

# 順圧力勾配を有する開水路流れにおけるせん断 応力分布に関する研究

鬼束幸樹<sup>1</sup>・禰津家久<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 博(工) 京都大学大学院助手 環境地球工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

<sup>2</sup>正会員 工博 京都大学大学院教授 環境地球工学専攻 (同上)

順圧力勾配を有する2次元開水路流において、摩擦速度と最大流速との比の流下方向変化が微小であるという仮定を用いて運動方程式を近似的に解いた。その結果、せん断応力分布が開水路等流のものと比較すると、やせた分布になるといった解を得た。この予測値はLDA (Laser Doppler Anemometer) によって計測したせん断応力分布と良好な一致を示し、従来用いられていた多項式による予測よりも良好な解を示すことを明らかにした。また、逆圧力勾配流れにおいては外部変数表示で基準化することが妥当であるが、順圧力勾配流れにおいては内部変数表示で基準化の方が妥当であることも示した。

**Key Words :** open channel flow, turbulence, favorable pressure gradient, shear stress, prediction

## 1. はじめに

圧力勾配を有する流れには、流下方向に圧力が増加する逆圧力勾配流れ (Bernoulli の定理より減速流となる) と、流下方向に圧力が減少する順圧力勾配流れ (加速流となる) とがある。逆圧力勾配流れにおいては、圧力勾配の増加に伴って抵抗係数が減少するが<sup>1)</sup>、圧力勾配がある程度以上増加すると、逆に抵抗値が増し、ついには剥離現象を生じさせてしまう<sup>2)</sup>。また、順圧力勾配流れにおいては、burst の発生が押さえられ、再層流化現象を生じさせるなど、圧力勾配が流れに対して及ぼす影響は極めて大きいといえる<sup>3)</sup>。そのため、従来より境界層流を中心として逆圧力勾配および順圧力勾配を有する流れの研究がなされてきた。

逆圧力勾配境界層流に関しては、Clauser<sup>1)</sup>は風洞の形状を工夫することによって、速度欠損表示させた風速分布が流下方向に相似な流れ場 (平衡境界層) を作り出し、抵抗係数が減少することを示した。しかし、風洞断面積の流下方向拡大率がある程度急になると逆に抵抗係数が増加することを Kline<sup>2)</sup>が明らかにした。Mellor & Gibson<sup>4)</sup>は逆圧力勾配を有する平衡境界層において、最大流速と摩擦速度との比の流下方向変化が微小であるという仮定のもとに、運動方程式を外部変数で整理して近似的に解き、境

界層内の全域におけるせん断応力分布の近似解を得た。この近似解法は流速分布およびせん断応力分布が境界層厚や最大流速といった外部変数を用いて無次元化することによって基準化できるという Clauser<sup>1)</sup>、Townsend<sup>5),6)</sup>の実験事実に基づいている。さらに、Thomas & Hasani<sup>7)</sup>はせん断応力分布を多項式で近似し、係数を実験値に基づいて同定することで実測値の再現を試みている。Townsend<sup>5),6)</sup>、Stratford<sup>8)</sup>、Mellor<sup>9)</sup>は、底面近傍のせん断応力分布に着目し、底面におけるせん断応力の鉛直勾配が圧力勾配によって決定されていることを予測した。この予測値は Bradshaw<sup>10)</sup>の計測結果と良好な一致を示したが、せん断応力分布の壁面境界条件しか予測できず、境界層内部におけるせん断応力分布の予測が不可能であった。

順圧力勾配を有する境界層流については、Kline *et al.*<sup>3)</sup>によって圧力勾配を系統的に変化させた流れ場が可視化計測され、圧力勾配が強くなると burst の発生率が減少することを明らかにした。この結果は後に三栖ら<sup>11)</sup>、一条ら<sup>12)</sup>によっても確認された。Badri Narayanan<sup>13)</sup>、Badri Narayanan & Ramjee<sup>14)</sup>は圧力勾配が強くなると抵抗係数が層流のものに漸近していくことを明らかにした。この理由としては流速分布が log 則から層流で成立する Falker-Skan の分布に近づくことが挙げられると Jones & Launder<sup>15)</sup>は述

べている。

一方、圧力勾配を有する開水路流に関する研究は境界層における研究よりかなり遅れて最近着手された。この理由として、水流の流速計測の困難さが挙げられる。しかし、計測機器の発達に伴って圧力勾配を有する開水路流れの計測が次第に可能となってきた。Song & Graf<sup>16)</sup>は超音波流速計 (ADVP : Acoustic Doppler Velocity Profiler) を用いて実験室内で逆圧力勾配を有する開水路流の乱流計測を行い、半水深付近で乱れ強度が禰津<sup>17)</sup>の普遍式よりも増加することを明らかにした。さらに、流速分布にべき乗則を適応してせん断応力の予測を試みているが、圧力勾配が変化してもべき乗数を一定として解析している。鬼束ら<sup>18)</sup>は外部変数表示された流速分布に log-wake 則を適応して、逆圧力勾配を有する開水路流における運動方程式を解析的に解き、せん断応力分布を近似的に得ることに成功した。彼らは逆圧力勾配を有する開水路流においては、流速分布に変曲点を生じるので、べき乗則よりも log-wake 則のほうが妥当であるとしている。log-wake 則の有効性については禰津ら<sup>19)</sup>によるレーザードップラー流速計 (LDA : Laser Doppler Anemometer) を用いた高精度な計測結果によっても証明されている。

