

# Hyperfunction の概念による成層弾性波動場の Green 関数の分岐線積分核の分解について

東平光生<sup>1</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

成層弾性波動場の Green 関数の計算に必要な分岐線積分の積分核の固有関数への分解表示を佐藤の超関数 (Hyperfunction) の概念を用いることで求めた。佐藤の超関数は複素関数の実軸上での境界値の差として定義されるが、ここではレゾルベント集合で定義された Green 関数のスペクトル (虚数軸も含む) 上での境界値の差として Hyperfunction が得られると考えた。これによって、積分核の連続スペクトルの固有関数への分解がスムーズな形で行われるばかりでなく、連続スペクトルの固有関数に対するエネルギー積分も自然な形で導入できること、エネルギー積分の対称性が定式化の流れのなかではっきりと捉えられることを見出した。

**Key Words :** Green's function, elastic layered medium, Hyperfunction, continuous spectrum, improper eigenfunction, kernel of the branch line integral

## 1. はじめに

著者は、先に波数積分によって表現された成層弾性体の Green 関数の離散および連続スペクトルに対する固有関数への分解式を示した<sup>1)</sup>。しかしながら、Green 関数の固有関数への分解のプロセスは、固有関数の直交関係式を用いることができないため、発見的な方法に頼らざるを得なかった。このため、数学的にはあいまいな点も多く、Green 関数に現れた分岐線積分核の固有関数への分解に対する数学的な正当化は、残された検討課題であった。そこで、本研究では分岐線積分核の分解の数学的な妥当性を、佐藤の超関数 (Hyperfunction)<sup>2)3)</sup> の概念を用いて証明する。

後述のように、Hyperfunction の概念によれば、連続スペクトルの固有関数に対するエネルギーを自然な形で定義できる。ここで触れることはできないが、分岐線積分核の固有関数への分解は、成層媒質中の散乱体による散乱波のスペクトル特性の検討に有効な手段を与える<sup>4)</sup>。こうした点から、将来的には、Hyperfunction の概念によって成層波動場のスペクトルと散乱の問題がより明確に掘り下げられるものと期待できる。こうした点にも本研究の位置づけがある。

## 2. 波数領域の Green 関数とスペクトルおよび Hyperfunction の概念

ここで、問題となるのは波数領域の Green 関数の固有関数への分解であるから、出発点を成層弾性波動場の波数領域の Green 関数にとる。前論文<sup>1)</sup>を参考にす

れば、波数領域の Green 関数の定義は次のようになる。

$$T_{\kappa} g_{\kappa}^m(z, z') = -\hat{f}_{\kappa}^m \delta(z - z'), \quad \kappa \in C \setminus \sigma_p \cup \sigma_c \quad (1)$$

ここに、 $g_{\kappa}^m$  は波数領域の Green 関数で、波数を表す添え字の  $\kappa$  はスペクトルを除く複素数全体、すなわちレゾルベント集合で考える。式 (1) では  $\sigma_p$  は離散スペクトル、 $\sigma_c$  は連続スペクトル、 $C$  は複素数の集合を示している。また、添え字の  $m$  は円筒座標系  $(r, \theta, z)$  の  $\theta$  成分に関する Fourier 級数の次数である。また、 $\delta$  は Dirac のデルタ関数、 $\hat{f}_{\kappa}^m$  は外力ベクトルを波数領域に変換したもので、 $T_{\kappa}$  は波数領域の弾性波動方程式の作用素で次のように表される。

$$T_{\kappa} = L_{\kappa} - \kappa^2 D \quad (2)$$

ここに、

$$L_{\kappa} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_z^2 + \rho\omega^2 & -(\lambda + \mu)\kappa\partial_z \\ (\lambda + \mu)\kappa\partial_z & \mu\partial_z^2 + \rho\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$D = \text{diag.} \left[ \mu \quad (\lambda + 2\mu) \right] \quad (3)$$

であり、 $\lambda$  および  $\mu$  は Lamé の定数、 $\rho$  は質量密度、 $\partial_z$  は鉛直座標に関する微分演算子、 $\omega$  は角振動数である。 $T_{\kappa}$  の成分表示からも明らかであるが、ここでは 3 次元の波動場の中から、P-SV 波成分を取り出して議論する。また、波動場が成層構造の場合、Lamé の定数および  $\rho$  も層ごとに変化する。この意味で Green 関数にも、層間の変位の連続条件や応力の釣り合い条件を課している。

Green 関数の定義においては、放射条件も課さねばならない。このとき、基盤層を伝播する波動の方向に関連

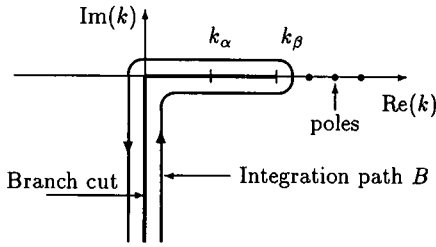


Fig. 1 Branch cut and poles in the complex wavenumber plane.

