

# 非線形分散多層波動モデルの改良と 準3次元波動場への適用

金山 進<sup>1</sup>・田中 仁<sup>2</sup>・首藤伸夫<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 工修 五洋建設(株) 技術研究所(〒329-2746 栃木県那須郡西那須野町四区町 1534-1)

<sup>2</sup>正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

<sup>3</sup>フェロー 工博 岩手県立大学教授 総合政策学部(〒020-0173 岩手県岩手郡滝沢村滝沢字菓子 152-52)

長波近似方程式を多層連成させた非線形分散多層波動モデルは、相対水深の大きな範囲にまで線形分散関係および2次の非線形干渉を精度良く表現できるとともに準3次元問題の取り扱いが容易であるという多層モデル特有の利点を有している。本論文では、計算効率の向上および準3次元問題への適用性向上をそれぞれ目的とする2種類の新たな方程式系を提案して精度の理論的確認を行うとともに、1次元での強非線形強分散波動場、固定浮体の存在下での準3次元散乱波動場に対する数値計算を行い、実験結果との比較を通じてモデルの基本的適用性を検討した。

**Key Words:** multi-level wave model, nonlinear waves, dispersion relation, padé approximation, second-order nonlinear interaction, quasi-3-dimensional wave field

## 1. はじめに

沿岸域での波浪変形を正確に把握することは、構造物の設計条件、周辺海域の地形変化などを検討する上で重要な課題である。波浪変形のすべての要素を正確に評価するためには3次元の流体の基礎方程式を直接的に扱うことも考えられるが、計算機容量および計算効率などの実用的観点から波動場の鉛直方向の特性をモデル化した平面波浪解析法が大きな役割を担うことになる。最近では、Boussinesq方程式などの長波近似モデルが広く用いられるとともに、さらに精度の高い非線形分散波モデルの開発が盛んに行われている。

鉛直積分型の平面波浪モデルの精度向上は如何にして流速の鉛直分布を高精度に表現するかという問題に帰着され、代表深度の水平流速を従属変数とすることにより精度を向上させたNwogu<sup>1)</sup>の修正Boussinesq方程式が示されて以降、これに対して分散性の近似精度を上げて流速の鉛直分布を深度の4次式で表現した喜岡・柏原<sup>2)</sup>、Madsenら<sup>3)</sup>、GobbiとKirby<sup>4)</sup>などの高次長波近似方程式が導かれている。また、灘岡・中川<sup>5)</sup>、磯部<sup>6)</sup>、後野<sup>7)</sup>などのように複数モードの流速成分を重み付残差法や変分原理に基づいて連成させることによって高い精度を得る波動モデルも提案されている。長波近似方程式を多層

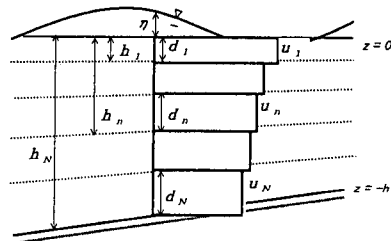


図-1 多層モデルの変数の定義

連成させた金山<sup>8)</sup>の多層モデルもやはり流速の鉛直分布の表示精度を向上するという発想に基づくものであり、本研究では、これに対して新たな形式を提案するとともに、多層モデルとしての特徴を生かした準3次元波動場への適用性を検討した。

## 2. 基礎方程式

本研究では、既に表示されている<sup>8)</sup>各層毎の圧力を消去した運動方程式を用いるモデル(モデルI)に加えて、自由水表面での力学的境界条件と層の継ぎ目で水平流速が連続する条件より構成されるモデル(モデルII)、層間

での閉境界の取り扱いを容易にするために圧力を消去せずに運動方程式を立てたモデル (モデルⅢ) を提案する。

図-1は、本研究における多層波動モデルの模式図であり、水位  $\eta$ 、静水深  $h$  に加えて、これを  $N$  個に分割 (静水面直下を第1層、最下層を第  $N$  層とする) して設定される各層の層厚  $d_n$ 、下端までの深さ  $h_n$ 、各層上端での圧力変数  $P_n$ 、層平均水平流速  $\mathbf{u}_n$  および海底流速  $\mathbf{u}_b$  (ともに水平面内のベクトル) を用いて基礎方程式を記述する。

### (1) 流速鉛直分布の表示

鉛直流速  $w(z)$  は層毎に傾きを変える線形の鉛直分布を有するものと仮定し、連続の条件を用いて以下のように表す。

$$w(z) = -\sum_{i=n+1}^N d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i - (h_n + z) \nabla \cdot \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_b \cdot \nabla h \quad (1)$$

ただし、 $z$  は第  $n$  層に属するものとし、 $h_n$  は第  $n$  層下端までの深さであり、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  は水平方向の微分演算子である。

水平流速  $\mathbf{u}(z)$  は式(1)を用いて渦無し条件を鉛直上向きに積分し、層平均流速が  $\mathbf{u}_n$  となるように積分定数を決定して以下のように表示される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(z) = & \mathbf{u}_n + \frac{1}{6} (d_n^2 - 3(h_n + z)^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_n) \\ & + \frac{1}{2} (d_n - 2(h_n + z)) \left[ \sum_{i=n+1}^N \nabla (d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i) \right. \\ & \left. + \nabla h_n \nabla \cdot \mathbf{u}_n + \nabla (\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) \right] \quad (2) \end{aligned}$$

また、自由水面での水平流速  $\mathbf{u}_s$  および鉛直流速  $w_s$  は、式(1)および式(2)において  $z = \eta$  とすることにより、それぞれ式(3)および式(4)で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s = & \mathbf{u}_1 + \frac{1}{6} d_n^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) - \frac{1}{2} \eta^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) \\ & - \left( \frac{1}{2} d_1 + \eta \right) \left[ \sum_{i=n+1}^N \nabla (d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i) + \nabla (\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

$$w_s = -\sum_{i=1}^N d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i - \eta \nabla \cdot \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_b \cdot \nabla h \quad (4)$$

本モデルにおいては上層のいくつかは自由水面の上に位置する瞬間も含めて全層の流速は常に定義され、海底から静水面までの流速場は2次式 (水平流速) および1次式 (鉛直成分) の連鎖で表示されるが、波動振幅内の流速場は静水面を起点として第1層の分布形状を外挿した単一の式で表わされる。したがって、静水面から自由水面までの流速鉛直分布が単一の2次式 (水平流速) あるいは1次式 (鉛直流速) では十分に表示できないほどの強非線形強分散波動場に本モデルを適用した場合には十分な精度が得られない。

