

# 横波および Rayleigh 波の位相速度に 収束する Mindlin 板の理論

白木恒雄<sup>1</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 東京理科大学教授 理工学部土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

簡明な理論でありながら種々の構造系および荷重系に適用可能な Mindlin の動的板曲げ理論の第 2 次の位相速度曲線は高周波領域で Rayleigh-Lamb の弾性論解と大きく乖離する弱点をもつ。本報告では、みかけの弾性係数および断面諸量を周波数の関数とすることでこの問題点を解決できることを示し、あわせて静的問題、低周波領域から高周波領域までの動的問題を扱える支配方程式を作成した。理論展開は仮想変位の原理を用い、せん断修正係数をこの理論の流れに整合する形で与えた。また、変位の合成成分を用いることで、Rayleigh 表面波、Love 表面波あるいは Rayleigh-Lamb 板波などの弾性論の著名な位相速度方程式に対応する Mindlin 板の位相速度方程式を与えている。

*Key Words* : Mindlin plate theory, phase velocity curves, Rayleigh surface waves, Rayleigh-Lamb equation

## 1. まえがき

無限長板の波動現象の厳密解を与えるものとして、Rayleigh-Lamb の理論<sup>1),2)</sup>とその周波数方程式は著名である。近似理論の精度を検討するのに、この方程式はよく利用される。せん断変形を考慮しない Kirchhoff-Love の古典板理論に d'Alembert の項を加えた運動方程式は低周波領域で上記の厳密解とよく一致している。しかし、回転慣性およびせん断変形を無視しているため、高周波領域では真の解と大きくかけ離れてしまう。

1 次せん断変形と回転慣性を考慮した板の動的理論として Mindlin の近似板曲げ理論<sup>3)</sup>は低周波領域から高周波領域までよく一致する第 1 次(低次)モードの位相速度曲線を与えている。このため、現在では離散化解析までも Mindlin 板要素が汎用的に用いられ、高い評価を得ている。その Mindlin 板理論の第 2 次モードは低周波領域では Rayleigh-Lamb の厳密解とおおむね一致しているが、高周波領域では板の縦波速度に収束してしまう問題点をもっている。その理由は、この理論が一貫して線形の反り変位を仮定し、板断面の断面力のつり合い条件のみ保持する形式で理論が展開されるためである。現実には、周波数が高くなるにともない、反り変位は指数関数形の減衰曲線になり、板表面の無応力境界条件の保持

のほうが重要となってゆく。板中央面付近から徐々に反り変位が消えて、最後は Rayleigh 表面波のみ存在する状態に移ってゆく。

位相速度曲線でいえば、高周波領域で Rayleigh-Lamb の厳密解は、第 1 次モードは Rayleigh 表面波速度に、第 2 次モードは連続体の横波速度へと収束してゆく。これに対し、Mindlin の近似理論は第 1 次(低次)モードは板の横波速度に、第 2 次(高次)モードは板の縦波速度に収束してゆく。第 1 次モード間の差はわずかであるが、第 2 次モード間の差はきわめて大きい。

3 次元弾性理論による厳密解法はきわめて単純な問題のみ適用対象が限られているのに対し、近似理論は無制限、有限長に関係なく比較的簡単な計算で多くの実用的課題の静的および動的問題が扱える。したがって、近似板理論を用いて、3 次元弾性論解なみの高精度のものが得られれば、工学的意義は高いといえる。

本報告の目的は、Mindlin の板曲げ理論を出発点とし、低周波領域から高周波領域まで Rayleigh-Lamb の厳密解に匹敵する解を見出し、近似理論の運用の簡便さを保持した支配方程式を確立することである。

具体的には、本来、定数である弾性係数および断面諸量を周波数の関数とみなすことで、静的問題から動的問題まで対応できる Mindlin 形の板曲げ理論

の支配方程式を作成した。Mindlin 板曲げ理論のもつ簡明性、適用構造系の広範さ、荷重系の多彩さ、などを保持して弾性論なみの精度を追求している。

この事以外にも以下の特徴を兼ね備えさせている。Reissner<sup>4)</sup>、Mindlin<sup>3)</sup>などの著名な1次せん断変形板曲げ理論はせん断修正係数を理論の流れと独立に『天下り』的にあたえている。Cowper<sup>5)</sup>は唐突にLoveの先端集中荷重を受ける張り出しはりの弾性論解<sup>6)</sup>を借用している。しかし、エネルギー原理による支配方程式誘導の流れに整合する形でせん断修正係数は定義されるべきものと考えられる。また、Mindlin<sup>3)</sup>が示したごとく、Rayleigh表面波に合わせるという理由だけで簡単にせん断修正係数の値を変更するのも疑問が残る。以上の点を鑑み、本報告では仮想変位の原理による支配方程式の誘導に整合する形でせん断修正係数を定義した。得られたせん断修正係数値は従来の値と同一である。本理論では、せん断修正係数値は従来のままで、既述のごとく弾性係数および断面諸量の関数化により、厳密解と同じ収束値を確保した。筆者は静的問題にせん断ひずみ仕事の等価性<sup>7),8)</sup>を用いて支配方程式の誘導をおこなってきた。本報告では、それをさらに動的問題に拡張している。d'Alembertの加速度項を含む応力のつり合い条件からせん断応力を決定すれば、Mindlin板形のせん断力が求められることを示す。

弾性論によるRayleigh表面波、Love表面波およびRayleigh-Lamb板波などは自由面での無応力の境界条件より周波数方程式が得られ、みな類似の表現となっている。すなわち、位相速度と縦波速度、横波速度の組み合わせによる単純な因子の積で表現される。Mindlinの板曲げ理論は断面力のつり合いより周波数方程式が得られるので、上記の弾性論のそれとは異なる表現となる。しかし、従来の変位成分の合成成分を導入することで、行列式の項ごとに上記の単純な因子を浮き彫りにする手法を示した。