して複素平面に cut が必要となるが、一つの Riemann 葉全体で放射条件を満足する波動が得られる cut は Fig. 1 に示すものとなる。

Fig. 1 においては、 $k_\alpha$  は基盤層の P 波の波数、 $k_\beta$  は基盤層の S 波の波数である。図中の極は  $g_k^m$  の極を意味し、これらは離散スペクトルである。また、Riemann 面の cut 上の波数は連続スペクトルの性質を持つ。

ここで Hyperfunction と本研究の関連について若干のことを述べておく。簡単に言えば、一変数の Hyperfunction とは  $C \setminus \mathcal{R}$  上の正則関数  $F(\kappa)$  (ここに、 $\kappa$  は複素変数、 $\mathcal{R}$  は実数、 $F(\kappa)$  は定義関数と呼ばれる。) の実軸の上下からの境界値の差として表されるものである。すなわち、Hyperfunction  $f(x)$  は  $F(\kappa)$  を用いて次のように表される。

$$f(x) = F(x + i\epsilon) - F(x - i\epsilon), \quad x \in \mathcal{R} \quad (4)$$

ここに、 $\epsilon$  は無限小の正数である。具体例として、Heaviside の単位階段関数  $H(x)$  が Hyperfunction として考えられることを示しておく。Hyperfunction を定義する複素関数  $F(\kappa)$  を

$$F(\kappa) = -\frac{1}{2\pi i} \log(-\kappa) \quad (5)$$

とする。  $F(\kappa)$  のための Riemann 面の cut を正の実軸にとれば、  $F(\kappa)$  は負の実軸では境界値の差は生じないが正の実軸では、  $F(\kappa)$  の多価性から境界値の差を生じる。結果として式 (4) で与えられる  $f(x)$  は Heaviside の単位階段関数  $H(x)$  となる。  $H(x)$  の導関数は Dirac のデルタ関数を与えるが、式 (5) の導関数、

$$F'(\kappa) = -\frac{1}{2\pi i \kappa} \quad (6)$$

が原点以外で正則となることと、Cauchy の積分定理を用いて  $F'(\kappa)$  がデルタ関数を与えることも導くことができる。

本研究では、レゾルベント集合で定義された Green 関数  $g_k^m$  のスペクトル (虚数軸を含む) 上での境界値の差も Hyperfunction を表すものと考えことにする。実際、  $g_k^m$  が放射条件を満足する Riemann 葉上では離散と連続スペクトル以外では  $g_k^m$  は解析的であり、スペクトル上で  $g_k^m$  は境界値の差を生じることが理解できる。

すなわち、  $g_k^m$  を定義関数と考えた場合、スペクトルとは定義関数に境界値としての差を生じる複素数の集合と言える。

空間領域の Green 関数を合成するためには、Fig. 1 に示す分岐線回りの積分経路  $B$  で  $g_k^m$  を積分しなければならない。これによって、分岐線積分の積分核の計算の必要性が生じる。この積分核は、連続スペクトルの波数が実数のときには、次のように表される。

$$g_k^{m\uparrow\downarrow}(z, z') = g_{k-i\epsilon}^{m\uparrow}(z, z') - g_{k+i\epsilon}^{m\downarrow}(z, z'), \quad k \in \sigma_c \quad (7)$$

ここに、  $g_k^{m\uparrow\downarrow}$  は分岐線積分の積分核を示す。また、右辺の添え字の  $\uparrow\downarrow$  は波動が上昇波であるか下降波であるかを示している。この表現からも積分核が定義関数の境界値の差として捉えることができる、すなわち Hyperfunction として理解できることが分かる。また、境界値の差は、物理的には波動の基盤層での進行方向の差異によるものである。

