として定式化されている。

有限要素法や有限帯板法などの計算力学の手法を用いれば、幾何剛性の取り扱いも比較的容易となる。著者らも薄肉構造物の全体解析のために Mindlin 理論による節点帯板法⁷⁾を開発し、幾何剛性に回転変位成分による非線形項を用いた座屈解析を行っている。この解法をさらに改良して極めて高精度なハイラーキ要素^{8),9),10)}を開発している。このハイラーキ要素は、要素の細分割を行わずに高次の変位関数によって精度を改善する方法、いわゆる p 法である。この p 法を用いて、Smith¹¹⁾は Mindlin 平板理論により一方向圧縮力及び純せん断力を受ける単純支持板の座屈解析を行って、板の形状比と板厚比によるせん断変形の影響を調べている。なお、この論文では変位関数にセレンディピティ形式の関数を用いて完全多項式より高次の形状関数を省略しているためか、一枚の平板を 4 要素に分割しているので、幾分数値計算の効率は悪くなる⁸⁾。

本論文では、全ラグランジュ表記法によるハイラーキ平面シェル要素とソリッド要素の初期変位を含む接線剛性行列を求め、線形座屈理論に基づいたハイラーキ要素による座屈解析法を開発する。

ハイラーキ要素法では、2 次元及び 3 次元要素において、要素内で変位を二重または三重級数展開する。したがって、非線形剛性行列はこれら多重級数の三重積で与えられるので、すべての非線形項を用いた剛性行列はかなり煩雑な式となる。そこで、プログラミングと数値計算の効率を考慮した定式化を示す。

本解析法の精度を調べるために平板の座屈解析を行っ

て、提案する要素と各非線形項の影響を検討する。平板の解析では、薄板と厚板に対して一般に Kirchhoff 理論と Mindlin 理論が用いられるが、3次元弾性論に基づく解法により薄板から厚板までのさらに正確な値が得られる。本論文のハイアラーキ要素による解法では、上記のそれぞれの理論解に対して高精度の値が得られることを示す。また、実用的な観点から、計算効率の良い Mindlin 要素を用いて、弾性論による解に匹敵する値が得られるせん断補正係数を提案する。

2. 座屈方程式

3次元弾性体について、一般的な座屈方程式を誘導する。

(1) ひずみ増分

デカルト直角座標系 (x, y, z) における変位成分 u, v, w を

$$\bar{u}(x, y, z) = \left\{ \begin{matrix} u & v & w \end{matrix} \right\}^T \quad (1)$$

とおくと、グリーンンのひずみ成分を次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}^T}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}^T}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}^T}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $()^T$ は転置記号である。

3次元問題における他のひずみ成分も同様な式で表し、これを次のようにおく。

$$\epsilon = \left\{ \epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right\}^T = \epsilon_L + \epsilon_N \quad (3)$$

ここに、添字 $()_L$ は線形項、 $()_N$ は非線形項を表す。

式(1)の変位を有限要素法の定式化により、形状関数行列 N と一般化変位ベクトル d を用いて

$$\bar{u} = N d \quad (4)$$

と表し、これを式(2)に代入して次式が求められる。

$$\epsilon_L = B_L d, \quad \epsilon_N = \frac{1}{2} B_N d \quad (5)$$

ここに、 B_L は線形のひずみマトリックス、 B_N は非線形のひずみマトリックスである。 B_L は各要素で示すことにし、 B_N を垂直ひずみとせん断ひずみに分けて表すと次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} B_N &= \left[\begin{matrix} B_{\sigma N} \\ B_{\gamma N} \end{matrix} \right], \quad B_{\sigma N} = \left[\begin{matrix} d^T \bar{G}_{11} \\ d^T \bar{G}_{22} \\ d^T \bar{G}_{33} \end{matrix} \right] \\ B_{\gamma N} &= \left[\begin{matrix} d^T (\bar{G}_{12} + \bar{G}_{21}) \\ d^T (\bar{G}_{23} + \bar{G}_{32}) \\ d^T (\bar{G}_{13} + \bar{G}_{31}) \end{matrix} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\bar{G}_{ij} = N_{,i}^T N_{,j}, \quad N_{,1} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad N_{,2} = \frac{\partial N}{\partial y}, \quad N_{,3} = \frac{\partial N}{\partial z} \quad (7)$$

ここで、増分理論を用いて、変位とひずみを次のように表す。

$$d = d^0 + \Delta d, \quad \epsilon = \epsilon^0 + \Delta \epsilon \quad (8)$$

添記号 Δ は増分量を表し、上添字 $()^0$ は増分前の既知量である。

式(5)、(6)に式(8)を代入してひずみ増分が求められる。

$$\Delta \epsilon = \left[B_L + B_N^0 + \frac{1}{2} \Delta B_N \right] \Delta d \quad (9)$$

ここに、 B_N^0 と ΔB_N は式(6)の d をそれぞれ d^0 、 Δd に置き換えた行列である。

(2) 接線剛性行列

初期応力 σ^0 を

$$\sigma^0 = \left\{ \begin{matrix} \sigma_x^0 & \sigma_y^0 & \sigma_z^0 & \tau_{xy}^0 & \tau_{yz}^0 & \tau_{zx}^0 \end{matrix} \right\}^T \quad (10)$$

で表し、 Δd による応力増分はフックの法則に従うものとする。

一般化変位 d に対応する一般化力を q 、外力ベクトルを p とし、仮想仕事の原理に式(9)、(10)を用いる。ここで、式(6)を考慮すると

$$\Delta B_N^T \sigma^0 = S^0 \Delta d \quad (11)$$

$$\begin{aligned} S^0 &= \sigma_x^0 \bar{G}_{11} + \sigma_y^0 \bar{G}_{22} + \sigma_z^0 \bar{G}_{33} + \tau_{xy}^0 [\bar{G}_{12} + \bar{G}_{21}] \\ &\quad + \tau_{yz}^0 [\bar{G}_{23} + \bar{G}_{32}] + \tau_{zx}^0 [\bar{G}_{13} + \bar{G}_{31}] \end{aligned} \quad (12)$$

と表すことができるので、 Δd に関する2次以上の非線形項を省略して次の要素剛性方程式が得られる。

$$\left[k_L + k_D + k_G \right] \Delta d = \Delta q + \Delta p + r^0 \quad (13)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} k_L &= \int_V B_L^T D B_L dV \\ k_D &= \int_V \left[B_L^T D B_N^0 + B_N^{0T} D B_L + B_N^{0T} D B_N^0 \right] dV \\ k_G &= \int_V S^0 dV \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$r^0 = q^0 + p^0 - \int_V \left[B_L + B_N^0 \right]^T \sigma^0 dV \quad (15)$$

式(13)の左辺の係数行列は全ラグランジュ表記法による接線剛性行列で、 k_L は線形剛性行列⁸⁾、 k_G は幾何剛性行列、 k_D は初期変位マトリックスである。 r^0 は不平衡力ベクトルで、固有値問題として定式化する線形座屈解析では $r^0 = \Delta p = O$ とする。なお、 D は応力-ひずみマトリックスである。

一定な基準荷重ベクトル p^0 に対する荷重倍率を λ^* 、初期変位 d^0 を p^0 により座屈前に生じた変位とすると、 k_D の下線の項は λ^{*2} を含むのでこの項を省略する。

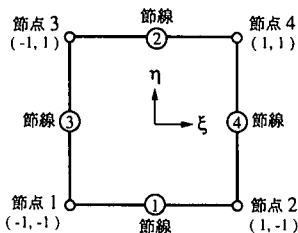


図-1 四辺形要素

式(13)を構造全体の要素について集めると次の座屈方程式が得られる。

$$[K_L + \lambda^* K_D + \lambda^* K_G] \Delta D = 0 \quad (16)$$

3. 平面シェル要素

(1) ひずみマトリックス

二次要素として、図-1に示す4節点及び要素の周辺に節線①～④を有する四辺形要素を用いる。四辺形要素では、要素中央面上の任意の変位成分 d_i を次式で仮定する⁸⁾。

$$d_i(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N N_{mn}(\xi, \eta) d_{mn} \equiv f^T d_i \quad (17)$$

ここに、 (ξ, η) は中央面に設けた自然座標、 N_{mn} は形状関数、 d_{mn} は節点、節線、節面自由度の一般化変位で、添字 m, n は変位関数 d_i を二重級数展開したハイアラキ多項式(I.1)の次数を表す。 f と d_i は K 次の列ベクトル (K は d_{mn} の自由度数) で、形状関数ベクトル f は C^0 級要素によりすべての変位成分に対して同一である。なお、ベクトルのスカラー積で表した d_i を用いれば、以下の定式化は四辺形要素と三角形要素で共通となる。ただし、 (ξ, η) には面積座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) を用いるものとする。

d_i に並進変位の3成分と直交座標軸 x, y まわりの回転角の2成分を用いると、平面シェル要素の一般化変位 d は5成分に対する d_i を並べた次のベクトルで与えられる。

$$d = \{ u^T \quad v^T \quad w^T \quad \theta_x^T \quad \theta_y^T \}^T \quad (18)$$

式(17)、(18)を式(4)に用いると、Mindlinの仮定から形状関数行列は次のようになる。

$$N = \begin{bmatrix} f^T & O & O & O & z f^T \\ O & f^T & O & -z f^T & O \\ O & O & f^T & O & O \end{bmatrix} \quad (19)$$

N は $(3 \times 5K)$ の行列で、ゼロ列ベクトルの転置記号を省略している。また、 z は中央面の法線方向の座標軸である。

式(3)で板厚方向の垂直ひずみ ϵ_z を省略すると、 B_L と B_N は次式のようになる。

$$B_L = \begin{bmatrix} g_1^T & O & O & O & z g_1^T \\ O & g_2^T & O & -z g_2^T & O \\ g_2^T & g_1^T & O & -z g_1^T & z g_2^T \\ O & O & g_2^T & -f^T & O \\ O & O & g_1^T & O & f^T \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$B_N = \begin{bmatrix} d^T \bar{G}_{11} \\ d^T \bar{G}_{22} \\ d^T (\bar{G}_{12} + \bar{G}_{21}) \\ d^T (\bar{G}_{23} + \bar{G}_{32}) \\ d^T (\bar{G}_{13} + \bar{G}_{31}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここに、

$$g_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad g_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (22)$$

また、式(7)に式(19)を代入して次式が得られる。

$$\bar{G}_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & & & z G_{ij} \\ & G_{ij} & & -z G_{ij} \\ & & G_{ij} & \\ z G_{ij} & & & z^2 G_{ij} \\ & & & & z^2 G_{ij} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\bar{G}_{i3} = \begin{bmatrix} O & & & H_{i0} \\ & O & & -H_{i0} \\ & & O & \\ & & & z H_{i0} \\ O & & & & z H_{i0} \end{bmatrix} \quad (24)$$

