

蛇行水路における分散の基礎的研究

FUNDAMENTAL STUDY OF LONGITUDINAL DISPERSION IN A MEANDERING CHANNEL

福 岡 捷 二*
By Shoji Fukuoka

1. ま え が き

人口の都市集中や工業の隆盛にともない人間社会をとりまく環境保全の問題はますます大きな社会問題に発展しつつある。自然河川は水資源、灌漑、排水、汚水浄化施設などの機能を持ち人間生活に重要な役割を果たしてきたが、河川を1つの大きな汚水浄化施設であるという立場から考えると（もちろん、汚水は河川に流入する前に処理すべきことはいうまでもないが）他の機能を損わずにどの程度まで汚水を流し得るか、上流で流入した高濃度の汚水が下流でどのような濃度の時間分布を持つかを確実に予測し得ることが必要である。この意味から自然河川での物質の分散機構をよりよく理解することは効果的な河川利用のうえから重要である。

自然河川の分散機構を類推するため、これまで数多くの室内実験が行われてきたが、その大部分は直線水路で行なわれたものであり、河川本来の姿からして蛇行水路での実験が望ましく直線水路で得られた知識は自然河川の分散機構を理解する上から必ずしも十分ではない。ここでは蛇行している水路の分散機構を調べようとする。このために bend 間に直線部をはさみ、交互に 90 度向きを変える 13 個の bend からなる長方形断面蛇行水路が実験に用いられた。このような単純化された蛇行水路は必ずしも自然河川を代表してはいないが、分散機構の理解に有効な知識を与えるであろう。

乱流における拡散の基礎式は式 (1) で表わされる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} + \frac{\partial(wc)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \dots \dots (1)$$

ここに、 c : 時間平均濃度、 t : 時間、 x, y, z : それぞれ主流方向、鉛直方向、主流に直角方向の座標、 u, v, w : x, y, z 方向の時間平均速度、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$: x, y, z 軸が主軸である時のそれぞれの方向の乱流混合係数である。

u, v, w , は空間的に、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ は時間的、空間的に変動する量のために式 (1) を直接的に解くことは困難である。そのため多くの研究者は式 (1) を単純化して解こうと試みた。たとえば一次元拡散方程式

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K_X \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \dots \dots \dots (2)$$

は式 (1) の最も単純化されたものである。ここに

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \int_A u dA \dots \dots \dots (3)$$

$$\bar{c} = \frac{1}{A} \int_A c dA \dots \dots \dots (4)$$

K_X は主流方向分散係数、 A は流水断面積である。

分散に関する最初の貴重な研究を行なったのは G.I. Taylor^{3), 9)} であった。Taylor は長いまっすぐな円管中の分散機構が一次元分散方程式で表わされ、縦方向分散係数が速度分布と半径方向の拡散にどのように関連づけられるかを見出した。Taylor は縦方向分散係数 K_X は主流方向の移流による成分 K_C (移流分散係数) と乱流混合係数の x 成分 $\bar{\epsilon}_x$ の和で表わされること、すなわち

$$K_X = K_C + \bar{\epsilon}_x \dots \dots \dots (5a)$$

であり、 $\bar{\epsilon}_x$ は K_C に比して十分小さいことを示した。

$$K_C \gg \bar{\epsilon}_x \dots \dots \dots (5b)$$

Elder²⁾ は Taylor の考えを無限に広い二次元開水路流に拡張し次式を得た。

$$K_X = -\frac{1}{d} \int_0^d u' \int_0^y \frac{1}{\epsilon_y} \int_0^y u' dy dy dy \dots \dots (6)$$

ここに、 d : 水深、 $u' = u - \bar{u}$: 断面平均からの速度の変動量である。対数速度分布を持つ流れを仮定すると式 (5) は次式となる。

$$K_X = \frac{0.404}{\kappa^3} d \cdot u_* \dots \dots \dots (7)$$

κ は Kármán 定数、 u_* は摩擦速度である。Elder による Taylor 理論の拡張は縦方向の分散に鉛直方向の速度変動のみが寄与することを示したものである。しかしながら、多くの研究者は^{3), 4), 12)} 河川で実測された K_X が式 (7) によって計算されたものよりはるかに大きな値を

* 正会員 Ph. D., 工博 東京工業大学助手 工学部土木工学科

もち, Elder のモデルでは説明し得ないことを見出した。

Fischer³⁾ は自然河川でこのような大きな K_X が得られるのは, 河川の流れが三次元的なため主流の横断方向の速度変動が鉛直方向の変動に比しはるかに分散に寄与するためであると考え, これを実験によって確かめた。彼は主流速度の横断方向の変化に Taylor の考えを適用し, 自然河川や実験水路についてかなり適切に分散係数をみつもった :

$$K_X = -\frac{1}{A} \int_0^B u'd \int_0^z \frac{1}{\varepsilon_z d} \int_0^z \int_0^d u'dydzdzdz \quad (8)$$

ここに, B は流路幅である。

一次元拡散方程式を $x=0, t=0$ で $c_0(x) = \frac{W}{Ar} \delta(x)$ の条件で解くと解はガウス分布をもつ。ここに W は加えられた拡散質の重量, $\delta(x)$ は Dirac delta 関数, r は水の単位体積重量である。実験水路や自然河川でこの初期条件を満足するように加えられた拡散質の濃度分布は, source 付近ではかなりひずんでおり, 十分な距離流下後ガウス分布に近づく。この実験事実から Fischer³⁾ は分散過程を次の3つの領域にわけた。すなわち, (1) 主流の移流効果が卓越しているため流速分布形に応じたひずんだ濃度分布をもつ source 付近の領域 (移流域, convective period), (2) 移流域に続く領域で乱れによる鉛直と横断方向の拡散作用によってひずんだ濃度分布形が徐々にガウス分布に近づく領域, (3) 移流による輸送と乱れによる拡散がつりあい, 拡散質の運動が一次元拡散方程式に従う領域 (拡散域, diffusive period) である。

Fischer は Taylor の理論⁸⁾ を応用して分散に関する時間スケール T_L を導入した。

$$K_X = \overline{u'^2} T_L \propto \overline{u'^2} \frac{l^2}{Ru_*} \quad (9)$$

ここに, $\overline{u'^2}$: 速度変動の2乗平均, T_L : Lagrange の時間スケール (Lagrangian time scale), R : 径深, l : 最大速度の断面から最も遠い壁面までの距離で定義される横断方向の特性長である。Lagrange の時間スケールは断面内での拡散による混合に要する時間スケール T' (Eulerian time scale) と次式で関係づけられる。

$$T' = \frac{l^2}{\varepsilon_z} \quad (10)$$

対数速度分布をもつ流れに対して Lagrange と Euler の時間スケールは次式で関係づけられる。

$$T' = 14.8 T_L \quad (11)$$

これまで述べてきたことは, 直線流での研究から得られたもので蛇行流の分散に関する研究は 1, 2 を数える程度であり, 蛇行流中の分散機構はほとんど知られていない。