## 2. 座標系と仮定

一定の厚さ $h$ の板の中央面を通る互いに直角の座標を $x$ 軸および $y$ 軸とし、それらに直角な板厚方向の座標 $z$ を選ぶ。この $x$ 、 $y$ 、 $z$ 軸を右手座標系とし、 $z$ 軸は $xy$ 面より垂直下向きにとっている。構造要素のある点の $x$ 、 $y$ 、 $z$ 方向の変位成分をそれぞれ順に $u$ 、 $v$ 、 $w$ と表すものとする。また、板の $xz$ 断面の回転を $\psi_y$ 、 $yz$ 断面の回転を $\psi_x$ と表示した。

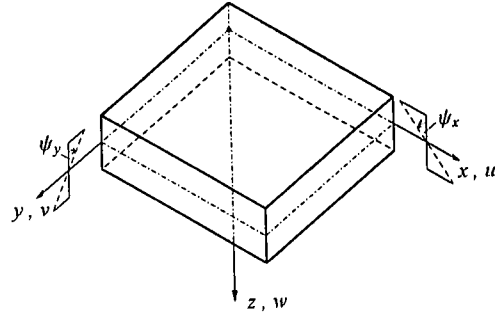


図-1 座標系

本論文で使用した主な仮定を以下に記す。

- 板厚 $h$ はその板幅 $b$ に比して小さい。
- 構造材料は等方性のHooke則を満足する。
- 板厚方向の伸縮ひずみは零とする。

## 3. 支配方程式の誘導

### (1) 基礎条件式

板のひずみと変位の関係は次のごとくなる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (1)$$

Kirchhoff-Loveの古典板理論では、たわみ $w$ に起因する板厚中心線の回転、たとえば $-\partial w/\partial x$ と板断面の平均回転 $\psi_x$ は等しいと仮定する。長方形の板要素 $dx \times dz$ は歪まないため、せん断ひずみは零となる。Reissner-Mindlinの板理論では、この矛盾を避ける目的で板厚中心線の回転と板断面の回転を異なるものとして、理論を構成している。

二次せん断ひずみを考慮しない古典板理論の $x$ 軸方向変位を $U$ 、 $y$ 軸方向変位を $V$ とすると、式(1.c)～(1.e)は次のごとく分解表示できる。

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{xy,pr} + \gamma_{xy,se} \\ \tilde{\gamma}_{xz} &= \gamma_{xz,pr} + \gamma_{xz,se} \\ \tilde{\gamma}_{yz} &= \gamma_{yz,pr} + \gamma_{yz,se} \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、添え字 $(\cdot)_{pr}$ を付した初等成分はKirchhoff-Loveのせん断ひずみを、添え字 $(\cdot)_{se}$ を付した二次成分はReissner-Mindlinなどの1次せん断ひずみを表

すものとする。具体的には次のごとくなる。

$$\begin{aligned}\gamma_{xy,pr} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \gamma_{xy,se} = \frac{\partial(v-V)}{\partial x} + \frac{\partial(u-U)}{\partial y} \\ \gamma_{xz,pr} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xz,se} = \frac{\partial(u-U)}{\partial z} \\ \gamma_{yz,pr} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{yz,se} = \frac{\partial(v-V)}{\partial z}\end{aligned}\quad (3)$$

縦弾性係数を  $E$ 、横弾性係数を  $G$  として Poisson 比を  $\nu$  と書くならば、Hooke 則は次のごとくなる。

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}\end{aligned}\quad (4)$$

この Hooke 則式(4)に式(1)を代入して、応力と変位の関係は次のごとく表せる。

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} &= G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} &= G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (5)$$

物体力の  $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向の成分をそれぞれ  $p_x$ 、 $p_y$ 、 $p_z$  と表すならば、板の微小要素の応力のつりあい条件は、次のごとく与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + p_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + p_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + p_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (6)$$

ただし、 $\rho$  は板の材料密度、 $t$  は時間である。

微小要素の応力のつり合い条件式(6)から求められるせん断応力  $\tau_{yz}$  および  $\tau_{xz}$  は板厚方向に2次関数分布しており、これらを縦弾性係数  $G$  で除して Hooke 則を適用すれば、せん断ひずみ  $\gamma_{yz}$  および  $\gamma_{xz}$  が求められる。せん断ひずみはひずみの定義式(2)、(3)からも求められる。これらを波印  $\tilde{}$  の有無で区別している。せん断応力の仮想仕事の等価性の条件とは、これら2種類のせん断ひずみの仮想仕事は板厚全体

で等しくなると設定することである。具体的には次の構造系の板厚  $h$  に関する積分式となる。

$$\begin{aligned}\int_{-h/2}^{h/2} \delta \tau_{xz} \gamma_{xz} dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \tau_{xz} \tilde{\gamma}_{xz} dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \delta \tau_{yz} \gamma_{yz} dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \tau_{yz} \tilde{\gamma}_{yz} dz\end{aligned}\quad (7)$$

ただし、仮想成分という意味で記号  $\delta(\cdot)$  を用いた。

## (2) 変位、ひずみおよび応力

Reissner-Mindlin の板理論の概略のみ記述する。板断面の線形の反り変位のみ考慮し、高次のそれを無視するならば変位関数は以下のごとくなる<sup>10)</sup>。

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= z \psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= z \psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\quad (8)$$