ここに、 O は K 次の正方ゼロ行列で、空白の要素は O である。また、他の小行列は次のダイアドである。

$$G_{ij} = g_i g_j^T, \quad H_{i0} = g_i f^T \quad (i, j = 1, 2) \quad (25)$$

(2) 幾何剛性行列

初期応力を z について積分し、次の断面力を定義する。

$$\begin{aligned} \int \sigma_x^0 dz &= P_x^0, & \int \sigma_x^0 z dz &= M_x^0, & \int \sigma_x^0 z^2 dz &= \frac{t^2}{12} P_x^0 \\ \int \sigma_y^0 dz &= P_y^0, & \int \sigma_y^0 z dz &= M_y^0, & \int \sigma_y^0 z^2 dz &= \frac{t^2}{12} P_y^0 \\ \int \tau_{xy}^0 dz &= P_{xy}^0, & \int \tau_{xy}^0 z dz &= M_{xy}^0, & \int \tau_{xy}^0 z^2 dz &= \frac{t^2}{12} P_{xy}^0 \\ \int \tau_{yz}^0 dz &= Q_y^0, & \int \tau_{xz}^0 dz &= Q_x^0 \end{aligned} \quad (26)$$

ここに、積分範囲は $[-t/2, t/2]$ で、 t は板厚である。

式(23)～(26)を式(12)に代入して σ_z^0 の項を省略すると、式(14)の幾何剛性行列は次のようになる。

$$k_G = \begin{bmatrix} k_P^0 & O & O & O & k_M^0 + k_Q^0 \\ & k_P^0 & O & -k_M^0 - k_Q^0 & O \\ & & k_P^0 & O & O \\ sym. & & & k_R^0 & O \\ & & & & k_R^0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} k_P^0 &= \iint \left\{ P_x^0 G_{11} + P_y^0 G_{22} + P_{xy}^0 [G_{12} + G_{21}] \right\} dx dy \\ k_M^0 &= \iint \left\{ M_x^0 G_{11} + M_y^0 G_{22} + M_{xy}^0 [G_{12} + G_{21}] \right\} dx dy \\ k_Q^0 &= \iint \left\{ Q_x^0 H_{10} + Q_y^0 H_{20} \right\} dx dy \\ k_R^0 &= (t^2/12) k_P^0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Kirchhoff の仮定を用いるときには、回転変位に対する幾何剛性 k_R^0 と面外せん断力の項 k_Q^0 を省略する。

(3) 初期変位マトリックス

初期変位 d^0 を含むひずみマトリックス B_N^0 を簡潔な式で表すために、次のスカラー量を定める。

$$\left. \begin{aligned} U_k^0 &= g_k^T u^0, & V_k^0 &= g_k^T v^0, & W_k^0 &= g_k^T w^0 \\ \Theta_{xk}^0 &= g_k^T \theta_x^0, & \Theta_{yk}^0 &= g_k^T \theta_y^0 \end{aligned} \right\} \quad (k=0, 1, 2) \quad (29)$$

ここで、 $k=0$ の場合には g_k の代わりに式 (17) の f を用いるものとする。 u^0 などは p^0 による一般化変位ベクトルである。

式 (23), (24) の行列に d^0 を掛けて z について積分すると、次の 5K 次の列ベクトルが得られる。

$$\left. \begin{aligned} &\int \bar{G}_{ik} d^0 dz \\ &= t \left\{ U_k^0 g_i^T \quad V_k^0 g_i^T \quad W_k^0 g_i^T \quad \frac{t^2}{12} \Theta_{xk}^0 g_i^T \quad \frac{t^2}{12} \Theta_{yk}^0 g_i^T \right\}^T \\ &\int \bar{G}_{3k} d^0 dz = t \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad -V_k^0 f^T \quad U_k^0 f^T \right\}^T \\ &\int \bar{G}_{i3} d^0 dz = t \left\{ \Theta_{y0}^0 g_i^T \quad -\Theta_{x0}^0 g_i^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T \\ &\int \bar{G}_{ik} d^0 z dz \\ &= \frac{t^3}{12} \left\{ \Theta_{yk}^0 g_i^T \quad -\Theta_{xk}^0 g_i^T \quad 0 \quad -V_k^0 g_i^T \quad U_k^0 g_i^T \right\}^T \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式 (14) の k_D の下線の項を省略した式に式 (20), (21) と式 (30) を代入して次の初期変位マトリックスが得られる。

$$k_D = \iint A_M dx dy \quad (31)$$

5K 次の対称行列 A_M を K 次の小行列 $A_{ij} (i, j = 1 \sim 5)$ に分割して示す。

$$\begin{aligned} A_{11} &= D_p [2U_1^0 C_2 + \rho U_2^0 C_4] \\ A_{22} &= D_p [2V_2^0 C_3 + \rho V_1^0 C_4] \\ A_{12} &= D_p [U_2^0 C_3 + V_1^0 C_2 + (U_1^0 + V_2^0) C_5] \\ A_{13} &= D_p [W_1^0 C_2 + W_2^0 C_5] + D_s \Theta_{y0}^0 C_1 \\ A_{23} &= D_p [W_2^0 C_3 + W_1^0 C_6] - D_s \Theta_{x0}^0 C_1 \\ A_{14} &= D_b [\Theta_{x1}^0 C_2 - \Theta_{y2}^0 C_3 + (\Theta_{x2}^0 - \Theta_{y1}^0) C_5] \\ &\quad - D_s \Theta_{y0}^0 H_{20} \\ A_{15} &= D_b [2\Theta_{y1}^0 C_2 + \rho \Theta_{y2}^0 C_4] + D_s \Theta_{y0}^0 H_{10} \end{aligned}$$

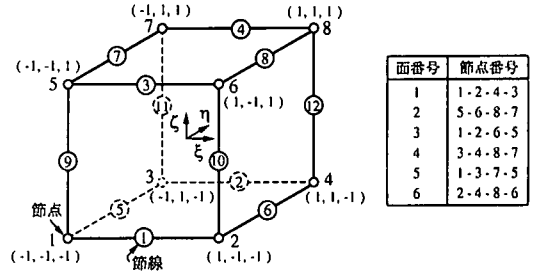


図-2 ソリッド要素

$$\begin{aligned} A_{24} &= D_b [2\Theta_{x2}^0 C_3 + \rho \Theta_{x1}^0 C_4] + D_s \Theta_{x0}^0 H_{20} \\ A_{25} &= -D_b [\Theta_{x1}^0 C_2 - \Theta_{y2}^0 C_3 + (\Theta_{x2}^0 - \Theta_{y1}^0) C_6] \\ &\quad - D_s \Theta_{x0}^0 H_{10} \\ A_{33} &= 0 \\ A_{34} &= -D_s [V_1^0 H_{10} + V_2^0 H_{20}] \\ A_{35} &= D_s [U_1^0 H_{10} + U_2^0 H_{20}] \\ A_{44} &= D_b [2V_2^0 C_3 + \rho V_1^0 C_4] + 2D_s V_2^0 F \\ A_{55} &= D_b [2U_1^0 C_2 + \rho U_2^0 C_4] + 2D_s U_1^0 F \\ A_{45} &= -D_b [U_2^0 C_3 + V_1^0 C_2 + (U_1^0 + V_2^0) C_6] \\ &\quad - D_s (U_2^0 + V_1^0) F \end{aligned} \quad (32)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= G_{11} + G_{22}, & C_2 &= G_{11} + \mu G_{22} \\ C_3 &= G_{22} + \mu G_{11}, & C_4 &= G_{12} + G_{21} \\ C_5 &= \nu G_{12} + \mu G_{21}, & C_6 &= \mu G_{12} + \nu G_{21} \\ F &= f f^T \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} D_p &= \frac{Et}{1-\nu^2}, & D_b &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, & D_s &= kGt \\ \mu &= \frac{1}{2}(1-\nu), & \rho &= \nu + \mu \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

E はヤング係数、 G はせん断弾性係数、 ν はポアソン比、 k はせん断補正係数である。

4. ソリッド要素

(1) 幾何剛性行列

三次元要素として、図-2に示す8個の節点、12本の節線、6節面を有する六面体ソリッド要素を用いる。

六面体ソリッド要素では、並進変位の3成分をそれぞれ三重級数展開して式 (17) のようにスカラー積で表す。ここで、 f は形状関数 $N_{mnl}(\xi, \eta, \zeta)$ を適当な順序で並べたベクトルである⁸⁾。

u_{mnl} などの一般化変位を K 次の列ベクトル u で表

して、要素の一般化変位ベクトル d を次のようにおく。

$$d = \left\{ u^T \quad v^T \quad w^T \right\}^T \quad (35)$$

これより、式 (4) の行列 N は $(3 \times 3K)$ 次のブロック対角行列になる。

$$N = \begin{bmatrix} f^T & & \\ & f^T & \\ & & f^T \end{bmatrix} \quad (36)$$

式 (5) の線形ひずみマトリックス B_L を垂直ひずみとせん断ひずみに分けて表す。

$$B_L = \begin{bmatrix} B_{\sigma L} \\ B_{\gamma L} \end{bmatrix}, \quad B_{\sigma L} = \begin{bmatrix} g_1^T & & \\ & g_2^T & \\ & & g_3^T \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$B_{\gamma L} = \begin{bmatrix} g_2^T & g_1^T & O \\ O & g_3^T & g_2^T \\ g_3^T & O & g_1^T \end{bmatrix}$$

ここに、 g_i は f をそれぞれ x, y, z で微分したものである。

非線形ひずみマトリックス B_N は式 (6) で与えられるので、式 (36) を用いると式 (7) の \bar{G}_{ij} は次のようになる。

$$\bar{G}_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & & \\ & G_{ij} & \\ & & G_{ij} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$G_{ij} = g_i g_j^T \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (39)$$

初期応力に式 (10) の 6 成分を用いると、式 (14) の幾何剛性行列は次式で与えられる。

$$k_G = \begin{bmatrix} k_s^0 & & \\ & k_s^0 & \\ & & k_s^0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

ここに、

$$k_s^0 = \int_V \left\{ \sigma_x^0 G_{11} + \sigma_y^0 G_{22} + \sigma_z^0 G_{33} + \tau_{xy}^0 [G_{12} + G_{21}] + \tau_{yz}^0 [G_{23} + G_{32}] + \tau_{zx}^0 [G_{13} + G_{31}] \right\} dV \quad (41)$$

