

透水係数の空間分布に関する理論的考察

齋藤雅彦¹・川谷 健²

¹正会員 工修 神戸大学助手 都市安全研究センター (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

²正会員 Ph.D. 神戸大学教授 都市安全研究センター (同上)

地質学的に同一と考えられる地層における透水係数の空間分布に関する理論的考察を行い、これに基づく1次元および2次元の数値模擬地盤の作成方法を提案した。この模擬地盤の性質について検討した結果、透水係数の確率分布は、対数正規分布に従うこと、および透水係数の空間変動のパワースペクトルはほぼ $1/f$ 型であることが確認された。また、この模擬地盤を用いて飽和浸透流の数値解析を実施し、同一の統計的性質を有する地盤においても、透水係数の空間的ゆらぎのため、水頭分布は一意的には定まらないこと、および本手法により作成された模擬地盤は、局所的な水みちが存在する自然地盤の特徴を無理なく再現し得ることを明らかにした。

Key Words : groundwater, hydraulic conductivity, heterogeneity, fractal, numerical analysis, finite element method

1. 序論

一般に、地盤は地質学的に異なった性質を持つ複数の層によって構成されている。多くの場合、地盤調査から当該地盤の地層構造を把握し、地質学的に同一と判断される層については、その層に対する様々な土質定数（例えば C , ϕ 等）は一定の値を持つもの、すなわち均質として取り扱われる。

透水係数についても例外ではなく、各層はその透水性に応じて透水層、難透水層、不透水層等に分類され、それぞれの層の透水係数を一つの値で代表させることが多い。一方で、同一の土質と考えられる層内においても、透水係数は空間的に大きくばらつくことは経験上よく知られており¹⁾、その不均質性が地下水の流動に及ぼす影響は小さいと断言できないことも事実である。

このような層内の透水係数の不均質性に関しては、これまでに数多くの調査・研究が行われており、統計的性質および空間分布の推定手法等、多くの知見が得られている^{2),3),4),5)}。Freeze⁶⁾は、多くの調査報告資料を用いて、均質と考えられる地盤においても水理定数は一定ではないこと、およびその統計的性質を示した上で、モンテカルロ法による確率論的考察を行っている。原田ら⁷⁾は、現場透水試験の結果から、同一の地質か

らなる領域でも、透水係数は局所的に数オーダーの幅で変動すること、および統計的には対数正規分布に従うことを示している。また、竹内⁸⁾は、各地の地すべり地における調査結果に基づいて、帶水層内の「水みち」の存在を認めることにより、地下水に起因するある種の現象を合理的に説明できるとした上で、温度測定による地下水調査法を提案している。

しかし、透水係数の空間分布に関する周期性等の性質については明らかにされておらず、完全にランダムあるいはランダム成分とトレンド成分の和で表されるものと仮定されることが多い^{6),9)}。

本研究では、透水係数の空間分布がランダムであるとの仮定に基づく議論の問題点を指摘した上で、透水係数の空間分布に関する理論的考察を行う。そして、これに基づく1次元および2次元の数値模擬地盤の作成方法を提案するとともに、その性質を明らかにする。

また、この手法により作成した模擬地盤を用いて平面2次元定常被圧地下水の有限要素解析を実施し、地盤の不均質性が地下水に及ぼす影響について考察する。

2. 従来の手法の問題点

同一と判断される層内における透水係数のばらつきは、ほぼ対数正規分布に従うことは、これまでに数多く報告されている^{6), 7), 10)}。一方、空間的な変動の不規則性、あるいは周期性に関する性質は明らかにされておらず、透水係数の不均質性に関する議論において、多くの場合、空間的にはランダムに分布するものと仮定されいる。

ここでは、1次元浸透流について、上記のようなランダム性を仮定することによって生じる問題を例示する。

(1) 解析条件

図-1に示すような長さLの1次元飽和浸透モデルを考える。この場合の基礎方程式は、連続の式およびダルシーの法則より式(1)で表され、境界条件は式(2)で表される。

$$\frac{d}{dx} \left(k_x \frac{dh}{dx} \right) = 0 \quad (1)$$

$$h=h_1 \text{ (on } x=0\text{)}, \quad h=h_2 \text{ (on } x=L\text{)} \quad (2)$$

ここで、L, x, h, k_xは、いずれも無次元量とし、L=1, h₁=1, h₂=0とする。また、k_xはxに対してランダムに分布するものと仮定し、その対数値は、平均値=0、標準偏差=0.5の正規分布に従うものとする。ここで、均質地盤における透水係数の対数値の標準偏差は、一般には0.2~2.0程度であることが報告されているが⁶⁾、ここで用いた0.5は標準的な値と考えられる。

つぎに、k_xの不均質性を導入するために、供試体をn個の要素に分割し、各要素に対してk_{x,i}(i=1..n)を対数正規分布からランダムに与える。このとき、分割された各要素の体積は、Bear¹¹⁾が示したREV(representative elementary volume)よりも大きいことを前提とする。

このような条件の下、3種類の分割数を用いて水頭分布を計算した。Case-1はn=64, Case-2はn=512, Case-3はn=2048とし、各ケースに対しては乱数系列を変えて5回実施した。

(2) 解析結果

図-2(a)-(c)に、得られた水頭分布を示す。Case-1(n=64)では、使用した乱数の違いによって水頭分布が異なっているのに対し、Case-2, Case-3と分割数が大きくなるにつれて乱数の違いによる水頭分布の差が小さくなり、Case-3(n=2048)

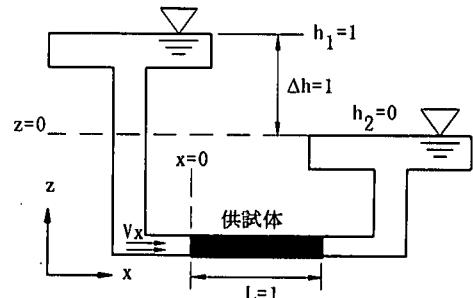


図-1 1次元浸透問題

では見かけ上ほとんど差が見られず、巨視的には直線分布、すなわち完全に均質な場合とほぼ同じになっている。

これは、同じ地盤を解析の対象としているながら、解析上の要素分割数によって地盤の不均質性が地下水水流動に及ぼす影響の評価は異なり、分割数を多くするほど不均質性の影響を過小評価してしまうことを示している。

つぎに、透水係数の空間的な変動特性について検討する。一般に、空間的に不規則な変動を定量的に取り扱う場合、自己相関関数あるいはパワースペクトル密度関数が用いられる。自己相関関数は変動の性質を長さで表現したものであり、パワースペクトルは空間周波数で表現したものである。以下では変動の周期性について考察するためパワースペクトルを用いるが、両者はウイナー・ヒンチンの定理によって関係づけられ、一方が得られれば他方も計算することができる