回転変位を規定する関数  $\psi_x(x, y, t)$ 、 $\psi_y(x, y, t)$  およびたわみ変位を規定する関数  $w(x, y, t)$  は未知関数である。参考までに、この板面内の  $x$ 、 $y$  方向の変位関数  $u(x, y, z, t)$ 、 $v(x, y, z, t)$  を古典板理論の変位関数  $U(x, y, z, t)$ 、 $V(x, y, z, t)$  に変更するには、式(8.a)、(8.b)の断面回転の関数  $\psi_x(x, y, t)$ 、 $\psi_y(x, y, t)$  をそれぞれ  $-\partial w/\partial x$ 、 $-\partial w/\partial y$  に置き換えればよい。すなわち、式(3.c)、(3.e)を移項し、積分して次式となる。

$$\begin{aligned}U(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (9)$$

これらの変位式(8)をひずみ式(1)に代入して

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= z \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \\ \tilde{\gamma}_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + z \psi_x, \quad \tilde{\gamma}_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + z \psi_y\end{aligned}\quad (10)$$

と表せる。ただし、 $\dot{}$  は板厚方向座標  $z$  に関する微分を意味するから、 $\dot{z} = 1$  である。

これらを Hooke 則式(4)に代入すると

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y, z, t) &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\ \sigma_{yy}(x, y, z, t) &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy}(x, y, z, t) &= Gz \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \\ \tilde{\tau}_{xz}(x, y, z, t) &= G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) \\ \tilde{\tau}_{yz}(x, y, z, t) &= G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right)\end{aligned}\quad (11)$$

を得る。

せん断応力  $\tau_{yz}$  および  $\tau_{zx}$  は応力のつり合い条件から求めることもできる。応力のつり合い条件式(6.a)および(6.b)を移項し、 $z$  で積分すると、

$$\begin{aligned}\tau_{zx}(x, y, z, t) &= -\int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dz \\ &\quad + \int_{-h/2}^z \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz - \int_{-h/2}^z p_x dz \\ \tau_{yz}(x, y, z, t) &= -\int_{-h/2}^z \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dz - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dz \\ &\quad + \int_{-h/2}^z \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dz - \int_{-h/2}^z p_y dz\end{aligned}\quad (12)$$

となる。式(11.a)~(11.c)を代入し、板の上下端でこれらのせん断応力が零となる境界条件も考慮すると、

$$\begin{aligned}\tau_{zx}(x, y, z, t) &= -\frac{ES(z)}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \frac{m_x}{EI} \right] \\ \tau_{yz}(x, y, z, t) &= -\frac{ES(z)}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + \frac{m_y}{EI} \right]\end{aligned}\quad (13)$$

となる。ただし、単位せん断応力関数は

$$S(z) = \int_{-h/2}^z z dz = \frac{h^2}{8} \left[ \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 - 1 \right] \quad (14)$$

と定義した。Poisson比を考慮した板の縦弾性係数を  $\bar{E}$ 、板の単位幅の断面積を  $A$ 、板の単位幅の断面2次モーメント(慣性モーメント)を  $I$  と表記した。板の場合次のごとくなる。

$$\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad A = 1 \cdot h, \quad I = \frac{1}{12} 1 \cdot h^3 \quad (15)$$

外力  $p_x$  あるいは  $p_y$  による応力は断面ごとに平均化して扱う必要がある。外力の合力としての曲げモーメントは、それぞれ  $m_x$  および  $m_y$  と表記し、次のごとく定義した。

$$\begin{aligned}m_x(x, y, t) &= \int_{-h/2}^{h/2} p_x(x, y, z, t) z dz \\ m_y(x, y, t) &= \int_{-h/2}^{h/2} p_y(x, y, z, t) z dz\end{aligned}\quad (16)$$

応力のつり合い条件より求められたせん断応力式(13)にHooke則式(4.d), (4.e)を適用するならば、

$$\begin{aligned}\tau_{zx}(x, y, z, t) &= -\frac{ES(z)}{G(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \frac{m_x}{EI} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{yz}(x, y, z, t) &= -\frac{ES(z)}{G(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + \frac{m_y}{EI} \right]\end{aligned}\quad (17)$$

と表せる。

2種類のせん断ひずみが求められた。これらが近似的に等しいためには、せん断ひずみ仕事の等価性が保証されねばならない。式(10.d), (10.e), (13), (17)を式(7)に代入し、部分積分を用いて整理すると

$$\begin{aligned}\frac{E}{G(1-\nu^2)} R \left[ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \frac{m_x}{EI} \right] \\ - I \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) = 0 \\ \frac{E}{G(1-\nu^2)} R \left[ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + \frac{m_y}{EI} \right] \\ - I \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) = 0\end{aligned}\quad (18)$$

を得る。ただし、二次せん断抵抗  $R$  は単位幅の断面積  $A (= 1 \cdot h)$  に関する積分として次のごとく定義する。

$$R = \int_{-h/2}^{h/2} S(z) S(z) 1 \cdot dz \quad (19)$$

式(14)の単位せん断応力関数を代入して、結局

$$R = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{h^2}{8} \left[ \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 - 1 \right] \right\}^2 1 \cdot dz = \frac{1 \cdot h^5}{120} \quad (20)$$

と与えられる。

### (3) 支配方程式と断面力

上記の最終段階の変位、ひずみ、応力の成分を用いて、支配方程式を誘導し、断面力を定義する。Hamiltonの原理は変分記号  $\delta$  を用いて

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U - V) dt = 0 \quad (21)$$

と表せる。ここで  $t_0$  および  $t_1$  は時間  $t$  の最初と最後を意味する。この時間間隔における系の運動エネルギー  $T$ 、ひずみエネルギー  $U$  および外力のポテンシャル  $V$  は以下のごとく表せる。

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dV \quad (22)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{ \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy} \}$$

$$+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{xz}\gamma_{xz}\}dV \quad (23)$$

$$V = - \int_V (p_x u + p_y v + p_z w) dV - \left( \sum P_x u + \sum P_y v + \sum P_z w \right) \quad (24)$$

変位の式(8), ひずみの式(10)をHamiltonの原理に代入し, 整理すると, 断面力の関係式

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + m_x - \rho I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y + m_y - \rho I \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (27)$$

を得る. 上式中の板単位幅当たりの断面力は次式で定義した.