海底流速  $\mathbf{u}_b$  は(1)において  $n = N$ 、 $z = -h$  として以

下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_b = & \mathbf{u}_N + \frac{1}{6} d_N^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_N) \\ & + \frac{1}{2} d_N [\nabla (\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) + (\nabla h) \nabla \cdot \mathbf{u}_N] \quad (5) \end{aligned}$$

### (2) 連続式

上記の流速表示で連続式(6)を書き換え、多層モデルの連続式(7)を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \int_{-h}^{\eta} \mathbf{u} dz = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \nabla \cdot (d_i \mathbf{u}_i) + \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}_1) \\ - \nabla \cdot \left[ \frac{1}{2} \eta (d_1 + \eta) \left\{ \sum_{i=1}^N \nabla (d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i) + \nabla (\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) \right\} \right] \\ + \frac{1}{6} \nabla \cdot [\eta (d_1^2 - \eta^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1)] = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

### (3) 各層毎の運動方程式

渦無しの条件を用いて鉛直方向のオイラーの式を任意深度  $z$  から自由水面  $\eta$  まで積分すると圧力  $p(z)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{p(z)}{\rho} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}(z) \cdot \mathbf{u}(z) + w(z)^2) \\ = \int_z^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz' + g(\eta - z) + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s + w_s^2) \quad (8) \end{aligned}$$

これを用いてオイラーの水平方向の運動方程式は以下のように書き換えることができる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + w_s^2) + g \nabla \eta = -\nabla \int_z^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz' \quad (9)$$

式(1)~式(8)を用いて式(9)を表示して層毎に鉛直平均をとることにより、各層の水平方向の運動方程式(10)を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s + w_s^2) + g \nabla \eta \\ = \nabla \left[ \eta \sum_{i=1}^N d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\eta^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}) + \eta \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h \right] \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^N \nabla (d_i d_j \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \nabla (d_i^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t}) \\ + \sum_{i=n+1}^N \frac{1}{2} d_n \nabla (d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t}) - \sum_{i=n+1}^N (\nabla h_{n-1}) d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \\ + \frac{1}{2} \nabla (d_n^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}) - \frac{1}{6} d_n \nabla (\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}) \\ - \frac{1}{2} d_n (\nabla h_n) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} \nabla (d_i \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h) \\ + \frac{1}{2} d_n \nabla (\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h) - (\nabla h_{n-1}) (\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \cdot \nabla h) \quad (10) \end{aligned}$$

運動方程式(10)は分散項に2重和などの煩雑な表示を含んでいるが、第n層の流速に対する第i層の流速の寄与が直接的に表現できる式(11)の形で運動方程式を表示すると取扱いが容易となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s + w_s^2) + g \nabla \eta \\ = \nabla[\eta \sum_{i=1}^N d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\eta^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial t}) + \eta \frac{\partial \mathbf{a}_b}{\partial t} \cdot \nabla h] \\ + \sum_{i=1}^N \alpha_{n,i} \nabla(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t}) + \sum_{i=1}^N \beta_{n,i} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} \\ + \gamma_n \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_b}{\partial t} + \delta_n \frac{\partial \mathbf{a}_b}{\partial t} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、係数 $\alpha_{n,i}$ および $\beta_{n,i}$ は式(12)および式(17)のように4つの部分に分けると表示が容易である。係数の添え字1は式(10)の右辺第2項、添え字2は第3項、添え字3は第4項および第5項、添え字4は第5項および第6項に対応している。

$$\alpha_{n,i} = \alpha 1_{n,i} + \alpha 2_{n,i} + \alpha 3_{n,i} + \alpha 4_{n,i} \quad (12)$$

$$\alpha 1_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \leq 1) \\ \sum_{m=1}^{n-1} d_m d_i & (n > 1, i > n-1) \\ \sum_{m=1}^{i-1} d_m d_i & (n > 1, i \leq n-1) \end{cases} \quad (13)$$

$$\alpha 2_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \leq 1) \\ \frac{1}{2} d_i^2 & (n > 1, i > n-1) \end{cases} \quad (14)$$

$$\alpha 3_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \geq i) \\ \frac{1}{2} d_n d_i & (n < i) \end{cases} \quad (15)$$

$$\alpha 4_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \neq i) \\ \frac{1}{3} d_i^2 & (n = i) \end{cases} \quad (16)$$

$$\beta_{n,i} = \beta 1_{n,i} + \beta 2_{n,i} + \beta 3_{n,i} + \beta 4_{n,i} \quad (17)$$

$$\beta 1_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \leq 1) \\ \sum_{m=1}^{n-1} \nabla(d_m d_i) & (n > 1, i > n-1) \\ \sum_{m=1}^{i-1} \nabla(d_m d_i) & (n > 1, i \leq n-1) \end{cases} \quad (18)$$

$$\beta 2_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \leq 1) \\ d_i \nabla h_{n-1} & (n > 1, i > n-1) \end{cases} \quad (19)$$

$$\beta 3_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \geq i) \\ \frac{1}{2} d_n \nabla d_i - d_i \nabla h_{n-1} & (n < i) \end{cases} \quad (20)$$

$$\beta 4_{n,i} = \begin{cases} 0 & (n \neq i) \\ d_i \nabla d_i - \frac{1}{2} d_i \nabla h_i & (n = i) \end{cases} \quad (21)$$

第n成分に対する海底流速 $\mathbf{u}_b$ の寄与を表す係数 $\gamma_n$ と $\delta_n$ は以下の通りである。

$$\gamma_n = \sum_{m=1}^{n-1} d_m \nabla h + \frac{1}{2} d_n \nabla h \quad (22)$$

$$\delta_n = \sum_{m=1}^{n-1} \nabla(d_m \nabla h) + \frac{1}{2} d_n \nabla(\nabla h) - \nabla h_{n-1} \nabla h \quad (23)$$

連続式(7)および海底流速の条件式(5)に各層の運動方程式を加えて構成される未知数と条件の数が一致した方程式系をモデルIと称することとするが、その特性と適用例については既に報告されている<sup>8)</sup>。

#### (4) 自由水表面での力学的条件

速度ポテンシャル $\phi$ を用いた自由水表面での力学的条件式(24)を水平方向に微分して式(25)を得る。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=\eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \right)^2 \right\} + g \eta = f(t) \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \nabla \eta \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s + w_s^2) + g \nabla \eta = 0 \quad (25)$$