### 3. 分岐線積分核の固有関数への分解と連続スペクトルのエネルギー積分について

#### (1) 積分核の固有関数への分解

分岐線積分核ばかりでなく、連続スペクトルの固有関数もレゾルベント集合で定義された波動場の連続スペクトル上での境界値の差であり、物理的には上昇波と下降波の差として得られる。これは、前論文<sup>1)</sup>を参照することで明らかであり、連続スペクトルの固有関数が Hyperfunction として捉えられる根拠となる。レゾルベント集合上の波動場は、伝達マトリックス法で求めることができ、このとき、多層媒質の各層での波動場は未定係数を用いて表現できる。この表現形式を考慮し、連続スペクトルの固有関数を  $\psi_k(z)$  として、境界値の差を次のように表現する。

$$\psi_k(z) = d_{k-i\epsilon}^{\uparrow}(z) a_{k-i\epsilon}^{\uparrow}(z) - d_{k+i\epsilon}^{\downarrow}(z) a_{k+i\epsilon}^{\downarrow}(z) \quad \text{when } k \in \sigma_c \cap \mathcal{R}$$

$$\psi_k(z) = d_{k+\epsilon}^{\uparrow}(z) a_{k+\epsilon}^{\uparrow}(z) - d_{k-\epsilon}^{\downarrow}(z) a_{k-\epsilon}^{\downarrow}(z) \quad \text{when } k \in \sigma_c \cap \mathcal{I} \quad (8)$$

ここに、  $\mathcal{I}$  は虚数の集合、  $d_k^{\uparrow}$  および  $d_k^{\downarrow}$  は波動方程式の同次解から未定係数の部分を除去し、マトリックスで表現したもの、  $a_k^{\uparrow}$  および  $a_k^{\downarrow}$  は波動方程式の同次解の中の未定係数の部分である。波動方程式の未定係数は深さ方向の関数として、変数  $z$  を書き入れているが、これらはもちろん層ごとに一定の値をとる。また、前論文<sup>1)</sup>で示したように、連続スペクトルの領域によっては、固有関数は1次独立の二つの解をならべてマトリックスで表現しなければならない場合がある。このときには、未定係数もマトリックスとなる。またそれ以外では未定係数はベクトルの形式をとる。

鉛直座標の  $z$  軸を下向きにとった場合、 $d_k^\dagger$  は基盤層の部分で以下の表現を持つ。

$$d_k^\dagger = \begin{bmatrix} -\gamma_k^\dagger \exp(-\gamma_k^\dagger z) & \kappa^2 \exp(-\nu_k^\dagger z) \\ \kappa \exp(-\gamma_k^\dagger z) & -\kappa \nu_k^\dagger \exp(-\nu_k^\dagger z) \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sqrt{\kappa^2 - k_\alpha^2} \\ \nu_k &= \sqrt{\kappa^2 - k_\beta^2} \end{aligned} \quad (10)$$

であり、式(10)では $\uparrow$ の添え字は省略しているが、上昇波、下降波あるいは非均質波の区別に応じて適当な分岐をとる。

以上に示すように連続スペクトルの固有関数は Hyperfunction として境界値表示を持つが、波動方程式の同次解そのものは連続スペクトル上で定義できるので、以降の展開では式(8)の表現の代わりに、簡単のため、次のように固有関数を表現して議論を進める。

$$\psi_k(z) = d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z) - d_k^\downarrow(z) a_k^\downarrow(z) \quad (11)$$

次に、連続スペクトルの固有関数の境界値表示を基に、レゾルベント集合上での上昇波および下降波の Green 関数を以下のように表現する。

$$\begin{aligned} g_k^{m\uparrow}(z, z') &= u_k^m(z, z') + d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z) \Delta_\kappa^{m\uparrow} \\ g_k^{m\downarrow}(z, z') &= u_k^m(z, z') + d_k^\downarrow(z) a_k^\downarrow(z) \Delta_\kappa^{m\downarrow} \\ \kappa &\in \mathcal{C} \setminus \sigma_p \cup \sigma_c \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、 $u_k^m(z, z')$  は、

$$\begin{aligned} T_\kappa u_k^m(z, z') &= -\hat{f}_\kappa^m \delta(z - z') \quad (0 \leq z \leq z' + \epsilon) \\ u_k^m(z, z') &= 0 \quad (z > z' + \epsilon) \end{aligned} \quad (13)$$