$$M_{xx}(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(x, y, z, t) z dz \quad (28)$$

$$M_{yy}(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}(x, y, z, t) z dz \quad (29)$$

$$M_{xy}(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(x, y, z, t) z dz \quad (30)$$

$$Q_x(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}(x, y, z, t) 1 dz \quad (31)$$

$$Q_y(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}(x, y, z, t) 1 dz \quad (32)$$

外力として板の面に直角の分布荷重  $q_z(x, y, t)$  は板厚方向に積分して次のごとく定義した.

$$q_z(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} p_z(x, y, z, t) dz \quad (33)$$

変分計算より, 境界辺  $x = 0, a$  および  $y = 0, b$  での条件は次のごとく与えられる.

$$\begin{aligned} [\delta\psi_x ([M_{xx}]_{x=0}^{x=a} + [M_{xy}]_{y=0}^{y=b} + \sum P_x z)] &= 0 \\ [\delta\psi_y ([M_{yy}]_{y=0}^{y=b} + [M_{xy}]_{x=0}^{x=a} + \sum P_y z)] &= 0 \\ [\delta w ([Q_x]_{x=0}^{x=a} + [Q_y]_{y=0}^{y=b} + \sum P_z)] &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

断面力の定義式(28)~(32)に応力の式(11.a)~(11.c)および式(13)を代入すると

$$M_{xx}(x, y, t) = D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \quad (35)$$

$$M_{yy}(x, y, t) = D \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \quad (36)$$

$$M_{xy}(x, y, t) = \frac{1-\nu}{2} D \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \quad (37)$$

$$Q_x(x, y, t) = D \left[ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right]$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \frac{m_x}{EI} \quad (38)$$

$$Q_y(x, y, t) = D \left[ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + \frac{m_y}{EI} \right] \quad (39)$$

となる. 上式で用いた板の単位幅当たりの曲げ剛性  $D$  およびねじり剛性  $(1-\nu)D$  は次のごとく定義した.

$$D = \bar{E} I = \frac{E \cdot 1 \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$(1-\nu)D = 2GI = \frac{1}{6} G \cdot 1 \cdot h^3 \quad (40)$$

式(18)の2本の式の両辺に  $GIR^{-1}$  を掛け, 式(38), (39)を考慮すると, Mindlin板形のせん断力式

$$Q_x = GAk \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) \quad (41)$$

$$Q_y = GAk \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) \quad (42)$$

となる. 断面形状に依存するせん断修正係数  $k$  は

$$k = \frac{1}{A} IR^{-1} I \quad (43)$$

と定義した. ただし, ダミーの  $A$  は, 式(15.b)に示したごとく, 板の単位幅当たりの断面積である. 式(15)および(20)の各値を代入すると

$$k = \frac{1}{1 \cdot h} \frac{1 \cdot h^3}{12} \left( \frac{1 \cdot h^5}{120} \right)^{-1} \frac{1 \cdot h^3}{12} = \frac{5}{6} \quad (44)$$

となり, 従来の結果<sup>3)</sup>と一致する.

#### (4) 変位量の支配方程式

求められた支配方程式(25)~(27), 断面力の式(35)~(37), (41), (42)を用いて変位量の支配方程式を作成する. ここで断面回転量の導関数の次元をもつ2つの変数  $\Phi, \Psi$  を次のごとく定義しておく<sup>10)</sup>.

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \Psi(x, y, t) &= \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (45)$$

これを用いて, 支配方程式(25)~(27)を書き直すと

$$\left( GAk \nabla^2 - \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w + GAk \Phi = -q_z(x, y, t) \quad (46)$$

$$GAk \nabla^2 w - \left( D \nabla^2 - GAk - \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (47)$$

$$\left( \frac{1-\nu}{2} D \nabla^2 - GAk - \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = \frac{\partial m_x}{\partial y} - \frac{\partial m_y}{\partial x} \quad (48)$$

となる。たわみ  $w(x, y, t)$  のみの支配方程式は式(46), (47) から  $\Phi(x, y, t)$  を消去して整理すると,

$$\left\{ \left( D\nabla^2 - \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \nabla^2 - \frac{\rho}{Gk} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} w = \left( 1 - \frac{D}{GAk} \nabla^2 + \frac{\rho I}{GAk} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) q_z + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (49)$$

と表現できる。同様に、変位量  $\Phi(x, y, t)$  のみの式は式(46), (47) からたわみ  $w(x, y, t)$  を消去して,

$$\left\{ \left( D\nabla^2 - \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \nabla^2 - \frac{\rho}{Gk} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \Phi = -\nabla^2 q_z - \left( \nabla^2 - \frac{\rho}{Gk} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \quad (50)$$

と表現できる。式(49)と(50)を比較すると、左辺の変位量にかかる作用素はまったく同じ形式となっている。変位量  $\Psi(x, y, t)$  のみの支配方程式は式(48)にすでに与えられている。

### (5) Mindlin 板の近似位相速度曲線

たわみ  $w(x, y, t)$  と変位量  $\Phi(x, y, t)$ ,  $\Psi(x, y, t)$  の連立方程式(46)~(48)より、位相速度の関係式を求める。式(46)を  $GAk$  で除し、式(47), (48)を共に  $D$  で除して、式中の諸量を

$$c_P^2 = \frac{E}{\rho}, \quad c_Q^2 = \frac{Gk}{\rho}, \quad r^2 = \frac{I}{A} = \frac{h^2}{12} \quad (51)$$

と書き直す。板の縦波速度を  $c_P$ , 横波速度を  $c_Q$  として板の単位幅の断面 2 次半径を  $r$  と表現した。これから,

$$\begin{aligned} \left( \nabla^2 - \frac{1}{c_Q^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w + \Phi &= -\frac{q_z}{GAk} \\ \frac{1}{r^2} \frac{c_Q^2}{c_P^2} \nabla^2 w - \left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \frac{c_Q^2}{c_P^2} - \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi &= \frac{1}{D} \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{1-\nu}{2} \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \frac{c_Q^2}{c_P^2} - \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi &= \frac{1}{D} \left( \frac{\partial m_x}{\partial y} - \frac{\partial m_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