Fischer⁵⁾ は交互に向きを変える一連の bend 内の流れ (蛇行流) に彼の理論⁵⁾ を拡張し, 分散に及ぼす bend の影響を考察した。彼は, 同一方向に弯曲している流れよりも蛇行流れでは分散量が小さいと推論し, この差は断面内での拡散による混合に要する時間と bend をまわるに要する時間の相対的大きさに関係すると考えた。すなわち

$$\alpha = \frac{l^2}{\varepsilon_z} \frac{\bar{u}}{L} \quad (12)$$

ここに, L は1つの bend の長さである。Fischer は, さらに Elder が縦方向分散係数を求めたと同様な方法で Rozovskii の半径方向速度分布式⁶⁾ を用いて十分に長い bend 内の流れの横方向乱流混合係数 ε_z の関数形を導いた。

$$\varepsilon_z \sim \frac{\bar{u}^2 d^3}{u_* r c^2} \quad (13)$$

これらはいずれも推論の域を出ず, 実験に基づく検証はない。本研究は自然河川の分散機構を類推するため規則正しい蛇行パターンをもつ水路による実験研究である。研究目的の第1は, 蛇行水路での主流方向の分散機構を調べ, 分散係数が水理量や水路幾何形状とどのように関係づけられるかを見出すことにあり, 第2は bend に沿って変化する局所的移流分散係数とらせん流の関係から局所的移流分散係数と横方向乱流混合係数の相互関係を明らかにすることにある。

2. 解析方法

直線流中の分散は source から十分下流では, 一次元分散方程式によって記述し得ることはすでに述べた。蛇行流では bend の存在に起因する強いらせん流が生じているために蛇行流中の分散が単純に一次元分散過程で表わし得るかどうか疑問である。流路の曲率, 二次流の影響を考慮に入れた一般的な拡散の基礎式を境界条件のもとに解くことは困難であるので, ここでは式 (2) で表わされる一次元分散方程式を適用し, 流路蛇行に関する影響をすべて K_X の中に含めることによって, 流路全体にわたる平均的分散係数の値を調べてみる。

蛇行流のらせん流強度が流下方向に変化するので平均的な分散機構のほかに局所的分散機構も調べてみる。局所的質量輸送量 \dot{M} は一様等流では次式で定義される。

$$\dot{M} = \int_A u'c'dA = -K_{C_1} A \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (14)$$

局所的移流分散係数は次式で表わされる。

$$K_{C_1} = -\frac{u'c'}{\frac{\partial \bar{c}}{\partial x}} \quad (15)$$

一方広義に解釈して流れは等流であるが, 断面内速度分

布が断面ごとに異なる流れにおける局所的移流分散係数 K_{C_2} は次式で表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'c'} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{C_2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (16)$$

濃度-時間データからの K_X の決定は以下にのべる3つの計算法によった。それらは (1) モーメント法, (2) Routing 法, (3) Diffusive transport 法である。(1), (2) は平均的分散係数, (3) は局所的移流分散係数の決定に用いられた。

(1) モーメント法

分散係数は次式で定義される:

$$K_X = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_x^2}{dt} \dots\dots\dots (17)$$

σ_x^2 は濃度の距離に関しての分散である。Fischer³⁾ は式 (17) が拡散域の分散係数の決定に適用できることおよび次式と同値であることを示した。

$$K_X = \frac{\bar{u}^3}{2} \frac{d\sigma_t^2}{dx} \dots\dots\dots (18)$$

σ_t^2 は固定点での時間に関しての濃度分散であり次のように定義される。

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_0^\infty t^2 \bar{c} dt}{\int_0^\infty \bar{c} dt} - \bar{t}^2 \dots\dots\dots (19)$$

$$\bar{t} = \frac{\int_0^\infty t \bar{c} dt}{\int_0^\infty \bar{c} dt} \dots\dots\dots (20)$$

一般に濃度は固定点で時間の関数として測定されることが多いので, 式 (18) が最もしばしば分散係数の決定に用いられる。断面平均濃度は流水断面積 A を n 個の部分面積に分割し, それぞれの部分面積の中心で測定された濃度をその部分面積の平均濃度であると仮定し式 (4) から決定された。すなわち

$$\bar{c}(x, t) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j(x, y, z, t) \Delta A_j}{\sum_{j=1}^n \Delta A_j} \dots\dots\dots (21)$$

(2) Routing 法

$x=0, t=0$ で $c_0(x) = \frac{W}{A\tau} \delta(x)$ の条件のもとで式 (2) を解くと

$$c(x, t) = \frac{W}{A\tau} \frac{1}{2\sqrt{\pi K_X t}} e^{-\frac{(x-\bar{u}t)^2}{4K_X t}} \dots\dots\dots (22)$$

たたみ込み積分によって, x_1 の下流 x_2 での濃度は

$$c(t, x_2) = \int_0^t f_R(t-t_1; x_2-x_1) c(t_1, x_1) dt_1 \dots\dots\dots (23)$$

$$f_R(\tau; \xi) = \frac{\bar{u}}{2\sqrt{\pi K_X \tau}} e^{-\frac{(\xi-\bar{u}\tau)^2}{4K_X \tau}} \dots\dots\dots (24)$$

$$\tau = t - t_1, \xi = x_2 - x_1$$

$c(t_1, x_1)$ は, x_1 で測定された既知の濃度である。

(3) Diffusive transport 法

式 (16) で近接した2断面間で K_{C_2} を一定と仮定し2断面 x_1 と x_2 間で積分すると次式が導かれる。

$$K_{C_2} = \frac{\overline{u'c'}|_{x_2} - \overline{u'c'}|_{x_1}}{\frac{\partial \bar{c}}{\partial x}|_{x_1} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}|_{x_2}} \dots\dots\dots (25)$$

式 (15) もしくは式 (25) から局所的分散係数を決定するには, 各時刻での $\partial \bar{c} / \partial x$ の値が必要である。濃度が時間の関数の場合には $\partial \bar{c} / \partial x$ の値を直接測定することはむずかしいので, ここでは固定点で濃度を時間の関数として測定し Taylor の仮説を用いて濃度勾配に換算する。そのとき式 (15), (25) はそれぞれ次式で表わされる。

$$K_{C_1} = \bar{u} \cdot \frac{\overline{u'c'}}{\frac{\partial \bar{c}}{\partial t}} \dots\dots\dots (26)$$

$$K_{C_2} = \bar{u} \cdot \frac{\overline{u'c'}|_{x_2} - \overline{u'c'}|_{x_1}}{\frac{\partial \bar{c}}{\partial t}|_{x_2} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial t}|_{x_1}} \dots\dots\dots (27)$$

Fischer³⁾ は式 (26) による K_{C_1} の決定法を Diffusive transport 法と呼んだ。式 (27) は一様な等流でない場合には隣り合う2断面間の移流による質量輸送の差と濃度勾配の差の比が移流分散係数を与えることを示している。この分散係数の値は数値積分によって得られる。

$$K_{C_2} = \bar{u} \frac{\sum_{j=1}^n u_j' c_j' \Delta A_j \Big|_{x_2} - \sum_{j=1}^n u_j' c_j' \Delta A_j \Big|_{x_1}}{A \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} \Big|_{x_2} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} \Big|_{x_1} \right)} \dots\dots\dots (28)$$