(2) 初期変位マトリックス

式 (6), (37), (38) を式 (14) の k_D に代入して下線の項を省略すると、次の初期変位マトリックスが得られる。

$$k_D = \int_V A_s dV \quad (42)$$

ここに、 A_s は $3K$ 次の対称行列で、これを 3×3 個の小行列 A_{ij} に分割して示す。

$$A_{11} = 2G U_1^0 G_{00} + C_1 [U g_1^T + g_1 U^T]$$

$$A_{22} = 2G V_2^0 G_{00} + C_1 [V g_2^T + g_2 V^T]$$

$$A_{33} = 2G W_3^0 G_{00} + C_1 [W g_3^T + g_3 W^T]$$

$$A_{12} = G (U_2^0 + V_1^0) G_{00} + \lambda [U g_2^T + g_1 V^T] + G [V g_1^T + g_2 U^T]$$

$$A_{13} = G (U_3^0 + W_1^0) G_{00} + \lambda [U g_3^T + g_1 W^T] + G [W g_1^T + g_3 U^T]$$

$$A_{23} = G (V_3^0 + W_2^0) G_{00} + \lambda [V g_3^T + g_2 W^T] + G [W g_2^T + g_3 V^T] \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} U &= U_1^0 g_1 + U_2^0 g_2 + U_3^0 g_3 \\ V &= V_1^0 g_1 + V_2^0 g_2 + V_3^0 g_3 \\ W &= W_1^0 g_1 + W_2^0 g_2 + W_3^0 g_3 \\ G_{00} &= G_{11} + G_{22} + G_{33} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu}, \quad C_1 = G + \lambda \quad (45)$$

U_k^0, V_k^0, W_k^0 は式 (29) と同様に定義されるスカラー量、 λ は Lamé の定数である。

5. 剛性行列の積分

ハイアラーキ要素では変位を二重または三重級数展開しているため、非線形剛性行列の計算では多重級数の三重積の積分が必要である。そこで、数値計算を考慮した定式化を行う。

(1) 幾何剛性行列

平面シェル要素では、初期応力を面内成分と面外成分に分けて、これらをひずみで表す。線形座屈解析の仮定により、初期ひずみの面内成分に次の線形項

$$\varepsilon_x^0 = g_1^T u^0, \quad \varepsilon_y^0 = g_2^T v^0, \quad \gamma_{xy}^0 = g_2^T u^0 + g_1^T v^0 \quad (46)$$

を用いると、式 (28) の k_p^0 を次式のように表すことができる。

$$k_p^0 = D_p \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[g_1 \{ (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_y^0) g_1 + \mu \gamma_{xy}^0 g_2 \}^T + g_2 \{ (\varepsilon_y^0 + \nu \varepsilon_x^0) g_2 + \mu \gamma_{xy}^0 g_1 \}^T \right] |J| d\xi d\eta \quad (47)$$

ここに、 (ξ, η) は要素の自然座標系、 $|J|$ はヤコビアンである。式 (47) の $\{ \}$ は 1 つのベクトルであるから、 k_p^0 はベクトルのダイアドを積分して求められる。

初期曲げモーメントの項 k_M^0 は、式 (47) において D_p を曲げ剛性 D_b に置き換えて、初期ひずみに次の曲げひずみ (ただし、ひずみの次元とは異なる) を用いる。

$$\varepsilon_x^0 = g_1^T \theta_y^0, \quad \varepsilon_y^0 = -g_2^T \theta_x^0, \quad \gamma_{xy}^0 = g_2^T \theta_y^0 - g_1^T \theta_x^0 \quad (48)$$

面外せん断力の項 k_Q^0 は次のようになる。

$$k_Q^0 = D_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\{ \gamma_{xz}^0 g_1 + \gamma_{yz}^0 g_2 \} f^T \right] |J| d\xi d\eta \quad (49)$$

ここに、

$$\gamma_{xz}^0 = g_1^T w^0 + f^T \theta_y^0, \quad \gamma_{yz}^0 = g_2^T w^0 - f^T \theta_x^0 \quad (50)$$

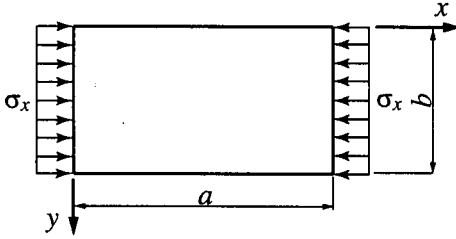


図-3 一方向圧縮力を受ける平板

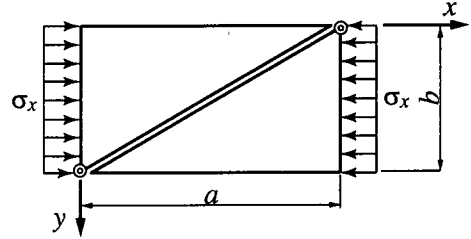


図-4 縮退三角形要素による分割

三角部分の要素 k_{pq} は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= D_p \sum u_k^0 (2I_2 + I_4 + I_6) \\
 k_{22} &= D_p \sum v_k^0 (2I_1 + I_3 + I_5) \\
 k_{12} &= D_p \sum \{ u_k^0 (I_1 + I_3) + v_k^0 (I_2 + I_4) \} \\
 k_{13} &= D_p \sum w_k^0 (I_2 + I_4) + D_s \sum \theta_{yk}^0 I_8 \\
 k_{23} &= D_p \sum w_k^0 (I_1 + I_5) - D_s \sum \theta_{xk}^0 I_8 \\
 k_{14} &= D_b \sum \{ \theta_{xk}^0 (I_2 + I_4) - \theta_{yk}^0 (I_1 + I_3) \} \\
 &\quad - D_s \sum \theta_{yk}^0 I_9 \\
 k_{15} &= \sum \theta_{yk}^0 \{ D_b (2I_2 + I_4 + I_6) + D_s I_{10} \} \\
 k_{24} &= \sum \theta_{xk}^0 \{ D_b (2I_1 + I_3 + I_5) + D_s I_9 \} \\
 k_{25} &= D_b \sum \{ \theta_{yk}^0 (I_1 + I_5) - \theta_{xk}^0 (I_2 + I_6) \} \\
 &\quad - D_s \sum \theta_{xk}^0 I_{10} \\
 k_{33} &= 0 \\
 k_{34} &= -D_s \sum v_k^0 I_7 \\
 k_{35} &= D_s \sum u_k^0 I_7 \\
 k_{44} &= \sum v_k^0 \{ D_b (2I_1 + I_3 + I_5) + 2D_s I_{11} \} \\
 k_{55} &= \sum u_k^0 \{ D_b (2I_2 + I_4 + I_6) + 2D_s I_{12} \} \\
 k_{45} &= -D_b \sum \{ u_k^0 (I_1 + I_5) + v_k^0 (I_2 + I_6) \} \\
 &\quad - D_s \sum (u_k^0 I_{11} + v_k^0 I_{12})
 \end{aligned} \tag{61}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 I_1 &= (2/\ell_\xi) \{ (\ell_\xi/\ell_\eta)^2 F_{kmm'} G_{k'nn'} + \mu K_{mm'} H_{k'nn'} \} \\
 I_2 &= (2/\ell_\eta) \{ (\ell_\eta/\ell_\xi)^2 G_{kmm'} F_{k'nn'} + \mu H_{kmm'} K_{k'nn'} \} \\
 I_3 &= (2/\ell_\xi) (\nu K_{kmm'} H_{n'nk'} + \mu K_{kmm'} H_{nn'k'}) \\
 I_4 &= (2/\ell_\eta) (\nu H_{mm'k} K_{k'n'n} + \mu H_{m'mk} K_{k'nn'}) \\
 I_5 &= (2/\ell_\xi) (\nu K_{kmm'} H_{nn'k'} + \mu K_{kmm'} H_{n'nk'}) \\
 I_6 &= (2/\ell_\eta) (\nu H_{m'mk} K_{k'n'n} + \mu H_{mm'k} K_{k'nn'}) \\
 I_7 &= (\ell_\eta/\ell_\xi) K_{kmm'} F_{k'nn'} + (\ell_\xi/\ell_\eta) F_{kmm'} K_{k'nn'} \\
 I_8 &= (\ell_\eta/\ell_\xi) K_{mm'k} F_{k'nn'} + (\ell_\xi/\ell_\eta) F_{kmm'} K_{nn'k'} \\
 I_9 &= (\ell_\xi/2) F_{kmm'} H_{nn'k'} \\
 I_{10} &= (\ell_\eta/2) H_{mm'k} F_{k'nn'} \\
 I_{11} &= (\ell_\xi/2) F_{kmm'} H_{k'nn'} \\
 I_{12} &= (\ell_\eta/2) H_{kmm'} F_{k'nn'}
 \end{aligned}$$

なお、式(61)の Σ は、初期変位 d_k^0 について $k=1 \sim K$ の総和を表す。

k_{ij}^0 の下三角部分の要素 k_{qp} は、式(61)の要素 k_{pq} に用いる積分値 H と K の添字 m と m' 及び n と n' を交換したものである。

直方体要素の初期変位マトリックスを付録 II に示す。

6. 数値計算例

(1) Kirchhoff 要素

a) 最適ペナルティ数

C^0 連続性の変位関数を用いた薄板解析では、Kirchhoff の拘束条件が満足されていないために精度が悪くなる。ハイラーキ要素では、せん断ロッキングは級数展開したたわみ角の最高次の項で起きるので⁹⁾、剛性行列 k_L の最高次の多項式の積分に次数低減積分法を用いればせん断ロッキング現象は生じない。しかし、 C^0 級要素ではせん断変形が必然的に考慮されているために、板厚比によってはその影響が現れる。せん断変形を除くためには、通常、ペナルティ要素が用いられる。そこで、ハイラーキ要素を用いた座屈解析におけるペナルティ数の効果を調べてみる。

表-1は、図-3に示す一方向圧縮力 σ_x を受ける四辺単純支持板及び四辺固定支持された長方形板の座屈係数 k_b を、ペナルティ数 α を変えて求めたものである。ここで、 a/b は板の形状比、 t/b は板厚比(幅厚比)である。 $t/b=0.3$ は厚板であるが、ペナルティ数の効果を調べるために用いた。

数値計算では式(28)の回転変位に対する幾何剛性 k_R^0 を省略し、正確な値を得るためと桁落ちを調べるために $m=n=10$ 次式を用いる。なお、桁落ちは m, n が高次になる程起き易い⁸⁾。 $\nu=0.3$ として、座屈荷重 σ_{cr} と線形剛性行列 k_L のせん断剛性 D_s を次式で与える。

$$\sigma_{cr} = k_b \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2, \quad D_s = \alpha G t \tag{63}$$