図-3はCase-3の透水係数分布の一例、図-4はこの変動のパワースペクトルである。ここに、fは空間周波数、S(f)はパワースペクトルである。

図-4より、この変動はすべての空間周波数成分をほぼ均等に含んでおり (=white noise)、Lのどの部分を切り取っても等価透水係数は等しくなってしまうことがわかる。これは透水係数の空間分布をランダムに与えたためである。

つまり、統計的性質のみに着目し、これを満たすように不均質性を導入しようとして、空間分布をランダムとするならば、その不均質性は巨視的には水頭分布に何ら影響を与えない、均質媒体と等価なものになってしまうことがわかる。

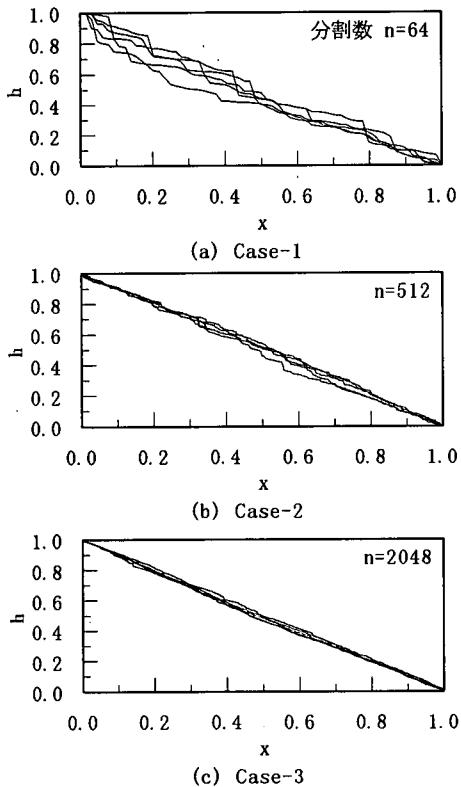


図-2 5種類の乱数系列による水頭分布の計算結果

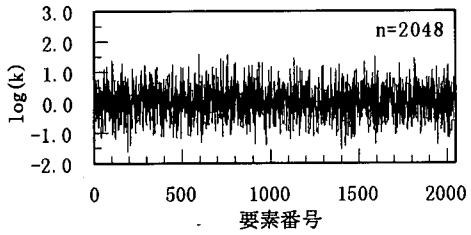


図-3 透水係数分布の一例 (Case-3)

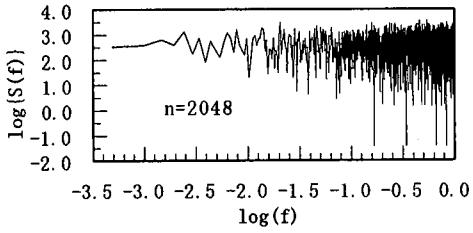


図-4 透水係数の変動パワースペクトル (Case-3)

3. 透水係数の空間分布に関する理論的考察と数値模擬地盤の作成方法

前章で述べたように、「透水係数の空間分布は

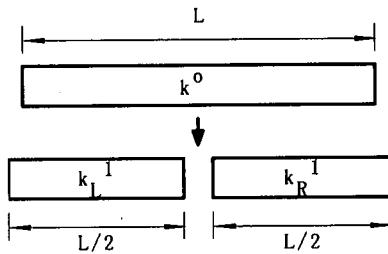


図-5 供試体の分割

ランダムである」との仮定は妥当ではない。

本章では、「透水係数の空間分布はランダムではない」ことを前提に、1次元および2次元の不均質浸透場における透水係数の空間分布に関する理論的考察を行い、これに基づく数値模擬地盤の作成方法を提案する。

(1) 1次元の場合

ここでも、図-1に示した1次元飽和浸透モデルを取り上げる。

まず、供試体の全長 L についての等価透水係数を k^0 とし、 $k^0 = 1$ とする。つぎに、図-5に示すように供試体を中央で $L/2$ に分割する。これらの $L/2$ に分割された供試体の等価透水係数をそれぞれ k_L^1 および k_R^1 とする。

もし、この供試体が完全に均質であれば、次式が成り立つ。

$$k^0 = k_L^1 = k_R^1 = 1 \quad (3)$$

一方、供試体が不均質であれば、上式が成り立つ保証は無く、一般に、

$$k_L^1 \geq k^0 = 1 \geq k_R^1 \quad (4)$$

または、

$$k_R^1 \geq k^0 = 1 \geq k_L^1 \quad (5)$$

となる。

また、これらの関係は、等価透水係数の算定式より、

$$k^0 = \frac{2k_L^1 k_R^1}{k_L^1 + k_R^1} = 1 \quad (6)$$

と表せる。

ここで、透水係数の空間的な変動量を表す無次元確率変数 α を導入し、

$$k_L^1 = \alpha k^0 = \alpha \quad (7)$$

とすると、式(6)より、

$$k_R^{-1} = \frac{\alpha k^0}{2\alpha - 1} = \frac{\alpha}{2\alpha - 1} \quad (8)$$

となる。

式(8)、および、 $k_L^{-1} > 0$, $k_R^{-1} > 0$ より、 α のとりうる範囲は、

$$\alpha > 0.5 \quad (9)$$

であることがわかる。

さらに、

$$k_m = \max(k_L^{-1}, k_R^{-1}), \quad k_n = \min(k_L^{-1}, k_R^{-1}) \quad (10)$$

および

$$k_m = \alpha_m k^0, \quad k_n = \alpha_n k^0 \quad (11)$$

とすると、

$$\alpha_m \geq 1 \quad (12)$$

$$0.5 < \alpha_n = \frac{\alpha_m}{2\alpha_m - 1} < 1 \quad (13)$$

となり、 α_m を与えることにより α_n も同時に定まる。

ここで、 α_m の統計的性質は現在のところ不明であるが、ここでは式(14)に示す平均値 1、標準偏差 σ_{α_m} の片側正規分布に従うものと仮定する。

$$P(\alpha_m) = \frac{2}{\sigma_{\alpha_m} \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\alpha_m - 1)^2}{2\sigma_{\alpha_m}^2}\right\} \quad (\alpha_m \geq 1) \quad (14)$$

また、式(10)において、 $k_m = k_L^{-1}$ となる確率は0.5とする。

以上のような操作をN回繰り返すことにより、供試体は 2^N 個の要素に分割され、各要素ごとに透水係数が与えられる。

(2) 2次元の場合

図-6に示すように、等価透水係数が、

$$K_x^0 = K_y^0 = K^0 = 1 \quad (15)$$

である等方性の矩形領域を、4個の要素に分割し、それぞれの要素内の等価透水係数を $K_1^{-1}..K_4^{-1}$ とする。また、隣接する2つの要素からなる領域の等価透水係数を $K_A^{-1}..K_D^{-1}$ とする。

