

任意高次板曲げ理論における位相速度曲線群

臼木恒雄¹・真木有岳²

¹正会員 工博 東京理科大学教授 理工学部土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

²学生員 東京理科大学理工学研究科土木工学専攻修士課程 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

動的1次せん断変形板曲げ理論として著名なMindlin板の理論を任意高次の板曲げ理論に拡張した。逐次近似的手法でせん断ひずみを真の解に近づけるとき、必然的にLegendre関数の単位反り関数群が発生することを示し、それを板厚方向に積分することで単位せん断応力関数群を求めた。この2種類の基底関数から、連成の無い板の反り抵抗(慣性モーメント)マトリックスおよび帯マトリックスとなるせん断抵抗マトリックスを誘導した。Hamiltonの原理から板の運動方程式を導出し、希望する数だけの位相速度曲線群を描いた。中高周波数領域での収束値のずれは、断面諸量および弾性係数を周波数の関数とすることで解決した。2次元弾性論の厳密解として著名なRayleigh-Lambの位相速度曲線と本理論のそれを比較し良好な結果を得た。

Key Words : higher order plate theory, Mindlin plate theory, phase velocity curves, Rayleigh-Lamb frequency equation

1. まえがき

高次せん断変形板曲げ理論は1970年代より、活発に研究がすすめられており、すでに多くの理論が提案されている。板厚方向のひずみおよび応力を考慮するか否かで大別され、また板中央面方向(反り)変位を何次まで考慮するかでも分類される¹⁾。しかし、この板中央面方向(反り)変位として、4次以上の板厚座標の多項式で表現した研究は少ない。任意次数の多項式を仮定する静的問題を扱った研究でも、実際の数値計算例は比較的低次で打ち切られている。しかしながら、はり、板およびシェルなどの薄肉構造部材の衝撃による過渡現象などでは高次のモードが重要な意味をもつため、理論的裏付けが必要と思われる。

これらの高次理論の問題点をあげると以下のようになる。第1にこれらの高次理論では天下り的に変位式あるいは応力式が仮定され、それを基にひずみ、応力、断面力、つり合い条件と展開される。しかし、出発点となる変位あるいは応力の仮定式の意味が不明確である。第2に高周波数領域における高次モードの厳密解とのずれの問題がある。たとえば、板厚方向の1次せん断変形を考慮するMindlinの動的板曲げ理論の位相速度曲線²⁾をRayleigh-Lambの弾性理論^{3), 4)}に基づく位相速度曲線⁵⁾と比較すると、第1次(基本)モードは比較的良好に一致するが、第2次

モードは高周波数領域でおおきなずれを生じる。この事情は著名な高次板曲げ理論でも同じである(文献1)参照)。第3に厳密解であるRayleigh-Lamb周波数方程式の3次以上のモードを板の曲げ理論で再現する問題である。弾性論による板の解法はきわめて限定された問題しか扱えず、それもかなりの労力を必要とし実用的ではない。近似理論である板曲げ理論は種々の境界条件および荷重条件に対し、静的問題から動的問題まで扱えるため、この近似板曲げ理論で弾性論並の低周波領域から高周波領域までを守備できれば工学的価値は高いといえる。そのためには、近似理論である板の曲げ理論で高次モードを望む数だけ高精度に求められることが不可欠である。

以上の点を考え、本報告では筆者の一人が薄肉はりに提案した逐次近似的手法⁶⁾で板のせん断変形を考慮する。その結果、必然的に直交する単位反りとなるLegendre関数が厳密に導ける。もはや、場当たり的に変位関数を仮定する必要はない。そして、この逐次近似の変位式から求められた支配方程式を用いれば、望む数だけ自由に位相速度曲線が得られることを示す。ただし、提案する任意高次理論と従来の1次理論であるMindlin板の理論²⁾を対比するため、板厚方向の垂直ひずみを無視したMindlin板の曲げ理論と同一の定式化⁷⁾を行った。違いは板断面の反りによる回転変位およびその曲げモーメントがベクトル表記になることだけである。

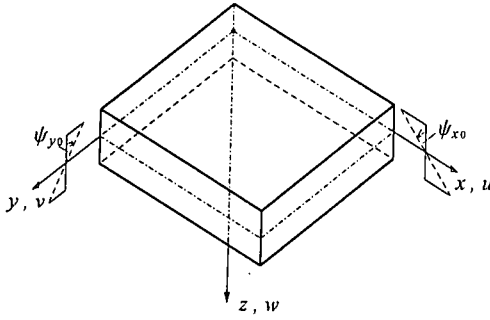


図-1 座標系

Rayleigh-Lambによる弾性論の厳密解とここに提案する任意高次板曲げ理論の位相速度曲線群を比較すると、低周波数から中周波数領域まで良好な近似となっている。Rayleigh-Lambの式は単位反り関数として双曲線関数を基底関数とするのに対し、ここに提案する任意高次板曲げ理論はLegendre多項式を基底関数としている。

上述のごとく、通常の板理論では2次以上のモードは高周波数領域で縦波速度に収束する。これをRayleigh-Lamb方程式の厳密解同様に連続体の横波速度に収束させるには、何らかの修正が必要となる。この修正には2通りの方法が考えられる。一つは板厚方向の応力成分を応力のつり合い条件から修正する方法で平島ら¹⁾により提案された。他は支配方程式の弾性係数および断面諸量に修正係数を掛けて制御する方法である。これには棒の軸圧縮波動の場合の報告⁸⁾および棒のねじり波動の場合の報告⁹⁾などがある。Mindlin板の曲げ波動では、上記の扱いを全周波数領域に一般化した提案¹⁰⁾がある。本理論もこれに習い、弾性定数および断面諸量を周波数の関数とする方法で解決している。

2. 座標系と仮定

一定の厚さ h の板の中央面を通る互いに直角の座標を x 軸および y 軸とし、それらに直角な板厚方向の座標 z を選ぶ。この x, y, z 軸を右手座標系とし、 z 軸は xy 面より垂直下向きにとっている。構造要素のある点の x, y, z 方向の変位成分をそれぞれ順に u, v, w と表すものとする。

本論文で使用した主な仮定を以下に記す。

- 板の幅厚比 b/h は高次理論の適用範囲内とする。
- 構造材料はHooke則を満足する。
- 板厚方向の伸縮ひずみは零とする。

3. 基礎条件式

板のひずみと変位の関係は次のごとくなる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tilde{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \tilde{\gamma}_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (1)$$

複数の式に対しては、アルファベット順に(*.a), (*.b), ..., (*.e)と式番を想定している。

Kirchhoff-Loveの古典板理論では、たわみ w に起因する板厚中心線の回転、たとえば $\partial w/\partial x$ と板断面の平均回転 $-\psi_{x0}$ は等しいと仮定する。長方形板要素 $dx \times dz$ および $dy \times dz$ は歪まないため、せん断ひずみは零となる。せん断変形を許容する板理論では、この矛盾を避ける目的で板厚中心線の回転と板断面の回転を異なるものとして理論を構成している。

二次せん断ひずみを考慮しない古典板理論の x 軸方向変位を U 、 y 軸方向変位を V とすると、式(1.c)~(1.e)は次のごとく分解表示できる。

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{xy,pr} + \gamma_{xy,se} \\ \tilde{\gamma}_{xz} &= \gamma_{xz,pr} + \gamma_{xz,se} \\ \tilde{\gamma}_{yz} &= \gamma_{yz,pr} + \gamma_{yz,se} \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、添え字 $(,)_{,pr}$ を付した初等成分はKirchhoff-Loveのせん断ひずみを、添え字 $(,)_{,se}$ を付した二次成分はReissner-Mindlinのせん断ひずみおよびそれ以上の高次せん断ひずみの総和を表すものとする。具体的には次のごとく表せる。

$$\begin{aligned} \gamma_{xy,pr} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \gamma_{xy,se} = \frac{\partial(v-V)}{\partial x} + \frac{\partial(u-U)}{\partial y} \\ \gamma_{xz,pr} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xz,se} = \frac{\partial(u-U)}{\partial z} \\ \gamma_{yz,pr} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{yz,se} = \frac{\partial(v-V)}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

縦弾性係数を E 、横弾性係数を G 、そしてPoisson比を ν と書くならば、Hooke則は次のごとくなる。

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G \tilde{\gamma}_{xz} \\ \tau_{yz} &= G \tilde{\gamma}_{yz} \end{aligned} \quad (4)$$

このHooke則式(4)に式(1)を代入して、応力と変位の関係は次のごとく表せる。

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (5)$$

物体力の x 方向、 y 方向、 z 方向の成分をそれぞれ p_x 、 p_y 、 p_z と表すならば、板の微小要素の応力のつりあい条件は、次のごとく与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + p_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + p_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + p_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (6)$$