なお、 C^0 級要素の定式では、 α はせん断補正係数 k とする。

表-1より、 k_b は α と $(t/b)^{-2}$ に比例して Kirchhoff 理論による解 4.0 に収束するが、 $\alpha > 10^4$ では桁落ちが生

表-1 一方向圧縮を受ける単純支持板の座屈係数 ($m=n=10, \nu=0.3$)

t/b	$a/b = 1$					$a/b = 2$		
	$\alpha = 1$	10^2	10^4	10^6	α^*	10^4	10^6	α^*
0.0000001	—	—	—	—	4.0000001	—	—	4.0000000
0.00001	4.0000017	—	—	—	4.0000000	—	—	3.9999999
0.001	3.9999812	3.9999998	—	—	4.0000000	—	—	4.0000001
0.01	3.9981210	3.9999812	3.9999998	—	4.0000000	3.9999998	—	3.9999999
0.1	3.8204462	3.9981210	3.9999812	3.9999998	3.9999999	3.9999812	3.9999999	3.9999999
0.3	2.8109962	3.9831519	3.9998308	3.9999983	4.0000000	3.9998308	3.9999983	3.9999999

表-2 一方向圧縮を受ける固定支持板の座屈係数 ($m=n=10, \nu=0.3$)

t/b	$a/b = 1$					$a/b = 2$		
	$\alpha = 1$	10^2	10^4	10^6	α^*	10^4	10^6	α^*
0.0000001	—	—	—	—	10.0739494	—	—	7.8683717
0.00001	10.073948	—	—	—	10.0739496	—	—	7.8683730
0.001	10.073768	10.073948	—	—	10.0739497	—	—	7.8683737
0.01	10.055765	10.073766	10.073948	—	10.0739495	7.8683721	—	7.8683726
0.1	8.544464	10.055629	10.073766	10.073948	10.0739492	7.8682370	7.8683715	7.8683710
0.3	3.655152	9.912348	10.072297	10.073933	10.0739498	7.8671418	7.8683617	7.8683715

じるために消去演算が不能になることがある(表中の一の箇所)。初期応力解析の数値計算では、条件数が 10^{12} 以上になる場合を演算不能と判定している。表-2の固定支持の場合でも同じ結果が得られているので、最適ペナルティ数 α^* として次の値を用いる。

$$\alpha^* = 10^j t^2 / |J|, \quad j = 6 \sim 8 \quad (64)$$

α^* は板厚比に応じた値になるので、表-1, 2に示すように板厚比に依らず、 C^0 級要素を用いて薄板理論による値が得られる。ここでは、 $j=8$ としている。

b) 荷重状態と要素形状

四辺単純支持板に種々の荷重が作用する場合について、板の形状比を変えて計算する。また、任意形状要素の精度を調べるために、四辺形要素の2つの節点を重ね合わせた縮退三角形要素についても計算する。図-4に、2つの三角形要素による要素分割を示す。図中の◎印は重合節点である。数値計算では $t/b = 0.01, \nu = 0.3$ とし、式(64)のペナルティ数を用いる。

表-3~6に一方向圧縮力 (σ_x)、二方向圧縮力 ($\sigma_x = \sigma_y$)、三角形分布の純曲げ荷重(上下縁荷重 $\sigma_{x,u} = -\sigma_{x,l}$) 及び純せん断力 (τ_{xy}) による座屈係数 k_b の解析解¹⁾に対する誤差(%)を示す。表中の数値の無い箇所は、多項式の次数 m, n が低いために解析解と同じ座屈モード(括弧内の数は x, y 方向の半波数)が求められなかった。また、比較のために内部自由度(パブルモード)を用いた4節点離散 Kirchhoff 要素による FEM 解¹²⁾(10×10 分割)も示してある。

数値計算の結果より、次のことが分かる。

① 2方向圧縮力を受ける場合の精度は極めて良いが、その他の荷重に対しては、要素形状比の限界は $3 \sim 4$ といえる。

② 曲げ荷重に対する誤差が最も大きくて、特に縮退三角形要素の精度が悪い。これは、通常の有限要素と同様に、面内曲げ問題では鋭角三角形要素による平面応力解析の精度(初期応力の精度)が悪いことによる。

③ 作用荷重による精度の差は、座屈モードの半波数によるものであり、表-4と他の表を比べれば明らかである。

④ 表-3, 4において、多項式の次数 $m = 8$ と 10 で誤差が同じ場合があるが、これはペナルティによる桁落ちのためと考えられる(表-8のペナルティを用いない Mindlin 要素では精度が向上している)。

⑤ 10次式を用いた本解法は、h法による4節点 FEM 要素より $2 \sim 5$ 桁精度がよい(FEM 要素は、パブルモードだけ自由度が多い)。

c) 境界条件

境界条件が異なる長方形板に一方向圧縮力が作用する場合の精度を調べる。

表-7に、載荷辺が単純支持で、非載荷辺が単純支持と自由(SFSS)及び固定支持と自由(SFSC)の場合の解析解¹⁾に対する誤差を示す。数値計算で用いた数値は b) と同じである。

この場合は座屈モードの半波数が少ないことから要素形状比の大きな場合でも精度の良い値が得られており、境界条件が異なる場合でも b) で述べたことがいえる。

(2) 厚板の座屈係数

a) 座屈係数の解析解

数値計算結果の照査に用いる解析解の理論を明確にするために、一方向圧縮力を受ける単純支持板の式を示す(図-3を参照)。

表-3 一方向圧縮を受ける四辺単純支持板の座屈係数の誤差 (%)

多項式の次数 ($m=n$)	長方形要素				縮退三角形要素			
	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$
4	2.9×10^{-2}	5.3×10^{-1}	$2.0 \times 10^{+1}$	—	$3.4 \times 10^{+0}$	—	—	—
6	1.1×10^{-5}	4.4×10^{-3}	4.8×10^{-1}	$2.8 \times 10^{+0}$	1.9×10^{-2}	$4.7 \times 10^{+0}$	$8.9 \times 10^{+0}$	—
8	-2.7×10^{-6}	9.7×10^{-6}	8.5×10^{-3}	7.8×10^{-2}	1.4×10^{-5}	9.4×10^{-2}	3.4×10^{-1}	$9.5 \times 10^{+0}$
10	-2.8×10^{-7}	-2.3×10^{-6}	5.4×10^{-5}	1.8×10^{-3}	9.5×10^{-6}	5.7×10^{-4}	5.5×10^{-3}	6.2×10^{-1}
FEM (10×10)	-6.3×10^{-1}	1.1×10^{-1}	$1.2 \times 10^{+0}$	$6.8 \times 10^{+0}$				
解析解 (半波形数)	4.0 (1,1)	4.0 (2,1)	4.0 (3,1)	4.0 (4,1)	4.0 (1,1)	4.0 (2,1)	4.0 (3,1)	4.0 (4,1)

表-4 二方向圧縮を受ける四辺単純支持板の座屈係数の誤差 (%)

多項式の次数 ($m=n$)	長方形要素				縮退三角形要素			
	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$
4	3.0×10^{-2}	3.9×10^{-2}	4.6×10^{-2}	5.0×10^{-2}	$3.4 \times 10^{+0}$	$2.9 \times 10^{+0}$	$2.2 \times 10^{+0}$	$1.7 \times 10^{+0}$
6	1.4×10^{-5}	1.5×10^{-5}	1.9×10^{-5}	2.0×10^{-5}	1.9×10^{-2}	1.6×10^{-2}	1.3×10^{-2}	1.1×10^{-2}
8	-2.6×10^{-6}	-3.0×10^{-6}	-1.9×10^{-6}	-3.1×10^{-6}	1.4×10^{-5}	3.3×10^{-5}	3.1×10^{-5}	1.4×10^{-5}
10	-2.5×10^{-6}	1.6×10^{-7}	-2.4×10^{-6}	-2.7×10^{-6}	9.5×10^{-6}	1.8×10^{-5}	-9.1×10^{-6}	9.4×10^{-6}
FEM (10×10)	-7.0×10^{-3}	-8.5×10^{-4}	2.9×10^{-4}	7.0×10^{-4}				
解析解 (半波形数)	2.0 (1,1)	5/4 (1,1)	10/9 (1,1)	17/16 (1,1)	2.0 (1,1)	5/4 (1,1)	10/9 (1,1)	17/16 (1,1)

表-5 純曲げを受ける四辺単純支持板の座屈係数の誤差 (%)

多項式の次数 ($m=n$)	長方形要素				縮退三角形要素			
	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$
4	$6.7 \times 10^{+0}$	$2.7 \times 10^{+1}$	—	—	—	—	—	—
6	1.2×10^{-1}	5.9×10^{-1}	2.6×10^{-1}	—	$6.2 \times 10^{+0}$	$3.0 \times 10^{+1}$	—	—
8	2.6×10^{-3}	1.0×10^{-2}	-5.0×10^{-2}	$6.8 \times 10^{+0}$	6.8×10^{-1}	$4.2 \times 10^{+0}$	$5.8 \times 10^{+0}$	—
10	1.2×10^{-5}	5.4×10^{-5}	-8.9×10^{-4}	3.2×10^{-1}	4.0×10^{-2}	2.5×10^{-1}	4.8×10^{-1}	$4.6 \times 10^{+0}$
FEM (10×10)	-2.6×10^{-1}	1.0×10^{-3}	$2.7 \times 10^{+0}$	—				
解析解 (半波形数)	25.52835 (2,1)	23.88181 (3,1)	24.11183 (4,1)	23.88181 (6,1)	25.52835 (2,1)	23.88181 (3,1)	24.11183 (4,1)	23.88181 (6,1)

表-6 純せん断を受ける四辺単純支持板の座屈係数の誤差 (%)

多項式の次数 ($m=n$)	長方形要素				縮退三角形要素			
	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$
4	$7.0 \times 10^{+0}$	$1.2 \times 10^{+1}$	$2.6 \times 10^{+1}$	—	$2.0 \times 10^{+1}$	$2.3 \times 10^{+1}$	—	—
6	8.2×10^{-2}	3.8×10^{-1}	$1.6 \times 10^{+0}$	$4.9 \times 10^{+0}$	1.2×10^{-1}	6.7×10^{-1}	$5.6 \times 10^{+0}$	$7.8 \times 10^{+0}$
8	7.3×10^{-4}	5.4×10^{-3}	5.8×10^{-2}	3.8×10^{-1}	4.4×10^{-2}	3.0×10^{-2}	3.7×10^{-1}	6.7×10^{-1}
10	5.3×10^{-5}	3.1×10^{-4}	4.1×10^{-4}	1.2×10^{-2}	2.1×10^{-3}	3.4×10^{-4}	6.8×10^{-3}	2.4×10^{-2}
FEM (10×10)	9.0×10^{-2}	2.6×10^{-1}	$1.1 \times 10^{+0}$	$3.7 \times 10^{+0}$				
解析解 (半波形数)	9.324520 (1,1)	6.546029 (1,1)	5.840152 (2,1)	5.624544 (3,1)	9.324520 (1,1)	6.546029 (1,1)	5.840152 (2,1)	5.624544 (3,1)