ここに, $c_j' = c_j - \bar{c}$, $u_j' = u_j - \bar{u}$, $\sum_{j=1}^n \Delta A_j = A$ であり, u_j', c_j' は速度と濃度の実測から次の関係を満たすように決められる。

$$\sum_{j=1}^n u_j' \Delta A_j = 0, \sum_{j=1}^n c_j' \Delta A_j = 0 \dots\dots\dots (29)$$

3. 実験装置と実験方法

(1) 実験装置

らせん流が分散に著しく影響をおよぼすことが十分予想されたので, その影響を調べるために異なった幅をもつ2つの水路が使用された。第1の水路 (Flume I) は蛇行流の平均的, 局所的な分散機構を調べる目的で, 第2 (Flume II) は, 特に分散におよぼす水路幾何形状の影響を調べる目的で使用された。Flume I はエポキシペイントを塗布した幅 0.25 m, 深さ 0.20 m, 水路中心沿いに全長 25 m の木製長方形断面水路であり, bend

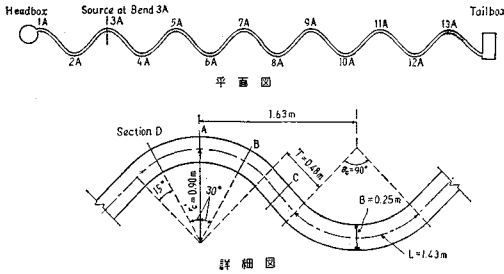


図-1 実験水路詳細図 (Flume I)

間に 0.47 m の直線部をはさみ、曲率半径 0.9 m、中心角 90 度の 13 個の bend からなる。水路の詳細は図-1 に示されている。水路は還流式、可変勾配であり、流量は還流パイプ中の 5 cm オリフィスプレートによって測定された。実験は水路床が滑面と粗面について行なわれ、粗面については粒径 5 mm の一様砂が水路底にはりつけられた。勾配、水深は 0.3 mm の精度のポイントゲージによって測定された。選ばれた勾配は 0.000582 と 0.0012 であり、前者は等流が正確に作られ得る最小の勾配であり、後者はフルード数が 0.5 以下に保たれ得る最大勾配である。Flume II は Flume I の中心線沿いに壁を設け水路幅を 1/2 に縮めたものである。水路全表面が同程度の粗さを持つように壁面にエポキシペイントを塗布した。拡散質として使用された液体は塩水とメタノールを混合し、流水と同一挙動をとるように調節された比重 1.0 の液体である。濃度測定装置は、電気伝導度計、IBM 1801 データ収集-制御システムからなる。

図-2 は電気伝導度計のプローブ詳細図である。プローブ本体は 2 本の中空ガラス管を内蔵した直径 0.1 cm の stainless steel hypodermic tube からなる。それぞれのガラス管にプローブの電極を構成する 0.005 cm の白金線が挿入された。電気伝導度計は 6 エレメントで濃度が 2 ppm から 1000 ppm まで測り得るものであり、測定範囲内で出力と濃度の関係は常に線形であった。電導度計からの出力は、ケーブルによって IBM 1801 computer に送られた。プローブからのアナログ電圧は連続的にデジタル変換され 0.02 秒間隔で記憶された。各プローブから A-D 変換された電圧は 0.5 または 1.0 秒間隔で平均されそれらが連続的にカード

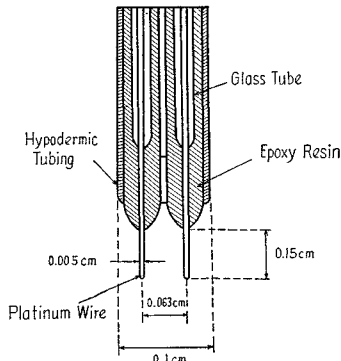


図-2 プローブ詳細図

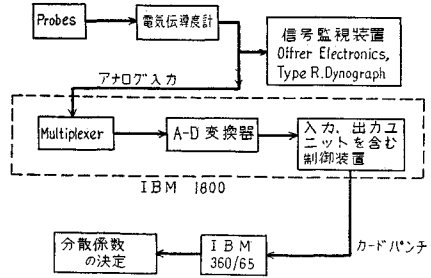


図-3 データ収集システムのブロック図

パンチされた。図-3 はデータ収集システムのブロック図である。

流速測定装置として低流速を正確に測定し得るように外径 0.16 cm のプラントル型ピトー管を Statham Pressure Cell に接続し、増幅された pressure cell からの出力をデジタル電圧計で読み取った。この装置は 9 cm/sec 以上の流速に対し非常に正確であり、4.5~7.5 cm/sec の流速には $\pm 10\%$ 以内の精度で測定し得ることが確かめられた。

(2) 実験方法

選ばれた勾配をもつ代表流れに対し、9 A から 12 A までの各断面 A, B, C, D の合計 13 断面で流速分布の詳細な測定が行なわれた。流速は断面内で 44 点、すなわち横断方向に 11 点、鉛直方向に 4 点測定された。流速は Flume I を用いての実験でのみ測定された。断面内の数点で濃度の同時測定が可能ないように、プローブ支持台に 5 本のプローブを並べて据えつけた (Flume II の実験に対しては 3 本のプローブ)。プローブ数は、断面平均濃度と断面内の濃度変動を知るには十分であった。大部分の実験に対しプローブは、水深の 1/2 の位置に置かれたが Run S-10 a と R-5 では、鉛直濃度勾配の影響を調べるために鉛直方向 3 断面にプローブを据えた。拡散質は bend 3 A で瞬間的な面源になるような方法で加えられた。トレーサー量は Flume I の実験に対し 200 cc、Flume II に対し 60 cc である。断面 5 A, 7 A, 9 A, 11 A, 13 A (時には 5 A, 13 A の代わりに 6 A, 12 A) がモーメント法と Routing 法に対する濃度測定断面として選ばれた。source 位置からこれらの測定断面までの距離は、それぞれ 3.83 m, 7.54 m, 11.48 m, 15.30 m, 19.14 m (5.66 m, 17.3 m) である。Diffusive transport 法に対し、流速分布の測定断面と同じ断面、すなわち 9 A から 12 A までの 13 断面で濃度分布が測定された。濃度は、断面 5 A (6 A), 7 A に対し 0.5 秒間隔に、ほかの断面では 1.0 秒間隔に測定された。濃度測定は各断面で 3 度繰り返され、それらの平均から時間濃度を求めた。

4. 実験結果

実験結果は表-1 にまとめられている。Run number につけられた S, R は Flume I の水路床が滑と粗な場合に相当し SN は Flume II の滑面水路を示している。Run number の添字 a, b は実験が異なった日に、しかし同一の水利条件のもとで行なわれたことを示す。