ただし、 ρ は板の材料密度、 t は時間である。

微小要素の応力のつり合い条件式(6)中のせん断応力 τ_{yz} および τ_{xz} は板厚方向に分布しており、これらを縦弾性係数 G で除してHooke則を適用すれば、せん断ひずみ γ_{yz} および γ_{xz} が求められる。せん断ひずみはひずみの定義式(1)からも求められる。これらを波印 (\sim) の有無で区別している。仮想せん断応力仕事の等価性の条件とは、これら2種類のせん断ひずみの仮想仕事は板厚全体で等しくなると設定することである。具体的には板厚 h に関する積分式

$$\begin{aligned}\int_{-h/2}^{h/2} \delta \tau_{xz} \gamma_{xz} dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \tau_{xz} \tilde{\gamma}_{xz} dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \delta \tau_{yz} \gamma_{yz} dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \tau_{yz} \tilde{\gamma}_{yz} dz\end{aligned}\quad (7)$$

である。仮想成分という意味で記号 $\delta(\sim)$ を用いた。

4. 変位、ひずみおよび応力

(1) 第0段階のせん断補正

Reissner-Mindlinの板理論を本理論の出発点とするため、その概略のみ記述する。板断面の線形の反り変位のみ考慮し、高次のそれを無視するならば第0段階の変位関数は以下のごとくなる¹⁰⁾。

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= Z_0(z) \psi_{x0}(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= Z_0(z) \psi_{y0}(x, y, t)\end{aligned}$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (8)$$

ただし、板厚方向の座標 z を独立変数とする第0段階の単位反り関数 $Z_0(z)$ は線形となり、

$$Z_0(z) = z \quad (9)$$

である。以後、添え字の番号はせん断補正の段階数を表すものとする。回転変位を規定する関数 $\psi_{x0}(x, y, t)$ 、 $\psi_{y0}(x, y, t)$ およびたわみ変位を規定する関数 $w(x, y, t)$ は未知関数である。参考までに、この板面内の x 、 y 方向の変位関数 $u(x, y, z, t)$ 、 $v(x, y, z, t)$ を古典板理論の変位関数 $U(x, y, z, t)$ 、 $V(x, y, z, t)$ に変更するには、式(8.a)、(8.b)の断面回転の関数 $\psi_{x0}(x, y, t)$ 、 $\psi_{y0}(x, y, t)$ をそれぞれ $-\partial w / \partial x$ 、 $-\partial w / \partial y$ に置き換え、次式となる。

$$\begin{aligned}U(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (10)$$

これらの変位式(8)をひずみ式(1)に代入して

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx}(x, y, z, t) &= Z_0(z) \frac{\partial \psi_{x0}}{\partial x} \\ \epsilon_{yy}(x, y, z, t) &= Z_0(z) \frac{\partial \psi_{y0}}{\partial y} \\ \gamma_{xy}(x, y, z, t) &= Z_0(z) \frac{\partial \psi_{y0}}{\partial x} + Z_0(z) \frac{\partial \psi_{x0}}{\partial y} \\ \tilde{\gamma}_{xz}(x, y, z, t) &= \frac{\partial w}{\partial x} + \dot{Z}_0(z) \psi_{x0} \\ \tilde{\gamma}_{yz}(x, y, z, t) &= \frac{\partial w}{\partial y} + \dot{Z}_0(z) \psi_{y0}\end{aligned}\quad (11)$$

と表せる。ただし、 $(\dot{\sim})$ は板厚方向座標 z に関する微分を意味する。これらをHooke則式(4)に代入すると

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y, z, t) &= \bar{E} Z_0(z) \left(\frac{\partial \psi_{x0}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_{y0}}{\partial y} \right) \\ \sigma_{yy}(x, y, z, t) &= \bar{E} Z_0(z) \left(\frac{\partial \psi_{y0}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_{x0}}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy}(x, y, z, t) &= G Z_0(z) \left(\frac{\partial \psi_{y0}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{x0}}{\partial y} \right) \\ \tilde{\tau}_{xz}(x, y, z, t) &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \dot{Z}_0(z) \psi_{x0} \right) \\ \tilde{\tau}_{yz}(x, y, z, t) &= G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \dot{Z}_0(z) \psi_{y0} \right)\end{aligned}\quad (12)$$

を得る。Poisson比 ν を含めた板の縦弾性係数を

$$\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (13)$$

として用いた。

せん断応力 τ_{yz} および τ_{xz} は応力のつり合い条件か

ら求めることもできる。応力のつり合い条件式(6.a)および(6.b)を移項し、 z で積分すると、

$$\begin{aligned}\tau_{xz}(x, y, z, t) &= -\int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dz \\ &\quad + \int_{-h/2}^z \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz - \int_{-h/2}^z p_x dz \\ \tau_{yz}(x, y, z, t) &= -\int_{-h/2}^z \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dz - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dz \\ &\quad + \int_{-h/2}^z \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dz - \int_{-h/2}^z p_y dz\end{aligned}\quad (14)$$

となる。式(12.a)~(12.c)を代入し、板の上下端でこれらのせん断応力が零となる境界条件も考慮すると

$$\begin{aligned}\tau_{xz}(x, y, z, t) &= -\bar{E}S_0(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial t^2} + \frac{m_{x0}}{\bar{E}F_{00}} \right] \\ \tau_{yz}(x, y, z, t) &= -\bar{E}S_0(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial t^2} + \frac{m_{y0}}{\bar{E}F_{00}} \right]\end{aligned}\quad (15)$$

となる。ただし、単位せん断応力関数は

$$S_i(z) = \int_{-h/2}^z Z_i(z) dz \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (16)$$

と定義したから、この式中の添え字を $i = 0$ とおけばよい。板の単位幅の断面積 A および反り抵抗モーメント(慣性モーメント)を F_{ij} と表記した。すなわち、

$$\begin{aligned}A &= 1 \cdot h \\ F_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} Z_i(z) Z_j(z) dz \\ &\quad (i, j = 0, 1, \dots, N)\end{aligned}\quad (17)$$

である。後ほど示すように、反り関数 $Z_i(z)$ はせん断補正の段階ごとに直交化されるため、 F_{ij} は $i = j$ の成分のみ存在する。物体力 p_x あるいは p_y に起因する応力は断面ごとに平均化して扱う必要がある。そこで、これらの力による合力曲げモーメントを m_{xi} および m_{yi} と表記し、次のごとく定義した。

$$\begin{aligned}m_{xi}(x, y, t) &= \int_{-h/2}^{h/2} p_x(x, y, z, t) Z_i(z) dz \\ m_{yi}(x, y, t) &= \int_{-h/2}^{h/2} p_y(x, y, z, t) Z_i(z) dz \\ &\quad (i = 0, 1, \dots, N)\end{aligned}\quad (18)$$

応力のつり合い条件より求められたせん断応力式(15)に Hooke 則式(4.d), (4.e)を適用するならば、

$$\gamma_{xz}(x, y, z, t) = -\frac{\bar{E}}{G} S_0(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right.$$

$$\begin{aligned}&\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial t^2} + \frac{m_{x0}}{\bar{E}F_{00}} \right] \\ \gamma_{yz}(x, y, z, t) &= -\frac{\bar{E}}{G} S_0(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial t^2} + \frac{m_{y0}}{\bar{E}F_{00}} \right]\end{aligned}\quad (19)$$

と表せる。

2種類のせん断ひずみが求められた。これらが近似的に等しいためには、せん断ひずみ仕事の等価性が保証されねばならない。式(11.d), (11.e), (15), (19)を式(7)に代入し、部分積分を用いて整理すると

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{E}}{G} R_{00} \left[\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial t^2} + \frac{m_{x0}}{\bar{E}F_{00}} \right] \\ &\quad - F_{00} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_{x0} \right) = 0 \\ &\frac{\bar{E}}{G} R_{00} \left[\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial t^2} + \frac{m_{y0}}{\bar{E}F_{00}} \right] \\ &\quad - F_{00} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_{y0} \right) = 0\end{aligned}\quad (20)$$

を得る。ただし、 N 段階までのせん断補正を考慮したせん断抵抗マトリックス R_{ij} は単位幅の断面積 $A (= 1 \cdot h)$ に関する積分として次のごとく定義する。

$$R_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} S_i(z) S_j(z) dz \quad (i, j = 0, 1, \dots, N) \quad (21)$$

上式(20)の両辺に $\dot{Z}_0(z)/F_{00}$ を掛けて移項すると、次の補正で用いる関係式

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= -\psi_{x0} + \frac{\bar{E}}{G} \dot{Z}_0(z) \frac{R_{00}}{F_{00}} \left[\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial t^2} + \frac{m_{x0}}{\bar{E}F_{00}} \right] \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\psi_{y0} + \frac{\bar{E}}{G} \dot{Z}_0(z) \frac{R_{00}}{F_{00}} \left[\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial t^2} + \frac{m_{y0}}{\bar{E}F_{00}} \right]\end{aligned}\quad (22)$$

となる。以上は Reissner-Mindlin 形の 1 次せん断変形を許容する板の理論に対応し、 x および y 軸方向反り変位 $Z_0(z)$ は板厚方向座標 z の 1 次関数となっている。そこで、非線形反りを考慮していないこの状態を「第 0 段階のせん断補正」とよぶことにする。

(2) 第1段階のせん断補正

第1段階のせん断補正に入る。せん断ひずみの式(19)は要素の応力のつり合い条件(6)およびHooke則(4)より求められた。したがって、つり合い条件は満足するが、ひずみ変位関係式(1)は満足していない。そこでたわみ変位 $w(x, y, z, t)$ は固定したままで、ひずみ変位関係式(1)を満足させるように軸方向反り変位関数 $u(x, y, z, t)$ および $v(x, y, z, t)$ を修正する。