Mindlin 理論による座屈解析の特性方程式は次式で与えられる。

$$\left(\frac{1}{k} \lambda^{*2} - g^2 \right) \left(\underline{\underline{\mu \lambda^{*2}}} - g^2 \right) - 12 \mu \lambda^{*2} = 0 \quad (65)$$

ここに、 λ^* は固有値、 k はせん断補正係数、 μ は板の曲げ剛性 D_b から導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{*2} &= \sigma_x \frac{t^2}{G} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2, \quad \mu = \frac{Gt^3}{12D_b} = \frac{1-\nu}{2} \\ g^2 &= \pi^2 t^2 \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

なお、下線の項はせん断変形効果、二重下線の項は回転変位に対する幾何剛性を表し、これらの項を省略す

ると Kirchhoff 理論による式に一致する。ここで、 m と n は座屈モードの x, y 方向の半波形数である。

3次元弾性論によるスラブの特性方程式は次式で与えられる。

$$4g^2 r s \tanh(r/2) - (r^2 + g^2)^2 \tanh(s/2) = 0 \quad (67)$$

ここに、

$$r^2 = g^2 - \lambda^{*2}, \quad s^2 = g^2 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \lambda^{*2} \quad (68)$$

固有値 λ^* とパラメータ g は式(66)と同じである。また、境界条件はスラブの上下面で自由、4つの周面で次

表-7 一方向圧縮を受ける長方形板の座屈係数の誤差

(%)

多項式の次数 ($m = n$)	境界条件 SFSS				境界条件 SFSC			
	$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$a/b = 4$	$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$a/b = 4$
4	4.0×10^{-2}	2.0×10^{-2}	1.1×10^{-2}	7.0×10^{-3}	7.5×10^{-2}	1.4×10^{-2}	$1.2 \times 10^{+0}$	-7.5×10^{-1}
6	2.0×10^{-5}	7.8×10^{-6}	-2.2×10^{-6}	-2.0×10^{-5}	9.8×10^{-5}	5.3×10^{-6}	1.1×10^{-2}	-7.5×10^{-3}
8	7.5×10^{-7}	-5.7×10^{-6}	-8.5×10^{-6}	-2.4×10^{-5}	9.2×10^{-7}	-4.5×10^{-6}	2.1×10^{-5}	-2.9×10^{-5}
10	-6.4×10^{-7}	-9.2×10^{-6}	-1.1×10^{-5}	-2.0×10^{-5}	-6.9×10^{-8}	-5.6×10^{-6}	-8.6×10^{-6}	-1.6×10^{-5}
FEM (10×10)	-7.0×10^{-3}	8.5×10^{-3}	3.1×10^{-2}	6.4×10^{-2}	1.3×10^{-2}	7.7×10^{-3}	3.1×10^{-1}	5.4×10^{-1}
解析解 (半波形数)	1.401598 (1,1)	0.6681384 (1,1)	0.5331350 (1,1)	0.4860092 (1,1)	1.652506 (1,1)	1.335977 (1,1)	1.291212 (2,1)	1.335977 (2,1)

表-8 一方向圧縮を受ける四辺単純支持 Mindlin 板の座屈係数の誤差

(%)

多項式の次数 ($m = n$)	$a/b = 1$			$a/b = 2$		
	$t/b = 0.01$	0.1	0.3	$t/b = 0.01$	0.1	0.3
4	2.9×10^{-2}	2.7×10^{-2}	1.7×10^{-2}	$1.1 \times 10^{+1}$	$8.1 \times 10^{+0}$	$1.5 \times 10^{+1}$
6	1.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	8.1×10^{-6}	1.5×10^{-1}	9.8×10^{-2}	4.5×10^{-1}
8	2.0×10^{-9}	1.6×10^{-9}	1.1×10^{-9}	7.5×10^{-4}	4.1×10^{-4}	7.9×10^{-3}
10	-3.5×10^{-10}	8.9×10^{-13}	-5.2×10^{-13}	1.1×10^{-6}	4.8×10^{-7}	4.4×10^{-5}
FEM(10×10)	3.5×10^{-3}	2.5×10^{-3}	1.8×10^{-3}	3.1×10^{-2}	1.5×10^{-3}	1.5×10^{-2}
解析解 (半波形数)	3.997089 (1,1)	3.731407 (1,1)	2.486141 (1,1)	3.997089 (2,1)	3.731407 (2,1)	2.389790 (3,1)

表-9 一方向圧縮を受ける周面単純支持スラブの座屈係数の誤差

(%)

多項式の次数 $m = n$	l	$a/b = 1$			$a/b = 2$		
		$t/b = 0.01$	0.1	0.3	$t/b = 0.01$	0.1	0.3
4	3	3.3×10^{-2}	3.2×10^{-2}	1.0×10^{-1}	$1.4 \times 10^{+1}$	$9.7 \times 10^{+0}$	$5.2 \times 10^{+0}$
	4	3.3×10^{-2}	3.0×10^{-2}	2.0×10^{-2}	$1.4 \times 10^{+1}$	$9.7 \times 10^{+0}$	$5.1 \times 10^{+0}$
6	3	1.5×10^{-5}	1.8×10^{-3}	8.5×10^{-2}	1.6×10^{-1}	1.1×10^{-1}	6.9×10^{-1}
	4	1.5×10^{-5}	1.5×10^{-5}	5.7×10^{-4}	1.6×10^{-1}	1.1×10^{-1}	5.1×10^{-1}
	5	1.5×10^{-5}	1.4×10^{-5}	1.5×10^{-5}	1.6×10^{-1}	1.1×10^{-1}	5.1×10^{-1}
	6	1.5×10^{-5}	1.4×10^{-5}	9.1×10^{-6}	1.6×10^{-1}	1.1×10^{-1}	5.1×10^{-1}
8	3	-2.4×10^{-7}	1.8×10^{-3}	8.5×10^{-2}	8.0×10^{-4}	2.2×10^{-3}	1.8×10^{-1}
	4	-4.3×10^{-7}	1.6×10^{-6}	5.6×10^{-4}	8.0×10^{-4}	4.4×10^{-4}	1.1×10^{-2}
	5	-4.3×10^{-7}	3.8×10^{-9}	5.9×10^{-6}	8.0×10^{-4}	4.4×10^{-4}	8.9×10^{-3}
	6	-4.3×10^{-7}	1.7×10^{-9}	1.1×10^{-8}	8.0×10^{-4}	4.4×10^{-4}	8.8×10^{-3}
10	3	5.0×10^{-7}	1.8×10^{-3}	8.5×10^{-2}	1.1×10^{-6}	1.8×10^{-3}	1.8×10^{-1}
	4	1.1×10^{-7}	1.6×10^{-6}	5.6×10^{-4}	1.2×10^{-6}	2.2×10^{-6}	1.7×10^{-3}
	5	3.0×10^{-7}	2.1×10^{-9}	5.9×10^{-6}	9.1×10^{-7}	5.1×10^{-7}	7.7×10^{-5}
	6	3.0×10^{-7}	1.7×10^{-11}	1.0×10^{-8}	9.1×10^{-7}	5.1×10^{-7}	4.9×10^{-5}
解析解 (半波形数)		3.997201 (1,1)	3.741233 (1,1)	2.526469 (1,1)	3.997201 (2,1)	3.741233 (2,1)	2.442493 (3,1)

式を仮定している。

$$\left. \begin{aligned} v = w = 0 & \quad (at \ x = 0, a) \\ u = w = 0 & \quad (at \ y = 0, b) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

式 (65), (67) は座屈解析と自由振動解析の微分方程式の類似性からも導くことができる^{6), 10)}。座屈係数は式 (65) または式 (67) の解 λ_{cr}^* を用いて求められる。

$$k_b = 12 \mu \left(\frac{\lambda_{cr}^*}{m \pi^2} \right)^2 \left(\frac{a}{t} \right)^2 \left(\frac{b}{t} \right)^2 \quad (70)$$

b) Mindlin 要素による座屈係数

図-3の長方形要素について、薄板から厚板までの座屈解析に Mindlin 要素を用いた結果を表-8に示す。こ

こでは、 $k = 5/6$, $\nu = 0.3$ として完全積分を用いる。また、比較のために8節点要素を用いた FEM 解¹²⁾(10 × 10 分割) も示してある。

表-8は式 (65) の解析解に対する誤差 (%) で、板厚比に関係なくほぼ同程度の値が得られている。また、ペナルティ数を用いていないことから、ハイアラーキ多項式による級数の収束性は良好であり、10次式による値は総自由度数が約 2.8 倍の FEM 解に比べて 3~10桁精度が良い。

表に示した $a/b = 2$ の場合には、最小座屈係数を与えるモードが板厚比によって変わる。このときの板厚比はせん断補正係数 k の値によって多少変化するが、表

表-10 一方圧縮力を受ける周辺単純支持板の解析解による座屈係数 ($\nu = 0.3$)

t/b	$k = \frac{\pi^2}{12}$	$\frac{5}{6 + \nu/4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}$	$\frac{5}{6 - \nu}$	3次元 弾性論
	$k=0.822467$	0.823045	0.833333	0.849673	0.877193	—
0.01	3.997059	3.997060	3.997089	3.997132	3.997207	3.997201
0.05	3.927960	3.927998	3.928676	3.929718	3.931387	3.931396
0.1	3.728853	3.728990	3.731407	3.735131	3.741105	3.741233
0.2	3.118559	3.118933	3.125513	3.135686	3.152096	3.153313
0.3	2.476486	2.477005	2.486141	2.500321	2.523322	2.526469

表-11 3次元弾性論による座屈係数から求めた等価せん断補正係数

t/b	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3
$\nu = 0.2$	0.86206	0.86219	0.86253	0.86366	0.86504
$\nu = 0.3$	0.87720	0.87735	0.87780	0.87929	0.88106