となる。

$x$  軸方向に無限長の板(図-2)の振動特性を調べる目的で変位波形を

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \\ \Phi(x, y, t) &= b \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \\ \Psi(x, y, t) &= c \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \end{aligned} \quad (53)$$

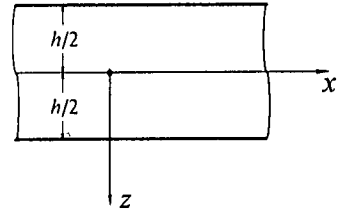


図-2 無限長の板

と設定する。ただし、板を伝播する弾性波の位相速度を  $c$ , 波長を  $\lambda$ , そして各変位の振幅を順に  $a, b, c$  とした。これらを式(52)に代入し、右辺の荷重項をすべて零とおくならば、連立同次方程式が得られる。上記の変位波形を設定する場合,

$$\begin{aligned} \nabla^2 w + \Phi &= \left[ -\left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 a + b \right] \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Phi \end{aligned} \quad (54)$$

であるから、たわみ  $w(x, y, t)$  の代わりに、この合成変位  $\nabla^2 w + \Phi$  を新しい変位とみなすと、後述のごとく便利である。このとき上記の支配方程式(52)は次のごとく書き直せる。

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{c^2}{c_Q^2} \right) (\nabla^2 w + \Phi) + \frac{c^2}{c_Q^2} \Phi &= 0 \\ \frac{1}{r^2} \frac{c_Q^2}{c_P^2} (\nabla^2 w + \Phi) - \left( \nabla^2 - \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi &= 0 \\ \left( \frac{1-\nu}{2} \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \frac{c_Q^2}{c_P^2} - \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

これが変位  $\nabla^2 w + \Phi$ ,  $\Phi$  および  $\Psi$  に関して非自明解をもつ条件は連立同次方程式の係数マトリックスの行列式が零になることである。板の曲げ振動に関係する上 2 本の式は第 3 の変位量  $\Psi(x, y, t)$  と連成しないから、上 2 本のみの行列式を抜き取ると

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{c^2}{c_Q^2} & \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \frac{c^2}{c_Q^2} \\ \frac{1}{r^2} \frac{c_Q^2}{c_P^2} & 1 - \frac{c^2}{c_P^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (56)$$

となる。これを展開、移項し、式(51.c)も考慮すると

$$\left( 1 - \frac{c^2}{c_Q^2} \right) \left( 1 - \frac{c^2}{c_P^2} \right) = 3 \left( \frac{\lambda}{\pi h} \right)^2 \frac{c^2}{c_P^2} \quad (57)$$

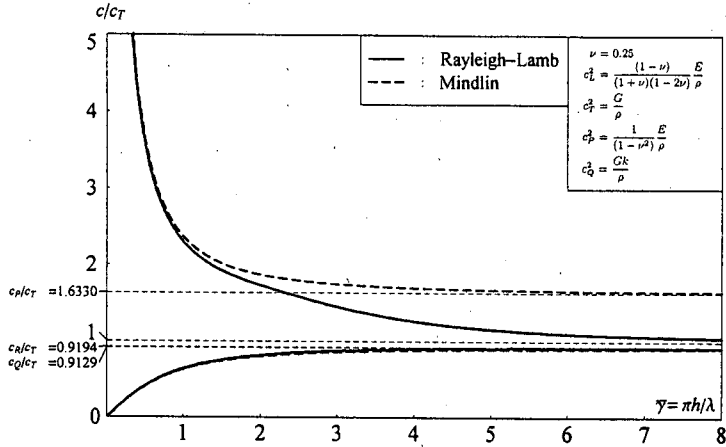


図-3 無限長板の位相速度曲線

となる。この式の両辺の逆をとり、若干の変形により

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi h}{\lambda} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{c^2}{c_Q^2}\right)^{1/2}} \frac{1}{\left(1 - \frac{c^2}{c_P^2}\right)^{1/2}} \\ &\dots\dots (c < c_Q < c_P) \\ \text{解なし} &\dots\dots (c_Q \leq c \leq c_P) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi h}{\lambda} \frac{c}{c_Q} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{c^2}{c_Q^2}\right)^{1/2}} \frac{1}{\left(1 - \frac{c^2}{c^2}\right)^{1/2}} \\ &\dots\dots (c_Q < c_P < c) \end{aligned} \right\} (58)$$

と3種類の場合に式を分類できる。上記のごとく合成変位  $\nabla^2 w + \Phi$  を導入したため、周波数無限大において収斂する位相速度が行列式中に明白になっており、Rayleigh 表面波や次節の Rayleigh-Lamb 板波の位相速度方程式に対応する形式となる。すなわち、位相速度が横波速度  $c_Q$  より小さい場合、それが横波速度  $c_Q$  に近づくにつれて無次元化周波数

$$\bar{\gamma} = \frac{\pi h}{\lambda} \quad (59)$$

は無限大となる。また、位相速度が縦波速度  $c_P$  より大きい場合、それが上から縦波速度  $c_P$  に近づくにつれて無次元化周波数  $\pi h/\lambda$  は無限大となる。逆に、無次元化周波数  $\pi h/\lambda$  が零に近づくにしたがい、位相速度  $c$  は無限大へと発散する。これが近似理論としての Mindlin 板の位相速度曲線の性質である。この状況を図-3中の点線で示した。

### (6) Rayleigh-Lamb の位相速度曲線

無限長の板の位相速度の厳密解を与えるものとして Rayleigh-Lamb の周波数方程式

$$\left(1 - \frac{c^2}{2c_T^2}\right)^2 \tanh \frac{\pi h}{\lambda} \left(1 - \frac{c^2}{c_L^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{c^2}{c_L^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2}\right)^{1/2} \tanh \frac{\pi h}{\lambda} \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2}\right)^{1/2} = 0 \quad (60)$$