ここで次の関係を用いている。

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) \Big|_{z=\eta} + \nabla \eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_{z=\eta} \quad (26)$$

多層モデルの流速、すなわち式(1)および式(2)を用いてこれを表示すると式(27)を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s + w_s^2) + g \nabla \eta \\ = \left( \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{6} d_i^2 \right) \nabla(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t}) \\ + \left( \frac{1}{2} d_i + \eta \right) \left[ \sum_{i=1}^N \nabla(d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t}) + \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{a}_b}{\partial t} \cdot \nabla h \right) \right] \\ + \nabla \eta \left[ \sum_{i=1}^N d_i \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} + \eta \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{a}_b}{\partial t} \cdot \nabla h \right] \end{aligned} \quad (27)$$

#### (5) 層の境界での水平流速連続条件

第n層と第n+1層の継ぎ目で水平流速 $\mathbf{u}$ が連続となる条件は式(2)より容易に得られ、次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n+1} + \frac{1}{3} d_{n+1}^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}) + \frac{1}{6} d_n^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_n) \\ + \frac{1}{2} d_{n+1} \left[ \sum_{i=n+2}^N \nabla(d_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i) + \nabla h_{n+1} \nabla \mathbf{u}_{n+1} + \nabla(\mathbf{u}_b \nabla h) \right] \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}d_n\left[\sum_{i=n+1}^N\nabla(d_i\nabla\cdot\mathbf{u}_i)+\nabla h_n\nabla\mathbf{u}_n+\nabla(\mathbf{u}_b\cdot\nabla h)\right] \quad (28)$$

連続式(7)と海底流速の条件(5)に加えて、自由水表面の力学的条件(27)および層間流速連続の条件(28)を用いれば、各層毎に運動方程式を立式することなく未知数と条件の数が一致した新たな方程式系が構成され、以下これをモデルⅡと称する。

#### (6) 圧力変数の導入と層間閉境界の取り扱い

層を限定しての鉛直閉境界および層間での水平閉境界が設定でき、準3次元問題への適用が容易であることは多層モデルの特徴の一つである。鉛直閉境界は対象位置における対象層平均流速を0とすることで簡単に設定できるが、水平方向の閉境界、すなわち没水平板型の境界は以下のように取り扱う。

第 $n$ 層の上端、すなわち $z=-h_{n-1}$ の深度に水平板があるものとする、ここでの鉛直流速 $w$ が0となる条件(29)が付加される。

$$w(-h_{n-1})=-\sum_{i=n}^N d_i\nabla\cdot\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_b\cdot\nabla h=0 \quad (29)$$

これによって条件式の数が増えるが、平板直下での圧力 $p_n$ を新たに未知数として加えることにより未知数と条件式の数は一致する。しかし、このように水平方向の閉境界でのみ変数 $p_n$ を定義する方法では平板の上下で分散項の係数を使い分ける必要があり、複数の水平境界の取り扱いを考えるとかなり煩雑となる。この問題を回避するため、平板の有無に関わらず、各層の上端、すなわち $z=-h_n$ において次式で定義される新たな変数 $P_n$ を導入する。

$$P_n=\left\{\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+w^2)\right\}|_{z=-h_n} \quad (30)$$

変数 $P_n$ は式(8)の左辺に他ならず、静水面における値 $P_1$ は式(31)で与えられ、それ以降の $P_n$ は、層上端に水平板が無い場合には式(32)によって与えられる。

$$P_1=\frac{1}{2}(\mathbf{u}_s\cdot\mathbf{u}_s+w_s^2)+g\eta-\eta\sum_{i=n}^N d_i\nabla\cdot\frac{\hat{\mathbf{a}}_i}{\hat{a}}-\frac{1}{2}\eta^2\nabla\frac{\hat{\mathbf{a}}_1}{\hat{a}}-\eta\frac{\hat{\mathbf{a}}_b}{\hat{a}}\nabla h \quad (31)$$

$$P_n=P_{n-1}+gd_{n-1}-d_{n-1}\sum_{i=n}^N d_i\nabla\cdot\frac{\hat{\mathbf{a}}_i}{\hat{a}}-\frac{1}{2}d_{n-1}^2\nabla\frac{\hat{\mathbf{a}}_{n-1}}{\hat{a}}-d_{n-1}\frac{\hat{\mathbf{a}}_b}{\hat{a}} \quad (32)$$

第 $n$ 層の上端が水平閉境界となっている場合には式(32)の代わりに式(29)が立式され、変数 $P_n$ は他点との関係から陰的に決定される。

圧力変数 $P_n$ を用いた各層の運動方程式はオイラーの水平方向の方程式を層毎に鉛直平均して、水平閉境界の

有無に関わりなく、式(33)で与えられる。

$$\frac{\partial\mathbf{u}_n}{\partial t}+\nabla P_n=\frac{1}{2}d_n\sum_{i=n+1}^N d_i\nabla(\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{u}_i}{\partial t})+\sum_{i=n+1}^N\left(\frac{1}{2}d_n\nabla d_i-d_i\nabla h_{n-1}\right)\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{u}_i}{\partial t}+\frac{1}{3}d_n^2\nabla(\nabla\cdot\frac{\hat{\mathbf{a}}_n}{\hat{a}})+(d_n\nabla d_n-\frac{1}{2}d_n\nabla h_n)\cdot\frac{\partial\mathbf{u}_n}{\partial t} \quad (33)$$

圧力変数 $P_n$ を規定する式(29)、式(31)、式(32)および運動方程式(32)に連続式(7)と海底流速の条件(5)を加えて構成される方程式系をモデルⅢと称する。

以上のように多層波動モデルに対して3つの形式が提案されたが、それぞれ以下のような特徴を有する。層毎に運動方程式を立式するモデルⅠは流体密度や渦動粘性係数などを鉛直方向に変化させることが可能であり、カーテンウォールや直立潜堤などのように鉛直壁や水平板を含む構造物が存在する場合であってもその数が少なければ水平閉境界直下での圧力を未知数として追加することによって適用可能である。しかし、水平方向の閉境界の数が多くなるとプログラミングが煩雑となるため、全ての層の境界における圧力を当初から未知数として含むモデルⅢを用いるほうが得策であると考えられる。ただし、モデルⅢは未知数の数が多いため計算効率が低下する。モデルⅡはこのような準3次元的境界を含まず、かつ流体密度や渦動粘性係数などの特性を鉛直方向に変化させる必要がない場合にのみ適用可能であるが、アルゴリズムが単純であるため3つのモデルの中では最も計算効率が低い。