として定義される波動場であり、物理的にはソース点の深さに仮想的な剛基盤を設定し、この基盤面の上面に外力を加えたものである。また、ここでは自由表面の鉛直座標を  $z = 0$  としている。この波動場は、仮想的な基盤面と地表面の間で定義された有限領域の定常的な波動場であり上昇波と下降波の区別はない。また、 $u_k^m(z, z')$  は、通常では自由表面上の境界条件を満足できない。自由表面上の境界条件を満足するためには、 $\kappa$  は仮想的な剛基盤上の表層地盤の正規モードの波数であることが必要となるからである。そこで、 $\Delta_\kappa^{m\uparrow}$  および  $\Delta_\kappa^{m\downarrow}$  は波数のみに依存する定数で、自由表面上の境界条件を Green 関数が満足するように決定する。特に、前述の同次解の未定係数がマトリックスになる場合には、マトリックスで表現し、それ以外ではスカラーとする。この定数(マトリックス)をここでは amplitude function と呼ぶことにする。この amplitude function を決定するための方程式は、変位場を表面力に写像する作用素を  $\mathcal{P}$  とすれば以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u_k^m(0, z')) + \mathcal{P} \begin{pmatrix} d_k^\dagger(0) a_k^\dagger(0) \\ d_k^\downarrow(0) a_k^\downarrow(0) \end{pmatrix} \Delta_\kappa^{m\uparrow} &= 0 \\ \mathcal{P}(u_k^m(0, z')) + \mathcal{P} \begin{pmatrix} d_k^\dagger(0) a_k^\dagger(0) \\ d_k^\downarrow(0) a_k^\downarrow(0) \end{pmatrix} \Delta_\kappa^{m\downarrow} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

式(12)のように、Green 関数を二つの波動場に分解し、未定係数を決定する方法は、Aki& Richardsのテキスト<sup>5)</sup>の Chapt 7にも見られる。また、伝達マトリックス法で Green 関数を計算する場合には、こうした波動場の分解法は表面に現れないまでも、定式化には組み込まれていると理解すべきである。実際、波数領域の Green 関数は、変位はソース点で連続であるが、その微分係数はソース点でソースに依存した不連続性を持つ。そのような解をまず、 $u_k^m(z, z')$  で表現し、これによる自由表面に生じた応力を第2項で打ち消す(第2項はソース点でも変位と導関数は連続)方法は合理的である。

本研究では、この二つの波動場への分解法をレゾルベント集合上での Green 関数の計算法として理解しなおし、これを基にスペクトル上で Green 関数の境界値の差としての Hyperfunction を計算する道筋をたどる。Green 関数の連続スペクトル上での境界値の差をとると、上昇波でも下降波でもない両者に共通な  $u_k^m(z, z')$  成分は Hyperfunction から姿を消してしまうが、この痕跡は amplitude function に残り、さらに相反定理から amplitude function はソース  $\hat{f}_\kappa^m$  で記述されることになる。これらのプロセスによって分岐線積分核の固有関数への分解が実現されるが、相反定理の適用が可能となる背景には結局は  $u_k^m(z, z')$  による波動場の表現が決め手となっている。

ここで、連続スペクトルのエネルギー積分の定義とその関連の中で、amplitude function を求めて行く。まず、内積を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \langle \psi_k(z), T_\kappa(d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z)) \rangle \\ = \int_0^\infty \psi_k(z)^T T_\kappa(d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z)) dz \end{aligned} \quad (15)$$

$\kappa$  がレゾルベント集合にあれば、波動関数は放射条件を満足するから内積は意味を持ち、また内積を出発点とした適当な部分積分も同様に意味を持つことに注意する。そこで、式(15)に適当な部分積分を施すと、次式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi_k(z), T_\kappa(d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z)) \rangle \\ &= -\psi_k(0)^T \mathcal{P}(d_k^\dagger(0) a_k^\dagger(0)) + E^\dagger(\kappa, k) + \mathcal{O}(\kappa - k) \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 $\mathcal{O}$  は Landau の記号、 $E^\dagger(\kappa, k)$  は上昇波の波動を用いて得られる連続スペクトルのエネルギー積分を示す。

連続スペクトルのエネルギー積分の性質に関する議論は、後でまとめて行うこととして定式化を続ける。式(16)において、極限移行  $\kappa \rightarrow k$  を行う。すなわち、レゾルベント集合上の波数を連続スペクトル上の波数に近づけて行く。このときのエネルギー積分を改めて  $E_k^\dagger$

とすれば、次式を得る。

$$-\psi_k(0)^T \mathcal{P}(d_k^\dagger(0) a_k^\dagger(0)) + E_k^\dagger = 0 \quad (17)$$

また、式(14)の $\kappa \rightarrow k$ の極限移行により、

$$\psi_k(0)^T (\mathcal{P}(u_k^m(0, z')) + \mathcal{P}(d_k^\dagger(0) a_k^\dagger(0)) \Delta_k^\dagger) = 0 \quad (18)$$