(1) 速度と濃度分布特性

断面内の流速分布は、分散を支配する主要な因子である。したがって速度の鉛直分布、横断分布、bend 内や bend 間の速度変化の詳細な知識が必要である。図-4 は断面 11 A, 11 B, 11 C, 11 D で測定された主流の鉛直速度分布の一例を示す。ここに y は水路底から z は下流に向かって左岸から右岸に測られた距離である。図-4 に与えられた主流速度の水深にわたる平均化は、主流速度の横断分布を与える (図-5)。bend の入口近くでは、内壁の付近で高流速、外壁付近で低流

速が起こり、自由渦に近い速度分布をもつ。直線部の入口近くで横断方向分布はかなり一様になり、次の bend に近づくにつれて高流速と低流速の領域は互いに入れか

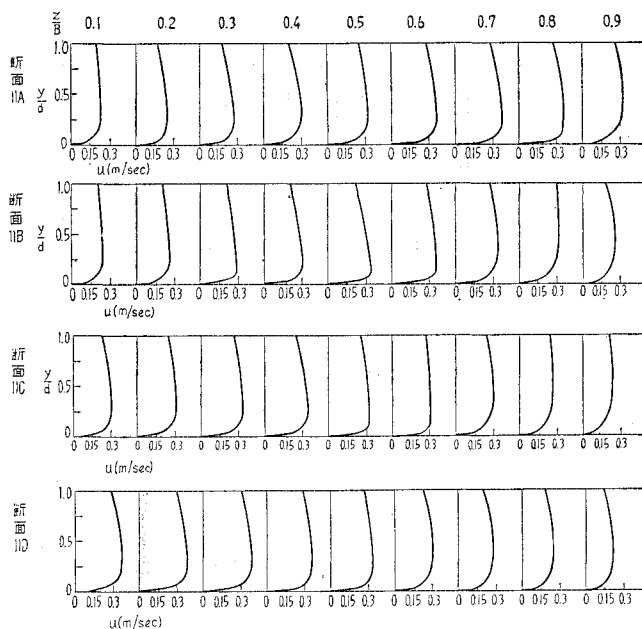


図-4 主流流速の鉛直分布 (Run S-10)

表-1 実験結果

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Run	B (cm)	d (cm)	R ⁽¹⁾ (cm)	S	\bar{u} (cm/sec)	$u_*^{(2)}$ (cm/sec)	°C	$K_X^{(3)}$ (cm ² /sec)	K_X/Ru_*	$K_X^{(4)}$ (cm ² /sec)	K_X/Ru_*	$K_C^{(5)}$ (cm ² /sec)
S-1	25.0	5.64	3.90	5.82×10^{-4}	22.4	1.49	16.8	108.9	18.6	83.7	14.3	
S-2	"	3.42	2.71	"	20.1	1.25	16.8	113.5	34.0	107.0	32.1	
S-3	"	3.05	2.47	"	19.8	1.19	16.8	107.9	36.2	102.3	34.2	
S-4	"	3.51	2.75	"	19.1	1.25	16.8	107.0	31.5	102.3	30.2	
S-5	"	4.24	3.17	"	22.5	1.37	16.8	112.6	25.9	97.7	22.5	
S-6	"	2.44	1.98	"	16.3	1.16	16.8	102.4	46.6	93.0	42.4	
S-7	"	5.52	3.81	"	22.4	1.49	16.8	100.5	17.7	93.0	16.4	48.4
S-8	"	2.38	1.98	1.2×10^{-3}	24.1	1.53	12.8	154.5	51.0	125.6	41.5	
S-9	"	5.67	3.93	"	38.4	2.17	15.6	155.4	18.3	125.6	14.8	
S-10a	"	3.42	2.71	"	28.9	1.80	15.6	137.7	28.1	116.3	23.7	
S-10b	"	3.42	2.71	"	28.9	1.80	15.6	—	—	—	—	78.1
S-11	"	4.42	3.26	"	32.9	1.95	15.6	147.0	23.0	120.9	19.0	
S-12	"	2.32	1.98	"	24.6	1.53	14.0	157.2	51.7	—	—	
S-13	"	5.67	3.93	"	39.0	2.17	14.0	159.1	18.9	—	—	
R-1	25.0	6.00	5.31	5.82×10^{-4}	15.8	1.74	12.8	158.1	17.0	130.2	14.0	
R-2	"	3.75	3.51	"	12.0	1.40	12.8	157.2	32.6	139.5	29.0	
R-3	"	4.48	4.06	"	14.0	1.53	12.8	167.4	27.8	148.8	24.8	
R-4	"	3.60	3.20	1.2×10^{-3}	17.9	1.95	10.6	211.1	34.0	200.0	32.2	
R-5	"	5.67	4.94	"	22.6	2.41	10.0	203.7	17.2	200.0	16.8	102.3
R-6	"	3.05	2.83	"	16.7	1.83	10.0	198.1	38.4	190.7	37.0	
R-7	"	7.01	6.07	"	25.4	2.68	10.0	189.8	11.8	—	—	
SN-1	12.5	2.44	1.31	1.2×10^{-3}	21.4	1.31	17.2	91.2	39.3	88.4	38.0	
SN-2	"	3.45	2.26	"	26.8	1.62	16.8	88.4	24.2	83.7	23.8	
SN-3	"	4.91	2.78	"	31.6	1.80	16.8	81.9	16.2	74.4	14.7	
SN-4	"	2.84	1.98	"	24.7	1.53	16.8	93.0	31.0	83.7	28.0	
SN-5	"	6.22	3.14	"	32.6	1.92	20.0	72.6	12.0	69.8	11.5	

(1), (2) 粗な境界を有する流れの径深と摩擦速度は Einstein¹⁾ の方法によって求めた。

(3) モーメント法による K_X (4) Routing 法による K_X (5) Diffusive transport 法による K_C

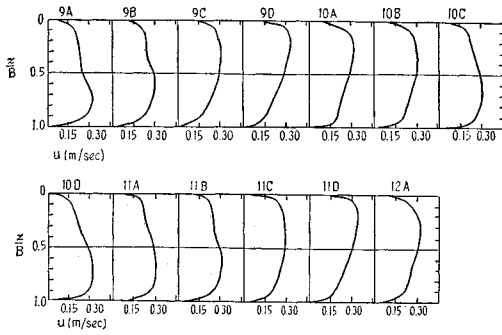


図-5 平均流速 $\bar{u}(z)$ の横断分布 (Run S-10)

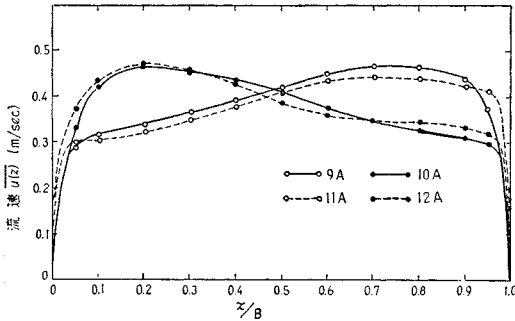


図-6 断面 9 A, 10 A, 11 A, 12 A での平均流速 $\bar{u}(z)$ の横断分布 (Run S-10)