式(1.d), (1.e)に反り変位式(8.a), (8.b)およびせん断ひずみ式(19)を代入し、式(22)の $\partial w / \partial x$, $\partial w / \partial y$ を代入消去し、 z で積分すると、軸方向変位は

$$u(x, y, z, t) = Z_0(z)\psi_{x0} + Z_1(z)\psi_{x1}$$

$$v(x, y, z, t) = Z_0(z)\psi_{y0} + Z_1(z)\psi_{y1} \quad (23)$$

と修正される。ただし、新しい単位反り関数 $Z_1(z)$ および軸方向の関数 $\psi_{x1}(x, y, t)$, $\psi_{y1}(x, y, t)$ は次のごとく定義した。

$$Z_i(z) = \int_0^z S_{i-1}(z) dz + \frac{R_{i-1, i-1}}{F_{i-1, i-1}} Z_{i-1}(z)$$

$$+ \frac{R_{i-1, i-2}}{F_{i-2, i-2}} Z_{i-2}(z) \quad (24)$$

$$\psi_{xi}(x, y, t) = -\frac{\bar{E}}{G} \left[\frac{\partial^2 \psi_{xi-1}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{yi-1}}{\partial x \partial y} \right]$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{xi-1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{yi-1}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{xi-1}}{\partial t^2} + \frac{m_{xi-1}}{\bar{E} F_{i-1, i-1}}$$

$$\psi_{yi}(x, y, t) = -\frac{\bar{E}}{G} \left[\frac{\partial^2 \psi_{yi-1}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{xi-1}}{\partial x \partial y} \right]$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{yi-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{xi-1}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{yi-1}}{\partial t^2} + \frac{m_{yi-1}}{\bar{E} F_{i-1, i-1}}$$

($i = 1, 2, \dots, N$) (25)

式(25)左辺の断面回転の関数 $\psi_{xi}(x, y, t)$ および $\psi_{yi}(x, y, t)$ は新しい未知関数とみなす。式(24)中のせん断抵抗係数 R_{ij} の添え字 i, j は0または正の整数であるから、負になるときは零として扱う。ここで新しく定義した単位反り関数 $Z_i(z)$ はそれ以前の単位反り関数と直交していること、すなわち

$$F_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Z_i(z) Z_j(z) dz = 0 \quad (i \neq j) \quad (26)$$

となることが簡単に証明できる。せん断抵抗係数 R_{ij} は添え字 i と j の差が2以上のとき直交することが証明できる。すなわち次式となる。

$$R_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} S_i(z) S_j(z) dz = 0 \quad (|i - j| \geq 2) \quad (27)$$

第1段階のせん断補正後の反り変位 $u(x, y, z, t)$ および $v(x, y, z, t)$ を軸ひずみの定義に代入すれば、第

1段階の垂直ひずみ $\varepsilon_{xx}(x, y, z, t)$, $\varepsilon_{yy}(x, y, z, t)$ が

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^1 Z_i(z) \frac{\partial \psi_{xi}}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^1 Z_i(z) \frac{\partial \psi_{yi}}{\partial y} \quad (28)$$

と求まる。それをHooke則(4)に代入し、垂直応力 $\sigma_{xx}(x, y, z, t)$ および $\sigma_{yy}(x, y, z, t)$ を得る。

$$\sigma_{xx}(x, y, z, t) = \bar{E} \sum_{i=0}^1 Z_i(z) \left(\frac{\partial \psi_{xi}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_{yi}}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z, t) = \bar{E} \sum_{i=0}^1 Z_i(z) \left(\frac{\partial \psi_{yi}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_{xi}}{\partial x} \right) \quad (29)$$

この応力をつり合い条件式(6)に代入し、積分すればせん断応力 $\tau_{xz}(x, y, z, t)$, $\tau_{yz}(x, y, z, t)$ が求められ、それにHooke則(4)を適用すれば、せん断ひずみ $\gamma_{xz}(x, y, z, t)$, $\gamma_{yz}(x, y, z, t)$ となる。これらを列記すると、次のごとくなる。

$$\tau_{xz}(x, y, z, t) = -\bar{E} \sum_{i=0}^1 S_i(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x \partial y} \right]$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial t^2} + \frac{m_{xi}}{\bar{E} F_{ii}}$$

$$\tau_{yz}(x, y, z, t) = -\bar{E} \sum_{i=0}^1 S_i(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x \partial y} \right]$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial t^2} + \frac{m_{yi}}{\bar{E} F_{ii}}$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z, t) = -\frac{\bar{E}}{G} \sum_{i=0}^1 S_i(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x \partial y} \right]$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial t^2} + \frac{m_{xi}}{\bar{E} F_{ii}}$$

$$\gamma_{yz}(x, y, z, t) = -\frac{\bar{E}}{G} \sum_{i=0}^1 S_i(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x \partial y} \right]$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{\bar{E}} \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial t^2} + \frac{m_{yi}}{\bar{E} F_{ii}} \quad (30)$$

一方、ひずみの定義より求まるせん断ひずみは、式(1.d), (1.e)より

$$\bar{\gamma}_{xz}(x, y, z, t) = \frac{\partial w}{\partial x} + \sum_{i=0}^1 \dot{Z}_i(z) \psi_{xi}$$

$$\bar{\gamma}_{yz}(x, y, z, t) = \frac{\partial w}{\partial y} + \sum_{i=0}^1 \dot{Z}_i(z) \psi_{yi} \quad (31)$$

となっている。式(30), (31)を式(7)に代入すると、第1段階のせん断ひずみ仕事の等価性の式を得る。

$$\sum_{j=0}^1 \frac{\bar{E}}{G} R_{ij} \left[\frac{\partial^2 \psi_{xj}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{yj}}{\partial x \partial y} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{xj}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{yj}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{xj}}{\partial t^2} + \frac{m_{xj}}{EF_{jj}} \Big] \\
& - \sum_{j=0}^1 F_{ij} \psi_{xj} - F_{i0} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (i=0,1) \\
& \sum_{j=0}^1 \frac{\bar{E}}{G} R_{ij} \left[\frac{\partial^2 \psi_{yj}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{xj}}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{yj}}{\partial t^2} + \frac{m_{yj}}{EF_{jj}} \right] \\
& - \sum_{j=0}^1 F_{ij} \psi_{yj} - F_{i0} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (i=0,1) \quad (32)
\end{aligned}$$

すでに述べたごとく、単位反り関数の直交性より、反り抵抗 F_{i0} は $i=0$ の場合のみ値をもつ。 $i=0$ の式に $\dot{Z}_0(z)/F_{00}$ を掛け、 $i=1$ の式に $\dot{Z}_1(z)/F_{11}$ を掛け、辺々和をとり、 $F_{11}^{-1}R_{10} = -1$ および式(25)を考慮すると、次の段階の補正に用いる関係式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= -\psi_{x0} + \frac{\bar{E}}{G} \dot{Z}_0(z) \frac{R_{00}}{F_{00}} \left[\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial t^2} + \frac{m_{x0}}{EF_{00}} \right] \\
& + \frac{\bar{E}}{G} \left(\dot{Z}_0(z) \frac{R_{01}}{F_{00}} + \dot{Z}_1(z) \frac{R_{11}}{F_{11}} \right) \left[\frac{\partial^2 \psi_{x1}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{y1}}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{x1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{y1}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{x1}}{\partial t^2} + \frac{m_{x1}}{EF_{11}} \right] \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= -\psi_{y0} + \frac{\bar{E}}{G} \dot{Z}_0(z) \frac{R_{00}}{F_{00}} \left[\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial t^2} + \frac{m_{y0}}{EF_{00}} \right] \\
& + \frac{\bar{E}}{G} \left(\dot{Z}_0(z) \frac{R_{01}}{F_{00}} + \dot{Z}_1(z) \frac{R_{11}}{F_{11}} \right) \left[\frac{\partial^2 \psi_{y1}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{x1}}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{y1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{x1}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{y1}}{\partial t^2} + \frac{m_{y1}}{EF_{11}} \right] \quad (33)
\end{aligned}$$

を得る。

(3) 第 N 段階のせん断補正

以上の操作を N 段階まで繰り返すと最終補正後の変位成分が次のごとく与えられる。

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= \sum_{i=0}^N Z_i(z) \psi_{xi}(x, y, t) \\
v(x, y, z, t) &= \sum_{i=0}^N Z_i(z) \psi_{yi}(x, y, t) \quad (34)
\end{aligned}$$

単位反り関数 $Z_i(z)$ は $Z_0(z) = z$ より出発して、 z で 2 回積分されて次の単位反り関数となり、すべて互いに直交することから、結果的に Legendre 関数になる。その具体的な形は

$$F_0(z) = 1$$

$$\begin{aligned}
P_n(z) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\leq n/2} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} z^{n-2j} \quad (35)
\end{aligned}$$