したがって、式(17)より、

$$\psi_k(0)^T \mathcal{P}(u_k^m(0, z')) + E_k^\dagger \Delta_k^{m\dagger} = 0 \quad (19)$$

となり、

$$\Delta_k^{m\dagger} = -(E_k^\dagger)^{-1} \psi_k(0)^T (0) \mathcal{P}(u_k^m(0, z')) \quad (20)$$

を得る。特に、ここで相反定理から得られる関係式

$$\psi_k(0)^T \mathcal{P}(u_k^m(0, z')) = \psi_k(z')^T \hat{f}_k^m \quad (21)$$

を用いれば、

$$\Delta_k^{m\dagger} = -(E_k^\dagger)^{-1} \psi_k(z')^T \hat{f}_k^m \quad (22)$$

を得る。

したがって、レゾルベント集合上のGreen関数の表現から得る連続スペクトル上のGreen関数は、

$$\begin{aligned} g_k^{m\dagger}(z, z') &= u_k^m(z, z') \\ &\quad - d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z) (E_k^\dagger)^{-1} \psi_k(z')^T \hat{f}_k^m \\ g_k^{m\downarrow}(z, z') &= u_k^m(z, z') \\ &\quad - d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z) (E_k^\dagger)^{-1} \psi_k(z')^T \hat{f}_k^m \end{aligned} \quad (23)$$

となる。また、後述のように連続スペクトル上のエネルギー積分は波動の伝播方向に対して不変であることが示され、あらためて連続スペクトルのエネルギー積分 $E_k$ が次のように定義できる。

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} E_k^\dagger = E_k^\downarrow, \quad k \in \sigma_c \quad (24)$$

したがって、レゾルベント集合で定義されたGreen関数の連続スペクトル上の境界値の差は、式(11)と式(23)より固有関数に分解されることになり、以下のようになる。

$$\begin{aligned} g_k^{m\dagger}(z, z') - g_k^{m\downarrow}(z, z') \\ = -\psi_k(z) (E_k) \psi_k(z')^T \hat{f}_k^m \end{aligned} \quad (25)$$

## (2) Hyperfunction の概念で捉えたエネルギー積分

連続スペクトル上のエネルギー積分をもう少し詳しく見て行くことにする。式(16)に現れた内積の展開の結果を詳しく記述すれば、以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\langle \psi_k(z), T_\kappa(d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z)) \rangle \\ &= \langle T_k \psi_k(z), d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z) \rangle + E^\dagger(k, \kappa) \\ &\quad + \left[ \psi_k(z)^T \mathcal{P}(d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z)) \right]_0^\infty \end{aligned}$$

$$- \left[ \mathcal{P}(\psi_k(z))^T d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z) \right]_0^\infty + \mathcal{O}(k - \kappa) \quad (26)$$

$$E^\dagger(k, \kappa)$$

$$\begin{aligned} &= -(k - \kappa) \int_0^\infty \partial_z \psi_k(z)^T A_1 d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z) dz \\ &\quad + (k - \kappa)^2 \int_0^\infty \psi_k(z)^T A_2 d_k^\dagger(z) a_k^\dagger(z) dz \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & (\lambda + \mu) \\ -(\lambda + \mu) & 0 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \text{diag.} \left[ \mu \quad (\lambda + 2\mu) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

式(26)の右辺の第1項および第4項はゼロになることに注意する。また、式(27)の積分そのものは極限移行 $\kappa \rightarrow k$ によって発散する。しかし、 $(k - \kappa)$ との掛け合わせによって、エネルギー積分そのものは有限な値を持つことになる。したがって、積分の評価は発散部分を取り出すことに努力が向けられる。この観点から、エネルギー積分を次のように書き換える。

$$E^\dagger(k, \kappa)$$

$$\begin{aligned} &= (k - \kappa) a_{k(p)}^{\downarrow T} \int_0^\infty \partial_z d_{k(p)}^\dagger(z)^T A_{1(p)} d_{k(p)}^\dagger(z) dz a_{k(p)}^\dagger \\ &\quad - (k - \kappa)^2 a_{k(p)}^{\downarrow T} \int_0^\infty d_{k(p)}^\dagger(z)^T A_{2(p)} d_{k(p)}^\dagger(z) dz a_{k(p)}^\dagger \end{aligned} \quad (29)$$