このとき、 $K_1^{-1}..K_4^{-1}$ と、 $K_A^{-1}..K_D^{-1}$ の関係は、次式となる。

$$K_A^{-1} = \frac{2K_1^{-1}K_2^{-1}}{K_1^{-1} + K_2^{-1}} \quad (16)$$

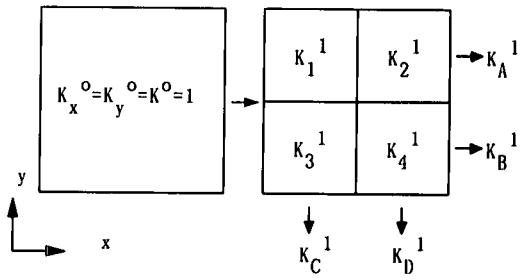


図-6 領域の分割 (等方性)

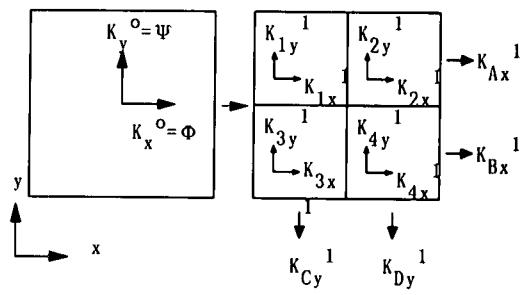


図-7 領域の分割 (異方性)

$$K_B^{-1} = \frac{2K_3^{-1}K_4^{-1}}{K_3^{-1} + K_4^{-1}} \quad (17)$$

$$K_C^{-1} = \frac{2K_1^{-1}K_3^{-1}}{K_1^{-1} + K_3^{-1}} \quad (18)$$

$$K_D^{-1} = \frac{2K_2^{-1}K_4^{-1}}{K_2^{-1} + K_4^{-1}} \quad (19)$$

また、 K_x^0 , K_y^0 と、 $K_A^{-1}..K_D^{-1}$ の関係は、

$$K_x^0 = \frac{K_A^{-1} + K_B^{-1}}{2} = K^0 = 1 \quad (20)$$

$$K_y^0 = \frac{K_C^{-1} + K_D^{-1}}{2} = K^0 = 1 \quad (21)$$

である。

さらに、式(15)～式(21)の関係から、以下の恒等式が導かれる。

$$(K_1^{-1} - K_4^{-1})(K_3^{-1} - K_2^{-1}) = 0 \quad (22)$$

すなわち、

$$K_1^{-1} = K_4^{-1} \text{ or } K_2^{-1} = K_3^{-1} \quad (23)$$

これは、式(15)が成立するための必要十分条件である。

一方、地盤が不均質であることを前提とするならば、必ずしも式(23)が満たされる保証は無い。したがって、地盤が不均質であるならば、式(15)は成り立たない。

そこで、あらためて図-7に示すように、x, y方

向の等価透水係数が、

$$K_x^0 = \Phi, \quad K_y^0 = \Psi \quad (24)$$

である異方性の矩形領域を考える。

この領域を4個の要素に分割し、それぞれのx, y方向の等価透水係数を $K_{1x}^{-1}..K_{4x}^{-1}$, $K_{1y}^{-1}..K_{4y}^{-1}$ とする。また、隣接する2つの要素からなる領域の等価透水係数を $K_{Ax}^{-1}, K_{Bx}^{-1}, K_{Cy}^{-1}, K_{Dy}^{-1}$ とする。

まず、x方向について考えると、 $K_{1x}^{-1}..K_{4x}^{-1}$ と、 K_{Ax}^{-1}, K_{Bx}^{-1} の関係は、次式となる。

$$K_{Ax}^{-1} = \frac{2K_{1x}^{-1}K_{2x}^{-1}}{K_{1x}^{-1} + K_{2x}^{-1}} \quad (25)$$

$$K_{Bx}^{-1} = \frac{2K_{3x}^{-1}K_{4x}^{-1}}{K_{3x}^{-1} + K_{4x}^{-1}} \quad (26)$$

また、 K_{Ax}^{-1}, K_{Bx}^{-1} と、 K_x^0 の関係は、次式となる。

$$K_x^0 = \frac{K_{Ax}^{-1} + K_{Bx}^{-1}}{2} = \Phi \quad (27)$$

ここで、1次元の場合と同様に、不均質性を表す確率変数 $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ を導入して、

$$K_{1x}^{-1} = \alpha_x \Phi, \quad K_{4x}^{-1} = \beta_x \Phi \quad (28)$$

$$K_{Ax}^{-1} = \gamma_x \Phi, \quad K_{Bx}^{-1} = (2 - \gamma_x) \Phi \quad (29)$$

とすると、 K_{2x}^{-1}, K_{3x}^{-1} は、式(25), (26), (28)および(29)より、

$$K_{2x}^{-1} = \frac{\alpha_x \gamma_x}{2\alpha_x - \gamma_x} \Phi \quad (30)$$

$$K_{3x}^{-1} = \frac{(2 - \gamma_x)\beta_x}{2\beta_x + \gamma_x - 2} \Phi \quad (31)$$

となる。

このとき、 γ_x の制約条件は、 $K_{Ax}^{-1} > 0, K_{Bx}^{-1} > 0$ および式(29)より、

$$0 < \gamma_x < 2 \quad (32)$$

また、 α_x, β_x の制約条件は、 $K_{2x} > 0, K_{3x} > 0$ 、式(30)および式(31)より、次式となる。

$$\alpha_x > \frac{\gamma_x}{2}, \quad \beta_x > \frac{2 - \gamma_x}{2} \quad (33)$$

ここで、

$$\alpha'_x = \frac{\alpha_x}{\gamma_x}, \quad \beta'_x = \frac{\beta_x}{2 - \gamma_x}, \quad \gamma'_x = \frac{1}{\gamma_x} \quad (34)$$

とおくと、 $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ が、それぞれ確率変数であることから、 $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ も確率

変数となる。

このとき、 $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ の制約条件は、式(32), 式(33), および式(34)より

$$\alpha'_x > 0.5, \quad \beta'_x > 0.5, \quad \gamma'_x > 0.5 \quad (35)$$

となる。

さらに、1次元の場合と同様に、

$$\alpha'_{xm} \geq 1, \quad \beta'_{xm} \geq 1, \quad \gamma'_{xm} \geq 1 \quad (36)$$

並びに、

$$0.5 < \alpha'_{xn} < 1, \quad 0.5 < \beta'_{xn} < 1, \quad 0.5 < \gamma'_{xn} < 1 \quad (37)$$