である。式中の $\sum^{\leq n/2}$ は n が偶数のときは $n/2$ まで、 n 奇数のときは $(n-1)/2$ まで和をとることを意味する。ここでは奇数の n のもののみ用いている。単位反り関数および単位せん断応力関数を希望する段階数まで求め、すべての反り抵抗 F_{ii} を最初のもの(断面 2 次モーメント) F_{00} に等しくなるように、単位反り関数を正規化しておく。参考までに、第 10 段階までの単位反り関数と単位せん断応力関数の分布形状を図-2 に与えた。また、Legendre 多項式で表現される正規化された単位反り関数式を表-1 に与えた。

ひずみ変位関係よりひずみ成分は次のごとくなる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}(x, y, z, t) &= \sum_{i=0}^N Z_i(z) \frac{\partial}{\partial x} \psi_{xi}(x, y, t) \\
\varepsilon_{yy}(x, y, z, t) &= \sum_{i=0}^N Z_i(z) \frac{\partial}{\partial y} \psi_{yi}(x, y, t) \\
\gamma_{xy}(x, y, z, t) &= \sum_{i=0}^N Z_i(z) \left(\frac{\partial \psi_{yi}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{xi}}{\partial y} \right) \\
\tilde{\gamma}_{xz}(x, y, z, t) &= \frac{\partial w}{\partial x} + \sum_{i=0}^N \dot{Z}_i(z) \psi_{xi}(x, y, t) \\
\tilde{\gamma}_{yz}(x, y, z, t) &= \frac{\partial w}{\partial y} + \sum_{i=0}^N \dot{Z}_i(z) \psi_{yi}(x, y, t) \\
\gamma_{xz}(x, y, z, t) &= -\frac{\bar{E}}{G} \sum_{i=0}^N S_i(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial t^2} + \frac{m_{xi}}{EF_{ii}} \right] \\
\gamma_{yz}(x, y, z, t) &= -\frac{\bar{E}}{G} \sum_{i=0}^N S_i(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial t^2} + \frac{m_{yi}}{EF_{ii}} \right] \quad (36)
\end{aligned}$$

構成則より応力は次のごとく与えられる。

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(x, y, z, t) &= \bar{E} \sum_{i=0}^N Z_i(z) \left(\frac{\partial \psi_{xi}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_{yi}}{\partial y} \right) \\
\sigma_{yy}(x, y, z, t) &= \bar{E} \sum_{i=0}^N Z_i(z) \left(\frac{\partial \psi_{yi}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_{xi}}{\partial x} \right) \\
\tau_{xy}(x, y, z, t) &= G \sum_{i=0}^N Z_i(z) \left(\frac{\partial \psi_{yi}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{xi}}{\partial y} \right) \\
\tau_{xz}(x, y, z, t) &= -\bar{E} \sum_{i=0}^N S_i(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x \partial y} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial t^2} + \frac{m_{xi}}{EF_{ii}} \Big] \\
 \tau_{yz}(x, y, z, t) = & -E \sum_{i=0}^N S_i(z) \left[\frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x \partial y} \right. \\
 & \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{xi}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{yi}}{\partial t^2} + \frac{m_{yi}}{EF_{ii}} \right] \quad (37)
 \end{aligned}$$

上記の式を簡潔に表現するため、せん断補正の段階ごとの単位反り関数、単位せん断応力関数、軸方向変位関数、反りモーメントおよび反りせん断力をそれぞれまとめてベクトル化し、「総合単位反り関数ベクトル」、「総合単位せん断応力関数ベクトル」、2種類の「総合回転変位関数ベクトル」、「総合反りモーメントベクトル」、「総合ねじりモーメントベクトル」、「総合反りせん断力ベクトル」とよぶ。後出の2種類の「分布曲げモーメント荷重」も含めて、この順に

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}^T(z) & \equiv [Z_0(z) \quad Z_1(z) \quad \cdots \quad Z_N(z)] \\
 \mathbf{S}^T(z) & \equiv [S_0(z) \quad S_1(z) \quad \cdots \quad S_N(z)] \\
 \boldsymbol{\psi}_x^T(x, y, t) & \equiv [\psi_{x0} \quad \psi_{x1} \quad \cdots \quad \psi_{xN}] \\
 \boldsymbol{\psi}_y^T(x, y, t) & \equiv [\psi_{y0} \quad \psi_{y1} \quad \cdots \quad \psi_{yN}]
 \end{aligned}$$

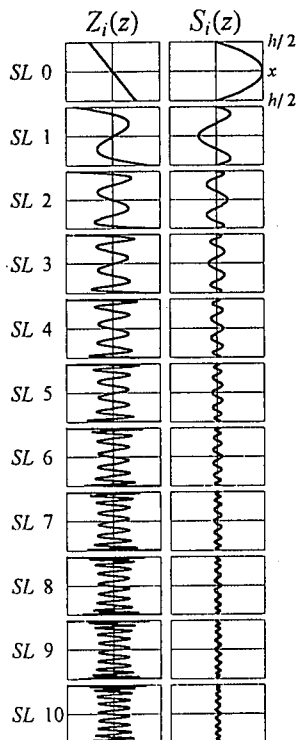


表-1 単位反り関数

図-2 単位反り関数と単位せん断応力関数

段階数	Legendre 関数 / $\sqrt{3}$	単位反り関数
0	$P_1(z)$	z
1	$\sqrt{\frac{7}{3}} P_3(z)$	$-\frac{(\sqrt{21}z)}{2} + \frac{5\sqrt{\frac{7}{3}}z^3}{2}$
2	$\sqrt{\frac{11}{3}} P_5(z)$	$\frac{5\sqrt{33}z}{8} - \frac{35\sqrt{\frac{11}{3}}z^3}{4} + \frac{21\sqrt{33}z^5}{8}$
3	$\sqrt{\frac{15}{3}} P_7(z)$	$-\frac{35\sqrt{5}z}{16} + \frac{315\sqrt{5}z^3}{16} - \frac{693\sqrt{5}z^5}{16} + \frac{429\sqrt{5}z^7}{16}$
4	$\sqrt{\frac{19}{3}} P_9(z)$	$\frac{105\sqrt{57}z}{128} - \frac{385\sqrt{57}z^3}{32} + \frac{3003\sqrt{57}z^5}{64} - \frac{2145\sqrt{57}z^7}{32} + \frac{12155\sqrt{\frac{19}{3}}z^9}{128}$
5	$\sqrt{\frac{23}{3}} P_{11}(z)$	$-\frac{231\sqrt{69}z}{256} + \frac{5005\sqrt{69}z^3}{256} - \frac{15015\sqrt{69}z^5}{128} + \frac{36465\sqrt{69}z^7}{128} - \frac{230945\sqrt{\frac{23}{3}}z^9}{256} + \frac{29393\sqrt{69}z^{11}}{256}$
6	$\sqrt{\frac{27}{3}} P_{13}(z)$	$\frac{9009z}{1024} - \frac{135135z^3}{512} + \frac{2297295z^5}{1024} - \frac{2078505z^7}{256} + \frac{14549535z^9}{1024} - \frac{6084351z^{11}}{512} + \frac{3900225z^{13}}{1024}$
7	$\sqrt{\frac{31}{3}} P_{15}(z)$	$-\frac{2145\sqrt{93}z}{2048} + \frac{85085\sqrt{93}z^3}{2048} - \frac{969969\sqrt{93}z^5}{2048} + \frac{4849845\sqrt{93}z^7}{2048} - \frac{37182145\sqrt{\frac{31}{3}}z^9}{2048} + \frac{16900975\sqrt{93}z^{11}}{2048} - \frac{11700675\sqrt{93}z^{13}}{2048} + \frac{3231615\sqrt{93}z^{15}}{2048}$
8	$\sqrt{\frac{35}{3}} P_{17}(z)$	$\frac{36465\sqrt{105}z}{32768} - \frac{230945\sqrt{105}z^3}{4096} + \frac{6789783\sqrt{105}z^5}{8192} - \frac{22309287\sqrt{105}z^7}{4096} + \frac{929553625\sqrt{\frac{35}{3}}z^9}{16384} - \frac{152108775\sqrt{105}z^{11}}{4096} + \frac{339319575\sqrt{105}z^{13}}{8192} - \frac{100180065\sqrt{105}z^{15}}{4096} + \frac{194467185\sqrt{105}z^{17}}{32768}$
9	$\sqrt{\frac{39}{3}} P_{19}(z)$	$-\frac{230945\sqrt{13}z}{65536} + \frac{14549535\sqrt{13}z^3}{65536} - \frac{66927861\sqrt{13}z^5}{16384} + \frac{557732175\sqrt{13}z^7}{16384} - \frac{5019589575\sqrt{13}z^9}{65536} + \frac{13233463425\sqrt{13}z^{11}}{32768} - \frac{10518906825\sqrt{13}z^{13}}{16384} + \frac{9917826435\sqrt{13}z^{15}}{16384} - \frac{20419054425\sqrt{13}z^{17}}{65536} + \frac{4418157975\sqrt{13}z^{19}}{65536}$
10	$\sqrt{\frac{43}{3}} P_{21}(z)$	$\frac{323323\sqrt{129}z}{262144} - \frac{37182145\sqrt{\frac{43}{3}}z^3}{131072} + \frac{557732175\sqrt{129}z^5}{262144} - \frac{717084225\sqrt{129}z^7}{32768} + \frac{16174233075\sqrt{129}z^9}{131072} - \frac{27349157745\sqrt{129}z^{11}}{65536} + \frac{115707975075\sqrt{129}z^{13}}{131072} - \frac{38569325025\sqrt{129}z^{15}}{32768} + \frac{251835004575\sqrt{129}z^{17}}{262144} - \frac{57436053075\sqrt{129}z^{19}}{131072} + \frac{22427411435\sqrt{129}z^{21}}{262144}$