わる。図-6 は異なる bend に対応する断面での横断方向速度分布を示す。互いに 90° 向きを変える bend の対応断面の速度分布は、近似的に鏡像関係にあることが見出される。たとえば、9 A, 11 A の速度分布は 10 A に対するものと鏡像関係にある。

分散におよぼす速度変化の重要性を考慮すれば、速度分布の非一様性を示すパラメーターとして次式を用いることができる。

$$\beta_1 = \frac{\int_A (u - \bar{u})^2 dA}{\bar{u}^2 A} = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u'}{\bar{u}} \right)^2 dA \dots\dots (30)$$

速度が鉛直方向にほぼ一様である時には

$$\beta_2 = \frac{\int_0^B (u - \bar{u})^2 dz}{\bar{u}^2 B} = \frac{1}{B} \int_0^B \left(\frac{u'}{\bar{u}} \right)^2 dz \dots\dots (31)$$

β_1, β_2 は断面内速度分布が一様になると零の値をもつ。 β_1 は各断面で測定された 88 の点速度から数値積分によって求められた。一方、 β_2 は鉛直断面の平均速度の横断分布 (たとえば 図-6) から計算された。bend に沿っての β_1 と β_2 の分布は 図-7 に与えられており、それらは bend ごとにほぼ周期的に変化している。 β_1 と β_2 の比較から断面内の速度分布の非一様性におよぼす鉛直方向の速度変動の影響は小さく、 β の周期性は横断方向の速度変動に起因していることが知られる。これ以降 β_1, β_2 を総称して β と呼ぶ。Run S-7, S-10, R-

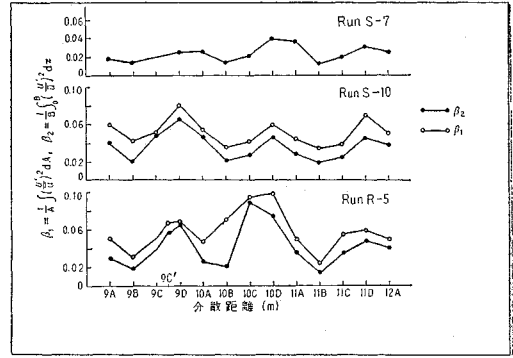


図-7 β_1, β_2 の分布

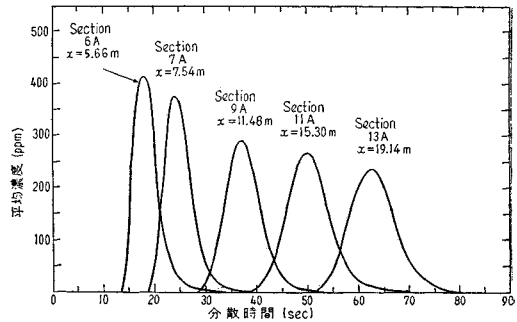


図-8 分散距離に対する濃度の時間分布

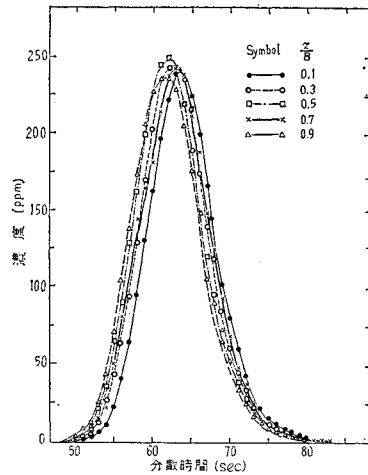


図-9 濃度-時間曲線 (bend 13 A)

5 の β_2 の単純平均は、それぞれ 0.023, 0.036, 0.042 である。後節で見出されるように、 β_2 の値はらせん流の強度や分散係数の大きさと密接な関係がある。

図-8 は分散距離の関数として断面平均濃度の時間分布を示す。これから拡散域の濃度の減衰状態を知ることができる。図-9 は断面 13 A での横断位置 5 点で測定された代表的な濃度-時間曲線の一列である。側壁付近を除いて濃度の横断分布はかなり一様である。 $y/d =$

0.25, 0.5, 0.75 での鉛直方向3断面で測定された濃度は、任意の z に対してほぼ一定であった。したがって source からかなり下流での濃度は、側壁付近を除いて断面内ではほぼ一様であることが知れる。図-8, 図-9 に示された蛇行水路の濃度分布特性は、source から十分下流では直線水路で得られたもの^{3),7)}に類似している。

式 (26), (27) から明らかなように速度-濃度相関 $\overline{u'c'}$ は移流分散係数と密接な関連がある。平均速度で移動する横断面を通過する単位面積あたりの質量輸送を表わす次の2つの相関を考える。

$$\overline{u'c'y,z} = \frac{1}{A} \int_0^B \int_0^d u'c' dydz \dots\dots\dots (32)$$

$$\overline{u'c'z} = \frac{1}{B} \int_0^B \overline{u'(z)c'(z)} dz \dots\dots\dots (33)$$

式 (33) の $\overline{u'(z)}$, $\overline{c'(z)}$ は z の位置での $u'(z)$, $c'(z)$ を水深にわたって平均したものである。図-10 は滑面 (Run S-10a) と粗面 (Run R-5) の実験で得られた $\overline{u'c'y,z}$ と $\overline{u'c'z}$ の比較を示す。 $\overline{u'c'}$ の正と負の符号は移流による質量輸送の方向が平均速度で移動する面に関して、それぞれ下流向きと上流向きであることを示している。 $\overline{u'c'y,z}$ と $\overline{u'c'z}$ はほぼ等しいが、これはさきに指摘したように鉛直方向の速度変動、濃度変動が横断方向の変動に比して小さいためである。したがって、鉛直方向の速度と濃度の断面平均からの変動量は、拡散質の移流による輸送にそれほど大きな役割りを果たさないことが知れる。

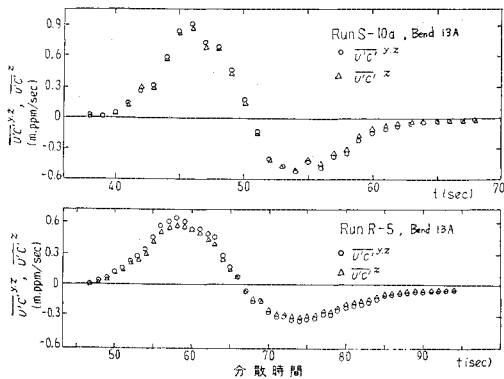


図-10 $\overline{u'c'y,z}$ と $\overline{u'c'z}$ の時間分布

(2) 縦分散係数の決定

モーメント法で得られる K_x の値は、濃度-時間曲線の端部の影響を受けやすい。特に粗面水路で緩勾配流れではかなりの影響を受ける。この場合には、濃度-時間曲線の端部を切り捨てる必要がある。全実験にわたり、濃度減衰時の $c=0.05 c_{max}$ に相当する時間 t が切り捨て時間として用いられた。ここに c_{max} は濃度-時間曲線