各モデルの計算効率が計算格子数や分割層数によってどのように変化するかという点については現時点では詳細に検討されていないが、参考のために以下に具体例を示す。4節(1)において示す1次元計算(分割層数5)の例では、格子数300、時間ステップ数1000(ただし、平均4回程度の繰返しを要した)という条件でモデルⅠの所要時間が約10分、モデルⅡの場合はこの半分の約5分であった。別途実施した平面計算(水平床、分割層数3)では格子数100×100、時間ステップ数1000(繰返し無し)の条件で、モデルⅠの所要時間は約10分、モデルⅢは約1時間を要した。なお、以上の数値は富士通VXを用いた場合のものである。

また、近年盛んに研究が進められている多成分連成型の波動モデルと本モデルを比較すると、多層化という手段によって波動流速場の表示精度向上を行った本モデルは鉛直壁や水平面を有する没水構造物などを含む準3次元な波動場への適用が容易であるという利点を有する反面、鉛直分布特性の表示精度向上の効果が静水面から自由水表面までの範囲に対しては十分に及ばず、強非線形波動場への適用に関しては課題を残している。

### 3. 基礎方程式の諸性質

1次元水平床の条件下での線形分散関係および2次の非線形干渉特性をストークス理論のものと比較することにより、基礎方程式の精度を検討する。多層モデルの場合、水深の分割方法によってこれらの特性が変化することは明らかである。波動流速の鉛直分布形状は上層ほど

急勾配となることから、ここでは便宜的に第 $n$ 層の層厚 $d_n$ を第1層の $n$ 倍、すなわち次式によって与える方法を採用する。

$$d_n = \frac{nh}{N(N+1)} \quad (34)$$

式(34)に基づいて層分割を設定したほうが等分割とするよりもモデルの精度は高くなるが、この方法が最適であるという保証はなく、同じ層数で最も高い精度を発揮する分割方法の検討は今後の課題として残されている。

なお、今回は、線形分散関係についてはモデルIIの基礎方程式、superharmonicsおよびsubharmonicsの2次非線形干渉についてはモデルIの方程式を用いて検討するが、I～IIIの3つのモデルは、これらについて全く同じ特性を示す。

#### (1) 線形分散関係

モデルIの線形分散関係については既に報告されており、ここではモデルIIを対象に検討を行う。全ての非線形項を除去した1次元水平床の方程式系に対して式(35)の形の解を代入すると、連続式より式(36)が、自由水表面での力学的条件より式(37)が、層間での水平流速の連続条件より式(38)が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta^{(1)} \cos(kx - \omega t) \\ u_n^{(1)} &= u_n^{(1)} \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

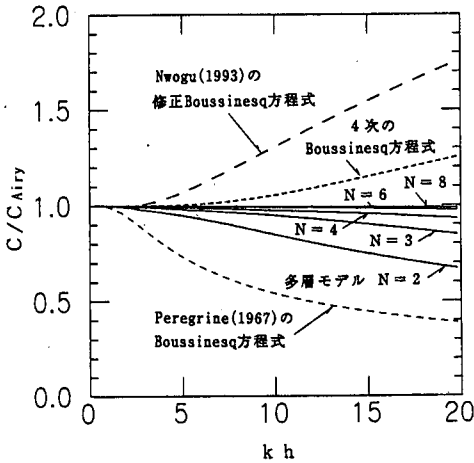


図-2 線形分散特性

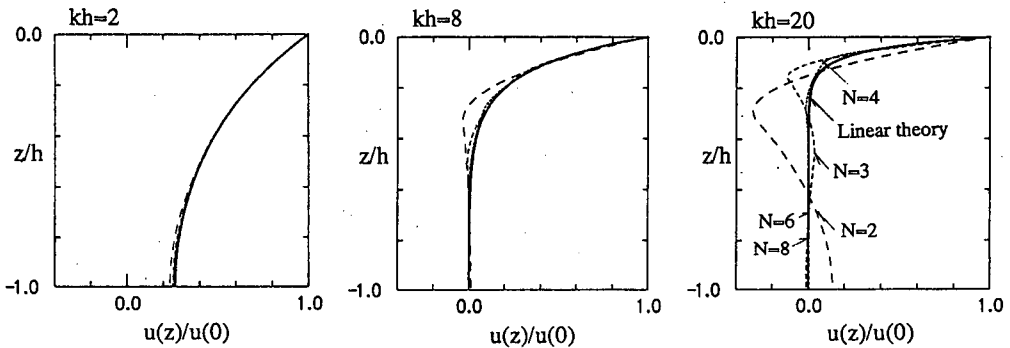


図-3 線形水平流速の鉛直分布形状の表示精度

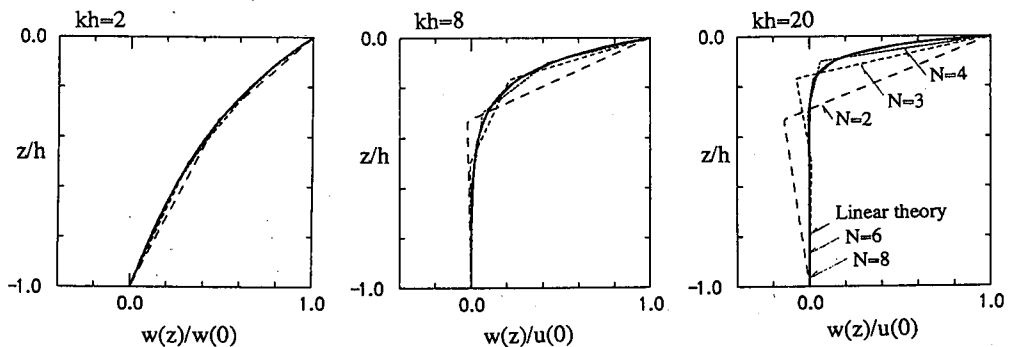


図-4 線形鉛直流速の鉛直分布形状の表示精度

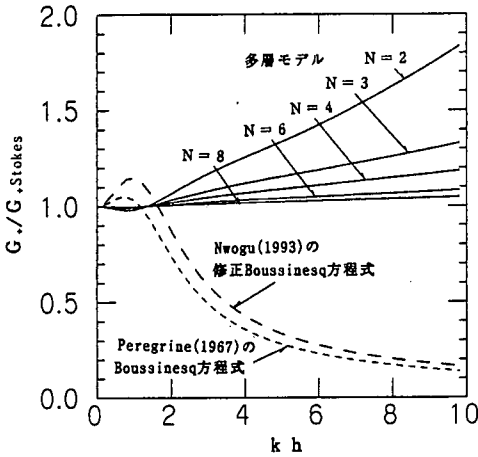


図-5 2次の非線形干渉 (superharmonics)