とすると、 α'_x, β'_x および γ'_x のとりうる値は、

$$\alpha'_x = \alpha'_{xm} \quad \text{or} \quad \alpha'_x = \alpha'_{xn} = \frac{\alpha'_{xm}}{2\alpha'_{xm} - 1} \quad (38)$$

$$\beta'_x = \beta'_{xm} \quad \text{or} \quad \beta'_x = \beta'_{xn} = \frac{\beta'_{xm}}{2\beta'_{xm} - 1} \quad (39)$$

$$\gamma'_x = \gamma'_{xm} \quad \text{or} \quad \gamma'_x = \gamma'_{xn} = \frac{\gamma'_{xm}}{2\gamma'_{xm} - 1} \quad (40)$$

となる。このようにして、式(36)を満たす $\alpha'_{xm}, \beta'_{xm}, \gamma'_{xm}$ から式(38)～式(40)により $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ が与えられると、式(34)より $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ が得られ、さらに式(28), 式(30), および式(31)より、 $K_{1x}^{-1}..K_{4x}^{-1}$ が得られる。ここで、 $\alpha'_{xm}, \beta'_{xm}, \gamma'_{xm}$ の確率密度関数は、1次元の場合と同様に、式(41)に示す平均値=1, 標準偏差= σ_{xm} ($x ; \alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$) の片側正規分布と仮定する。

$$p(\chi_m) = \frac{2}{\sigma_{xm}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\chi_m - 1)^2}{2\sigma_{xm}^2}\right\} \quad (\chi_m \geq 1) \quad (41)$$

また、式(38)～式(40)において $x = x_m$ となる確率は、すべて0.5とする。以上の操作をN回繰り返せば、領域は 4^N 個の要素に分割され、x方向の透水係数の空間分布が決定される。

つぎに、y方向について考える。既に述べたように、広域的には異方性を有する可能性があるが、小領域に分割された各要素内において、y方向の透水性が、x方向の透水性と著しく異なる可能性は小さい。したがって、分割後の各要素内のy方向の透水係数は、x方向の透水係数と等しいと仮定して、

$$K_y^N = K_x^N \quad (42)$$

とする。

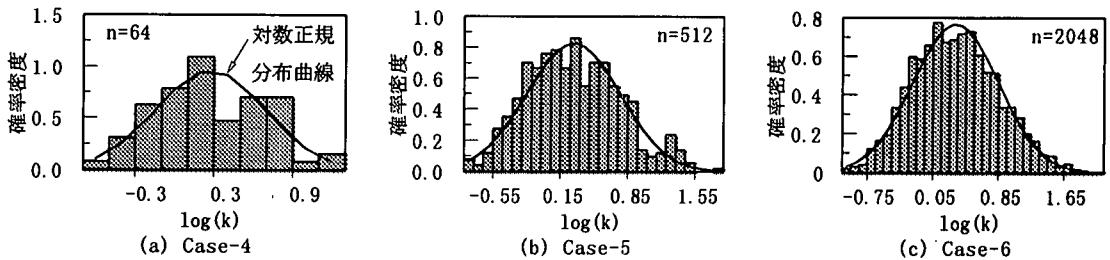


図-8 透水係数の頻度分布の一例

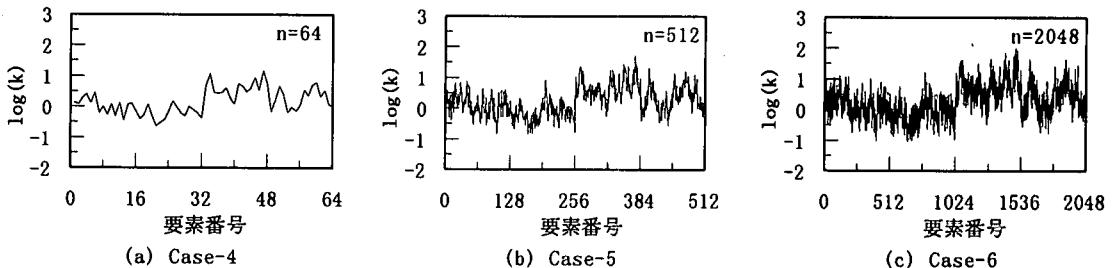


図-9 透水係数分布の一例

4. 模擬地盤の性質

(1) 1次元の場合

3章1節にて述べた方法により模擬地盤を作成し、2章で取り上げた1次元浸透モデルを再度解析する。

模擬地盤の作成の際に必要となるパラメータは、確率変数 α_m の平均値と標準偏差である。ここでは、平均値1、標準偏差 $\sigma_{\alpha_m} = 0.5$ とした。この標準偏差 σ_{α_m} は、3章で述べたように、隣接する要素間のばらつきを表すものであり、2章で用いた k_x の対数値の標準偏差とは物理的意味が異なる。たとえば、 $\alpha_m = 1.5$ の場合、隣接する要素間の透水係数の比は $k_n/k_m = 1/2$ となる。また、2章と同様に、3種類の分割数を用いてその結果を比較する(Case-4～Case-6)。各ケースの分割数は、Case-4; n=64 (N=6), Case-5; n=512 (N=9), Case-6; n=2048 (N=11)であり、それぞれ乱数系列を変えて5回実施した。

図-8に、各ケースにおける透水係数の頻度分布の一例を示す(図中において、透水係数は対数値、頻度は確率密度に換算済)。

模擬地盤の作成にあたって、透水係数の頻度分布に関する情報は、一切与えていないにもかかわらず、いずれのケースにおいても、ほぼ対数正規分布に従っていることがわかる。これは以下のように説明することができる。

領域をN回分割する場合、要素 i の透水係数 k_i^N

は、各分割スケールにおける確率変数 $\alpha_{I(j)}^j$ ($j = 1..N, 1 \leq I(j) \leq 2^j$; $I(j)$ は要素 i が j 回目の分割時に属していた要素番号)の積として次式で表すことができる。

$$k_i^N = k^0 \cdot \alpha_{I(1)}^{j_1} \cdot \alpha_{I(2)}^{j_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{I(N)}^{j_N} \quad (43)$$

式(43)の両辺の対数をとると、

$$\log k_i^N = \log k^0 + \log \alpha_{I(1)}^{j_1} + \log \alpha_{I(2)}^{j_2} + \dots + \log \alpha_{I(N)}^{j_N} \quad (44)$$

ここで確率変数 $\alpha_{I(j)}^j$ が独立で同一の分布に従うならば中心極限定理により $\log k_i^N$ は正規分布となる。したがって k_i^N は対数正規分布となる。

つまり、3章で述べた方法により作成された模擬地盤の透水係数の確率分布は、対数正規分布で近似し得ることを示しており、これは自然地盤に関する従来の知見と合致している。