がある。ただし、 $c_L$  および  $c_T$  はそれぞれ連続体の縦波および横波速度であり、

$$\begin{aligned} c_L^2 &= \frac{\lambda + 2G}{\rho} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho} \\ c_T^2 &= \frac{G}{\rho} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{E}{\rho} \end{aligned} \quad (61)$$

と定義されている。この方程式(60)から得られる位相速度曲線を図-3の中に実線で与えた。ただし、第3次以上のモードは省略した。一般的な材料の Poisson 比  $\nu$  では、式(51.b)より算出される  $c_Q$  と周知の Rayleigh 方程式の根  $c_R$  は比較的近い値となっている。

この図の厳密解の位相速度曲線と Mindlin 板の近似位相速度曲線を比較すると、低次のモードは比較的良く一致している。厳密解が周波数無限大で Rayleigh 表面波速度  $c_R$  に収束するのに対し、近似曲線は上にのべたごとく、板の横波速度  $c_Q$  に収束する違いがある<sup>11)</sup>。しかし、その差は大きくはない。Rayleigh 波速度  $c_R$  が板の材料の Poisson 比  $\nu$  に依存するため、一律には言えないが、おおむね5%未満である。これに比べると、厳密解の第2次モードと近似曲線のそれは高周波領域で大きく異なる。厳密解が連続体の横波速度  $c_T$  に収束するのに対し、近似曲線は上に

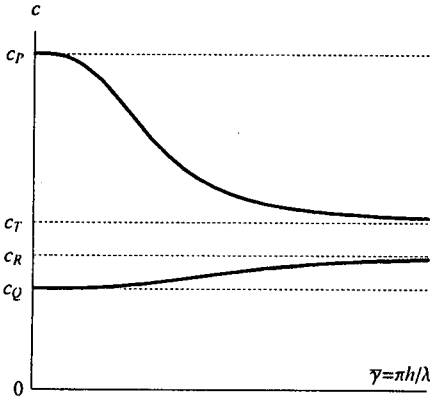


図-4 収束速度の減衰曲線の概念図

述べたごとく、板の縦波速度  $c_P$  に収束してしまう。その差は式(51.a)および(61.b)より

$$\frac{c_P}{c_T} = \sqrt{\frac{E/(1-\nu^2)\rho}{E/2(1+\nu)\rho}} = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \quad (62)$$

となり、通常材料で約60%以上の差となる。

### (7) 支配方程式の修正

周波数の増加に伴い、板中央面付近の  $x, y$  軸方向の変位成分は指数関数的に減少し、高周波数領域では表面付近のみ軸方向反り変位が存在するようになる。このため、板厚の中間部分は周波数の増大につれて『無応力状態』になり、その領域が板の縁方向に拡大してゆくと解釈される。この現象を考慮しない単一の反り関数  $z$  の保持は Mindlin の反り変位に対応する高次モードを誤った位相速度  $c_P$  へと収束させてゆく。これに対し、板の中央面に直角の変位、すなわちたわみ  $w$  はそのような現象の影響をほとんど受けない。そのため、Mindlin の近似理論でも十分良好な第1(低次)モードの位相速度曲線が得られる。

周波数の増大に伴う板中央面付近からの『無応力領域』の拡大を考慮するには、支配方程式の断面諸量値の低下を評価する必要がある。具体的には、周波数の増加による『無応力領域』の拡大に伴い、実質的な断面2次半径  $r^*(\bar{\gamma})$  は減少してゆく。断面2次半径は板厚に比例するから、実質的な板厚  $h^*(\bar{\gamma})$  が減少してゆくとみなせる。近似位相速度曲線の  $c_Q$  に漸近する低次モードは、Rayleigh-Lamb の厳密解より  $c_R$  に漸近すべきであり、 $c_P$  に漸近する高次モードは  $c_T$  に漸近すべきことが図-3よりわかっている。この概念図を無次元化周波数  $\bar{\gamma} (= \pi h/\lambda)$  を横軸に、

横波および縦波速度を縦軸にとり、図-4に示す。これから、2本の減衰(漸増)曲線の必要条件を挙げると以下の3つである。

- (a) 周波数零での縦軸上の切片の値は Mindlin 板の低次モード値  $c_Q$  および高次モード値  $c_P$  である。
  - (b) 静的状況から動的状況に移る縦軸からの出発時の傾き(接線角)は零である。
  - (c) 周波数無限大において、Rayleigh-Lamb の低次モードは  $c_R$  に、高次モードは  $c_T$  に漸近する。
- これらの条件を満足する減衰関数  $c_Q^*(\bar{\gamma})$ 、 $c_P^*(\bar{\gamma})$  および  $h^*(\bar{\gamma})$  を以下のごとく設定する。

$$\begin{aligned} c_Q^*(\bar{\gamma}) &= c_Q \left( \frac{\alpha_Q}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_Q \cdot (1 - c_R/c_Q)^{-1}} + \frac{c_R}{c_Q} \right) \\ c_P^*(\bar{\gamma}) &= c_P \left( \frac{\alpha_P}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_P \cdot (1 - c_T/c_P)^{-1}} + \frac{c_T}{c_P} \right) \\ h^*(\bar{\gamma}) &= h \left( \frac{\alpha_h}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_h \cdot (1 - h_\infty/h)^{-1}} + \frac{h_\infty}{h} \right) \quad (63) \end{aligned}$$