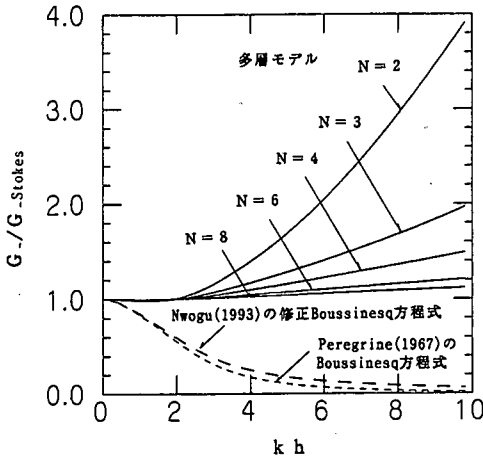


図-6 2次の非線形干渉 (subharmonics)

$$\omega \eta^{(1)} + k \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(1)} = 0 \quad (36)$$

$$-gk\eta^{(1)} + \omega \left(1 - \frac{1}{6} k^2 d_1^2\right) u_1^{(1)} + \frac{1}{2} k^2 \omega d_1 \sum_{i=1}^N d_i u_i = 0 \quad (37)$$

$$\left(1 - \frac{1}{6} k^2 d_1^2\right) u_1^{(1)} - \left(1 + \frac{1}{3} d_{n+1}^2 k^2 + \frac{1}{2} d_n d_{n+1} k^2\right) u_{n+1}^{(1)} - \frac{1}{2} (d_{n+1} + d_n) k^2 \sum_{i=n+1}^N d_i u_i^{(1)} = 0 \quad (38)$$

同次型の代数関係式である式(36)、式(37)および式(38)が自明でない解を持つ条件からモデルⅡの線形分散関係が与えられ、 $\{u_n^{(1)}\}$ は線形化した場合の水平流速鉛直分布に対応する。

図-2は、波速  $c$  ( $=\omega/k$ ) について微小振幅波理論のも

のに対する比率を相対水深  $kh$  の関数として表したものである。Preregrine<sup>9)</sup>のBoussinesq方程式、Nwogu<sup>1)</sup>による改良Boussinesq方程式および喜岡と柏原<sup>2)</sup>やGobbiとKirby<sup>4)</sup>による4次のBoussinesq方程式の分散関係式も併せ示してある。ただし、喜岡と柏原<sup>2)</sup>のものとはGobbiとKirby<sup>4)</sup>のものとは線形分散項の係数が若干異なっており、ここでは微小振幅波理論の分散関係式の(4,4) *padé* 近似に整合するように設定されているGobbiとKirby<sup>4)</sup>のものを採用している。既に報告されているモデルⅠの場合と同様、層数の増加とともに相対水深のかなり大きな範囲にまで理論値との整合が認められる。

図-3および図-4はGobbiとKirby<sup>4)</sup>と同様、 $\{u_n^{(1)}\}$ から式(1)、式(2)を用いて得られる線形流速の鉛直分布を微小振幅波理論と比較したものである。相対水深  $kh$  が大きくなるにつれて流速の鉛直分布を適切に表現するための層分割数が大きくなるのがわかるが、 $kh=20$ 程度では $N=4$ では十分な精度となっている。図中には $N=6$ および $8$ のものも示されているが、判別できないほど微小振幅波理論との整合性が高い。

以上のように、本モデルは線形分散特性に高い精度を有し、広い周波数帯において適用できるものであることが確認される。

## (2) 2次の非線形干渉

ここでは、Nwogu<sup>1)</sup>やGobbiとKirby<sup>4)</sup>などと同様、周波数の異なる2つの成分波の2次の非線形干渉について多層波動モデルとストークス理論を比較する。

水位  $\eta$  および水平流速  $u_n$  に対して2つの周波数 ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ) およびこれらの2次干渉で生じる項からなる(39)の形の解を仮定する。  $\varepsilon$  は微小量であり、1次の成分には  $\varepsilon$  が、2次の成分には  $\varepsilon^2$  が乗じられている。

$$f = \varepsilon f^{(11)} \cos \psi_1 + \varepsilon f^{(12)} \cos \psi_2 + \varepsilon^2 f^{(21)} \cos 2\psi_1 + \varepsilon^2 f^{(22)} \cos 2\psi_2 + \varepsilon^2 f^{(2+)} \cos \psi_+ + \varepsilon^2 f^{(2-)} \cos \psi_- \quad (39)$$

ここで、 $f$  は  $\eta$  または  $u_n$  であり、 $f^{(11)}$  および  $f^{(12)}$  は周波数  $\omega_1$  および  $\omega_2$  の1次成分、 $f^{(21)}$  および  $f^{(22)}$  はそれぞれの倍周波数成分であり、 $f^{(2+)}$  および  $f^{(2-)}$  はsuperharmonics (和の波) およびsubharmonics (差の波) の成分である。各項の位相関数は以下の通りである。

$$\psi_1 = k_1 x - \omega_1 t, \quad \psi_2 = k_2 x - \omega_2 t \quad (40)$$

$$\psi_{\pm} = (k_1 \pm k_2) x - (\omega_1 \pm \omega_2) t \quad (41)$$

これらをモデルⅠの1次元水平床の基礎方程式に代入し、 $\varepsilon^2 \sin \phi$  の項を整理すると、連続式より式(42)が、運動方程式より式(43)が得られる。式(42)および式(43)は、2次の量である  $\eta^{(2+)}$  および  $\{u_n^{(2+)}\}$  の  $N+1$  個の未知数に対する線形の連立方程式となっており、これらより2次の伝達関数を求めることができる。