表-12 ソリッド要素に対する Mindlin 要素の誤差 (%)

t/b	周辺単純支持 ($a/b = 1$)				周辺固定支持 ($a/b = 1$)			
	$\nu = 0.2$		$\nu = 0.3$		$\nu = 0.2$		$\nu = 0.3$	
	$k = \pi^2/12$	$5/(6 - \nu)$	$k = \pi^2/12$	$5/(6 - \nu)$	$k = \pi^2/12$	$5/(6 - \nu)$	$k = \pi^2/12$	$5/(6 - \nu)$
0.01	-2.3×10^{-3}	-5.9×10^{-7}	-3.6×10^{-3}	-3.9×10^{-7}	-2.0×10^{-1}	-1.9×10^{-1}	-6.1×10^{-1}	-5.9×10^{-1}
0.05	-5.6×10^{-2}	-1.6×10^{-4}	-8.7×10^{-2}	-2.4×10^{-4}	-4.0×10^{-1}	-1.9×10^{-1}	-8.7×10^{-1}	-5.5×10^{-1}
0.1	-2.1×10^{-1}	-2.4×10^{-3}	-3.3×10^{-1}	-3.4×10^{-3}	-9.1×10^{-1}	-2.2×10^{-1}	-1.6×10^0	-5.0×10^{-1}
0.2	-7.3×10^{-1}	-2.7×10^{-2}	-1.1×10^0	-3.9×10^{-2}	-2.3×10^0	-3.7×10^{-1}	-3.4×10^0	-5.9×10^{-1}
0.3	-1.3×10^0	-8.9×10^{-2}	-2.0×10^0	-1.2×10^{-1}	-3.3×10^0	-6.1×10^{-1}	-4.7×10^0	-8.1×10^{-1}

の場合には $t/b \approx 0.245$ で 2 半波形から 3 半波形に移る (図-5を参照)。

c) ソリッド要素による座屈係数

前述の b) の問題を、ソリッド要素を用いて計算する。この場合の有限要素解析で、式 (69) の境界条件を用いて図-3に示した一様分布荷重 σ_x を作用させたのでは、解析解で仮定している一様圧縮応力状態が得られない。そこで、式 (69) を満たし、かつ同一の応力状態を得るために、次の強制変位を各節点に加える。

$$\left. \begin{aligned} u_n &= -\sigma_x a/E & (at \ x = a) \\ v_n &= -\nu(b/a)u_n & (at \ y = b) \\ w_n &= -\nu(t/a)u_n & (at \ z = t) \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

$\nu = 0.3$ を用いて表-8と同じような計算を行った結果を表-9に示す。解析解は式 (67) から求めた値で、表中の記号 l は変位を厚さ z 方向に級数展開した多項式の次数である。

表-8の Mindlin 要素に比べて $a/b = 1$ の場合に収束性がやや悪いが、薄板解析にソリッド要素を用いて精度の良い値が得られている。 x, y 方向に 4 次式 ($m = n = 4$) を用いた $a/b = 2$ の値はあまり良くないが、ロッキングは起きていない。なお、ソリッド要素でも $a/b = 2$ の場合に座屈係数が最小になるモードは、板厚比が約 0.25 で 2 半波形から 3 半波形に移る。

d) Mindlin 要素の等価せん断補正係数

Mindlin 要素に用いるせん断補正係数には種々の式が提案されていて、通常、その違いによる影響は小さい

ものと考えられるが、座屈係数に若干の差が生じる。

そこで、種々の板厚比とせん断補正係数を用いて、式 (65) から求めた座屈係数 k_b の値を表-10に示す。ここで、 $a/b = 1, \nu = 0.3$ としている。補正係数は値の小さい順に Mindlin, Nänni⁴⁾, Reissner, Cowper¹³⁾ による係数で、5 番目は式 (72) の提案する値である。表の最後に、3次元弾性論による値を示した。

$$k = 5/(6 - \nu) \quad (72)$$

Mindlin の平板理論から求めた座屈係数は、すべての値とも 3次元弾性理論による値よりも小さいことから、せん断補正係数の値がやや小さ過ぎる、すなわち過剰補正になっている (補正係数を用いない場合の値は、表-1の第 1 列目 $\alpha = 1$ の値)。このため、 $t/b = 0.3$ のときには 1 ~ 2% 小さくて、補正值の大きい提案式を用いた値は約 0.1% 小さい。

Mindlin 要素を用いてソリッド要素と同じ座屈係数が得られるための等価せん断補正係数の値を解析解から求めると表-11のようになる。この表の数値から先述の補正係数の式を提案した。この提案式の妥当性を調べるために、Mindlin 要素とソリッド要素について数値計算を行う。なお、固定支持板のソリッド要素の計算では、先の c) のソリッド要素による計算と同様に、周辺の 4 面を固定支持 ($u = v = w = 0$) にして、式 (71) の強制変位を加えた。

表-12の値は、Mindlin 要素から求めた座屈係数の値をソリッド要素による値に対する誤差 (%) として表し

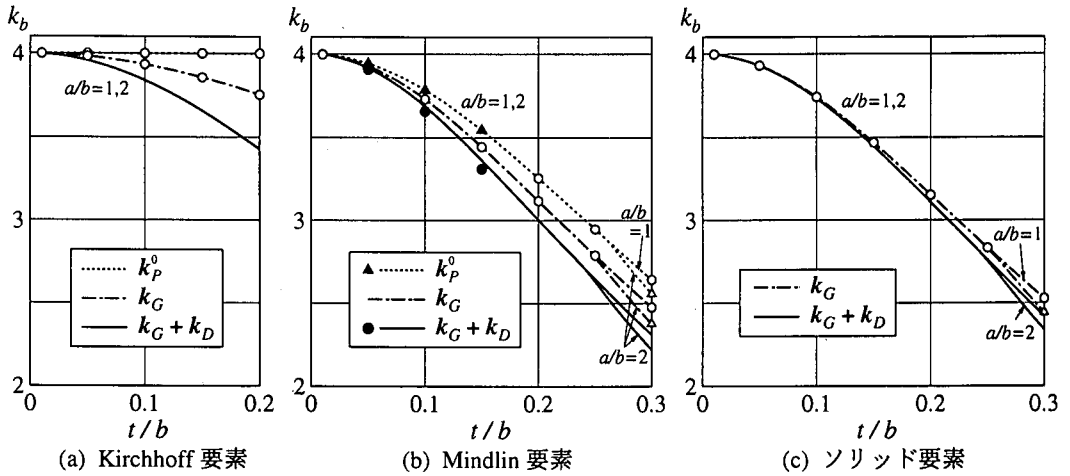


図-5 単純支持板における厚板比と非線形項の影響 ($a/b = 1 \text{ \& } 2, \nu = 0.3$)

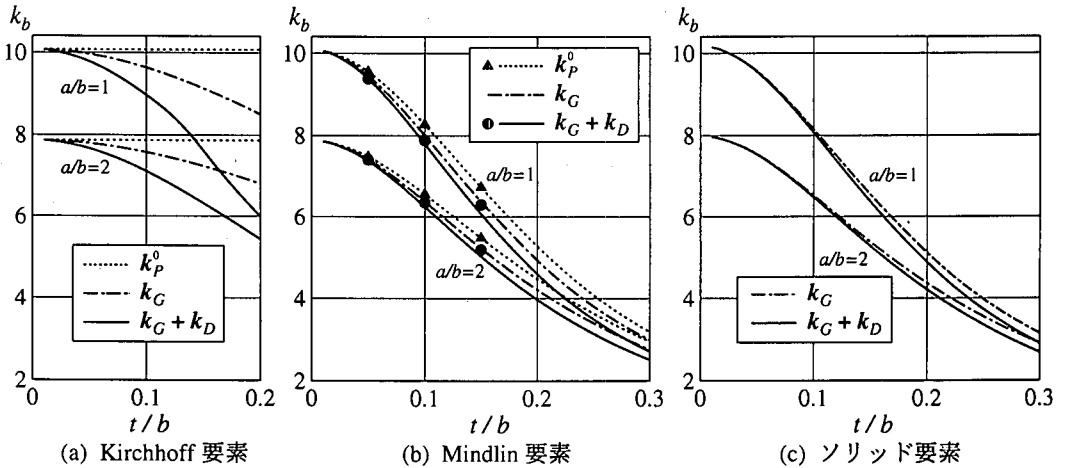


図-6 固定支持板における厚板比と非線形項の影響 ($a/b = 1 \text{ \& } 2, \nu = 0.3$)

たものである。単純支持の場合は表-10と同じ結果が得られている。固定支持の場合には差はやや大きくなり、 $k = \pi^2/12$ では最大5%の差があるが、提案式を用いたMindlin要素では1%以内の誤差でより正確なソリッド要素に近い値が得られる。

(3) 板厚比と非線形項の影響

Kirchhoffの仮定を用いた薄板の座屈係数は板厚比に依らず一定になるが、せん断変形を考慮するMindlin理論や3次元弾性理論による座屈係数には板厚比が影響する。また、回転変位に対する式(28)の幾何剛性 k_R^0 や式(31), (42)の初期変位の項 k_D の影響も板厚比によって異なる。ここでは、せん断変形を無視するKirchhoff要素と、これを考慮するMindlin要素とソリッド要素について、これらの非線形項 k_R^0 と k_D の影響を調べる。

図-5に、単純支持板に図-3の荷重が作用する場合の座屈係数 k_b の値を示す。点線、一点鎖線と実線は計算値で、図(a),(b)の k_G は式(28)の $k_P^0 + k_R^0$ を表す。図中の○と△印は、式(65), (67)から求めた解析解である。図(b),(c)で t/b が約0.25以下のときには、座屈係数は形状比が1と2の場合で同じであるが(○印)、これより厚い $a/b = 2$ の板では△印で示すように $a/b = 1$ より小さな値となる(表-8, 9参照)。また、▲と●は文献4)の値をプロットしたものである。▲は上述の非線形項を省略した値で、点線の計算値と完全に(文献に示された5桁の数値と)一致する。●は座屈前の初期変形を考慮した値で、本論文の初期変位と定式化が異なるために同一の非線形項ではないが参考のために示した。なお、回転変位に対する非線形項は本論文と同じように扱われている。また、図(b)では、上記の文献と同じせん断補正係数 $k = 5/(6 + \nu/4)$ を用いている。

表-13 座屈係数に及ぼす初期変位の影響 ($a/b = 1$) (%)

t/b	Mindlin 要素 $k=5/(6-\nu)$				ソリッド要素			
	四辺単純支持		四辺固定支持		周面単純支持		周面固定支持	
	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$
0.01	-0.01	-0.01	-0.03	-0.03	-0.01	-0.00	-0.02	-0.00
0.05	-0.31	-0.32	-0.77	-0.78	-0.17	-0.05	-0.45	-0.16
0.1	-1.20	-1.22	-2.81	-2.77	-0.69	-0.23	-1.87	-0.98
0.2	-4.09	-3.98	-8.19	-7.54	-2.78	-1.40	-6.59	-4.54
0.3	-7.71	-7.26	-12.00	-10.62	-6.24	-4.18	-10.49	-7.62