$$\begin{aligned}
M_{xx}^T(x, y, t) &\equiv [M_{xx0} \ M_{xx1} \ \cdots \ M_{xxN}] \\
M_{yy}^T(x, y, t) &\equiv [M_{yy0} \ M_{yy1} \ \cdots \ M_{yyN}] \\
M_{xy}^T(x, y, t) &\equiv [M_{xy0} \ M_{xy1} \ \cdots \ M_{xyN}] \\
Q_{xz}^T(x, y, t) &\equiv [Q_{xz0} \ Q_{xz1} \ \cdots \ Q_{xzN}] \\
Q_{yz}^T(x, y, t) &\equiv [Q_{yz0} \ Q_{yz1} \ \cdots \ Q_{yzN}] \\
m_x^T(x, y, t) &\equiv [m_{x0} \ m_{x1} \ \cdots \ m_{xN}] \\
m_y^T(x, y, t) &\equiv [m_{y0} \ m_{y1} \ \cdots \ m_{yN}] \quad (38)
\end{aligned}$$

と置く。これから、式(34)、(36)、(37)は次式となる。

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= Z^T(z)\psi_x(x, y, t) \\
v(x, y, z, t) &= Z^T(z)\psi_y(x, y, t) \\
\varepsilon_{xx}(x, y, z, t) &= Z^T(z)\frac{\partial\psi_x}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy}(x, y, z, t) &= Z^T(z)\frac{\partial\psi_y}{\partial y} \\
\gamma_{xy}(x, y, z, t) &= Z^T(z)\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x} + \frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right) \\
\tilde{\gamma}_{xz}(x, y, z, t) &= \frac{\partial w}{\partial x} + \dot{Z}^T(z)\psi_x(x, y, t) \\
\tilde{\gamma}_{yz}(x, y, z, t) &= \frac{\partial w}{\partial y} + \dot{Z}^T(z)\psi_y(x, y, t) \\
\gamma_{zx}(x, y, z, t) &= -\frac{\bar{E}}{G}S^T(z)\left[\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right) - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2} + D^{-1}m_x\right] \\
\gamma_{yz}(x, y, z, t) &= -\frac{\bar{E}}{G}S^T(z)\left[\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\right) - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2} + D^{-1}m_y\right] \\
\sigma_{xx}(x, y, z, t) &= \bar{E}Z^T(z)\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right) \\
\sigma_{yy}(x, y, z, t) &= \bar{E}Z^T(z)\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right) \\
\tau_{xy}(x, y, z, t) &= GZ^T(z)\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x} + \frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right) \\
\tau_{xz}(x, y, z, t) &= -\bar{E}S^T(z)\left[\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right) - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2} + D^{-1}m_x\right] \\
\tau_{yz}(x, y, z, t) &= -\bar{E}S^T(z)\left[\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\right) - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2} + D^{-1}m_y\right] \quad (39)
\end{aligned}$$

ただし、 $()^T$ はベクトルあるいはマトリックスの転置を意味する。また、 D は対角要素順にせん断補正順の板の曲げ剛性 $\bar{E}F_{ii}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) の値が入る対角マトリックスである。

5. 支配方程式の誘導

(1) つり合い方程式と断面力

上記の最終段階の変位、ひずみ、応力の成分を用いて支配方程式を誘導し、その後に断面力を定義する。Hamiltonの原理は変分記号 δ を用いて

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U - V) dt = 0 \quad (40)$$

と表せる。ここで t_0 および t_1 は時間 t の最初と最後を意味する。この時間間隔における系の運動エネルギー T 、ひずみエネルギー U および外力のポテンシャル V は以下のごとく表せる。

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dV \quad (41)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{ \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz} \} dV \quad (42)$$

$$V = - \int_V (p_x u + p_y v + p_z w) dV - \left(\sum P_x u + \sum P_y v + \sum P_z w \right) \quad (43)$$

変位の式(39.a)、(39.b)、ひずみの式(39.c)~(39.g)をHamiltonの原理に代入し、整理すると、断面力の関係式

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} + m_x - \rho F \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} + m_y - \rho F \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (46)$$

を得る。ただし、せん断ひずみエネルギー中の ρ を含む慣性力の項とモーメント荷重 m_x 、 m_y の項は運動エネルギー T および外力のポテンシャル V と二重に考慮しないよう除外した。慣性力の項を除けば、静的板曲げ理論のつり合い条件⁷⁾と同一である。違いは板厚中央面方向(反り)変位に起因する断面回転変位およびそれに対応する断面力がベクトル化されていることだけである。

上式中の板単位幅当たり断面力は次式で定義した。

$$M_{xx}(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(x, y, z, t) Z(z) dz \quad (47)$$

$$M_{yy}(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}(x, y, z, t) Z(z) dz \quad (48)$$

$$M_{xy}(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(x, y, z, t) Z(z) dz \quad (49)$$

$$Q_{xz}(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}(x, y, z, t) \dot{Z}(z) dz \quad (50)$$

$$Q_{yz}(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}(x, y, z, t) \dot{Z}(z) dz \quad (51)$$

$$Q_x(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}(x, y, z, t) dz \quad (\equiv Q_{xz0}) \quad (52)$$

$$Q_y(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}(x, y, z, t) dz \quad (\equiv Q_{yz0}) \quad (53)$$

すでに用いている外力としての分布曲げモーメント荷重 $m_x(x, y, t)$, $m_y(x, y, t)$ は式(18)にみるごとく

$$m_x(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} p_x(x, y, z, t) Z(z) dz$$

$$m_y(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} p_y(x, y, z, t) Z(z) dz \quad (54)$$

と定義し、板面に直角の分布荷重 $q_z(x, y, t)$ は

$$q_z(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} p_z(x, y, z, t) dz \quad (55)$$

と定義した。ここで、各段階のせん断補正に拡張したモーメント $M_{xx}(x, y, t)$, $M_{yy}(x, y, t)$ は2方向の垂直応力と $N+1$ 種類の単位反り関数のそれぞれと組み、曲げの反りモーメントを構成する。モーメント $M_{xy}(x, y, t)$ は板の面内せん断応力 τ_{xy} と $N+1$ 種類の単位反り関数がそれぞれ組み、 $N+1$ 種類のねじりモーメントを構成する。同様に、拡張された反りのせん断力 $Q_{xz}(x, y, t)$, $Q_{yz}(x, y, t)$ は2方向のせん断応力と $N+1$ 種類の単位反り関数の導関数と組み、曲げのせん断力を構成する。後ほど示すように、このせん断力は反りモーメントと同じ数存在し、それらの導関数になっている。一方、せん断力 $Q_x(x, y, t)$, $Q_y(x, y, t)$ は板の面に直角に作用する分布荷重とつり合い系をなす第0段階のみの断面力となる。式の定義からわかるように、このせん断力は反りのせん断力 Q_{xz} あるいは Q_{yz} の第0段階の値に等しい。

反り抵抗(断面2次モーメント)の対角マトリックス F およびせん断抵抗の対称マトリックス R は

$$F = \int_{-h/2}^{h/2} Z(z) Z^T(z) dz$$

$$= \begin{bmatrix} F_{00} & & 0 \\ & F_{11} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & F_{NN} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$R = \int_{-h/2}^{h/2} S(z) S^T(z) dz$$

$$= \begin{bmatrix} R_{00} & R_{01} & 0 & & & \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & & & \\ 0 & R_{21} & R_{22} & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & R_{N-1, N-2} & R_{N-1, N-1} & R_{N-1, N} \\ & & & & 0 & R_{N, N-1} & R_{N, N} \end{bmatrix} \quad (57)$$

と定義した。従来の理論の板の断面2次モーメントは反り抵抗マトリックス F の第1対角要素、すなわち

$$F_{00} = \frac{1}{12} \cdot h^3 \quad (58)$$

となっている。既述のごとく、第1段階以降の断面2次モーメント F_{ii} ($i=1, 2, \dots, N$) はすべて F_{00} の値に等しくなるように正規化してある。また、式(27)に示したごとく、要素 R_{ij} は添え字 i と j の差が2以上になると値零となるから、帯マトリックスとなっている。

変分計算より境界条件式は次のごとく与えられる。

$$\begin{cases} \delta\psi_x^T \left([M_{xx}]_{x=0}^{z=0} + [M_{xy}]_{y=0}^{z=0} + \sum P_x Z(z) \right) = 0 \\ \delta\psi_y^T \left([M_{yy}]_{y=0}^{z=0} + [M_{xy}]_{x=0}^{z=0} + \sum P_y Z(z) \right) = 0 \\ \delta w \left([Q_x]_{x=0}^{z=0} + [Q_y]_{y=0}^{z=0} + \sum P_z \right) = 0 \end{cases} \quad (59)$$