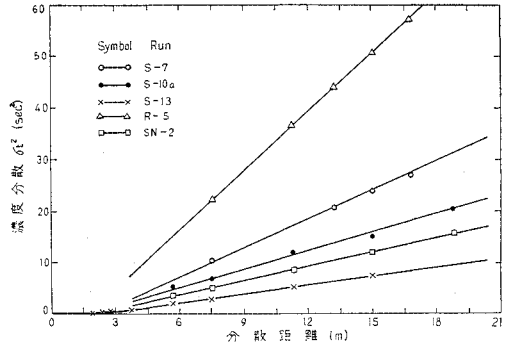


図-11 距離の関数として表わされた分散時間

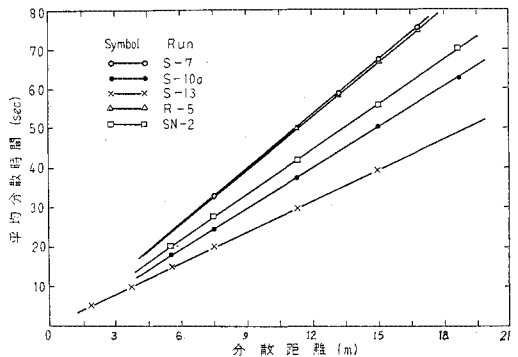


図-12 距離の関数として表わされた濃度分散

の最大濃度である。このようにして決められた時間が式 (19), (20) の積分区間の上限を与える。式 (20) から拡散質の平均移動時間 \bar{t} が計算される。代表的な Run の \bar{t} が距離の関数として図-11 に与えられている。式 (20) から計算された拡散質の平均移動速度は orifice plate による流量から得られたものより常に 3~5% 大きかったが、その原因は明らかではない。図-12 は式 (19) による分散を距離の関数で示している。拡散域に到達するのに必要な距離を見出すために、Run S-13 では source 付近の濃度測定も行なった。図-12 は異なった水理条件、水路幾何条件に対して、source 付近を除いて分散が距離に関して線形であることを示している。したがって縦分散係数は式 (20) から求まる \bar{u} を使って、式 (18) から決定することができる。図-13 は仮定した K_x の値を用いて式 (23), (24) によって断面 7A から routing された濃度と断面 13A で観測された濃度の比較である。第一近似としてモーメント法で得られた K_x を用い、種々の K_x の値に対し実測濃度分布と最もよく一致するときの K_x が求める縦分散係数である。実測濃度曲線は routing されたものに比して濃度の上昇域でわずかに陰しく、下降域でわずかに平らである。しかし両曲線は広く変化する水理条件に対しかなりよく一致する。Routing 法は、モーメント法が濃度-時間曲

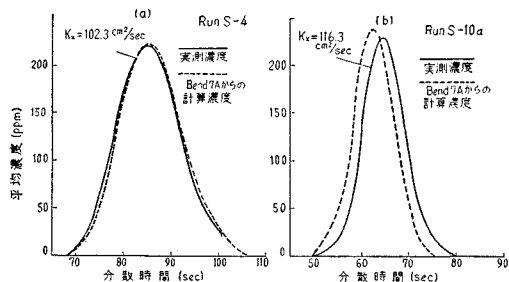


図-13 断面 13A で観測された濃度と bend 7A から routing された濃度の比較

線の端部の影響を受けやすいためモーメント法から得られた分散係数が正しい値を与えているかを調べるためにしばしば利用される。表-1 の column 9 と 10 は、モーメント法による縦分散係数と無次元分散係数を column 11 と 12 は routing 法による縦分散係数と無次元分散係数を示す。モーメント法による K_x はわずかに大きい両者はかなりよく一致している。

Diffusive transport 法で得られる K_C の値 [式 (26), 式 (27)] は時間的な局所分散係数を与える。図-14 は $\overline{u'c'}$, $\partial \bar{c}/\partial t$ と式 (26) に基づく K_{C1} の時間分布の一例である。図中に測定断面数の $\overline{u'c'}$, $\partial \bar{c}/\partial t$, K_{C1} の値におよぼす影響を示すが、 $n=5$ と $n=19$ の間にほとんど差がなく 5 本のプローブで十分であることが知れる。図-14 によれば $\partial \bar{c}/\partial t$ と $\overline{u'c'}$ は最大濃度付近を除いて同じ符号をとる。濃度減衰時には $\partial \bar{c}/\partial t$ と $\overline{u'c'}$ は負の値をもつが、それらの絶対値が図中にプロットされている。時間的な分散係数の値は最大濃度時と末端濃度

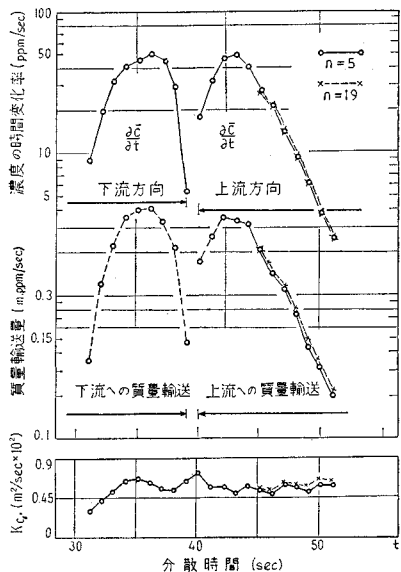


図-14 $\overline{u'c'}$, $\partial \bar{c}/\partial t$, K_{C1} の時間分布 (Run S-10 b, bend 9 B)

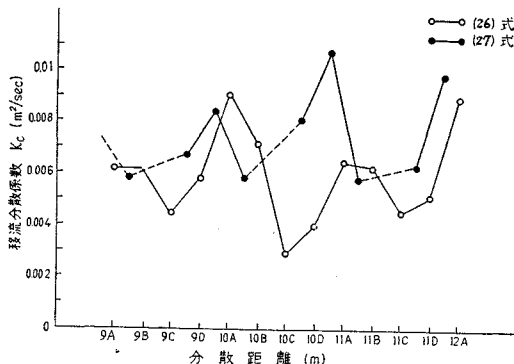


図-15 bend に沿っての移流分散係数の変化

時を除いて 20% 以上は変化していない。したがって、それらの平均値をその断面の K_{C1} とみなしうる。式 (26) に基づく bend に沿っての K_{C1} の値は図-15 に与えられており、それらは、かなり周期的に変化している。

一方、式 (27) による K_{C2} は式 (26) と同様な方法で求めた。隣りあう 2 断面の測定値から得られる K_{C2} の値は、両断面の中央断面の値と仮定される。このようにして求めた K_{C2} の分布も図-15 に示されている。式 (27) による K_{C2} は B, C 断面の間で負の値をとる。この原因は次節で議論されるが、複雑ならせん運動のために半径方向の流れが断面 B で外向きに断面 C で内向きに生じているため、この両断面を通過する流れは極端に過渡的となる。このような過渡的な流れの分散を表わすには、横断方向流れによる質量輸送を無視して得られた式 (27) は、やや現象を単純化しすぎているのであろう。B, C 断面間を除いて、式 (27) で得られた K_{C2} の値は振幅位相がやや異なってはいるけれども K_{C2} の変化のパターンは式 (26) から得られたものに近似している。このことは、断面 A, B と断面 C, D の間の点を破線で結び得る可能性を示しているといつてよいであろう。表-1 column 13 に K_{C2} の平均値が与えられている。