式中の係数  $\alpha_Q$ 、 $\alpha_P$  および  $\alpha_h$ 、 $h_\infty$  は任意に選べる値であり、厳密解の曲線に適合するように決定する。上記の条件(b)を満たすためには、無次元化周波数  $\bar{\gamma}$  の次数は2以上の整数であればよい。ここでは種々の計算結果を参考に、次数3を採用した。結局、修正された位相速度方程式は次のごとくなる。

$$\left(1 - \frac{c^2}{c_Q^2(\bar{\gamma})}\right) \left(1 - \frac{c^2}{c_P^2(\bar{\gamma})}\right) = 3 \left(\frac{\lambda}{\pi h^*(\bar{\gamma})}\right)^2 \frac{c^2}{c_P^2(\bar{\gamma})} \quad (64)$$

例として、Poisson 比  $\nu = 0.25$  および  $0.30$  の場合、この設定式の最適の係数  $\alpha_Q$ 、 $\alpha_P$ 、 $\alpha_h$  を探し、得られた結果を図-5に一点鎖線と与え、設定した係数値も図中に記した。Rayleigh-Lamb の厳密解は無限にあるが、ここではたわみが支配的な第1次モードおよび軸方向反り変位が支配的な第2次から第7次モードまでを図示した。第2次モードは低次の反り変位を第3次以上は非線形の高次の反り変位モードの伝播を意味する。ここで着目する第1次および第2次モードは比較的良好な近似曲線となっている。

式(51.a)、(51.b)および式(63)より、支配方程式を修正して、修正位相速度曲線との整合をはかる。最終的な支配方程式は

$$\left( G^*(\bar{\gamma}) A^*(\bar{\gamma}) k \nabla^2 - \rho A^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w + G^*(\bar{\gamma}) A^*(\bar{\gamma}) k \Phi = -q_z(x, y, t) \quad (65)$$

$$\begin{aligned} G^*(\bar{\gamma}) A^*(\bar{\gamma}) k \nabla^2 w - (D^*(\bar{\gamma}) \nabla^2 - G^*(\bar{\gamma}) A^*(\bar{\gamma}) k \\ - \rho I^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \Phi = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (66) \end{aligned}$$

$$\left( \frac{1-\nu}{2} D^*(\bar{\gamma}) \nabla^2 - G^*(\bar{\gamma}) A^*(\bar{\gamma}) k - \rho I^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi$$



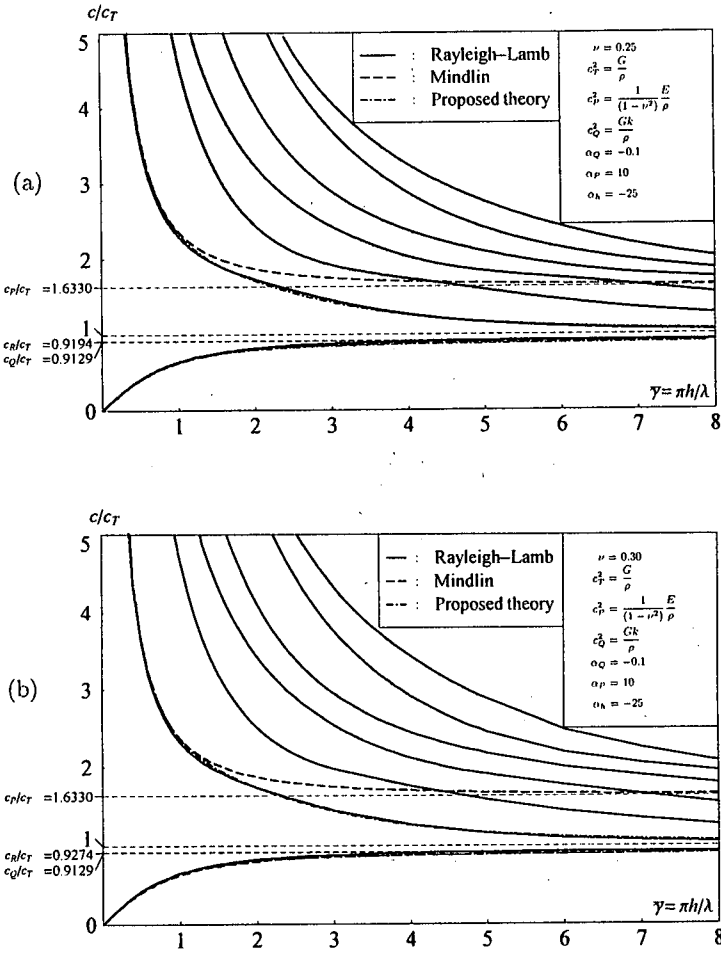


図-5 修正位相速度曲線と厳密解の比較 (a)  $\nu = 0.25$  (b)  $\nu = 0.30$

$$= \frac{\partial m_x}{\partial y} - \frac{\partial m_y}{\partial x} \quad (67)$$

となる。ただし、周波数の関数になった弾性係数  $G^*(\bar{\gamma})$ ,  $E^*(\bar{\gamma})$ , 断面2次モーメント  $I^*(\bar{\gamma})$  および断面面積  $A^*(\bar{\gamma})$  は

$$\begin{aligned} G^*(\bar{\gamma}) &= G \left( \frac{\alpha_Q}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_Q \cdot (1 - c_R/c_Q)^{-1}} + \frac{c_R}{c_Q} \right)^2 \\ E^*(\bar{\gamma}) &= E \left( \frac{\alpha_P}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_P \cdot (1 - c_T/c_P)^{-1}} + \frac{c_T}{c_P} \right)^2 \\ I^*(\bar{\gamma}) &= I \left( \frac{\alpha_h}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_h \cdot (1 - h_\infty/h)^{-1}} + \frac{h_\infty}{h} \right)^{n+2} \\ A^*(\bar{\gamma}) &= A \left( \frac{\alpha_h}{\bar{\gamma}^3 + \alpha_h \cdot (1 - h_\infty/h)^{-1}} + \frac{h_\infty}{h} \right)^n \end{aligned} \quad (68)$$