板厚比が 0.01 の薄板領域では非線形項の影響は現れず、かつ、3つの要素による k_b の差は 0.1% 以下である。非線形項の影響は、 t/b が 0.05 ~ 0.1 以上で現れて、図 (a), (b) より k_R^0 と k_D の非線形性は同程度である。なお、図 (a) では顕著であるが、厚板領域では Kirchhoff の仮定は成り立たない。また、平板要素に比べて図 (c) のソリッド要素では k_D の影響はやや少ない。

固定支持板について同様な計算を行った結果を図-6 に示す。図中の記号は図-5 と同じである。形状比によって座屈係数の値が異なる他は、単純支持板と同様な傾向である。

初期変位を考慮した場合の座屈係数の減少率 (%) を表-13 に示す。表の数値は図-5, 6 (b), (c) の一点鎖線の値に対する実線の値の減少率を表す。なお、表-13 の Mindlin 要素では、式 (72) のせん断補正係数を用いている。表より、初期変位の影響は厚板ほど大きく現れて、固定支持板の Mindlin 要素では最大 12%、ソリッド要素では 10% 減少している。

図-5, 6 の図 (a), (b) から明らかなように、Kirchhoff 理論の適用は板厚比にかなり厳しい制限 ($t/b < 1/30$) を設けるべきであろう。しかし、ハイアラキー Mindlin 要素を用いれば、板厚比が 0.01 ~ 0.3 までの平板の座屈解析を効率よく行うことができる。

7. 結 論

線形座屈理論に基づくハイアラキー要素を開発し、数値計算の効率性を考慮した接線剛性行列を定式化した。平板の座屈解析に適用した結果から以下の知見が得られた。

- (1) 薄板及び厚板の座屈解析において、ハイアラキー要素法により極めて高精度の解が得られる。
- (2) Mindlin 要素を用いて 3 次元弾性論の解に近い値が得られるせん断補正係数を提案した。
- (3) C^0 級要素を用いて Kirchhoff 理論による解を得るための最適ペナルティ数を求めた。

以上のことから、板厚比が 0.01 ~ 0.3 の薄板から厚板までの平板の座屈解析では、ハイアラキー Mindlin 要素を用いて 3 次元弾性理論の解に良く一致する高精度の値を効率よく計算することができる。数値計算例

では初期変位の影響は少なかったが、面外荷重が作用する場合などについて検討する必要がある。

付録 I 積分の漸化式

ハイアラキー多項式は次式で与えられる⁸⁾。

$$f_i(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^i \xi & (i = 0, 1) \\ (1 - \xi^2) \xi^{i-2} & (i \geq 2) \end{cases} \quad (I.1)$$

これに ξ^p を掛けた次の積分を考える。

$$F_i(p) = \int_{-1}^1 \xi^p f_i(\xi) d\xi, \quad G_i(p) = \int_{-1}^1 \xi^p g_i(\xi) d\xi \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (I.2)$$

ここに、 $g_i = df_i/d\xi$ である。

F_i, G_i は、整数 p をパラメータとする積分値である。これに式 (I.1) を代入して表-I の値が得られる。

次に、多項式の二重積の積分を考える。

$$\left. \begin{aligned} F_{ij}(p) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi^p f_i f_j d\xi, & G_{ij}(p) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi^p g_i g_j d\xi \\ H_{ij}(p) &= \int_{-1}^1 \xi^p g_i f_j d\xi \end{aligned} \right\} \quad (I.3)$$

式 (I.3) は式 (I.2) の積分値を用いて次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} F_{ij}(p) &= \frac{1}{2} \left\{ F_j(p) - (-1)^i F_j(p+1) \right\} \\ G_{ij}(p) &= \frac{1}{2} (-1)^{i+1} G_j(p) \\ H_{ij}(p) &= \frac{1}{2} (-1)^{i+1} F_j(p) \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1) \quad (I.4)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{ij}(p) &= F_j(p+i-2) - F_j(p+i) \\ G_{ij}(p) &= (i-2) G_j(p+i-3) - i G_j(p+i-1) \\ H_{ij}(p) &= (i-2) F_j(p+i-3) - i F_j(p+i-1) \end{aligned} \right\} \quad (i \geq 2) \quad (I.5)$$

ここで、

$$F_j(-1) = G_j(-1) = 0 \quad (I.6)$$

とする。式 (I.4), (I.5) に表-I の値を代入した結果を表-II に示す。なお、 $p = 0$ とした二重積の積分値は先の論文⁸⁾ で示した値である (ただし、 x についての微分による変換長=2 を含めている)。

表-I 単項式の積分値

	$i = 0, 1$		$i \geq 2 \quad (q = p + i)$	
	$p = 0, 2, \dots$	$p = 1, 3, \dots$	$q = 2, 4, \dots$	$q = 3, 5, \dots$
F_i	$\frac{1}{p+1}$	$\frac{-(-1)^i}{p+2}$	$\frac{4}{q^2-1}$	0
G_i	$\frac{-(-1)^i}{p+1}$	0	0	$\frac{-4p}{q(q-2)}$

表-II 二重積の積分値

$i = 0, 1$	$j = 0, 1$		$j \geq 2 \quad (r = p + j)$	
	$p = 0, 2, \dots$	$p = 1, 3, \dots$	$r = 2, 4, \dots$	$r = 3, 5, \dots$
F_{ij}	$\frac{1}{2(p+1)} + \frac{(-1)^{i+j}}{2(p+3)}$	$\frac{-(-1)^i - (-1)^j}{2(p+2)}$	$\frac{2}{r^2-1}$	$\frac{-2(-1)^i}{r(r+2)}$
G_{ij}	$\frac{(-1)^{i+j}}{2(p+1)}$	0	0	$\frac{2(-1)^i p}{r(r-2)}$
H_{ij}	$\frac{-(-1)^i}{2(p+1)}$	$\frac{(-1)^{i+j}}{2(p+2)}$	$\frac{-2(-1)^i}{r^2-1}$	0
$i \geq 2$	$j = 0, 1 \quad (q = p + i)$		$j \geq 2 \quad (s = p + i + j)$	
	$q = 2, 4, \dots$	$q = 3, 5, \dots$	$s = 4, 6, \dots$	$s = 5, 7, \dots$
F_{ij}	$\frac{2}{q^2-1}$	$\frac{-2(-1)^j}{q(q+2)}$	$\frac{16}{(s+1)(s-1)(s-3)}$	0
G_{ij}	0	$\frac{2(-1)^j p}{q(q-2)}$	$\frac{16ij + 8(p-3)(s-1)}{(s-1)(s-3)(s-5)}$	0
H_{ij}	$\frac{2(-1)^j(p+1)}{q^2-1}$	$\frac{-2p}{q(q-2)}$	0	$\frac{8(2i-s)}{s(s-2)(s-4)}$

次の三重積の積分値を求める。

$$\begin{aligned}
 F_{ijk}(p) &= \int_{-1}^1 \xi^p f_i f_j f_k d\xi, & G_{ijk}(p) &= \int_{-1}^1 \xi^p g_i g_j g_k d\xi \\
 H_{ijk}(p) &= \int_{-1}^1 \xi^p g_i f_j f_k d\xi, & K_{ijk}(p) &= \int_{-1}^1 \xi^p g_i g_j f_k d\xi
 \end{aligned}
 \tag{I.7}$$

これらの積分値は式 (I.4), (I.5) を用いて次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 F_{ijk}(p) &= \frac{1}{2} \{ F_{jk}(p) - (-1)^i F_{jk}(p+1) \} \\
 G_{ijk}(p) &= \frac{1}{2} (-1)^{i+1} G_{jk}(p) \\
 H_{ijk}(p) &= \frac{1}{2} (-1)^{i+1} F_{jk}(p) \\
 K_{ijk}(p) &= \frac{1}{2} (-1)^{i+1} H_{jk}(p)
 \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1) \tag{I.8}$$

$$\begin{aligned}
 F_{ijk}(p) &= F_{jk}(p+i-2) - F_{jk}(p+i) \\
 G_{ijk}(p) &= (i-2)G_{jk}(p+i-3) - iG_{jk}(p+i-1) \\
 H_{ijk}(p) &= (i-2)F_{jk}(p+i-3) - iF_{jk}(p+i-1) \\
 K_{ijk}(p) &= (i-2)H_{jk}(p+i-3) - iH_{jk}(p+i-1)
 \end{aligned} \quad (i \geq 2) \tag{I.9}$$

式 (I.8), (I.9) を式 (I.4), (I.5) と比べると、多重積の積分値は漸化式で求められることが分かる。したがって、式 (I.1) のハイラーキ多項式は関数値及び微分値も漸化式で計算できるので⁸⁾、プログラムが簡単になる。

式 (I.8), (I.9) に表-IIの積分値を代入すると、陽な式

で三重積の定積分が得られる。なお、 f_i, g_i などの順序により H_{ijk} と K_{ijk} にはそれぞれ3通りの場合があるが、これらは添字の順序を交換して求められる。式 (58) は、式 (I.8), (I.9) において $p = 0$ とした値である。

付録 II 直方体要素

(1) 幾何剛性行列

直方体要素では、式 (35) の一般化変位 d を (u_i, v_i, w_i) の順に並び変えて、 f の i, j 成分を

$$\left. \begin{aligned}
 N_i(\xi, \eta, \zeta) &= f_m(\xi) f_n(\eta) f_l(\zeta) \\
 N_j(\xi, \eta, \zeta) &= f_{m'}(\xi) f_{n'}(\eta) f_{l'}(\zeta)
 \end{aligned} \right\} \tag{II.1}$$

とすると、式 (39) の G_{11}, G_{12} などの (i, j) 要素 $G_{11,ij}, G_{12,ij}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 G_{11,ij} &= \frac{4}{\ell_\xi^2} (g_m g_{m'}) (f_n f_{n'}) (f_l f_{l'}) \\
 G_{12,ij} &= \frac{4}{\ell_\xi \ell_\eta} (g_m f_{m'}) (f_n g_{n'}) (f_l f_{l'})
 \end{aligned} \right\} \tag{II.2}$$

ここに、 g_m, g_n, g_l は、 f_m, f_n, f_l をそれぞれ ξ, η, ζ で微分したものであり、 $\ell_\xi, \ell_\eta, \ell_\zeta$ は要素寸法である。