図-9は、各ケースにおける透水係数(対数値)の空間分布の一例、図-10は、これらの変動のパワースペクトルである。

図-10より、この地盤の透水係数の空間変動は、概ね $1/f$ 型スペクトル (= pink noise) となっている。 $1/f$ 型スペクトルは、自然現象に限らず、様々な分野で観測されているが¹²⁾、特に地盤工学の分野では、脇田ら¹³⁾が不同沈下の現場観測例からそのスペクトルが $1/f^\beta$ 型であること、すなわちフラクタル的性質を有することを明らかにしている。このことは、自然地盤が空間的に自己相似性を有することを示唆するものであり、透水係数の空間分布もフラクタル的であることが推察される。

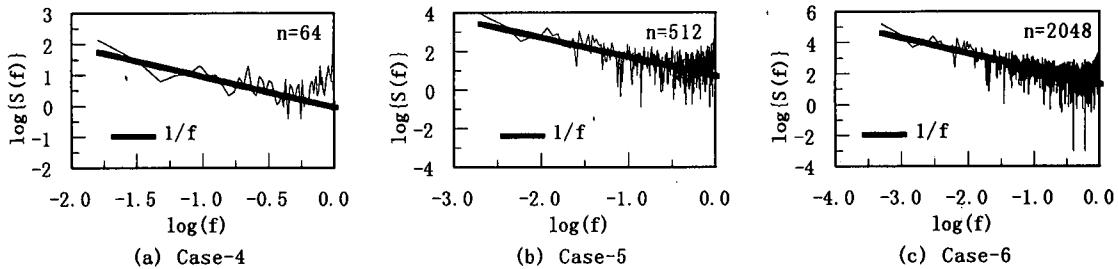


図-10 透水係数の変動パワースペクトルの一例

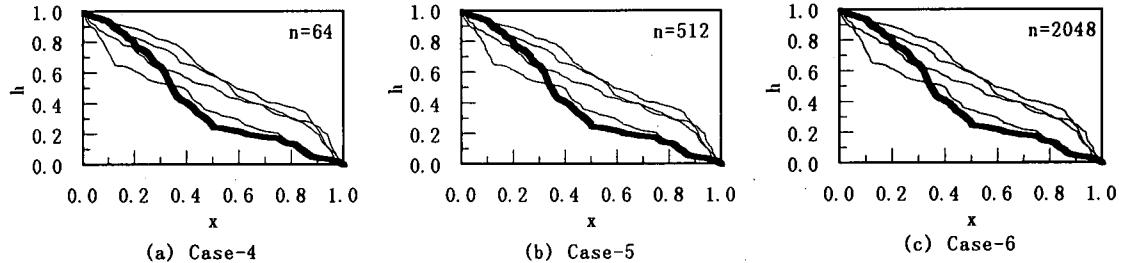


図-11 5種類の乱数系列による水頭分布の計算結果

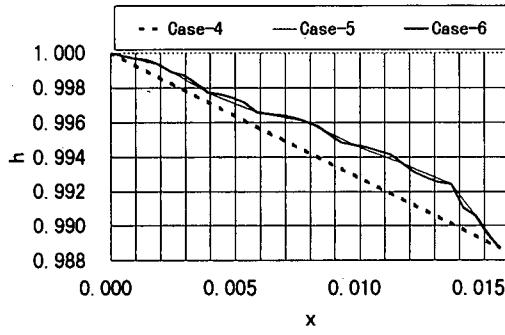


図-12 $x=0$ 近傍の水頭分布

図-11に、水頭分布の計算結果を示す。ここで太線で表したもののは、図-9(a)～(c)に示した透水係数分布により得られた水頭分布である。

図-12は、これら太線で表した水頭分布の、 $x=0$ 近傍の拡大図である。微視的には、分割数が大きいほど、細かい凹凸があらわれる。これより、不均質性を有する地盤内の地下水面は、なめらかな曲線ではなく、やはりフラクタル曲線と考えることができる。

一方、巨視的には各ケースによる水頭分布の差異は見られない。すなわち、2章で示した解析例のように分割数によって水頭分布の変動幅が大き左右されることではなく、分割数の差は単に解像度の差として現れるのみである。

したがって、水頭分布の概形を知る上では分割数をそれほど多くする必要はないものと思われる。

また、何れのケースにおいても、使用する乱数

表-1 各ケースの標準偏差 σ_{z_m}

	Case-7	Case-8	Case-9
$\sigma_{\alpha z_m}, \sigma_{\beta z_m}$	0.3	0.6	0.3
$\sigma_{\gamma z_m}$	0.3	0.3	0.6

によって水頭分布は、大きく異なっている。

このことは、同じような統計的性質を持つ地盤であっても、透水係数の空間的なゆらぎのため、一定の範囲内で様々な水頭分布が生じる可能性があり、確率論的な取扱いが必要と考えられる。

(2) 2次元の場合

3章2節にて述べた方法により、模擬地盤を作成する。このとき、必要となるパラメータは、確率変数 χ_m ($\chi : \alpha_x, \beta_x, \gamma_x$) の平均値と標準偏差である。ここでは、平均値はすべて1とし、標準偏差 σ_{z_m} を変化させて表-1に示す3ケースの模擬地盤を作成した。これらの標準偏差が意味するものは、 α, β に関しては要素間のばらつきを規定するのに対して、 γ に関しては方向間のばらつきを規定するものである。たとえば、 γ_x の標準偏差は、 K_x の y 軸方向間のばらつきを規定する。

また、分割数は、 $n=4096$ ($N=6$) とし、乱数系列は各ケース共通で1回ずつ発生させた。最初の分割時に用いる x 方向の等価透水係数は、 $K_x^0 = \Phi = 1$ (無次元) とした。

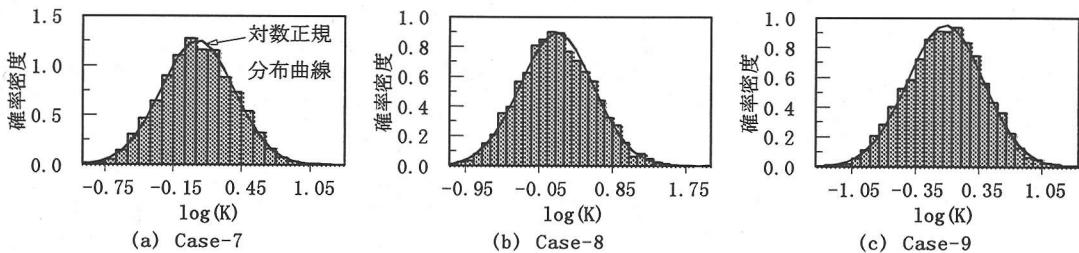


図-13 透水係数の頻度分布

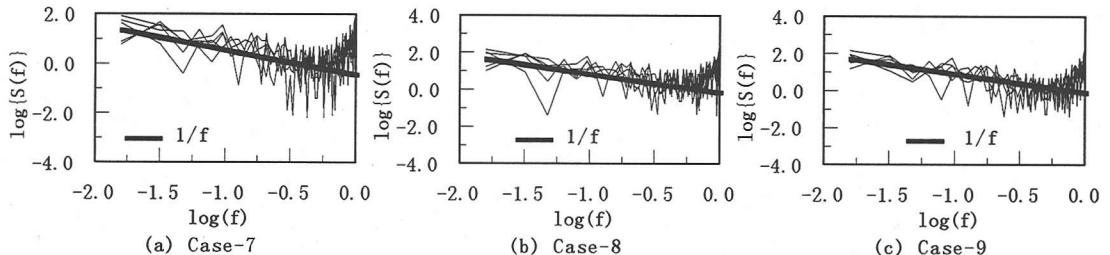


図-14 透水係数の変動パワースペクトル (x 方向 5 断面)