順圧力勾配を有する開水路流の乱流計測を初めて行ったのは Cardoso *et al.*<sup>20)</sup>である。彼らは Hot-film 流速計を用いた乱流計測を行い、乱れ強度が2次元開水路等流で成立する禰津の普遍式よりも減少することを示した。禰津ら<sup>19)</sup>はフラットな鉄板を用いて加速部を設けた流れを作成し、LDA を用いて広範囲な圧力勾配を含む流れを計測した。その結果、乱れ強度だけでなく Reynolds 応力も等流の分布よりもやせた分布になることを実験的に示した。浦ら<sup>21)</sup>および竹本ら<sup>22)</sup>は広範囲な圧力勾配下における流れを X 型 Hot-film 流速計を用いて計測し、流下に伴って乱れエネルギーが減少することを明らかにした。このような、Cardoso *et al.*<sup>20)</sup>、禰津ら<sup>19)</sup>、浦ら<sup>21)</sup>および竹本ら<sup>22)</sup>による順圧力勾配を有する開水路流の研究によって、乱れ強度分布やせん断応力分布が等流のものよりもやせることおよびその傾向が圧力勾配の変化とともに顕著になることを明らかにしたが、逆圧力勾配流れと異なり、せん断応力分布等の予測に関してはほとんど研究されていない。最近、禰津ら<sup>23)</sup>は Thomas & Hasani<sup>7)</sup>の提案した多項式を用いて順圧力勾配を有する開水路流におけるせん断応力の予測を試みた。しかし、多項式における係数は経験的なものであることや、そもそも多項式を用いることに物理的な根拠が薄いことなどの欠点は否めない。本

研究では、順圧力勾配を有する開水路流において、運動方程式を近似的に解き、せん断応力分布の予測を試みるものである。

## 2. 理論的考察

2次元開水路流において、流下方向に  $x$  軸、 $x$  軸と垂直上向きに  $y$  軸をとり、 $x$ 、 $y$  軸方向の時間平均流速をそれぞれ  $U$ 、 $V$ 、瞬間変動流速を  $u$ 、 $v$  とすると、定常な2次元開水路流の連続の式と運動方程式は、以下ようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (2)$$

$$p = \rho g(h - y) \cos \theta \quad (3)$$

ここに、 $g$  は重力加速度、 $\sin \theta$  は水路床勾配、 $\rho$  は水の密度、 $p$  は圧力、 $\tau$  はせん断応力であり、式(3)の静水圧近似を用いている。さて、鬼束ら<sup>18)</sup>は逆圧力勾配を有する開水路流において、流速分布に速度欠損則を用い、鉛直座標の無次元化に水深を用いた。

$$F = \frac{U_{\max} - U}{U} \quad (4)$$

$$\xi = \frac{y}{h} \quad (5)$$

ここに、 $U$  は摩擦速度、 $U_{\max}$  は最大流速である。

順圧力勾配を有する開水路流においては、後に示すが外部変数表示よりも内部変数表示の方が適している。そこで、流速の無次元化および鉛直座標の無次元化を内部変数を用いて以下のように行う。

$$U^+ = \frac{U}{U} \quad (6)$$

$$y^+ = \frac{yU}{\nu} \quad (7)$$

ここに、 $\nu$  は動粘性係数である。まず、式(2)における慣性項の整理を行う。式(6)を用いると、次式が成り立つ。

$$U = \gamma U^+ U_{\max} \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{U}{U_{\max}} \quad (9)$$

ここで、 $\gamma$  の流下方向変化が他の諸量の流下方向変化よりも微小であると仮定する。

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

う。式(10)を考慮すると次式の微分演算子が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{y^+}{U_{\max}} \frac{\partial U_{\max}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y^+} \quad (11)$$

式(11)を用いて式(8)を  $x$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \gamma \frac{\partial U_{\max}}{\partial x} \left( \frac{\partial U^+}{\partial y^+} y^+ + U^+ \right) \quad (12)$$

が求められ、また、式(8)を  $y$  で偏微分すると次式が求められる。

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \gamma^2 \frac{U_{\max}^2}{\nu} \frac{\partial U^+}{\partial y^+} \quad (13)$$

また、式(12)を連続式(1)に代入し、両辺を0から  $y^+$  まで積分する。このとき、境界条件、

$$V|_{y=0} = 0 \quad (14)$$

が成立するので結局は次式となる。

$$V = -\frac{\nu}{U_{\max}} \frac{\partial U_{\max}}{\partial x} U^+ y^+ \quad (15)$$

ここで、式(8)、(12)、(13)および(15)を式(2)に代入すると、次式となる。

$$\gamma^2 U^+ U_{\max} \frac{\partial U_{\max}}{\partial x} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (16)$$