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} \eta^{(2\pm)} - k_{\pm} \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(2\pm)} \\ = \frac{1}{2} k_{\pm} (\eta^{(11)} u_1^{(12)} + \eta^{(12)} u_1^{(11)}) \\ + \frac{1}{4} d_1 k_{\pm} (k_1^2 \eta^{(12)} \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(11)} + k_2^2 \eta^{(11)} \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(12)}) \\ - \frac{1}{12} d_1^2 k_{\pm} (k_1^2 \eta^{(12)} u_1^{(11)} + k_2^2 \eta^{(11)} u_1^{(12)}) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} u_n^{(2\pm)} - k_{\pm} g \eta^{(2\pm)} + k_{\pm}^2 \omega_{\pm} \sum_{i=1}^N \alpha_{ni} u_i^{(2\pm)} \\ = \frac{1}{2} k_{\pm} \left\{ \left(1 - \frac{1}{6} d_1^2 k_1^2\right) u_1^{(11)} + \frac{1}{2} k_1^2 d_1 \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(11)} \right\} \\ \times \left\{ \left(1 - \frac{1}{6} d_1^2 k_1^2\right) u_1^{(11)} + \frac{1}{2} k_1^2 d_1 \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(11)} \right\} \\ \mp \frac{1}{2} k_{\pm} k_1 k_2 \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(11)} \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(12)} \\ - \frac{1}{2} k_{\pm} (k_1 \omega_1 \eta^{(12)} \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(11)} + k_2 \omega_2 \eta^{(11)} \sum_{i=1}^N d_i u_i^{(12)}) \end{aligned} \quad (43)$$

式(44)で表されるsuperharmonicおよびsubharmonicの2次伝達関数  $G_{\pm}$  および  $G_{\pm}$  についてDeanとSharma<sup>10)</sup>の理論解に対する比率を相対水深  $k h$  の関数として表したものが図-5および図-6である。

$$G_{\pm}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\eta^{(2\pm)}}{\eta^{(11)} \eta^{(12)}} \quad (44)$$

横軸の  $k h$  は  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の平均周波数に対するものであり、 $\omega_1$  に対する波数  $k_1$  を  $\omega_2$  に対する  $k_2$  の1.5倍に設定するとともに  $\eta^{(1)}/h=0.1$  としている。したがって、分割層数  $N$  が3以上の場合は上層のいくつかは波谷よりも上に位置する条件での検討である。Peregrine<sup>9)</sup> および Nwogu<sup>11)</sup> の方程式に対する結果と比較して多層モデルのものは高波数域まで良好な整合を示しており、2次の非線形干渉に関しても高い精度を有することが確認される。

## 4. 数値計算

### (1) 1次元非線形強分散波浪場への適用

1次元での検証計算として、土木学会海岸工学研究現況レビュー小委員会<sup>11)</sup>が鉛直2次元の強非線形ポテンシャルモデルに対するテストケースとして採用した大山ら<sup>12)</sup>の潜堤による規則波の変形の問題(図-7)を扱った。3次元的な閉境界を含まないケースであるので、計算アルゴリズムが最も簡潔なモデルIIを対象とした。分割層数は5とし、式(34)によって各層の厚さを設定した。

数値計算に際しては、水位と流速の定義点を空間方向にはスタガード、時間方向にはズレなしに配置し、時間・空間ともに中央差分を用いた。空間格子幅  $\Delta x$  は5cm、

時間ステップ刻み  $\Delta t$  は0.2秒とした。非線形項など時間微分の施されない項は2つの時間ステップにおける値の平均値で表示する予測子・修正子法とし、修正量の最大値が0.1%以下になった時点で時間ステップを進めた。この問題に関しては毎ステップの繰返し回数は4~5回であった。入射境界においては次式により各ステップの水位  $\eta^n$  を求め、これに対する微小振幅波理論の流速鉛直分布に基づく各層の鉛直平均水平流速を与えた。

$$\eta^n = 2\eta_i - \eta^{n-1} \quad (45)$$

ここで、 $\eta_i$  は入射波の水位、 $\eta^{n-1}$  は1ステップ前の入射境界水位である。下流側の100格子に拡散項型の消波帯を配置した上で入射波周期に対応した波速で自由透過させた。

ケース4(波高5cm, 周期2.01s)およびケース6(波高5cm, 周期2.68s)に対する再現計算結果を図-8に示す。なお、ケース4についてはモデルIによる結果が既に報告されているが、今回のモデルIIの結果はこれとほぼ同じであった。ただし、数値計算の所要時間は半分程度に減少している。

図中、○印が実験結果、実線が計算結果である。潜堤下流端の測点P3においてはかなり良好な再現性が認められるが、潜堤通過後の測点P4およびP5における再現性は必ずしも十分とはいえない。層数5での計算であるので、3.での検討によれば、水平床条件下では  $k h = 10$  の高波数域に至るまで位相速度の誤差は5%以内(図-2)、 $\eta/h=0.1$  程度の非線形性のもとでのsuperharmonicsの2次干渉の誤差は15%以内(図-5)であり、subharmonicsに対するものでも30%以内(図-6)という精度を有するが、これを以てしても再現性はこの程度にとどまる。ここでの計算では潜堤上で  $\eta/h$  の値が0.5程度にまで増加しており、このような強非線形の条件下への本モデルの適用について課題を投げかける結果となっている。また、数値計算における打ち切り誤差の問題なども関与していると考えられ、さらなる検討の必要が認められる。

### (2) 準3次元散乱問題への適用

固定浮体に対する準3次元散乱波動場の実験再現計算によりモデルIIIに対する精度検証を行った。図-9に示すように幅3m、水深24cmの水路に没水深12cm、幅、奥行ともに1mの固定浮体を設置し、周期0.85秒(ケース1)および1.7秒(ケース2)の規則波を入射させた。入射波高は両ケースとも3cmである。

数値計算に際しては分割層数は3とし、各層の層厚は式(34)にしたがって第1層(最上層)を水深の1/6、第2層を1/3、第3層を1/2に設定した。したがって、第3層の上端に固定浮体の底面が位置する条件となる。水位は  $\Delta t/2$  毎に、 $x$  方向の流速と  $y$  方向の流速は  $\Delta t/2$  シフト

させて  $\Delta t$  間隔で交互に定義するタイプの ADI 法を採用し、複数の未知数に対するバンドマトリックスの解法には拡張されたトーマス法を用いた。  $\Delta x$ 、  $\Delta y$  ともに 5 cm、  $\Delta t$  は 0.2 秒とした。非線形項は 2 つの時間ステップでの諸量の積の形で表現し、移流項については水表面流速  $u_s$  に代えて第 1 層の平均流速  $u_1$  を用い、繰り返し計算は行っていない。また、3 次以上の非線形項は無視している。