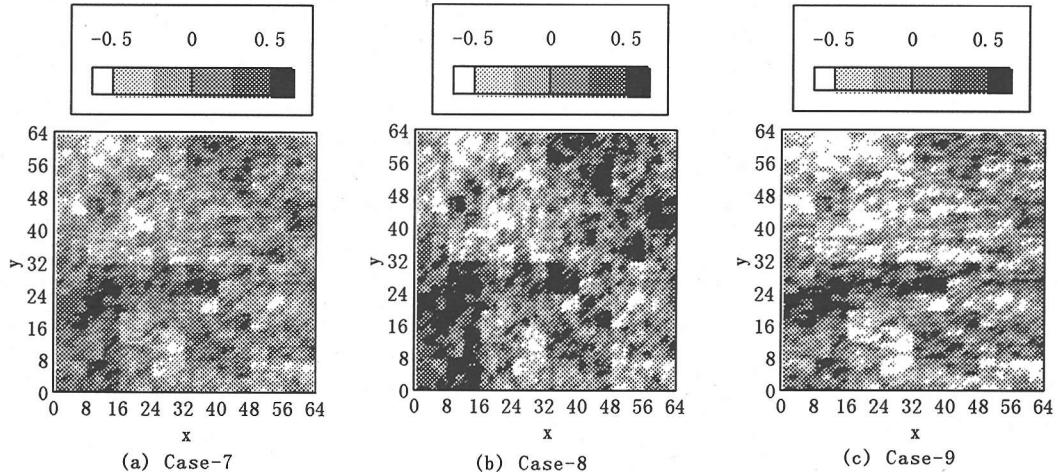


図-15 透水係数の対数値の平面分布

図-13に、透水係数 $K_x^N (=K_y^N)$ の頻度分布を示す(図中において、透水係数は対数値、頻度は確率密度に換算済)。

1次元の場合と同様に、各ケースの頻度分布は対数正規分布に従っていることがわかる。

図-14は、x方向の5断面における K_x^N の変動のパワースペクトルである。これも1次元の場合と同様、いずれのケースにおいても、ほぼ $1/f$ 型となっている。

図-15は、 K_x^N (対数値)の平面分布である。また、表-2に、分割後の各ケースにおける等価透水係数 Φ , Ψ および両者の比 Ψ/Φ を示す。

Case-8では、Case-7と比較して、y方向の透水性が増しているのに対し、Case-9では、両方向共に減少、特にy方向の減少幅が大きい。

表-2 分割後の等価透水係数 Φ , Ψ

	Case-7	Case-8	Case-9
Φ (分割後)	0.842	0.844	0.629
Ψ (分割後)	0.823	0.870	0.559
Ψ/Φ	0.977	1.031	0.889

つまり、 $\sigma_{\alpha xm}$ および $\sigma_{\gamma xm}$ の値によって、対象領域全体の透水性が様々に変化することがわかる。

これらの結果から、2次元浸透場において、透水係数の不均質性を考える場合、その空間分布によって広域的な透水性が左右されることも考慮しておく必要があるものと考えられる。

5. 平面2次元定常被圧地下水水流の解析

3章で述べた方法を用いて平面2次元の模擬地盤を作成し、定常被圧地下水水流の有限要素解析を行う。

4章で、すでに1次元問題の解析例を示し、不均質場においては水頭分布は一意的に定まらないこと、および水頭分布の概形を知る上では、多くの分割を必要としないことを述べた。しかし、この場合連続条件より、流速分布は、すべての点で等しくなってしまう。一方、2次元の場合、透水係数の空間的変動による影響は、水頭分布のみならず、流速分布にも大きく現れるものと考えられる。

本章では、2次元場における透水係数と流速の空間分布の関係を重点的に検討する。

(1) 基礎方程式と有限要素定式化

平面2次元被圧帶水層内における定常地下水水流の基礎方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(BK_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(BK_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (45)$$

ここに、 h は水頭、 B は帶水層厚、 K_x 、 K_y はそれぞれ x 方向、 y 方向の透水係数である。

境界条件は、水頭規定の境界で、

$$h = h_B \quad (46)$$

であり、流量規定の境界で、

$$-\left(BK_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + BK_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) = Q \quad (47)$$

ここに、 h_B は既知の水頭値、 Q は外部境界の単位長さあたりの流量、 n_x と n_y は境界にたてた外向法線ベクトルの方向余弦である。

式(45)をGalerkin法を適用して離散化すると、

$$[A_{nm}] \{h_m\} = \{Q_n\} \quad (48)$$

となる。

ここに、

$$A_{nm} = \sum_e \int_{R_e} \left(BK_x \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + BK_y \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) dR_e \quad (49)$$

$$Q_n = -\sum_e \int_{\Gamma_e} Q N_n d\Gamma_e \quad (50)$$

であり、 h_m は節点の水頭、 N_n は補間関数、 R_e と Γ_e はそれぞれ要素 e の領域と境界を表す。

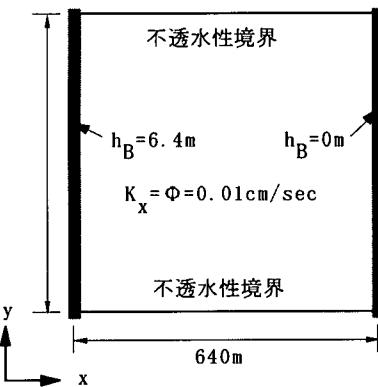


図-16 解析領域

表-3 各ケースの分割数

	Case-10	Case-11	Case-12	Case-13
分割回数 N	2	3	4	6
最終分割長さ	160m	80m	40m	10m

(2) 解析条件

解析領域は、図-16に示すように、1辺が640mの正方形領域である。帯水層厚は、全領域にわたって一定であり、 $B=10m$ である。また、最初の分割時に与える全領域にわたる等価透水係数は、 $K_x^0=\Phi=10^{-2}cm/sec$ である。