さらに、両辺に  $\nu/U_*^3$  を乗じると次式が得られる。

$$\frac{\partial \tau^+}{\partial y^+} = p^+ - \frac{\nu g}{U_*^3} \sin \theta + \frac{\nu}{\gamma U_{\max}^2} \frac{\partial U_{\max}}{\partial x} \quad (17)$$

ただし、

$$\tau^+ = \frac{\tau}{\rho U_*^2} \quad (18)$$

$$p^+ = \frac{\nu}{\rho U_*^3} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (19)$$

であり、以下に、 $p^+$  を圧力勾配パラメータと呼ぶことにする。さて、式(15)を0から  $y^+$  まで積分し、底面における境界条件、

$$\tau|_{y=0} = \rho U_*^2 \quad (20)$$

を用いると次式となる。

$$\tau^+ = 1 + p^+ y^+ - \frac{\nu g}{U_*^3} \sin \theta y^+ + \frac{\nu}{\gamma U_{\max}^2} \frac{\partial U_{\max}}{\partial x} \int_0^{y^+} U^+ dy_1^+ \quad (21)$$

断応力分布式(21)と開水路等流におけるせん断応力分布式を比較検討する。開水路等流においては次式が成立する。

$$\frac{\partial U_{\max}}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

$$p^+ = 0 \quad (23)$$

そのため、式(21)は次式となる。

$$\tau^+ = 1 - \frac{\nu g}{U_*^3} \sin \theta y^+ \quad (24)$$

また、外部変数表示すると、

$$\frac{\tau}{\rho U_*^2} = 1 - \frac{g h \sin \theta}{U_*^2} \xi \quad (25)$$

えられる。

$$U_* = \sqrt{g h \sin \theta} \quad (26)$$

応力分布式となる。

$$\frac{\tau}{\rho U_*^2} = 1 - \xi \quad (27)$$

次に順圧力勾配 ( $p^+ < 0$ ) を有する開水路流におけるせん断応力分布式(21)と境界層流におけるものと比較する。境界層流においても式(1)は成立するが、式(2)に関しては、重力項がゼロとなる。このことを考慮すると、式(21)より順圧力勾配を有する境界層流の底面近傍におけるせん断応力は、

$$\tau^+ = 1 + p^+ y^+ \quad (y^+ \ll 1) \quad (28)$$

と記述でき、Stratford<sup>8)</sup>、Townsend<sup>9)</sup>および Mellor<sup>9)</sup>の式と一致する。

ところで、重力項を形式上圧力項に含めて記述すれば、圧力勾配を有する開水路流と境界層流の支配方程式は同一となるが、ゼロ圧力勾配流れを考えた場合、境界層流では  $p^+ = 0$  となるが、開水路流では有限の値をもつ。また、水路床勾配が同一で圧力勾配が変化する状態、あるいは、逆に圧力勾配が同一で水路床勾配が変化する状態を考えると、得られた諸量が圧力勾配による影響か重力による影響かが判断できない。そのため、本研究においては、重力項と圧力項を分離した方程式(21)を用いている。現在まで重力項の有無が乱流構造に与える影響については、圧力勾配流れの研究においてはほとんど解明されていない。唯一、ゼロ圧力勾配流れの境界層流と開水路等流におけるせん断応力が異なる分布になることが知られている。この点については、今後解明する必要がある。

境界層流においては式(3)の代わりに次式が成立する。

$$U_{\max} \frac{dU_{\max}}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (29)$$

最近、禰津ら<sup>24)</sup>は Badri Narayanan & Ramjee<sup>14)</sup>が行った順圧力勾配境界層流の実験とほぼ同様な幾何学形状を有する開水路流において、圧力勾配パラメータ

$p^+$  の挙動が境界層流におけるものと比較して著しく異なることを示した。その理由として開水路流と境界層流における圧力勾配  $dp/dx$  の発生が、それぞれ式(3)と式(29)といった重力項の有無によるからであると述べている。また、瀬津ら<sup>24)</sup>は開水路における圧力勾配パラメータ  $p^+$  には、境界層流のものと比較すると Froude 数が陰的に含まれていることも指摘した。このように、順圧力勾配を有する開水路流と境界層流との違いは、重力作用の有無および圧力の発生機構が異なることによる圧力勾配パラメータ  $p^+$  の挙動の違いが挙げられる。

### 3. 実験装置および実験条件

#### (1) 実験装置

本実験で用いた水路は、長さ10m、全幅40cmの可変勾配型循環式直線水路である。図-1に示すように水路の上流端から約7mの地点より下流側に鉄板を用いて加速部を設けた。以下、加速部よりも上流の領域を「等流部」、加速部よりも下流の領域を「下流部」と呼ぶこととする。