水位時系列の再現結果を図-10 に示す。破線が実験結果、実線が計算結果である。いずれの周期についてもかなり良好な再現性が認められる。周期 0.85 秒のケース 1

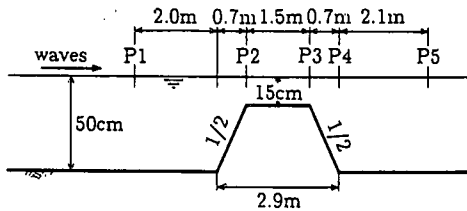
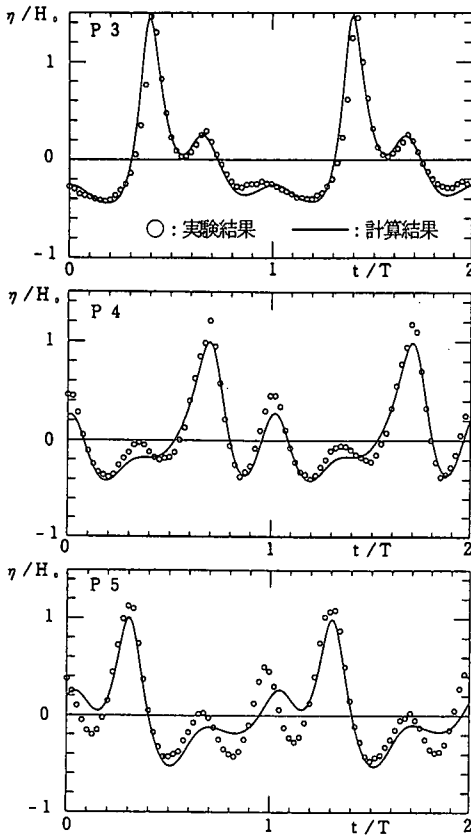
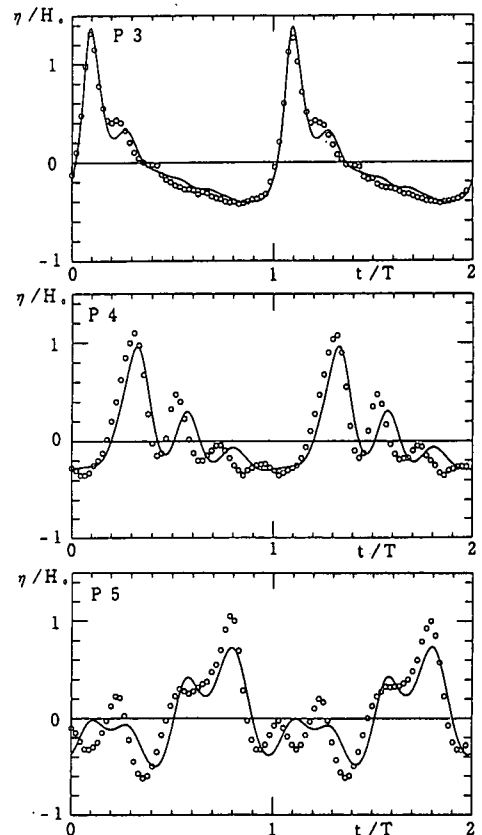


図-7 潜堤の諸元および測点



(a) ケース 4



(b) ケース 6

図-8 水位変動の再現結果

は正弦波に近い波形となっており非線形性の影響が少ないケースであるが、各測点における振幅・位相は良好に再現されている。周期 1.7 秒のケース 2 では非線形性の効果がみられ、上手側では 2 次波峰を有する波形となっている。計算はこういった波形の特徴も含めて全体を良好に再現しており、モデルⅢの準 3 次元問題への適用性を裏付けるものといえる。

今回の計算では、浮体表面での流速を 0 としているが、任意の流速を与えることも可能であり、浮体の動揺モデルと組み合わせることにより準 3 次元の矩形浮体の非線形動揺解析などにも応用できる可能性も有している。

## 5. おわりに

長波近似モデルを多層連成させることにより高い精度を有する平面波解析方法を検討し、対象とする問題に応じて 3 種類のモデルを提案した。基礎方程式の精度を理論的に検討するとともに 1 次元問題および準 3 次元問題に対する数値計算を行い、本手法の基礎的な適用性を