5. 結果の解析と考察

(1) 蛇行流の平均的分散係数

流水中の高濃度の拡散質は、断面内の高流速層で早く、低流速層でゆっくり移動し、同時に異なった流速をもつ隣りあう層間の拡散作用のため、流下とともに徐々に広がり、希釈される。蛇行流の平均的な縦方向分散が直線流^{7), 9)}におけるようにみかけの分散係数をもつ一次元拡散過程として表わし得るかどうか調べてみよう。図-13 から異なった水利条件、粗度、流路条件に対し

て既知の濃度-時間曲線を用いて下流に追跡された結果は、観測された濃度-時間曲線によく一致することが見出される。また、図-12 から分散 σ_t^2 と距離の関係が source の付近を除いて、線形的である。Fischer³⁾ は平均流速で移動する一次元拡散方程式に ξ^2 を乗じ、 $\xi = \pm \infty$ の間で積分することによって分散係数を定義する式 (17) を導いた。ここに、 $\xi = x - \bar{u}t$ である。このことから Routing 法による分散係数がモーメント法によるものにほぼ等しいことがうなずける。以上の結果から、蛇行水路の平均的な分散機構も直線水路と同様に拡散域ではみかけの分散係数を用いて一次元拡散方程式で表わされることが明らかである。拡散域に到達するに必要な距離は主流による移流と、横断と鉛直方向の拡散の相対的な大きさによって決定される。蛇行流の鉛直、横断方向の混合の強さはらせん流の存在のため直線流より大である。したがって移流が卓越する距離は直線流よりも短いであろう。

(2) bend に沿って変化する局所的分散係数

4. で速度の横断方向変化の度合いをみつめるために β の値が導入された。図-7 と 図-15 を比較すると、bend に沿っての β の変化は K_C のそれと位相がほぼ一致している。式 (16) の誘導に含まれている近似や数値計算にともなう誤差のため K_C は β ほど明確な周期性はない。表-1 の column 13 と 図-7 は K_C の値が β の値の増加とともに大きな値をとることを示している。bend の存在によって生じた著しい主流速の横断方向変化はらせん流を生み出す。換言すれば主流速の横断方向変化を小さくする作用としてらせん流が生じる。したがって、縦方向分散と β およびらせん流は互いに影響しあうと考えられる。この研究では、らせん流の測定は行なわれなかったが、Yen^{10), 11)} の研究成果が利用可能である。Yen の水路は断面が台形であることを除いて Flume I と同一の r_c/B , L/r_c , T/r_c および蛇行パ

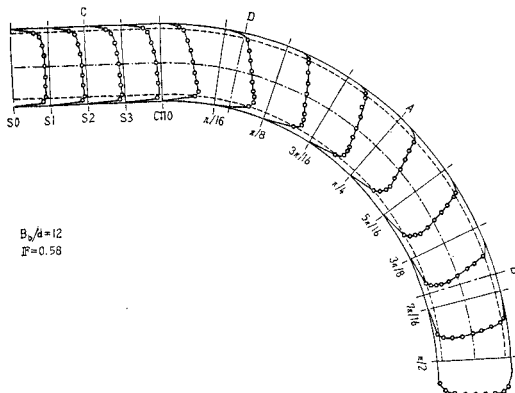


図-16 平均流速 $\bar{u}(z)$ の横断分布 (Yen¹⁰⁾)

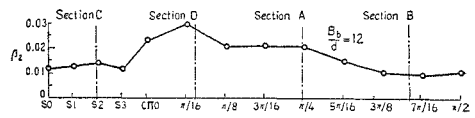


図-17 β_2 の分布 (Yen のデータ¹⁰⁾)

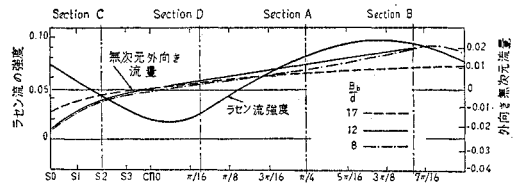


図-18 らせん流の強度と水路中心軸に沿う曲面の単位長さを通過する無次元外向き流量 (Yen¹⁰⁾)

ターンを持ち、実験の行なわれた水理条件、たとえば勾配、 F_r 数、 R_e 数もほぼ同じ範囲にある。図-16 は Yen によって測定された主流速の横断分布であり、それから計算された β_2 の分布を 図-17 に示す。Flume I の断面 A, B, C, D はそれぞれ Yen の水路の断面 $\pi/4$, $3\pi/8$ と $7\pi/16$ と $7\pi/16$ と $\pi/8$ の間の断面に相当する。両水路の対応断面が 図-16, 17, 18 に示されている。図-7 と 図-17 の比較から bend に沿う β_2 の変化のパターンは、両水路の対応断面ではほぼ同一であるので、流速の横断方向変化とその結果として生じるらせん流のパターンはほぼ同じであると期待される。Yen はらせん流強度を水路軸に沿う曲面を通過する単位幅あたりの外向きまたは内向き無次元流量で定義した。

$$\int_0^1 \left| \frac{w}{\bar{v}_0} \right| d \left(\frac{y}{d} \right) \dots \dots \dots (34)$$

ここに、 \bar{v}_0 は直線部の中心線上の平均速度である。らせん流は bend に沿って著しく変化するけれども断面内では側壁付近を除いてほぼ一定のパターンを持つので、水路中心軸上のらせん流強度は断面内のらせん流を代表していると考えてよい。Yen の測定結果を 図-18 に示す。式 (34) で与えられる半径方向の無次元流量は $8 < B_b/d < 17$ の範囲で bend に沿ってほぼ同じである。ここに B_b は水路底幅である。B と C の間の断面で半径方向の流量の向きは変化し、そこでの流れは極端に過渡的である。bend に沿うらせん流の強度の変化について Yen は次のような記述を与えた： 直線部のらせん流の強度は、それに続く曲線部の存在と逆向きのらせん流の生成のため非常に小さい。新しいらせん運動が次の bend 近くで発達し始める。流れが bend 内に進むにつれて、前の bend によるらせん流は急激に減衰し、新しいらせん流の急激な発達をみる。らせん運動は $3\pi/8$ と $7\pi/16$ の間の断面で最大の強さをもつ。さらに詳しい記述は Yen の研究の中で与えられている。図-17 と 図-18

を見くらべると β_2 とらせん流強度は互いに逆位相の関係にある。したがって移流分散係数 K_C は流速の横方向変化の度合いの増加 (β_2 の増加) とともに大きくなり、らせん流強度の増大とともに減ずることが知れる。