計測は、流速分布計測と水面形計測を行った。まず、流速分布の計測について説明する。流速計測に用いたものは後方散乱型2成分アルゴンイオンレーザー流速計(LDA)である。4Wのレーザー発信器から発生したレーザー光線は、ビームスプリッターによって4本のビームに分離され、このうち2本が40MHzの周波数シフトをかけられる。そして、この4本のビームは光ファイバーを通過し、ガラス製の水路側壁から流体中に照射され、ドップラーバースト信号を発生させる。このバースト信号は光ファイバーを通過してフォトマルで検出され、Flow Analyzer (DANTEC 社製)に転送され、相関法によって流速値が算出される。レーザープローブの移動には自動トラバース装置を用いた。この自動トラバース装置は1/100mmの精度を有するため、極めて底面付近における測定が可能であり、以上の行程は全てコンピュータ制御によって行われる。

水面形計測に関しては、1/100mmの測定精度を有するデジタル型ポイントゲージとレベルを用いて水路中心線上の水面形計測を行った。測定間隔は、等流部においては50cm、加速部においては1~4cm、下流部においては1~10cmとした。

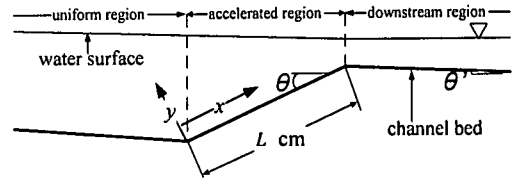


図-1 実験水路

表-1 水理諸量

Case.	L (cm)	$\sin \theta'$	$\sin \theta$	$x = 0$ (cm)			$x = L$ (cm)		
				$h_0$ (cm)	$Fr_0$	$Re_0$ $\times 10^3$	$h_1$ (cm)	$Fr_1$	$Re_1$ $\times 10^3$
A45-2	45	1/1300	-1/16	7.06	0.140	7.2	4.09	0.310	7.2
A90-2	90	1/1300	-1/32	7.11	0.140	7.2	3.83	0.340	7.2
A135-2	135	1/1300	-1/48	6.99	0.140	7.2	4.09	0.310	7.2

#### (2) 実験条件

本研究では系統的に圧力勾配を変化させた流れを作るために、表-1に示すように加速部の水路床勾配を変化させた3ケースの実験条件を設定した。すなわち、加速部長さ  $L$  を45、90および135cmと変化させた。ここに、 $Q$ は流量、 $Fr = U_m / \sqrt{gh}$ はFroude数、 $Re = U_m h / \nu$ はReynolds数、 $U_m$ は断面平均流速であり、添字0は加速部入口の諸量を、添字1は加速部出口の諸量を示している。なお、流れの発達を促進させるために、水路始端にトリッピングワイヤーを水路底面および側壁に設置した。また、LDA計測のサンプリング時間を60sとしたが、底面付近の0.1~5mmの領域においては180sとした。

### 4. 実験結果および考察

#### (1) 流れの発達

Gessner<sup>25)</sup>はトリッピングワイヤーのない閉管路において、流れが発達するには次式を満足する必要があることを実験的に示した。

$$x \geq 240R \quad (30)$$

ここに、 $R$ は径深で、 $x$ は閉管路の始端からの距離である。本実験流れは、水路始端から加速部入口まで水深の91倍程度しか流下しておらず、Gessnerの条件を厳密には満たしていない。そこで、流れが発達しているかどうかを確認する必要がある。流れの発達は底面から水面に向かって行われるが、流れが

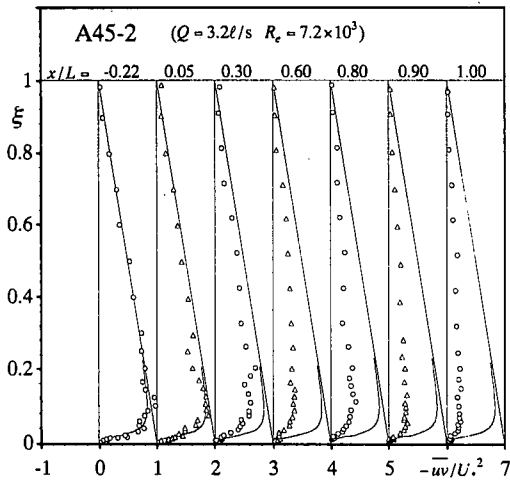


図-2 Reynolds 応力分布

未発達であった場合の乱流特性と、発達した場合における乱流特性とを比較すると、主流速分布よりも Reynolds 応力分布の方が一般に相違が大きい。そこで、図-2 に Reynolds 応力分布  $-\overline{uv}/U$  の流下方向変化を示す。各ケースのデータを識別しやすいように交互に記号 (○印および△印) を変えて表示している。図中の右下がりの直線は等流で成立するせん断応力の理論式(27)であり、曲線は次の式(31)~(34)より計算されるような全せん断応力から粘性応力を減じた等流における Reynolds 応力分布の理論解である。

$$\frac{-\overline{uv}}{U^2} = 1 - \xi - \frac{dU^+}{dy^+} \quad (31)$$

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{2(1-\xi)}{1 + \sqrt{1 + 4\ell^{+2}(1-\xi)}} \quad (32)$$

$$\ell^+ = \kappa y^+ \Gamma \quad (33)$$

$$\Gamma = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{B}\right) \quad (34)$$