と表現される。そして、板の曲げ剛性は式(40.a)より

$$D^*(\bar{\gamma}) = \bar{E}^*(\bar{\gamma}) I^*(\bar{\gamma}) = \frac{E^*(\bar{\gamma}) I^*(\bar{\gamma})}{1 - \nu^2} \quad (69)$$

と書き直せる。

たわみ変位  $w(x, y, t)$  のみの支配方程式あるいは断面回転による変位  $\Phi(x, y, t)$  のみの支配方程式も、式(49)および式(50)中の弾性係数および断面諸量を上記の式(68)に置き換えればよい。結局

$$\left\{ \left( D^*(\bar{\gamma}) \nabla^2 - \rho I^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \nabla^2 - \frac{\rho}{G^*(\bar{\gamma})k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \rho A^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} w = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \left( 1 - \frac{D^*(\bar{\gamma})}{G^*(\bar{\gamma})A^*(\bar{\gamma})k} \nabla^2 + \frac{\rho I^*(\bar{\gamma})}{G^*(\bar{\gamma})A^*(\bar{\gamma})k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) q_z \quad (70)$$

$$\left\{ \left( D^*(\bar{\gamma}) \nabla^2 - \rho I^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \nabla^2 - \frac{\rho}{G^*(\bar{\gamma})k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \rho A^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \Phi = -\nabla^2 q_z - \left( \nabla^2 - \frac{\rho}{G^*(\bar{\gamma})k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \quad (71)$$

と表現できる。

#### 4. まとめ

仮想変位の原理とせん断ひずみ仕事の等価性を組み合わせて、支配方程式とせん断修正係数を同時に誘導した。そのため、従来の静的なせん断ひずみ仕事の等価性原理を動的問題に拡張した。具体的には、d'Alembertの項を含めた応力のつり合い条件から、せん断応力を決定すれば静的場合と同様にMindlin板形のせん断力の式が得られることを示した。

本報告は高周波領域での位相速度曲線の厳密解との乖離の問題点を弾性係数および断面諸量を周波数の関数とみなすことで解決した。ただし、せん断修正係数のみ、固定したままで済ませている。厳密解であるRayleigh-Lambの位相速度曲線と一致させるため、自由に選べる係数を導入した。Poisson比の値を変えてこの係数の変化を調べたが、大きな動きはなかった。ゆえに、これを図-5中に与える値に固定しても、差し障りはないと思われる。得られた支配方程式は板の静的問題および低周波領域から高周波領域までの振動、波動などの動的現象を扱うことができる。無限長および有限長の区別無く、多彩な構造系、荷重系の板を対象としているため、3次元弾性論の厳密解より高い有用性をもつ。

ここでは1次せん断変形を許容するMindlin形の板曲げ理論を扱った。さらに高次の板曲げ理論として、Reissner<sup>12)</sup>、平島ら<sup>13)</sup>、Reddyの研究<sup>14)</sup>などがある。これらに対応する理論も本理論を発展させた形で報告<sup>15)</sup>する予定である。

#### 参考文献

- 1) Rayleigh, L. :On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter, Proc. London Math. Soc., Vol.20, pp.225-234, 1888/1889.

- 2) Lamb, H. :On the flexure of an elastic plate (Appendix), Proc. London Math. Soc., Vol.21, pp.70-90, 1888/1889.
- 3) Mindlin, R.D. :Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J. of Appl. Mech., Vol.18, pp.31-38, 1951.
- 4) Reissner, E. :The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. of Appl. Mech., Vol.12, pp.A69-A77, 1945.
- 5) Cowper, G.R. :The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, J. of Appl. Mech., Vol.33, pp.335-340, 1966.
- 6) Love, A.E.H. :A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover Publications, 1944.
- 7) Sedlacek, G. :Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges für prismatische Stäbe mit dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Profilverformung, Fortschritt Berichte, VDI-Z., Reihe 4, Nr.8, 1968.
- 8) 臼木 恒雄 :断面変形を考慮した変断面直線多室箱桁橋の一般解析法, 土木学会論文集, No.368/I-5, pp.265-274, 1986.
- 9) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. :Mechanics of Materials, Van Nostrand Reinhold, 1973.
- 10) Marguerre, K., and Woernle H.-T. :Elastic Plates, Blaisdell Publishing Co., 1969.  
マルゲール, K., ウェールンレ, H.-T. :弾性平板, 玉手 統 訳, 培風館, 1974.
- 11) Eringen, A.C. and Suhubi, E.S. :Elastodynamics, Vol.2, Academic Press, 1975.
- 12) Reissner, E. :On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation, Int. J. Solids Structures, Vol.11, pp.569-573, 1975.
- 13) 平島健一, 根岸嘉和 :数種の平板理論の動特性 (自由振動と分散特性) に関する研究, 土木学会論文報告集, No.333, pp.21-34, 1983.
- 14) Reddy, J.N. :A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation, Int. J. Solids Structures, Vol.20, pp.881-896, 1984.
- 15) 臼木恒雄, 真木有岳 :任意高次板曲げ理論における位相速度曲線群, 土木学会論文集投稿中.

(1999. 2. 4 受付)

## NEW MINDLIN PLATE THEORY CONVERGING ON THE PHASE VELOCITIES OF TRANSVERSE WAVES AND THAT OF RAYLEIGH WAVES

Tsuneo USUKI

The second phase velocity curve of Mindlin plate approaches to the extensional wave velocity of thin plate, although the second velocity of Rayleigh-Lamb frequency equation of the theory of elasticity approaches to the transverse wave velocity of continuum. This defect can be solved by introducing new elasticity modulus and cross-sectional constants, which are treated as functions of frequency. In the same way, the discrepancy between the first phase velocity curve of Mindlin plate and that of Rayleigh-Lamb frequency equation can be solved. The governing equations of new Mindlin plate theory can be used to analyse static and dynamic problems with many kinds of structural and load systems.