次に移流分散係数と横断方向の乱流混合係数の関係を考えてみる。水路中心軸に沿う曲面を通過する半径方向の単位幅流量の増加 (らせん流強度の増加) にともなって半径方向の速度と混合距離は増加するであろう。このとき、横断方向乱流混合係数 $\epsilon_z = \overline{w'l}$ は大きな値をとる。一方、さきに述べたようにらせん流強度の増大は移流分散係数を減少させる。したがって、 K_C と ϵ_z は互いに逆位相の関係をもつと推察される。

本研究で対象とした彎曲流れは主流速が内壁で早く外壁で遅いらせん流の発生域での流れであり、発達域、完全発達域のらせん流は彎曲部で生じていない¹³⁾。しかしらせん流の発生機構は別にして局所的な分散におよぼすらせん流の役割は発達域、完全発達域においても本文で明らかにされた発生域のものと同様であろう。

(3) 直線流と蛇行流の分散係数の比較

前節で蛇行流の特性と拡散質の平均的、局所的挙動の関係が明らかになった。本節では従来の研究でかなり明らかにされてきた直線流の分散と蛇行流の分散を比較検討してみる。表-2 は Fischer³⁾ による滑面長方形断面をもつ直線水路での無次元分散係数を与える。表-2 の Run number は Fischer が用いたものと同一である。近似的に同じ幅-深さ比、粗度、流路床勾配、 R_e 数および F_r 数を有する直線水路と蛇行水路は互いに等価であると仮定し両者の分散係数の大きさを比較する。表-2 から直線水路の無次元分散係数は、ほぼ一定で平均的に $K_X/Ru_* \approx 15$ である。一方、等価な Flume I の蛇行流れでは、無次元分散係数の範囲は $25 < K_X/Ru_* < 70$ (表-1) であり、蛇行流の無次元分散係数は直線流のそれに比し大きいことが知れる。これは次のように説明することができる。水路の曲線部の存在は内壁で流体を加速し外壁で減速する。その結果、流速の横断方向勾配は増大する。この横断方向速度勾配の増大は、拡散質を主流方向にひきのばし分散量を増大させる。ひとたび横断方向速度勾配が生じると断面内の速度分布を一様化しようとするらせん流が生じ、このらせん流によ

る混合は濃度勾配を小さくし主流方向の分散を抑える傾向を示す。らせん流の発生原因が主として横断方向速度勾配によることを考慮すれば、当然、横断速度勾配による分散増加はらせん流による分散抑制より大きく、したがって蛇行流の分散は、流路が直線であることを除いて同一条件のもとでの直線流の分散より大きいことが理解できる。

6. 結 論

この研究で得られた主流な結論は次のとおりである。

- (1) 蛇行水路における分散は bend の存在によって生ずる主流の横断速度分布とその結果として生ずるらせん流によって著しく影響を受ける。
- (2) 蛇行流の平均的分散過程は、みかけの分散係数を用いると、直線流と同様に初期の移流域を除いて一次元拡散方程式で表わし得る。
- (3) 蛇行流の無次元分散係数は等価な直線流の分散係数に比し著しく大である。
- (4) 局所的分散係数は、bend ごとにほぼ周期的に変化し主流速の横断方向変化の程度を表わすパラメータ β とともに増加し、らせん流の強さとともに減少する。
- (5) Yen の流速分布とらせん流の強度に関する測定値から、横断方向の乱流混合係数 ϵ_z はらせん流の強度に密接に関係づけられ、 ϵ_z の主流方向変化は移流分散係数のそれとほぼ 180° 位相がずれる。
- (6) 流速の横断方向変化は、鉛直方向変化に比して分散に卓越した影響をもつ。

本研究は自然河川の分散機構を類推することを目的として行なったものであるが、実験は慣性の小さい自由渦に近い流れが成立するような条件で行なわれたものであり、日本の河川のように勾配がかなり急な河川に対してここで得られた結果がそのままではまるかどうか明らかではない。現在、自然河川データをも含めてこの点についてさらに検討しており、近いうちに発表しご批判を仰ぎたいと考えている。

7. あとがき

本研究を遂行するにあたって有益な助言をいただいた Iowa Institute of Hydraulic Research の William W. Sayre 博士と本研究について種々ご批判をいただいた東京工業大学 吉川秀夫教授に厚く感謝する次第である。

表-2 滑面直線水路に対する無次元分散係数 (Fischer³⁾)

Run	1300	1400	1500	2600	2700
<i>B/d</i>	9.4	6.2	13.1	16.0	8.6
K_X/Ru_*	17.6	16.4	12.7	14.1	14.0
Slope	0.00023	0.00012	0.00019	0.00031	0.00026
F_r	0.314	0.225	0.242	0.328	0.323
R_e	27,060	35,890	12,610	18,560	46,330

参 考 文 献

- 1) Einstein, H.A. : "Formulas for the Transportation of Bed Load", Transactions, American Society of Civil Engineers, Vol. 107, 1942.
- 2) Elder, J.W. : "The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 5, 1959.
- 3) Fischer, H.B. : "Longitudinal Dispersion in Laboratory and Natural Streams", Report No. KH-R-12, California Institute of Technology, Pasadena, 1966.
- 4) Fischer, H.B. : "Method for Predicting Dispersion Coefficients in Natural Streams with Application to the Lower Reaches of the Green and Duwamish Rivers, Washington", United States Geological Survey Professional Paper, 582-A, 1968.
- 5) Fischer, H.B. : "The Effects of Bends on Dispersion in Streams", Water Resources Research, Vol. 5, No. 2, 1969.
- 6) Rozovskii, I.L. : "Flow of water in Bends of Open Channels", Academy of Science of Ukrainian USSR, Kiev, 1957, Translated by Prushansky, Y., The Israel Program for Scientific Translations, 1961.
- 7) Sayre, W.W., and Chang, F.M. : "A Laboratory Investigation of Open-Channel Dispersion Processes for Dissolved, Suspended and Floating Dispersant", United States Geological Survey Professional Paper, 443 E, 1968.
- 8) Taylor, G.I. : "Diffusion by Continuous Movement", Proceedings of the London Mathematical Society., Series 2, 20, 1921.
- 9) Taylor, G.I. : "The Dispersion of Matter in Turbulent Flow through a Pipe", Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 223 A, 1954.
- 10) Yen, B.C. : "Characteristics of Subcritical Flow in a Meandering Channel", Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa City, Iowa, 1965.
- 11) Yen, B.C. : "Some Aspects of Flow in Meandering Channels", Proceedings of the 12th Congress of International Association of Hydraulic Research, Vol. 1, Sept., 1967.
- 12) Yatsukura, N., Fischer, H.B., and Sayre, W.W. : "Measurement of Mixing Characteristics of the Missouri River between Sioux City, Iowa, and Plattsmouth, Nebraska", Geological Survey Water Supply Paper, 1899-G, 1970.
- 13) 村本嘉雄・井上喬之 : "開水路彎曲流の内部機構", 京大防災研究所年報, 第9号, 1966.

(1971. 9. 3・受付)