ここに、 $\Gamma$  は van Driest のダンピング関数で、 $B$  はダンピング係数である。等流の場合は、 $\kappa=0.412$ 、 $B=26$  となることが Nezu & Rodi<sup>26)</sup>による LDA 計測によって示されている。なお、Reynolds 応力の無次元化に用いた摩擦速度  $U$  は次式で示される粘性底層 ( $0 \leq y^+ \leq 5$ ) の流速分布より求めた。

$$U^+ = y^+ \quad (35)$$

このような壁面のごく近傍の乱流計測が可能となったのは、高精度レーザー流速計の開発のおかげである。最近、橋津ら<sup>24)</sup>は順圧力勾配 ( $p^+ < 0$ ) を有す

る開水路流における摩擦速度  $U$  の評価には、式(35)が最も妥当であることを示した。実際に本研究においても、等流部では式(35)を用いて算出された摩擦速度と式(31)を用いて算出された摩擦速度が 99% という高精度で一致した。さて、図-2 の等流部における分布に着目すると、実測値が底面付近では粘性応力を考慮した式(31)に従い、外層においては水面付近まで式(27)の直線分布に従っていることから、流れが十分に発達していることおよびほぼ等流であることが確認できる。流れが加速部に流入すると、Reynolds 応力は等流の分布よりも小さな値をとることが認められる。これは、Cardoso *et al.*<sup>20)</sup>、Song & Graf<sup>16)</sup>、橋津ら<sup>19)</sup>、浦ら<sup>21)</sup>および竹本ら<sup>22)</sup>の結果と一致する。

## (2) 主流速分布の形状

鬼東ら<sup>18)</sup>は逆圧力勾配を有する開水路流における流速分布は、式(4)および式(5)といった外部変数表示で無次元化することによってほぼ相似な形状となることを示した。図-3 に外部変数によって無次元化された主流速分布を示し、図-4 に内部変数表示された主流速分布を示す。ここに、図-4 中の曲線は式(35)であり、右上がりの直線は、次式で得示される log 則である。

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + A \quad (36)$$

ここに、 $A$  は積分定数であり、等流における値、 $\kappa=0.412$ 、 $A=5.29$  を用いている<sup>26)</sup>。図-4 に着目すると、等流部では、粘性底層で成立する式(35)に、また、内層において log 則(36)にほぼ従っていることがわかる。しかし、加速部に流入した直後の  $x/L=0.05$  の断面においては、粘性底層をのぞく全ての領域において、流速が全体的に減少している。さらに、流下に伴い log 則よりも小さな値であった流速が内層では徐々に増加し、log 則よりも大きな流速値を持つ。そして、加速部下流域の  $x/L \geq 0.80$  では、ほぼ相似な分布形状となっている。一方、図-3 に着目すると、外層においてはほぼ同様な形状を示すのに対し、内層では若干の差異が生じる。このような傾向は他のケースにおいても観察された。そこで、本研究においては内部変数によって乱流諸量を無次元化する方法を採用する。