断面力の定義式(47)~(53)に応力の式(39.j)~(39.n)を代入すると次のごとく表現できる。

$$M_{xx}(x, y, t) = D \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \right) \quad (60)$$

$$M_{yy}(x, y, t) = D \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \right) \quad (61)$$

$$M_{xy}(x, y, t) = \frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \right) \quad (62)$$

$$Q_{xz}(x, y, t) = D \left[\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + D^{-1} m_x \right] \quad (63)$$

$$Q_{yz}(x, y, t) = D \left[\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + D^{-1} m_y \right] \quad (64)$$

鉛直荷重とつり合うせん断力 Q_x , Q_y は第0段階のみであるから次式となる。

$$Q_x(x, y, t) = D_{00} \left[\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right]$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial t^2} + \frac{m_{x0}}{D_{00}} \quad (65)$$

$$Q_y(x, y, t) = D_{00} \left[\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{x0}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_{y0}}{\partial t^2} + \frac{m_{y0}}{D_{00}} \right] \quad (66)$$

上式で用いた板の曲げ剛性 D およびねじり剛性のマトリックス $(1-\nu)D$ は次のごとく定義した。

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} F \\ (1-\nu)D = 2GF \quad (67)$$

従来の曲げ剛性およびねじり剛性は第0段階の値

$$D_{00} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \\ (1-\nu)D_{00} = \frac{1}{6} G \cdot 1 \cdot h^3 \quad (68)$$

に相当する。反り関数を正規化したので、曲げ剛性 D は従来の曲げ剛性と単位マトリックスの積となる。

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

せん断応力式(39.m)，(39.n)および2種類の二次せん断ひずみ式(39.f)～(39.i)を仮想せん断応力仕事の等価性の式(7)に代入すると、式(20)にアナロジーな式(70)となる。

$$\frac{\bar{E}}{G} \mathbf{R} \left[\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + D^{-1} m_x \right] - \mathbf{F} \left(e_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) = 0 \\ \frac{\bar{E}}{G} \mathbf{R} \left[\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + D^{-1} m_y \right] - \mathbf{F} \left(e_1 \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) = 0 \quad (70)$$

新しく導入した自然基底 e_1 は第0段階のみ1で第1段階から第 N 段階まで零となるベクトルである。

$$e_1^T \equiv [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (71)$$

式(70)の前から GFR^{-1} を掛け、式(63)，(64)に代入すると、高次せん断変形に拡張されたせん断力式

$$Q_{xz} = GAk \left(e_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right)$$

$$Q_{yz} = GAk \left(e_1 \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) \quad (72)$$

となる。高次のせん断変形の影響を考慮するせん断修正係数マトリックス k は

$$k = \frac{1}{A} \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F} \quad (73)$$

と定義した。ただし、ダミーの A は、式(17.a)に示したごとく、板の単位幅当たりの断面積である。第0段階のせん断力は、上記の第1要素を抜き取る目的で、自然基底 e_1^T を式(72)の前から掛けて求められる。ゆえに、せん断力の式(65)，(66)は

$$Q_x = GAe_1^T k \left(e_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) \\ Q_y = GAe_1^T k \left(e_1 \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) \quad (74)$$

と書き直しても等価である。

(2) 変位量の支配方程式

求められた支配方程式(44)～(46)、断面力の式(60)～(66)を用いて変位量の支配方程式を作成する。ここで断面回転量の導関数の次元をもつ2つの変数 $\Phi(x, y, t)$ および $\Psi(x, y, t)$ を次のごとく定義する。

$$\Phi(x, y, t) = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \Psi(x, y, t) = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \quad (75)$$

これを用いて、支配方程式(44)～(46)を書き直すと

$$\left(GAe_1^T k e_1 \nabla^2 - \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w + GAe_1^T k \Phi = -q_z(x, y, t) \quad (76)$$

$$GAk e_1 \nabla^2 w - \left(D \nabla^2 - GAk - \rho F \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (77)$$

$$\left(\frac{1-\nu}{2} D \nabla^2 - GAk - \rho F \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = \frac{\partial m_x}{\partial y} - \frac{\partial m_y}{\partial x} \quad (78)$$

である。変位量 $\Phi(x, y, t)$ のみの支配方程式は式(76)，(77)からたわみ $w(x, y, t)$ を消去し、整理して

$$\left\{ \left(D \nabla^2 - GAk - \rho F \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\nabla^2 - \frac{\rho}{Gk} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + GA \frac{k}{k} e_1 e_1^T k \nabla^2 \right\} \Phi = -\frac{k}{k} e_1 \nabla^2 q_z - \left(\nabla^2 - \frac{\rho}{Gk} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \quad (79)$$

と表現できる。ただし、上式中のスカラー量 k は

$$k = e_1^T k e_1 \quad (80)$$

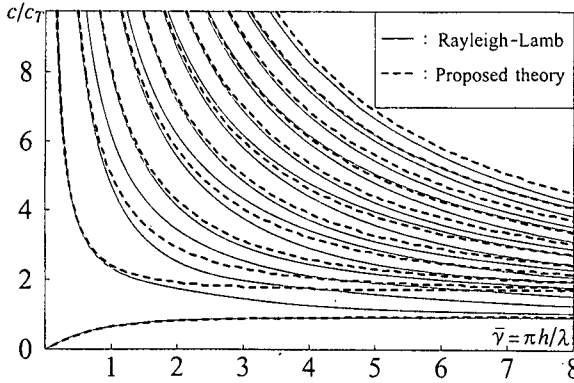


図-3 無限長板の修正前の位相速度曲線

と定義した。単位基底 e_1 を前後から掛けることにより、マトリックス k の左上の要素を取り出している。

6. 位相速度曲線

(1) 板の高次理論の位相速度曲線

たわみ $w(x, y, t)$ と変位量 $\Phi(x, y, t)$ および $\Psi(x, y, t)$ の連立方程式(76)~(78)より、位相速度の関係式を求める。式(76)を $G A k$ で除し、式(77)、(78)の前から D^{-1} を掛けて、式中の諸量を

$$c_p^2 = \frac{\bar{E}}{\rho}, \quad c_Q^2 = \frac{Gk}{\rho} \quad (81)$$

$$r^2 = \frac{F_{00}}{A} = \frac{h^2}{12}, \quad r^2 = \frac{F}{A} = r^2 I \quad (82)$$

と書き直す。板の縦波速度を c_p 、横波速度を c_Q 、板の単位幅の断面2次半径を r 、そして板の単位幅の断面2次半径マトリックスを r と表現した。また、 I は式(69)中に示す大きさ $(N+1) \times (N+1)$ の単位マトリックスである。これから、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_Q^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w + e_1^T \frac{k}{k} \Phi = -\frac{q_z}{G A k} \\ & r^{-2} \frac{k}{k} \frac{c_Q^2}{c_p^2} e_1 \nabla^2 w - \left(\nabla^2 I - r^{-2} \frac{k}{k} \frac{c_Q^2}{c_p^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I \right) \Phi \\ & \quad = D^{-1} \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \\ & \left(\frac{1-\nu}{2} \nabla^2 I - r^{-2} \frac{k}{k} \frac{c_Q^2}{c_p^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I \right) \Psi \\ & \quad = D^{-1} \left(\frac{\partial m_x}{\partial y} - \frac{\partial m_y}{\partial x} \right) \quad (83) \end{aligned}$$

x 軸方向に無限長の板の振動特性を調べる目的で

変位波形を

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \\ \Phi(x, y, t) &= b_\phi \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \\ \Psi(x, y, t) &= b_\psi \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \quad (84) \end{aligned}$$

と設定する。ただし、波の位相速度を c 、波長を λ 、そして各変位の振幅を順に a 、 b_ϕ 、 b_ψ とした。これらを式(83)に代入し、右辺の荷重項をすべて零とおくならば、連立同次方程式が得られる。このとき上記の支配方程式(83)は次のごとく書き直せる。

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{c^2}{c_Q^2} \right) a + \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 e_1^T \frac{k}{k} b_\phi = 0 \\ & r^{-2} \frac{k}{k} \frac{c_Q^2}{c_p^2} e_1 a + \left[\left(1 - \frac{c^2}{c_p^2} \right) I + \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 r^{-2} \frac{k}{k} \frac{c_Q^2}{c_p^2} \right] b_\phi = 0 \\ & \left[\left(\frac{1-\nu}{2} - \frac{c^2}{c_p^2} \right) I + \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 r^{-2} \frac{k}{k} \frac{c_Q^2}{c_p^2} \right] b_\psi = 0 \quad (85) \end{aligned}$$

これが変位 a 、 b_ϕ および b_ψ に関して非自明解をもつ条件は連立同次方程式の係数マトリックスの行列式が零になることである。板の曲げ振動に関係する上2本の式は第3の変位量 $\Psi(x, y, t)$ と連成しないから、上2本のみの行列式を抜き取り、式(82)も考慮すると