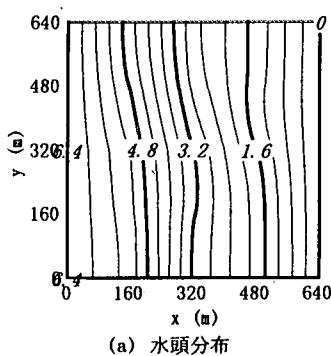
境界条件は、 $x=0m$ で $h_B=6.4m$ 、 $x=640m$ で $h_B=0m$ であり、 $y=0m$ および $y=640m$ における境界は不透水性である。有限要素解析における要素分割は4096要素（10m×10mの正方形要素）、節点数は4225点とした。

また、模擬地盤作成時の α'_{xm} 、 β'_{xm} 、 γ'_{xm} の確率密度関数を規定する標準偏差 $\sigma_{xm}(x; \alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x)$ は、 $\sigma_{xm}=0.3$ とした。

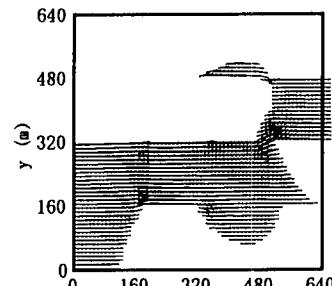
解析は、領域の分割数（有限要素法における要素数ではなく、3章で示したNに相当）が流速分布に与える影響を調べるために、これをパラメータとして、4ケース実施し、各ケースにおいて、水頭分布、流速分布、流線、および粒子追跡（パーティクル・トレース）を求めた。

表-3に各ケースで用いたパラメータを示す。

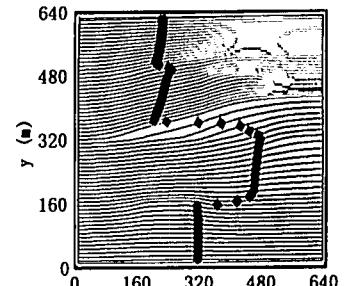
なお、ここで用いた乱数系列は、前章のCase-7～Case-9と同一であり、したがって、Case-13における透水係数の頻度分布、および平面分布の形状は、図-13(a)～図-15(a)に示したCase-7のものと同一である。



(a) 水頭分布

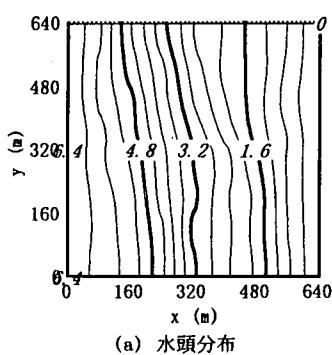


(b) 流速分布

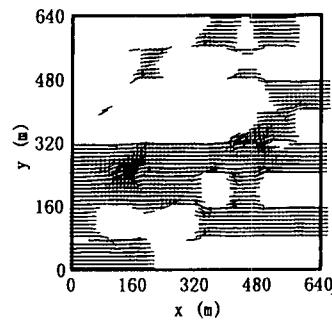


(c) 流線と粒子追跡

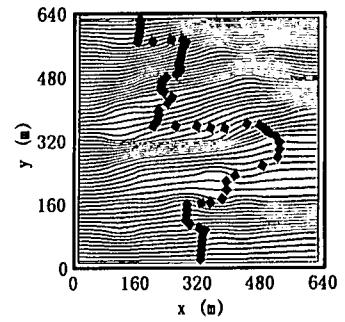
図-17 Case-10



(a) 水頭分布

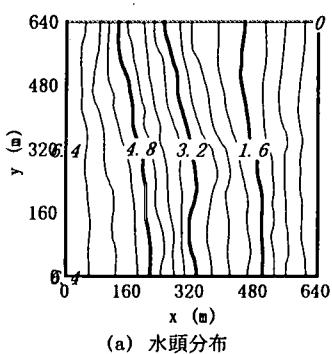


(b) 流速分布

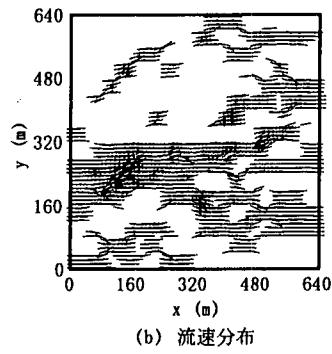


(c) 流線と粒子追跡

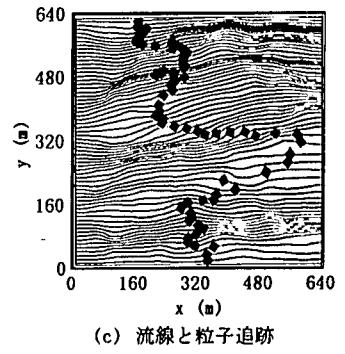
図-18 Case-11



(a) 水頭分布

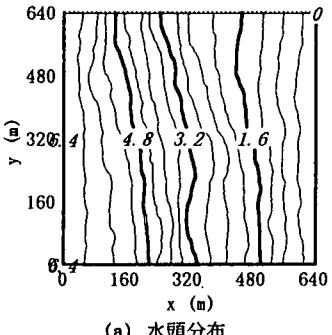


(b) 流速分布

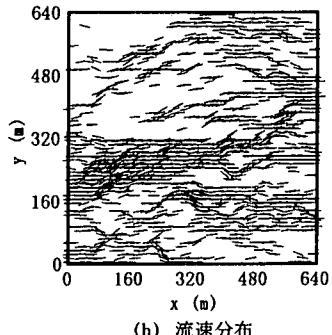


(c) 流線と粒子追跡

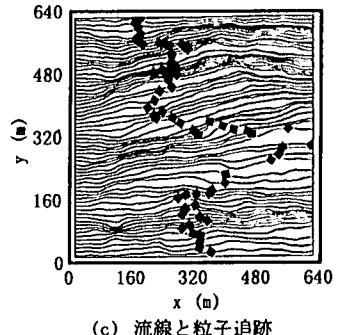
図-19 Case-12



(a) 水頭分布



(b) 流速分布



(c) 流線と粒子追跡

図-20 Case-13

(3) 解析結果

図-17～図-20に、各ケースの水頭分布、流速分布、および流線と粒子追跡の結果を示す。ここで流速分布は、全要素の平均値を上回るもののみをその大きさに無関係に一定の長さで表示している。

また、粒子追跡は、同時刻に $x=0$ 上の各点を出发した粒子が、流線に沿ってダルシー流速で移動し、3500日後に到達する点を示したものである。

水頭分布については、1次元の場合と同様に、各ケースによる違いは、あまり顕著ではない。特に、 $N=3$ 以上では、微細な凹凸を除けば、巨視的にはほとんど同一の水頭分布を示している。