変数に付けた添え字の $(p)$ は基盤層に関するものであることを示す。これは積分の発散に寄与するものは、基盤層の部分の関数または定数であることによる。したがって、未定係数の部分は定数として積分の外に出した。以降の議論では、積分の発散への寄与が基盤層によるものであることを暗黙の了解とし、簡単のため添え字の $(p)$ は省略する。また、式(29)では積分の発散が上昇波と下降波の積の積分で生じていることを用いている。(上昇波と上昇波の積あるいは下降波と下降波の積の積分値は発散せずエネルギー積分には寄与しない。) 上昇波と下降波の積は、Hyperfunctionの積としては、異なる方向からの境界値の積となるが、連続スペクトル上の波数で波動関数は特異点を持たないから、この積は意味を持つとして良いであろう。また、積分区間は $[0, \infty)$ のままであるが、表層の影響は極限移行でゼロになるために、積分区間の変更は不必要であることを示すことができる。

限られた紙面の都合上、積分の評価の詳細をすべて記述することができない。途中経過で特徴的なものを以下に示すと、式(29)の評価に必要な演算の一部には、次のようなものがある。

$$d_k^\dagger(z)^T A_2 d_k^\dagger(z) \underset{\kappa \rightarrow k}{\sim} \text{diag.} [A_2^1(z), A_2^2] \quad (30)$$

$$A_2^1(z) = (\mu \tilde{\gamma}_k^2 + (\lambda + 2\mu) k^2) \exp(-i\tilde{\gamma}_k + \gamma_k^\dagger) z$$

$$A_2^2(z) = (\mu k^4 + (\lambda + 2\mu) k^2 \tilde{\nu}_k^2) \exp(-i\tilde{\nu}_k + \nu_k^\dagger) z$$

(31) この式の変形の過程で、

$$\begin{aligned}\gamma_k^\dagger &= i\bar{\gamma}_{k'} + \epsilon \\ \nu_k^\dagger &= i\bar{\nu}_{k'} + \epsilon\end{aligned}\quad (41)$$

ここに、

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_k &= \sqrt{k_\alpha^2 - k^2} \\ \bar{\nu}_k &= \sqrt{k_\beta^2 - k^2}\end{aligned}\quad (32)$$

であり、式(31)の指数関数の係数の部分は積分の発散部分の第1項をとるという理由で $\kappa$ と $k$ とを同一視している。また、

$$\begin{aligned}\gamma_k^\dagger &= -i\bar{\gamma}_{k'} + \epsilon \\ \nu_k^\dagger &= -i\bar{\nu}_{k'} + \epsilon\end{aligned}\quad (33)$$

と置き、 $\kappa \rightarrow k$ の極限移行を $k' \rightarrow k$ で考えることにする。

式(33)によって、以下の式が誘導できる。

$$\int_0^\infty \exp(-i\bar{\gamma}_k + \gamma_k^\dagger)z dz = \frac{1}{i} \frac{1}{\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_{k'} - i\epsilon} \quad (34)$$

この積分での $k' \rightarrow k$ における発散の仕方を考察するのに、積分をHyperfunctionとみなす。このとき、若干の計算により、Hyperfunctionの定義関数の同値類としての意味で次式が成立することを示すことができる。

$$\int_0^\infty \exp(-i\bar{\gamma}_k + \gamma_k^\dagger)z dz \sim \frac{-2i\bar{\gamma}_k}{k'^2 - k^2 - i\epsilon} \quad (35)$$

式(35)の右辺をCauchyの主値とデルタ関数に分離すれば以下ようになる。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \exp(-i\bar{\gamma}_k + \gamma_k^\dagger)z dz \\ \sim -2i\bar{\gamma}_k \left( \text{P.V.} \frac{1}{k'^2 - k^2} + \pi i \delta(k'^2 - k^2) \right)\end{aligned}\quad (36)$$

したがって、エネルギー積分の評価に関連した以下の式が得られる。

$$(k - \kappa) \int_0^\infty \exp(-i\bar{\gamma}_k + \gamma_k^\dagger)z dz \underset{\kappa \rightarrow k}{\sim} \frac{i\bar{\gamma}_k}{k} \quad (37)$$

すなわち、エネルギー積分は、Cauchyの主値の部分で決められ有限な値が確定する。こうした一連の手続きを積み重ねることで、上昇波に関連した連続スペクトル上のエネルギー積分が次のように得られる。

$$E_k^\dagger = -2i\alpha_k^{\dagger T} \text{diag.}[E_1, E_2] \alpha_k^\dagger \quad (38)$$