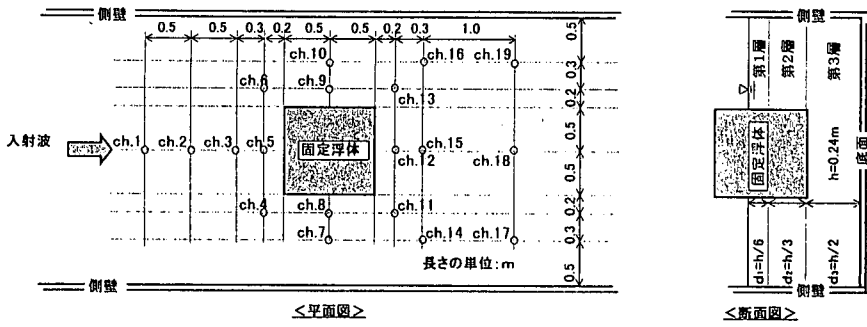


図-9 固定浮体実験の測点配置

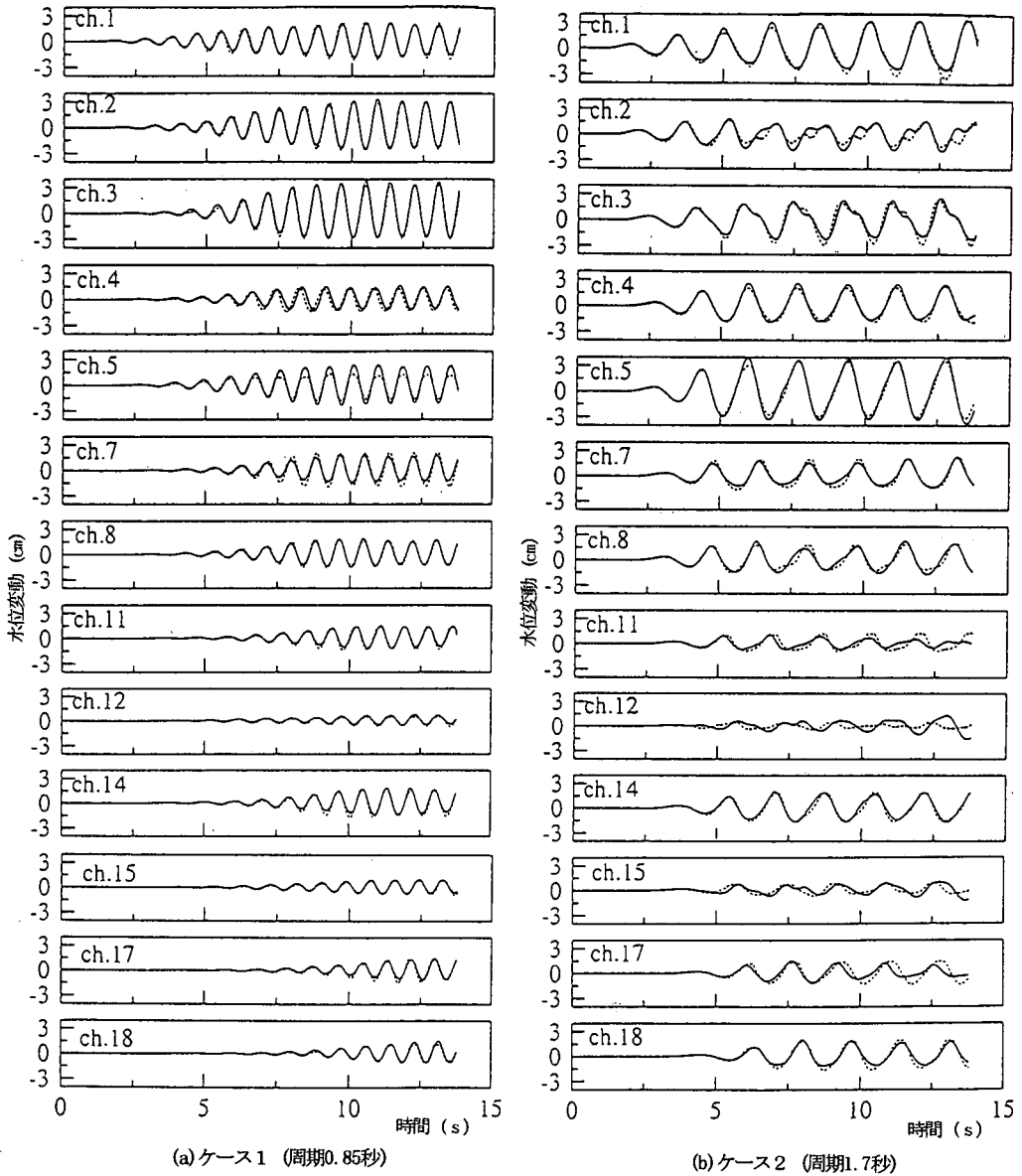


図-10 固定浮体による非線形散乱波形の再現計算結果

検討した。この結果得られた主な結論を以下に示す。

- 1) 提案された多層波動モデルの線形分散特性および2次の非線形干渉特性は層数の増加とともにストークス理論のものに漸近することが確認された。
- 2) 1次元での検証データとして対象とした潜堤による規則波の変形問題に対する再現計算は、非線形性がある程度大きくなった場合に対する精度について検討の必要性を示す結果となった。
- 3) 固定浮体による散乱場の実験再現計算により、多層モデルとしての特徴を生かした準3次元問題への適用性が確認された。

#### 参考文献

- 1) Nwogu, O. : Alternative form of Boussinesq equations for near shore wave propagation, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, Vol.119, No.6, pp.618-638, 1993.
- 2) 喜岡 涉, 柏原謙爾 : 高次Boussinesq方程式とそのステップ地形への適用性, *海岸工学論文集*, 第42巻, pp.166-170, 1993.
- 3) Madsen, P.A., Banijamali, B., Schäffer, H.A. and Sørensen, O.R. : Boussinesq type equations with high accuracy in dispersion and nonlinearity, *Proc. 25th I.C.C.E.*, pp.95-108, 1996
- 4) Gobbi, M.F., and J.T. Kirby : A fourth order Boussinesq -type wave model, *Proc. 25th I.C.C.E.*, pp.1116-1129, 1996.
- 5) 瀬岡和夫, 中川康之 : 新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み, *海岸工学論文集*, 第40巻, pp.6-10, 1993.
- 6) 磯部隆彦 : 非線形緩勾配方程式の提案, *海岸工学論文集*, 第41巻, pp.1-5, 1994.
- 7) 後野正雄 : 強非線形平面不規則波動場に対する連成波動方程式とその基礎的特性, *海岸工学論文集*, 第41巻, pp.16-20, 1994
- 8) 金山 進 : 強分散性非線形平面波浪場に対する多層モデルの提案, *海岸工学論文集*, 第44巻, pp.41-45, 1997.
- 9) Peregrine, D.H. : Long waves on a beach, *J. Fluid Mech.* Vol.27, pp.815-827, 1967.
- 10) Dean, R.G., and Sharma, J.N. : Simulation of wave systems due to nonlinear directional spectra, *Proc. Int. Symp. on Hydrodyn. in Oc. Engng.*, Norwegia Hydrodynamics Laboratory, Trondheim, Norway, pp.1211-1222, 1981.
- 11) 土木学会海岸工学委員会研究現況レビュー小委員会 : 海岸波動, pp.146-200, 1994
- 12) 大山 巧, 喜岡 涉, 多田彰秀 : 非線形分散波動場に対する数値モデルの適用性について, *海岸工学論文集*, 第40巻, pp.11-15, 1993.

(1998. 10. 2 受付)

## AN IMPROVEMENT OF NONLINEAR DISPERSIVE MULTI-LEVEL WAVE MODELS AND THEIR APPLICATION TO QUASI-3-DIMENSIONAL PROBLEM Susumu KANAYAMA, Hitoshi TANAKA and Nobuo SHUTO

Two new versions of the multi-level models for nonlinear dispersive water, in which vertical profile of horizontal velocity is assumed to be a chain of quadratic portions, are proposed aiming to improvement of efficiency of calculation and applicability to quasi-3-dimensional problem respectively. The properties of the model in dispersion relation and second-order nonlinear interactions are confirmed by comparison with that of the Stokes wave theory. The applicability of the models is examined by reproduction of experimental result for submerged dike and floating body.