## (3) 摩擦速度と最大流速との比の流下方向変化

第 2 章において、順圧力勾配を有する開水路流れ

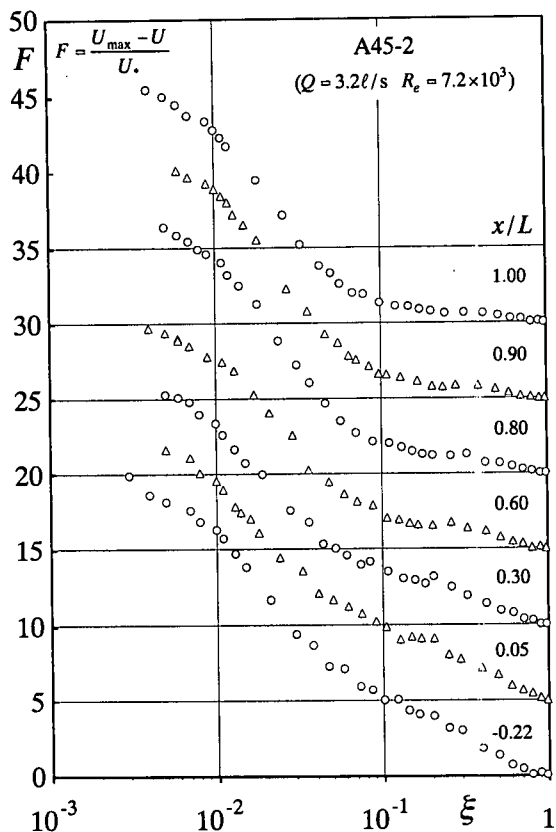


図-3 主流速分布の外層表示

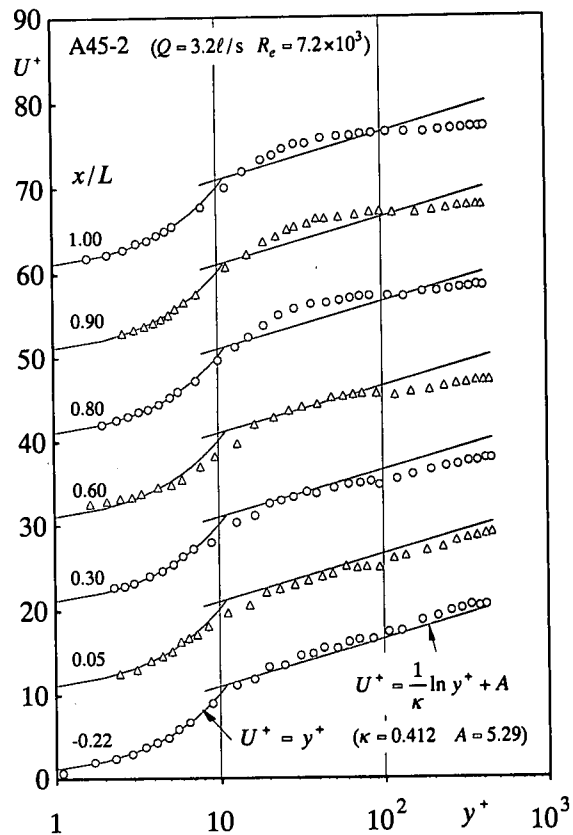


図-4 主流速分布の内層表示

における支配方程式を近似的に解いた。ただし、 $\gamma = U_* / U_{\max}$  の流下方向変化が微小であるとの仮定に基づいている。そこで、この仮定が妥当であるかどうかを確認するために、図-5 に  $\gamma$  の流下方向変化を示した。ケース A45-2, A90-2, A135-2 をそれぞれ  $\circ$ ,  $\triangle$  および  $\square$  印で示している。いずれのケースにおいてもそれほど大きな変化は見られない。 $\gamma$  の流下方向変化が完全にゼロとなる滑面流れは、境界層流および開水路流のいずれについても存在せず、唯一、流下方向に粗度が変化する粗面流れだけに存在する場合があることを Rotta<sup>27)</sup> は証明しているが、水理量の鉛直方向変化よりも流下方向変化の方がはるかに小さいといった境界層近似をふまえて考えると、第一近似としては式(10)を使用しても妥当であると判断される。

(4) せん断応力分布の予測

式(17)を用いてせん断応力  $\tau^*$  を予測するには圧力勾配パラメータ  $p^*$  を算出する必要がある。順圧力

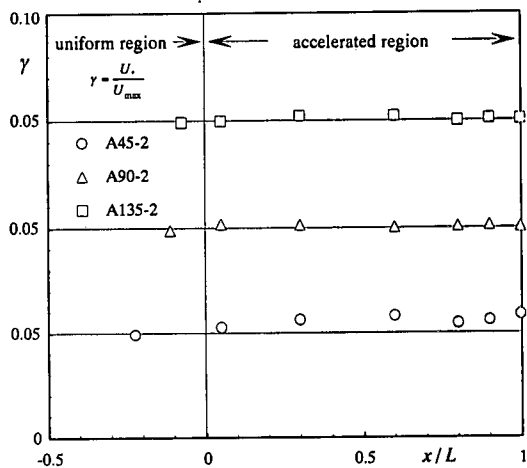


図-5  $\gamma$  の流下方向変化

勾配を有する開水路流においては、圧力勾配パラメータ  $p^*$  は式(3)の微分式と式(19)より、次式で表現できる。

$$p^+ = \frac{g\nu}{U_*^3} \frac{dh}{dx} \cos\theta \quad (37)$$

つまり、圧力勾配パラメータ  $p^+$  を正確に求めるには、水面勾配  $dh/dx$  を高精度に求める必要がある。そのため、本研究では、1/100mm の精度を有するデジタル型ポイントゲージによって水面形を測定し、さらに、3次の平滑化スプライン<sup>28)</sup>を用いて水面勾配  $dh/dx$  を算出した後、圧力勾配パラメータ  $p^+$  を算出した。また、式(21)中に含まれる最大流速  $U_{max}$  の流下方向変化に関しても3次の平滑化スプラインを用いて算出した。図-6に  $x/L=1.0$  における式(21)によるせん断応力の予測値を太線で、等流における分布を点線で、瀬津ら<sup>23)</sup>による予測値を細線で、実測値をプロットで示す。プロットの記号に関しては図-5と同様である。ただし、実測値については、得られた Reynolds 応力  $-\overline{uv}$  と速度分布から次式を用いて求められた。

$$\tau^+ = \frac{-\overline{uv}}{U_*^2} + \frac{dU^+}{dy^+} \quad (38)$$

式(38)の右辺第2項の粘性項についても、3次の平滑化スプラインを用いて算出した。また、瀬津ら<sup>23)</sup>の予測値は次式で示される。

$$\tau^+ = 1 + ap^+y^+ - \left(6 + 3ap^+R_* \left(\frac{y^+}{R_*}\right)^2 + (8 + 3ap^+R_* \left(\frac{y^+}{R_*}\right)^3 - (3 + 3ap^+R_* \left(\frac{y^+}{R_*}\right)^4) \right) \quad (39)$$