荷重 p^0 による一般化変位 (u_k^0, v_k^0, w_k^0) で表した初期応力と式 (II.2) を式 (41) に用いると、 k_s^0 の (i, j) 要素

k_s^0 は式 (58) の積分値を用いて次式のようになる.

$$k_s^0 = \sum_{k=1}^K \left\{ \left(\frac{\ell_\eta}{\ell_\zeta} A_{k1} + \frac{\ell_\zeta}{\ell_\eta} A_{k2} \right) u_k^0 + \left(\frac{\ell_\zeta}{\ell_\xi} B_{k1} + \frac{\ell_\xi}{\ell_\zeta} B_{k2} \right) v_k^0 + \left(\frac{\ell_\xi}{\ell_\eta} C_{k1} + \frac{\ell_\eta}{\ell_\xi} C_{k2} \right) w_k^0 \right\} \quad (\text{II.3})$$

ここに,

$$\begin{aligned} A_{k1} &= F_{knn'} \left\{ \lambda H_{kmm'} K_{ll'k} + G H_{mm'm} K_{kl'l} \right. \\ &\quad \left. + G H_{m'mk} K_{kl'l} + D_1 G_{kmm'} F_{kl'l} (\ell_\zeta / \ell_\xi)^2 \right\} \\ A_{k2} &= F_{kl'l} \left\{ \lambda H_{kmm'} K_{nn'k} + G H_{mm'm} K_{kn'n} \right. \\ &\quad \left. + G H_{m'mk} K_{knn'} \right\} \\ B_{k1} &= F_{kl'l} \left\{ \lambda H_{knn'} K_{mm'm} + G H_{nn'k} K_{km'm} \right. \\ &\quad \left. + G H_{n'nk} K_{kmm'm} + D_1 G_{knn'} F_{kmm'm} (\ell_\xi / \ell_\eta)^2 \right\} \\ B_{k2} &= F_{kmm'm} \left\{ \lambda H_{knn'} K_{ll'k} + G H_{nn'k} K_{kl'l} \right. \\ &\quad \left. + G H_{n'nk} K_{kl'l} \right\} \\ C_{k1} &= F_{kmm'm} \left\{ \lambda H_{kl'l} K_{nn'k} + G H_{ll'k} K_{kn'n} \right. \\ &\quad \left. + G H_{l'lk} K_{knn'} + D_1 G_{kl'l} F_{knn'} (\ell_\eta / \ell_\zeta)^2 \right\} \\ C_{k2} &= F_{knn'} \left\{ \lambda H_{kl'l} K_{mm'm} + G H_{ll'k} K_{km'm} \right. \\ &\quad \left. + G H_{l'lk} K_{kmm'm} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

$$D_1 = 2G + \lambda \quad (\text{II.5})$$

λ は式 (45) の Lamé の定数である. なお, 初期変位 u_k^0 などの添字 k は, 三重級数項で表される一般化変位 u_{mnl} などを 1 次元配列に並べたときの自由度番号で, 式 (II.4) の積分値の添字 k は u_k^0 に用いる多項式 f の番号である.

(2) 初期変位マトリックス

3K 次の初期変位マトリックス k_D を 3 次の正方行列 k_{ij}^0 に分割する.

d の i, j 成分の形状関数を式 (II.1) で表すと, k_{ij}^0 の上三角部分の要素 k_{pq} は次式で次式で与えられる.

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sum u_k^0 (2I_1 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7) \\ k_{22} &= \sum v_k^0 (2I_2 + I_8 + I_9 + I_{10} + I_{11}) \\ k_{33} &= \sum w_k^0 (2I_3 + I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{15}) \\ k_{12} &= \sum \left\{ u_k^0 (I_2 + I_8 + I_{10}) + v_k^0 (I_1 + I_4 + I_6) \right\} \\ k_{13} &= \sum \left\{ u_k^0 (I_3 + I_{12} + I_{14}) + w_k^0 (I_1 + I_4 + I_6) \right\} \\ k_{23} &= \sum \left\{ v_k^0 (I_3 + I_{12} + I_{14}) + w_k^0 (I_2 + I_9 + I_{11}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

ここに,

$$\begin{aligned} I_1 &= (\ell_\eta \ell_\zeta / \ell_\xi^2) D_1 G_{kmm'm} F_{knn'} F_{kl'l} \\ I_2 &= (\ell_\xi \ell_\zeta / \ell_\eta^2) D_1 F_{kmm'm} G_{knn'} F_{kl'l} \\ I_3 &= (\ell_\xi \ell_\eta / \ell_\zeta^2) D_1 F_{kmm'm} F_{knn'} G_{kl'l} \\ I_4 &= (\ell_\zeta / \ell_\eta) F_{kl'l} (G H_{kmm'm} K_{nn'k} + G H_{m'mk} K_{knn'} \\ &\quad + \lambda H_{mm'm} K_{kn'n}) \\ I_5 &= (\ell_\zeta / \ell_\eta) F_{kl'l} (G H_{kmm'm} K_{nn'k} + \lambda H_{m'mk} K_{knn'} \\ &\quad + G H_{mm'm} K_{kn'n}) \\ I_6 &= (\ell_\eta / \ell_\zeta) F_{knn'} (G H_{kmm'm} K_{ll'k} + G H_{m'mk} K_{kl'l} \\ &\quad + \lambda H_{mm'm} K_{kl'l}) \\ I_7 &= (\ell_\eta / \ell_\zeta) F_{knn'} (G H_{kmm'm} K_{ll'k} + \lambda H_{m'mk} K_{kl'l} \\ &\quad + G H_{mm'm} K_{kl'l}) \\ I_8 &= (\ell_\zeta / \ell_\xi) F_{kl'l} (G H_{knn'} K_{mm'm} + G H_{nn'k} K_{km'm} \\ &\quad + \lambda H_{n'nk} K_{kmm'm}) \\ I_9 &= (\ell_\zeta / \ell_\xi) F_{kl'l} (G H_{knn'} K_{mm'm} + \lambda H_{nn'k} K_{km'm} \\ &\quad + G H_{n'nk} K_{kmm'm}) \\ I_{10} &= (\ell_\xi / \ell_\zeta) F_{kmm'm} (G H_{knn'} K_{ll'k} + G H_{nn'k} K_{kl'l} \\ &\quad + \lambda H_{n'nk} K_{kl'l}) \\ I_{11} &= (\ell_\xi / \ell_\zeta) F_{kmm'm} (G H_{knn'} K_{ll'k} + \lambda H_{nn'k} K_{kl'l} \\ &\quad + G H_{n'nk} K_{kl'l}) \\ I_{12} &= (\ell_\eta / \ell_\xi) F_{knn'} (G H_{kl'l} K_{mm'm} + G H_{l'lk} K_{km'm} \\ &\quad + \lambda H_{l'lk} K_{kmm'm}) \\ I_{13} &= (\ell_\eta / \ell_\xi) F_{knn'} (G H_{kl'l} K_{mm'm} + \lambda H_{l'lk} K_{km'm} \\ &\quad + G H_{l'lk} K_{kmm'm}) \\ I_{14} &= (\ell_\xi / \ell_\eta) F_{kmm'm} (G H_{kl'l} K_{nn'k} + G H_{ll'k} K_{kn'n} \\ &\quad + \lambda H_{l'lk} K_{knn'}) \\ I_{15} &= (\ell_\xi / \ell_\eta) F_{kmm'm} (G H_{kl'l} K_{nn'k} + \lambda H_{ll'k} K_{kn'n} \\ &\quad + G H_{l'lk} K_{knn'}) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

$F_{kmm'm}$ などは式 (58) の積分値で, 総和 Σ は $k = 1 \sim K$ とする. 下三角部分の要素 k_{qp} は, H と K の添字 m と m' , n と n' 及び l と l' をそれぞれ交換する.

参考文献

- 1) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, pp.348-439, 1961.
- 2) Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S. : Analytical buckling solutions for Mindlin plates involving free edges, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.38, No.10., pp.1127-1138, 1996.
- 3) Sethilnathan, N.R., Lim, S.P., Lee, K.H. and Chow, S.T. : Buckling of shear-deformable plates, *AIAA J.*, Vol.25, pp.1268-1271, 1987.
- 4) Xiang, Y., Wang, C.M., Liew, K.M. and Kitipornchai, S. : Mindlin plate buckling with prebuckling in-plane deformation, *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol.119, pp.1-18, 1993.

- 5) Srinivas, S. and Rao, A.K. : Buckling of thick rectangular plates, *AIAA J.*, Vol.7, pp.1645-1646, 1969.
- 6) Srinivas, S. and Rao, A.K. : Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *Int. J. Solids Structures*, Vol.6, pp.1463-1481, 1970.
- 7) 林 正, 渡辺 力 : 節点帯板法による薄肉構造物の座屈解析, 土木学会論文集, No.525/I-33, pp.17-25, 1995.
- 8) 林 正, 山中素直, 加瀬部弘, 佐藤敏亮 : ハイアラーキ要素による有限要素解析の効率化, 土木学会論文集, No.591/I-43, pp.71-84, 1998.
- 9) 林 正, 岩崎英治 : ハイアラーキ要素による骨組構造解析, 土木学会論文集, No.570/I-40, pp.163-174, 1997.
- 10) 林 正, 渡辺 力 : 2段階動的縮小法を用いたハイアラーキ要素による自由振動解析, 土木学会論文集, No.619/I-47, pp.35-46, 1999.
- 11) Smith, J.P. : Buckling of shear deformable plates using the p-version of the finite element method, *Computers & Structures*, Vol.57, pp.527-532, 1995.
- 12) NISA II ユーザーズ・マニュアル Version 93.0 : Engineering Mechanics Research Corporation, 1994.
- 13) Dym, C.V. and Shames, I.H. : *Solid Mechanics*, McGraw-Hill, p.190, 1973.

(1999.1.29 受付)

BUCKLING ANALYSIS OF PLATES BY HIERARCHICAL ELEMENTS

Masa HAYASHI, Chikara WATANABE, Yoshiharu MASUI and Takahiro UEDA

Hierarchical finite element method is proposed for the elastic buckling analysis using tangent stiffness matrices of shell elements and solid elements by total Lagrangian formulation. In this paper, the buckling analysis of the thin and thick plates is performed to examine the accuracy of this method and the effects of nonlinear components of the tangent matrices on buckling loads. For Kirchhoff's plate theory, Mindlin's plate theory and three-dimensional theory of elasticity, the solutions of the hierarchical element method agree very well with detailed-calculations of each plate theory. Moreover, a shear correction factor is proposed for the Mindlin element and the good solutions are obtained for those of three-dimensional theory of elasticity.