ここに、

$$\begin{aligned}E_1 &= (\lambda + 2\mu)\bar{\gamma}_k(\bar{\gamma}_k^2 + k^2) \\ E_2 &= \mu\bar{\nu}_k k^2(\bar{\nu}_k^2 + k^2)\end{aligned}\quad (39)$$

次に、下降波に関連したエネルギー積分を求める。出発点は、式(29)を参考にすれば次式のようになる。

$$\begin{aligned}E^\downarrow(k, \kappa) &= (k - \kappa) \alpha_k^{\dagger T} \int_0^\infty \partial_z d_k^\dagger(z)^T \mathbf{A}_1 d_k^\downarrow(z) dz \alpha_k^\dagger \\ &\quad - (k - \kappa)^2 \alpha_k^{\dagger T} \int_0^\infty d_k^\dagger(z)^T \mathbf{A}_2 d_k^\downarrow(z) dz \alpha_k^\dagger\end{aligned}\quad (40)$$

および

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \exp(i\bar{\gamma}_k - \gamma_k^\dagger)z dz \\ \sim 2i\bar{\gamma}_k \left( \text{P.V.} \frac{1}{k^2 - k'^2} - \pi i \delta(k'^2 - k^2) \right)\end{aligned}\quad (42)$$

等を用いれば、次式を得る。

$$E_k^\downarrow = -2i\alpha_k^{\dagger T} \text{diag.}[E_1, E_2] \alpha_k^\dagger \quad (43)$$

したがって、ここまでの結果から、

$$(E_k^\dagger)^T = E_k^\downarrow, \quad k \in \sigma_c \quad (44)$$

を得るが、これは後述のようにエネルギー積分が対称になることを保証するものとなる。

ここでの最後に、

$$E_k^\dagger = E_k^\downarrow, \quad k \in \sigma_c \quad (45)$$

を示そう。エネルギー積分の定義の出発点に戻れば、

$$\begin{aligned}\langle \psi_k(z), \mathbf{T}_k d_k^\dagger(z) \alpha_k^\dagger(z) \rangle \\ = -\psi_k(0)^T \mathcal{P} \left( d_k^\dagger(0) \alpha_k^\dagger(0) \right) + E_k^\dagger \\ = 0, \quad k \in \sigma_c\end{aligned}\quad (46)$$

が成立するから、

$$E_k^\dagger = \psi_k(0)^T \mathcal{P} \left( d_k^\dagger(0) \alpha_k^\dagger(0) \right) \quad (47)$$

同様に、

$$E_k^\downarrow = \psi_k(0)^T \mathcal{P} \left( d_k^\downarrow(0) \alpha_k^\downarrow(0) \right) \quad (48)$$

が得られるが、 $\mathcal{P} \left( d_k^\dagger(0) \alpha_k^\dagger(0) \right) = \mathcal{P} \left( d_k^\downarrow(0) \alpha_k^\downarrow(0) \right)$ であるから(そうでなければ、固有関数が構成できない)、式(45)が成立する。これと式(44)よりエネルギー積分が対称であることが理解できる。

### (3) 結果の検証について

Hyperfunctionの概念を用いたスカラー成層波動場のGreen関数の分岐線積分核の分解とその検証については著者の別の論文<sup>6)</sup>に記述しているが、スカラー波動場に比べ、ここでの弾性波動場の展開は相当複雑であることが分かる。ここで得た分岐線積分核の分解の結果と前論文<sup>1)</sup>の結果が一致することは、前論文での連続スペクトルの固有関数の表記法、

$$\psi_k(z) = \mathbf{B}_k \alpha_k \quad (49)$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} -\bar{\gamma}_k s_\gamma & -\bar{\gamma}_k c_\gamma & k^2 c_D & -k^2 s_D \\ k c_\gamma & -k s_\gamma & -k \bar{\nu}_k s_D & -k \bar{\nu}_k c_D \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}s_\gamma &= \sin(\bar{\gamma}_k z) & c_\gamma &= \cos(\bar{\gamma}_k z) \\ s_D &= \sin(\bar{\nu}_k z) & c_D &= \cos(\bar{\nu}_k z)\end{aligned}\quad (51)$$

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \\ \Delta'_1 & \Delta'_2 & \Delta'_3 & \Delta'_4 \end{bmatrix} \quad (52)$$