ここに、 $a$  は実験的に求められた 0.014 である。図-6の実測値に着目すると、圧力勾配パラメータの減少に伴ってせん断応力分布が痩せていることが観察される。この傾向は瀬津ら<sup>19)</sup>、Song & Graf<sup>16)</sup>、浦ら<sup>21)</sup>の結果と一致する。本研究で提案した式(21)による予測値は実測値を良好に表現していることがわかる。一方、経験式(39)の結果は圧力勾配パラメータの減少に伴って値が減少すると言った定性的な傾向は一致するものの、定量的にはかなり相違を見せている。そのため、本研究における理論式(21)と経験式(39)とを比較する。まず、式(39)を  $y^+$  で微分し、底面における値を求めると、

$$\left. \frac{\partial \tau^+}{\partial y^+} \right|_{y=0} = ap^+ \quad (40)$$

となる。一方、本研究による理論解では、

$$\left. \frac{\partial \tau^+}{\partial y^+} \right|_{y=0} = p^+ - \frac{\nu g}{U_*^3} \sin\theta \quad (41)$$

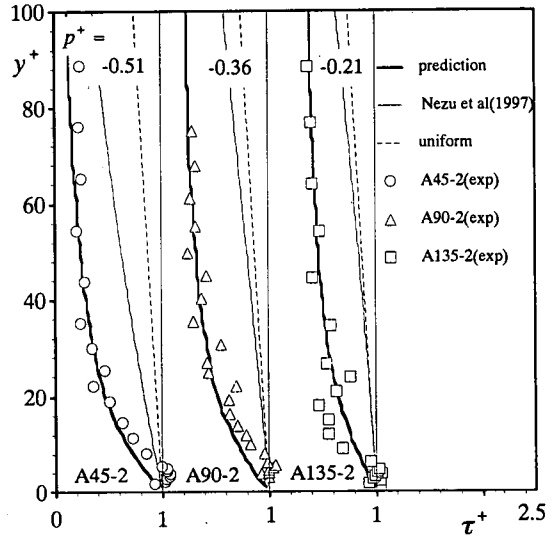


図-6 せん断応力の予測値

となるので、同じ圧力勾配パラメータ  $p^+$  でも河床におけるせん断応力の鉛直勾配が異なることが示される。また、 $y^+/R_* \ll 1$  の領域では、経験式(39)では、

$$\tau^+ = 1 + ap^+y^+ \quad (42)$$

となるのに対し、本研究における理論解では

$$\tau^+ = 1 + p^+y^+ - \frac{\nu g}{U_*^3} \sin\theta y^+ \quad (43)$$

となる。つまり、経験式(39)には開水路特有の重力項が入っていないために、実験値との一致が悪いものと考えられる。特に、開水路等流においては、式(23)よりゼロ圧力勾配流れ ( $p^+=0$ ) であるため、理論式(43)は式(27)となるのに対して、経験式(42)は、

$$\tau^+ = 1 \quad (p^+=0) \quad (44)$$

となり、解の再現性が悪いことが特に示される。また経験式(39)中に用いられる係数  $a$  は、0.014 と固定されているが、これは流れの状態によって変化することも予想される。以上の点から、本研究で得られた理論式(21)によって順圧力勾配 ( $p^+ < 0$ ) を有する開水路流のせん断応力分布の予測法が、従来用いられる経験式による方法よりも有効であるといえる。

## 5. おわりに

順圧力勾配を有する開水路流において、摩擦速度と最大流速との比の流下方向変化が微小であるという仮定に基づいて、支配方程式を近似的に解いた。

その結果、せん断応力分布を示す理論式を得た。この理論式によって算出されたせん断応力分布は、少なくとも $-0.51 \leq p^+ \leq 0$ の範囲において、従来用いられていた経験式よりも実測値を良好に再現することが示された。ただし、さらに加速された流れ、つまり、圧力勾配パラメータの小さな流れにおいては、摩擦速度と最大流速との比の流下方向変化が微小であるといった仮定が次第に成り立たなくなることが予想され、本近似解の適用範囲を今後検討する必要がある。また、実河川のような粗面乱流においては、支配パラメータとして、内部変数によって構成されている $p^+$ を用いることは適当ではなく、従って、本研究を実河川に適用するには、さらに異なるパラメータを導入する必要があると考えられる。

謝辞：本研究を行うに当たり、(財)河上記念財団より助成を受けた。ここに謝意を表す。また、実験に協力していただいた本学大学院生の藤田正樹氏および当時本学学部生の藤山知加子氏(新日本技研)に謝意を表す。