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{c^2}{c_Q^2} & \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 e_1^T \frac{k}{k} \\ 12 \frac{k}{h^2} \frac{c_Q^2}{k} \frac{c_Q^2}{c_p^2} e_1 & \left(1 - \frac{c^2}{c_p^2} \right) I + 3 \left(\frac{\lambda}{\pi h} \right)^2 \frac{k}{k} \frac{c_Q^2}{c_p^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (86)$$

となる。左辺左上の要素 $(1 - c^2/c_Q^2)$ は下から立ち上がる曲げたわみ (flexural) 波動に対応し、それと積をなす右下のマトリックス要素 $(1 - c^2/c_p^2) I$ は $N+1$ 本の曲げの反り変位 (thickness-shear) 波動に対応している。線形の反り変位のみを考慮する Mindlin 板はせん断補正を0段階まで考慮したことになる。このとき、上式は従来の位相速度方程式¹⁰⁾に一致する。無次元化周波数 $\bar{\gamma}$ と無次元化位相速度 \bar{c} を

$$\bar{\gamma} = \frac{\pi h}{\lambda}, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_T} \quad (87)$$

と定義し、これらの位相速度曲線を描くと図-3の破線となる。

(2) Rayleigh-Lamb の位相速度曲線

無限長の板の位相速度の厳密解を与えるものとして Rayleigh-Lamb の周波数方程式

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{c^2}{2c_T^2} \right)^2 \tanh \frac{\pi h}{\lambda} \left(1 - \frac{c^2}{c_L^2} \right)^{1/2} \\ & - \left(1 - \frac{c^2}{c_L^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2} \right)^{1/2} \tanh \frac{\pi h}{\lambda} \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2} \right)^{1/2} = 0 \quad (88) \end{aligned}$$

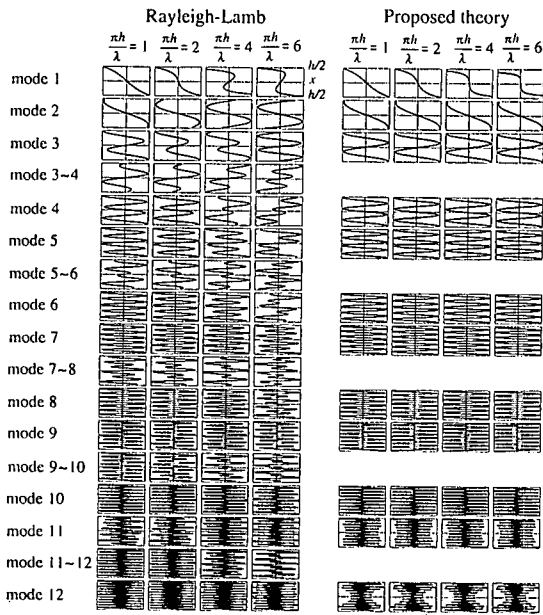


図-4 周波数の変化に伴う反り変位形状の変化

がある。ただし、 c_L および c_T はそれぞれ連続体の縦波速度および横波速度であり、

$$c_L^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho} = \frac{(1-\nu) E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}$$

$$c_T^2 = \frac{G}{\rho} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{E}{\rho} \quad (89)$$

と定義されている。この波動による x 、および y 軸方向変位は \sinh 関数で、板厚の z 軸方向(たわみ)変位は \cosh 関数で表現される⁵⁾。

この式(88)から得られる位相速度曲線を図-3の中に実線で与えた。この図の厳密解の位相速度曲線と提案する高次板理論の位相速度曲線を比較すると、低周波数のモードは比較的良く一致している。具体的に各モードを比較するため、特定の周波数、たとえば $\pi h/\lambda = 1, 2, 4, 6$ における反りを調べ、それぞれのモード番号順に図-4に示す。図-3の低周波数領域の座標値 $\pi h/\lambda = 1$ の線上の実線と破線は重なり、図-4より対応する反り変位形状も一致する。これらはモード番号の増加とともに規則的に次数(山の数)が増加し、その形状も整っている。しかし、図-3では、この後2つおきに実線(Rayleigh-Lamb)のモード(mode 3~4, mode 5~6, mode 7~8, ...)が単独で現れる。その反り波形を調べると、図-4に示すごとく、前後のモードの中間的なやが崩れた形状となっている。図中にモード*i*とモード*j*の中間という

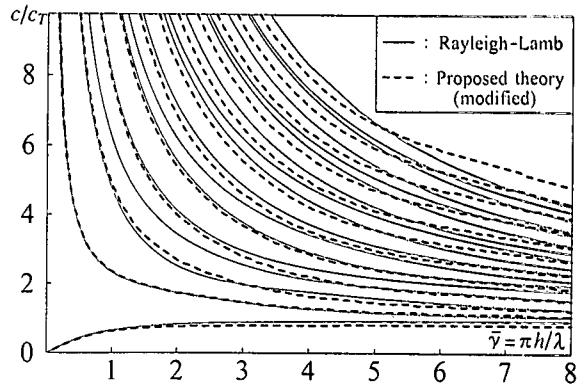


図-5 厳密解と提案する修正位相速度曲線の比較

意味で mode $i \sim j$ と表記した。

1次独立な関数の出現回数のずれの原因としては、板厚方向の基底関数である双曲線関数と Legendre 関数の違い、および板厚方向ひずみ ϵ_{zz} および応力 σ_{zz} などを無視する本理論と厳密な弾性論との設定式の違い、などが考えられる。

そこで、次に特定の位相速度曲線の周波数による反り波形の変化を調べてみる。Rayleigh-Lambの特定の位相速度曲線のモード(図-4)に注目すると、周波数 $\pi h/\lambda$ の増加とともに反り変位波形は変化してゆく。これに対し、ここに提案する高次板曲げ理論は周波数に影響されず一定の反り変位波形を保つ。言葉をかえれば、実際の板は周波数の変化に応じて、構成材料を含めて構造系が変化してゆくと捉えられる。

(3) 縦波速度、横波速度、断面2次半径の修正

Rayleigh-Lambの方程式と提案する高次理論式は、用いている構成則の種類および Poisson 比の扱いに相違がみられる。さらに、厳密解が板表面の無応力の境界条件を課すのに対し、近似理論は断面力のつり合いに配慮するのみである。その結果、低周波数領域で比較的良好な一致が、中周波数領域および高周波数領域で大きな差異に発展している。結局、近似板曲げ理論を弾性論解に近づけるには、構造系を周波数とともに変化させればよい。高周波数領域の位相速度の収束先の差異は波の速度を支配する弾性係数を変化させて回避させることが可能である。中周波数領域の差異は断面2次半径を変化させて回避させることが可能である。

中間周波数領域では周波数の増加に伴い、板中央面付近の軸方向の変位成分 $u(x, y, z, t)$ は指数関数的に減少し、高周波数領域では表面付近のみ軸方向反

り変位が存在するようになる。このため、板中央面付近は周波数の増大につれて『死んだ状態』になり、その領域が板の縁方向に拡大してゆく と解釈される。最後には、板表面から波長の1.5倍位の深さまでの変位のみ存在するRayleigh表面波状態となる。周波数の増大に伴う板中央面付近からの『死んだ領域』の拡大を考慮するには、支配方程式の断面諸量値の低下を評価する必要がある。具体的には、周波数の増加による断面の『死んだ領域』の拡大に伴い、板の実質的断面2次モーメント(慣性モーメント) F_{00} および断面積 A は減少してゆく。これに伴い、断面2次半径 $r^*(\bar{\gamma})$ も変化してゆく。そして、 $r^*(\bar{\gamma})$ は板厚 $h^*(\bar{\gamma})$ の1次式である。具体的には

$$r^{*2}(\bar{\gamma}) = \frac{F_{00}^*(\bar{\gamma})}{A^*(\bar{\gamma})} = \frac{\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot h^{*3}(\bar{\gamma})}{1 \cdot h^*(\bar{\gamma})} = \frac{1}{12} h^{*2}(\bar{\gamma}) \quad (90)$$

と表せる。任意定数 α_h および h_{∞} をパラメータとして、以下のごとく板厚 $h^*(\bar{\gamma})$ を設定した。

$$h^*(\bar{\gamma}) = h \left(\frac{\alpha_h}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_h \cdot (1 - h_{\infty}/h)^{-1}} + \frac{h_{\infty}}{h} \right) \quad (91)$$

次に、高周波数領域での極限の条件を満足する減衰関数 $c_Q^*(\bar{\gamma})$ および $c_P^*(\bar{\gamma})$ を以下のごとく設定する。

$$\begin{aligned} c_Q^*(\bar{\gamma}) &= c_Q \left(\frac{\alpha_Q}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_Q \cdot (1 - c_R/c_Q)^{-1}} + \frac{c_R}{c_Q} \right) \\ c_P^*(\bar{\gamma}) &= c_P \left(\frac{\alpha_P}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_P \cdot (1 - c_T/c_P)^{-1}} + \frac{c_T}{c_P} \right) \end{aligned} \quad (92)$$