一方、流速分布については、各ケースによって大きく異なっている。

分割の粗いCase-10の場合、流速が相対的に大きい部分は、 $0m < y < 320m$ にほぼ集中しているのに対し、分割を細かくして行くにつれて、流速の大きい部分が分散し、小規模な水みちが多数表れていることがわかる。

このように、相対的に流速の大きい部分が全体に分散すると、流れは一様流に近づいている印象を受けるが、粒子追跡の結果は逆であり、最も速い粒子と、最も遅い粒子の到達距離の差は、分割数が大きくなるにつれて増大している。

また、流線は、分割を小さくするほど滑らかさが失われ、細かな変動が表れている。一方、ここで取り上げた各要素が等方性の勾配場では、等水頭線と流線は直交することから、水頭分布についても、分割を小さくするほど滑らかさが失われる事がわかる。すなわち、4章で1次元の水頭分布で示したように、2次元場においても水頭分布はフラクタル性を持つものと考えられる。

以上の結果から、水位・水頭分布が問題となる場合であれば、それほど多数の要素に分割する必要はないが、地下水汚染問題など流速分布が重要となる場合は、局所的な水みちの影響を無視することができず、したがって、可能な限り多くの要素に分割する必要があるものと思われる。

6. 結論

本研究では、透水係数の空間分布に関する理論

的考察を行い、これに基づく数値模擬地盤の作成方法を提案した。さらに、この数値模擬地盤に対して統計的性質、周期的性質、水頭分布および流速分布に関する性質等について検討した。以下に得られた結果をまとめる。

- 1) 本手法により作成された模擬地盤において、計算された透水係数の確率分布は、対数正規分布で近似的に表現できる。これは、これまでに自然地盤から得られた知見と合致する。
- 2) 模擬地盤における透水係数の空間変動のパワースペクトルは、概ね $1/f$ 型を示す。これは、透水係数の空間分布が自己相似性を有することを示すものであるが、不同沈下の空間分布が $1/f^{\beta}$ 型であることから、自然地盤が自己相似性を有することが推察される。
- 3) 不均質地盤における地下水面は、なめらかな曲面ではなく、フラクタル曲面と考えられる。
- 4) 地質学的に同一と判断される地層内における水頭分布は、透水係数の空間的ゆらぎに支配され、統計的性質が同じ地盤においても様々な水頭分布を生じる可能性がある。
- 5) 本研究にて作成した模擬地盤上にも、局所的な水みちが発生する。これも、自然地盤から得られている知見と合致する。
- 6) 地盤の不均質性の影響は、流速分布においてより顕著にあらわれる。

これらの結果は、すべて理論的考察に基づいて作成された模擬地盤より得られたものであり、自然地盤における観測や、実験に基づいて得られたものではない。また、いくつかの仮定を導入しており、これらの妥当性は今後の検討課題と認識している。

しかしながら、ここで得られた模擬地盤は、自然地盤の特徴を、容易に再現し得る可能性を有しており、その不均質性に由来する様々な現象を解明する上できわめて有効であると考えられる。

また、透水係数の空間分布について、調査・試験によって得られる情報は一般に局所的なもの、あるいは平均値・標準偏差等に限られる。本手法はこれらの情報から、自然地盤の特徴を失わずに、空間的に異なる透水係数の分布パターンを無数に発生させることができあり、この模擬地盤を用いて解析することによって、注目する物理量（例えば水位・水頭、濃度、流量など）が存在する範囲を確率的に予測し得る。さらに、この予測に基づいて水位・水頭等の追加

的な観測を行えば、その観測結果の再現性を検証することによって、現場の地盤条件により近い模擬地盤を抽出し、流況の予測精度を向上させられると考える。

なお、ここでは透水係数の空間分布を対象としたが、これに限らず、不均質地盤における各種の土質定数の空間分布を考える上でも、本手法を適用することは可能であると思われる。

参考文献

- 1) たとえば、水みち研究会編：水みちを探る－井戸と湧泉と地下水の保全のために、pp.3-7、けやき出版、1992.
- 2) 鶴田明寛、神野健二、上田年比古、平野文昭：透水量係数の空間分布推定について、第39回土木学会年次学術講演会概要集第2部、pp.1-2、1984.
- 3) 田中靖治、奥野哲夫、鈴木 誠：透水係数の空間分布を考慮した地下水解析手法の提案、土木学会論文集、No.517／III-31, pp.83-92, 1995.
- 4) 本城勇介、福井宏行、小川正二：拡張ベーツ法による広域地下水解析モデルの逆解析：定常データに基付く場合、土木学会論文集、No.535／III-34, 93-102, 1996.
- 5) 斎藤雅彦、川谷 健：現場水頭観測値に基づく漏水性被圧帶水層の透水係数の逆解析、水工学論文集、第42巻、pp.337-342, 1998.
- 6) Freeze, R. A. : A stochastic-conceptual analysis of onedimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media, *Water Resour. Res.*, Vol.11, No.5, pp.725-741, 1975.
- 7) 原田守博、内田浩一、高木不折：地下水流动モデルのパラメータ評価に関する一考察、第39回土木学会年次学術講演会概要集第2部、pp.5-6、1984.
- 8) 竹内篤雄：温度測定による流动地下水調査法、pp.1-10、古今書院、1996.
- 9) たとえば、原田守博、高木不折：不均質帶水層における透水試験結果の不確定性、土木学会論文集、No.443／II-18, pp.109-112, 1992.
- 10) Delhomme, J. P. : Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameters : a geostatistical approach, *Water Resour. Res.*, Vol.15, No.2, pp.269-280, 1979.
- 11) Bear, J. : Dynamics of fluids in porous media, 764 pp., Elsevier, New York, 1972
- 12) 武者利光：ゆらぎの世界－自然界の $1/f$ ゆらぎの不思議、pp.106-134、講談社、1980.
- 13) 脇田栄治、松尾 稔：不同沈下のフラクタル的性質とそれを応用した沈下推定、土木学会論文集、No.529／III-33, pp.69-81, 1995.

(1999. 3. 8 受付)

THEORETICAL STUDY ON SPATIAL DISTRIBUTION OF HYDRAULIC CONDUCTIVITY

Masahiko SAITO and Takeshi KAWATANI

This paper presents the theoretical investigation of the spatial distribution of hydraulic conductivity in a stratum that is considered to be geologically homogeneous and proposes a methodology of numerically generating more realistic nonuniform homogeneous ground. It was shown that the hydraulic conductivity of the numerically generated ground was always lognormally distributed. Moreover, the power spectrum of a spatial variation of the hydraulic conductivity resulted in nearly $1/f$ type. The analysis of flow in the generated grounds show that even if the grounds are geologically homogeneous there exist locally predominant flow paths as commonly observed in natural groundwater flow.