#### 参考文献

- 1) Clauser, F. H. : Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients, *J. Aeronautical Sci.*, pp.91-108, 1954.
- 2) Kline, S.J.: On the nature of stall, *J. Basic Engineering*, ASME, pp.305-319, 1959.
- 3) Kline, S.J., Reynolds, W.C, Schraub, F.A and Runstadler, P.W.: The structure of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, Vol.30, pp.741-773, 1967.
- 4) Mellor, G. L. and Gibson, D. M. : Equilibrium boundary layers, *J. Fluid Mech.*, Vol.24, pp.225-253, 1966.
- 5) Townsend, A. A. : The properties of equilibrium boundary layers, *J. Fluid Mech.*, Vol.1, pp.561-573, 1956.
- 6) Townsend, A. A. : Equilibrium layers and wall turbulence, *J. Fluid Mech.*, Vol.11, pp.97-120, 1961.
- 7) Thomas, L.C. and Hasani, S.M.F.: Supplementary boundary-layer approximations for turbulent flow, *Trans. of the ASME*, Vol.111, pp.420-427, 1989.
- 8) Stratford, B.S.: The prediction of separation of the turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, Vol.5, pp.1-16, 1959.
- 9) Mellor, G.L.: The effects of pressure gradients of turbulent flow near a smooth wall, *J. Fluid Mech.*, Vol.24, pp.255-274, 1966.
- 10) Bradshaw, P. : The turbulence structure of boundary layers, *J. Fluid Mech.*, Vol.29, pp.625-645, 1967.
- 11) 三栖功, 齊田鶴三, 古川嘉男: 順圧力勾配下のバーストの平均発生時間間隔, 日本機械学会論文集(B編),

第58巻, 556号, pp.3590-3595, 1992.

- 12) 一条真古人, 小橋安次郎, 佐伯哲司: 順圧力勾配下の乱流境界層の構造, 日本機械学会論文集(B編), 第49巻, 441号, pp.938-944, 1983.
- 13) Badri Narayanan, M.A.: An experimental study of reverse transition in two-dimensional channel flow, *J. Fluid Mech.*, Vol.31, pp.609-623, 1968.
- 14) Badri Narayanan, M.A. and Ramjee, V. : On the criteria for reverse transition in a two-dimensional boundary layer flow, *J. Fluid Mech.*, Vol.35, pp.225-241, 1969.
- 15) Jones, W.P. and Launder, B.E.: Some properties of sink-flow turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, Vol.56, pp.337-351, 1972.
- 16) Song, T. and Graf, W.H. : Non-uniform open-channel over a rough bed, *Journal of Hydraulics and Hydraulic Engineering*, JSCE, Vol.12, No.1, pp.1-25, 1994.
- 17) 瀬津家久: 開水路乱流の乱れ強度に関する研究, 土木学会論文報告集, 第261号, pp.67-76, 1977.
- 18) 鬼束幸樹, 浦勝, 秋山苺一郎, 岡本智和, 松岡定和: 逆圧力勾配を有する開水路流に関する研究, 土木学会論文集, No.558/II-38, pp.71-79, 1997.
- 19) 瀬津家久, 門田章宏, 戸田孝史, 中川博次: 加速流および減速流の解析手法とその乱流特性, 土木学会論文集, No.509/II-30, pp.89-97, 1995.
- 20) Cardoso, A.H., Graf, W.H. and Gust, G. : Steady gradually accelerating flow in a smooth open channel, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.29, No.4, pp.525-543, 1991.
- 21) 浦勝, 岡本智和, 秋山苺一郎, 鬼束幸樹, 竹本憲充: 流下方向に水深が浅くなる開水路加速流の流況, 水工学論文集, 第42巻, pp.871-876, 1998.
- 22) 竹本憲充, 浦勝, 秋山苺一郎: 水深が浅くなる流れに関する実験的研究, 水工学論文集, 第43巻, pp.341-346, 1999.
- 23) 瀬津家久, 門田章宏, 戸田孝史: 正弦波床上非平衡開水路流れの乱流構造に関する実験的研究, 土木学会論文集, No.558/II-38, pp.103-112, 1997.
- 24) 瀬津家久, 鬼束幸樹, 藤田正樹: 開水路加速流の乱流特性に関する実験的研究, (土木学会論文集投稿中).
- 25) Gessner, F.B.: Corner flow, *AOSR-HTTM Stanford Conf. On Complex Turbulent Flows* (eds. S.J.Kline, B.Cantwell & G.M.Lilley), vol.1, pp.182-212, 1981.
- 26) Nezu, I. and Rodi, W. : Open-channel flow measurements with a laser Doppler anemometer, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.112, No.5, pp.335-355, 1986.
- 27) Rotta, J. C. : *Turbulente Strömungen*, Teubner, Stuttgart, 1972 (大路通雄訳: 乱流, 岩波書店, 1975).
- 28) 桜井明, 吉村和美, 高山文雄: パソコンによるスプライン関数, 東京電気大学出版局, 1989.
- 29) Nezu, I. and Nakagawa, H. : *Turbulence in Open-Channel Flows*, IAHR-Monograph, Balkema, 1993.

(1999.4.8 受付)



# PREDICTION OF THE SHEAR STRESS DISTRIBUTIONS IN ACCERERATED OPEN-CHANNEL FLOWS

Kouki ONITSUKA and Iehisa NEZU

The shear stress distributions in open-channel flows with favorable pressure gradients are predicted by making use of the equation of motion and continuity equation under the assumption that the ratio of the friction velocity  $U_*$  to the maximum velocity  $U_{\max}$  is almost constant in the streamwise direction. The values of the predicted shear stress are smaller than those of uniform open-channel flows and also decrease with a decrease of the normalized pressure gradient parameter. The predicted shear stress distributions are in a good agreement with the experimental values.