式中の係数 α_Q および α_P は任意に選べる値であり、厳密解の曲線に適合するように決定する。

最終的に修正された位相速度方程式は式(86)より

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{c^2}{c_Q^{*2}(\bar{\gamma})} & \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 e_1^T \frac{k}{k} \\ \frac{12}{h^{*2}(\bar{\gamma})} \frac{k}{k} \frac{c_Q^{*2}(\bar{\gamma})}{c_P^{*2}(\bar{\gamma})} e_1 & \left(1 - \frac{c^2}{c_P^{*2}(\bar{\gamma})} \right) I + 3 \left(\frac{\lambda}{\pi h^*(\bar{\gamma})} \right)^2 \frac{k}{k} \frac{c_Q^{*2}(\bar{\gamma})}{c_P^{*2}(\bar{\gamma})} \end{vmatrix} = 0 \quad (93)$$

となる。

例として、Poisson比 $\nu = 0.30$ の場合、この設定式の最適の係数 α_Q 、 α_P 、 α_h および h_{∞} を探し、得られた結果を図-5に破線で与えた。厳密解と比較すると、高周波領域でも比較的良好な近似を与える曲線群となっている。

これをもとに板の理論を修正してみる。縦波速度 c_P は縦弾性係数 E の関数、そして横波速度 c_Q は横弾性係数 G の関数であるから、周波数による波の速度の変化は弾性係数の変化と考えることができる。すなわち、静的状況で定数である弾性係数値は、動的

状況下で見掛け上の値が低下するといえる。同様に断面2次半径 r の変化は断面2次モーメントおよび断面積の相対的变化ととらえることができる。これらを順に $E^*(\bar{\gamma})$ 、 $G^*(\bar{\gamma})$ 、 $F_{00}^*(\bar{\gamma})$ 、 $A^*(\bar{\gamma})$ 、と書くならば、支配方程式(76)~(78)を修正して

$$\begin{aligned} & \left(G^*(\bar{\gamma}) A^*(\bar{\gamma}) k \nabla^2 - \rho A^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w \\ & + G^*(\bar{\gamma}) A^*(\bar{\gamma}) e_1^T k \Phi = -q_z \dots \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} & G^*(\bar{\gamma}) A^*(\bar{\gamma}) k e_1 \nabla^2 w \\ & - \left(D^*(\bar{\gamma}) \nabla^2 - G^*(\bar{\gamma}) A^*(\bar{\gamma}) k - \rho F^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi \\ & = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \dots \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-\nu}{2} D^*(\bar{\gamma}) \nabla^2 - G^*(\bar{\gamma}) A^*(\bar{\gamma}) k - \rho F^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi \\ & = \frac{\partial m_x}{\partial y} - \frac{\partial m_y}{\partial x} \dots \end{aligned} \quad (96)$$

となる。ただし、周波数の関数になった弾性係数 $G^*(\bar{\gamma})$ 、 $E^*(\bar{\gamma})$ 、断面2次モーメント $F_{00}^*(\bar{\gamma})$ および断面積 $A^*(\bar{\gamma})$ は

$$\begin{aligned} G^*(\bar{\gamma}) &= G \left(\frac{\alpha_Q}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_Q \cdot (1 - c_R/c_Q)^{-1}} + \frac{c_R}{c_Q} \right)^2 \\ E^*(\bar{\gamma}) &= E \left(\frac{\alpha_P}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_P \cdot (1 - c_T/c_P)^{-1}} + \frac{c_T}{c_P} \right)^2 \\ F_{00}^*(\bar{\gamma}) &= F_{00} \left(\frac{\alpha_h}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_h \cdot (1 - h_{\infty}/h)^{-1}} + \frac{h_{\infty}}{h} \right)^{n+2} \\ A^*(\bar{\gamma}) &= A \left(\frac{\alpha_h}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_h \cdot (1 - h_{\infty}/h)^{-1}} + \frac{h_{\infty}}{h} \right)^n \end{aligned} \quad (97)$$

と表現される。そして、板の曲げ抵抗および曲げ剛性のマトリックスは式(67.a)より

$$\begin{aligned} F^*(\bar{\gamma}) &= F_{00}^*(\bar{\gamma}) I \\ D^*(\bar{\gamma}) &= \bar{E}^*(\bar{\gamma}) F^*(\bar{\gamma}) \\ &= \frac{E^*(\bar{\gamma})}{1-\nu^2} F_{00}^*(\bar{\gamma}) I \end{aligned} \quad (98)$$

と書き直せる。

7. まとめ

せん断ひずみを真の値に近づける逐次近似の繰り返しから、必然的に繰り返しと同じ数のLegendre関数よりなる板断面の反り関数を得た。繰り返しは無限に行えるから、Legendre関数およびせん断応力関数も無限に得られる。これらの2種類の関数群からそれぞれ板の反り抵抗(慣性モーメント)およびせん断抵抗のマトリックスを得ることができた。Hamilton

の原理より運動方程式を導くと従来のMindlin板の理論と同一の表現形式となる。板断面の反りによる回転変位およびそれに対応するモーメントがベクトル表記になることだけが異なる。この運動方程式から、位相速度曲線を望むモード数だけ自由に求めることが可能となった。

弾性論のRayleigh-Lambと提案する任意高次板理論の位相速度曲線を比較し以下のことがわかった。

(1) Rayleigh-Lambと任意高次板理論とは同一反り変形ごとに低周波数領域でよく一致する。

(2) Rayleigh-Lambは3モードごとに1つ、前後の位相の中間的な形の崩れた反り変形形状をもつ。

(3) 任意高次板曲げ理論は周波数の変化に係わらず、位相モードごとに反り変形形状を保持する。

(4) Rayleigh-Lambは周波数の増加とともに、反り変形形状を変化させて次のモードへと遷移する。

(5) 上記の(4)より、周波数の増加とともに、構成材料も含めて構造系は変化してゆくといえる。

この結果を踏まえて、中周波数領域のずれは断面諸量を周波数の関数とすることで、高周波領域で縦波速度に収束する弱点は弾性定数を周波数の関数とすることで回避できる。これは、従来の特定の周波数領域で運動方程式の係数を修正する考え^{8),9)}を全周波数領域に対し一般化したことになる。得られた位相速度曲線をRayleigh-Lambのそれと比較すると、全領域にわたり良好な一致をみた。完全一致しないのは、厳密解であるRayleigh-Lamb理論の反り基底関数が双曲線関数になるのに対し、提案する近似理論では反りの基底関数がLegendreの多項式関数となること、および板厚方向ひずみ ϵ_{zz} および応力 σ_{zz} の無視などの弾性論との取扱い差、などが考えられる。

厳密な弾性論の助けを借りて得られた支配方程式により、弾性論では不可能な種々の境界条件および荷

重条件をもつ板の静的問題から全周波数領域を守備範囲とする動的問題まで取り扱うことができる。理論の適用範囲は幅厚比において、 $b/h \geq 5$ 程度と想定されるが、正しくは有限長板の3次元弾性論解と比較検討し、改めて報告したい。

参考文献

- 1) 平島健一, 根岸嘉和: 数種の平板理論の動特性(自由振動と分散特性), 土木学会論文報告集, No.333, pp.21-34, 1983.
- 2) Mindlin, R.D.: Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. of Appl. Mech.*, Vol.18, pp.31-38, 1951.
- 3) Rayleigh, L.: On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter, *Proc. London Math. Soc.*, Vol.20, pp.225-234, 1888/1889.
- 4) Lamb, H.: On the flexure of an elastic plate (Appendix), *Proc. London Math. Soc.*, Vol.21, pp.70-90, 1888/1889.
- 5) Eringen, A.C. and Suhubi, E.S.: *Elastodynamics*, Vol.2, Academic Press, 1975.
- 6) 臼木 恒雄, 澤田利明: 断面変形を考慮した箱桁の高次せん断遅れ理論, 土木学会論文集, No.598/I-44, pp.137-148, 1998.
- 7) Marguerre, K., and Woernle H.-T.: *Elastic Plates*, Blaisdell Publishing Co., 1969.
マルゲール, K., ウェールンレ, H.-T.: 弾性平板, 玉手 統 訳, 培風館, 1974.
- 8) Mindlin, R.D. and Herrmann, G.: A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod, *Proc. First U.S. Nat. Congr. appl. Mech.*, pp.187-191, 1951.
- 9) Barr, A.D.S.: Torsional waves in uniform rods of non-circular section, *Journal of mechanical engineering science*, Vol.4, pp.127-135, 1962.
- 10) 臼木 恒雄: 横波およびRayleigh波の位相速度に収束するMindlin板の理論, 土木学会論文集, No.640/I-50, pp.39-48, 2000.

(1999. 5.17 受付)

PHASE VELOCITY CURVES ON NEW ARBITRARILY HIGHER ORDER PLATE THEORY

Tsuneo USUKI and Aritake MAKI

The Mindlin plate theory is extended to the arbitrarily higher order plate theory. Legendre polynomial functions are logically derived as a basis warping function of the plate in the process of successive approximation. Basis shear stress functions are given by integration of the basis warping functions in the direction of plate thickness. From these two basis functions, the warping resistance matrix and the shear resistance matrix of the plate cross section about the neutral plane are given. The motion equations of the plate are derived using the Hamilton's principle, and any number of phase velocity curves can be illustrated. The defect of failure converging at the high frequency range can be solved by introducing new elasticity modulus, which are treated as functions of frequency. The phase velocity curves are in good agreement with that of the Rayleigh-Lamb frequency equation of the theory of elasticity.