に着目して定式を積み上げて行くことで可能である。ここに、 $\alpha_k$  は未定係数のマトリックスである。前論文<sup>1)</sup>ではエネルギー積分の発散をデルタ関数で押え、そのデルタ関数の係数の部分を改めてエネルギー積分と定義し直している。前論文で定義した  $I_2^{**}$  および  $I_3^{**}$  をここでの表記法で記述しなおせば、次のようになる。

$$I_2^{**} = \frac{\pi}{2|k|} \alpha_k^T \text{diag.}[q_1, q_1, q_2, q_2] \alpha_k \quad (53)$$

$$I_3^{**} = \frac{\pi}{2|k|} \alpha_k^T \text{diag.}[q_3, q_3, q_4, q_4] \alpha_k \quad (54)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \mu \bar{\gamma}_k^3 + (\lambda + 2\mu) k^2 \bar{\gamma}_k \\ q_2 &= \mu k^4 \bar{\nu}_k + (\lambda + 2\mu) k^2 \bar{\nu}_k^3 \\ q_3 &= (\lambda + \mu) \bar{\gamma}_k^3 k \\ q_4 &= -(\lambda + \mu) \bar{\nu}_k^3 k^3 \end{aligned} \quad (55)$$

前論文で与えた分岐線積分核の固有関数への分解とは、

$$E_k^{**} = k I_2^{**} + I_3^{**} \quad (56)$$

をエネルギー積分として、

$$\begin{aligned} g_k^{m1}(z, z') - g_k^{m1}(z, z') \\ = \frac{\pi i k}{|k|} \psi_k(z) (E_k^{**})^{-1} \psi_k(z')^T \hat{f}_k^m \end{aligned} \quad (57)$$

であったから、ここで示したエネルギー積分  $E_k$  と

$$E_k = \frac{|k|}{-\pi i k} E_k^{**} \quad (58)$$

の関係を示せば良いが、これは容易であろう。

#### 4. 終わりに

成層弾性波動場の Green 関数に現れる分岐線積分核の固有関数への分解を Hyperfunction の概念を用いる

ことで行った。ここではレゾルベント集合で定義された Green 関数の複素数を含むスペクトル上での境界値の差を Hyperfunction とみなした。レゾルベント集合上の Green 関数が放射条件を満足する性質により、連続スペクトルの固有関数のエネルギー積分の定義や計算が自然な形でできることが見出せた。また、前論文<sup>1)</sup>ではエネルギー積分の対称性が偶然に見出せたことに對し、ここでは数学的な展開の中で誘導することが可能となった。Hyperfunction については、工学者向きに凸かれた今井<sup>3)</sup>による優れた解説書があるが、そこでの Hyperfunction のイメージは流体場の渦層の分布であるということであった。弾性波動場の連続スペクトルでの Hyperfunction のイメージは、無限遠の境界条件に関連して生じる進行方向の異なる波動の差による定常波の方が近いかもしれない。

#### 参考文献

- 1) 東平光生: 離散および連続スペクトルの固有関数を用いた成層弾性波動場の Green 関数の表現, 土木学会論文集, No.605/1-45, pp. 171-185, 1998.
- 2) 金子晃: 超関数入門, 東京大学出版会, 1996.
- 3) 今井功: 応用超関数論, I, II, サイエンス社, 1981.
- 4) 東平光生: スペクトル表現された成層弾性流体波動場の Green 関数による散乱波のスペクトル解析, 土木学会論文集, (投稿中).
- 5) Aki, K. and Richards, P.G.: *Quantitative Seismology*, Freeman and Company, 1980.
- 6) 東平光生: Hyperfunction の概念によるスカラー成層波動場の Green 関数のスペクトル表現の誘導, 応用力学論文集, pp. 485-493, Vol. 2, 1999.

(1999.1.18 受付)

## THE CONCEPT OF THE HYPERFUNCTION FOR ELASTIC LAYERED MEDIA TO DECOMPOSE THE KERNEL OF THE BRANCH LINE INTEGRAL OF GREEN'S FUNCTION

Terumi TOUHEI

The kernel of the branch line integral of Green's function for elastic layered media is decomposed into eigenfunctions for the continuous spectrum via the concept of the Hyperfunction. The kernel of the branch line integral is due to the differences of the boundary values of Green's function in the wavenumber domain on the continuous spectrum. Therefore, the kernel of the branch line integral can be regarded to be the Hyperfunction whose definition function is Green's function in the resolvent set that is in the complex wavenumber plane. Green's function in the resolvent set satisfies the radiation condition, so that the definition and the calculation of the energy integral for the continuous spectrum can be carried out naturally. The symmetrical property of the energy integral can also be found in the formulation.