

個別要素法における円形要素を核とした擬似矩形要素モデルの提案

松井幹雄¹・西村和夫²

¹正会員 工修 前田建設工業株式会社 土木設計部(〒179-8903 練馬区高松5-8 J.CITY)

²正会員 工博 東京都立大学大学院助教授 工学研究科土木工学専攻(〒192-0397 八王子市南大沢1-1)

2次元円形要素を用いた個別要素法で粒状体だけでなく連続体の挙動も解析できるようにするため、円形要素を核として用いた擬似矩形要素モデルを提案する。要素間の接触面を区分し、区分した接触面毎に離散的なばねとダッシュポットを配置する。斜面上の単一矩形ブロックの挙動およびコンクリートモルタルの曲げ試験結果と数値計算結果とを比較することによって、本提案モデルの有用性を検討する。

Key Words : DEM, circular element, continuum, rectangular element, numerical analysis, slope problem, base friction, concrete mortar, bending test

1. はじめに

個別要素法（以下、DEM）^{1), 2)}は様々な崩壊現象を計算機上で模擬できる可能性を持つ数値解析手法であり、不連続体の接触問題など理論的取り扱いが難解な問題を非常に簡易な式で解析できるという利点を持つ。DEM解析においては、計算時間の面で3次元解析より2次元解析の方が圧倒的に有利であり、また、2次元要素形状としては、計算時間の多くを費やす接触判定の容易さの面で円形が有利である。また、円形要素をランダム配置することにより、潜在的な弱面を形成させないことが可能であるため、初期不連続面が顕著に存在しない場合や破壊面が予想できない場合にも有効である。従って、2次元円形要素で粒状体だけでなく連続体に対してもモデル化することは実用上、有用性が高い。

2次元円形要素で連続体をモデル化するためには4通りの方法が考えられる。

第1の方法は、非常に小さな要素を多数配置するものである。要素間には通常のDEMと同様、ばねとダッシュポットを並列につなげた組を法線方向と接線方向に設け、引張強度とせん断強度を与えるだけである。この方法では通常のDEM解析手法のまま用いることができるという利点はあるが、変位や強度に関して実際との良い対応性を得るために膨大な要素数が必要となるため、実用には適さない。

第2の方法は、要素間の法線方向と接線方向だけでなく回転方向にもばねとダッシュポットの組を設けるものである。岩下ら³⁾は要素どうしのころがりによる回転しやすさに起因する粒状体の強度低下を抑制するためにこの手法を用い、近藤ら⁴⁾は球形要素に対して同様の手法を用い立体骨組構造の倒壊を解析している。この方法では計算中に記憶しなければならない情報量や必要な材料定数の数は通常のDEMより少し増える。回転ばねに非線形構成式を導入すれば、鉄筋コンクリートなどのり構造物を円形要素1列でモデル化したり、土質材料などの拘束圧効果を考慮することも可能であろう。しかしながら、より実際的な連続体をモデル化するためには、より複雑な構成モデルが必要となり、円形要素を用いたDEMの簡易さという利点が失われる。

第3の方法は、通常のDEMで要素間に設けるばねとダッシュポットの組のほかに、間隙ばねと呼ばれる別のばねを接觸している要素間および少し離れた要素間に設けるものである。岩下⁵⁾はこの方法を用いて粘性土のような土質地盤の破壊を解析し、目黒ら⁶⁾は間隙ばねだけでなくダッシュポットも追加してコンクリートの破壊を解析している。この方法は間隙ばねについて設定する要素間の距離限界值、ばね係数値、破壊基準値を適宜に変えることで様々な媒質に適用できる可能性がある。しかしながら、これらの値を決定することは難しく、また、2つの

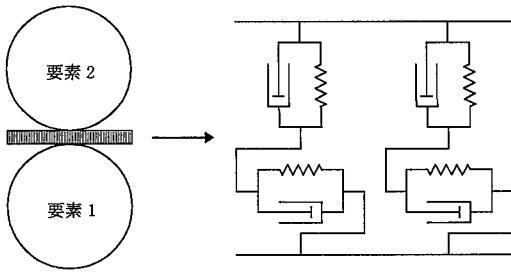
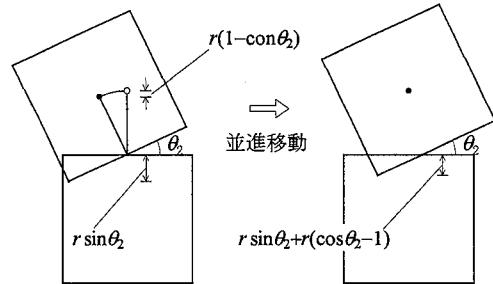


図-1 一様に分布するばねとダッシュポットの模式図
(非線形モデルは非表示)



(a) 接触面中心回りの回転 (b) 要素中心回りの回転
図-3 模似矩形要素2の回転によるn方向変位

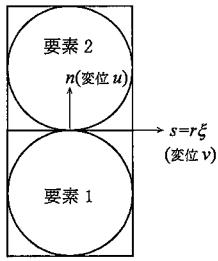


図-2 模似矩形要素間の座標系

ばね系を有するためモデル自身も複雑になる。

第4の方法は、ばねとダッシュポットの組を接触点に1組だけ設けるのではなく、要素間に分布させるものである。久武ら⁷⁾は連続体から不連続体に至る地山の破壊過程をこの方法で解析できることを示している。接触面上の分布力の積分のため計算時間は増加するものの、通常のDEMと比べ、材料定数の数が同じであり、材料非線形性の扱いも同様である。従って、接触面上の積分の計算が簡略化されればこの手法の有用性は高いものとなる。

久武らの分布型要素間モデルでは、接觸している円形要素間の形状を考慮して分布ばねの変位を2次式で近似し、これに対応するばね分布力を接觸面上で積分している。しかし、本来は密実である連続体を円形要素でモデル化することを考えれば、接觸面から見るとあたかも2つの矩形要素が接し、直線状の2辺の間にはばねとダッシュポットが連続的に分布していると考える方が合理的である。

連続体を隙間なく微小領域に分割するためには多角形要素を用いなければならないが、それでは多くの計算時間を必要とする。そこで、等径正方格子配列の円形要素を核として用いながら接觸面は矩形要素と極力同じモデル化をし、質量や慣性モーメントも矩形要素と同じになるように補正する。直線状の接觸面にはばねとダッシュポットを連続的に分布させ、さらに、接觸面をいくつかに区分し、その区分した

接觸面毎に離散的なばねとダッシュポットの1組ずつで代表させれば、接觸面上で積分する代わりに各組に生じる力の算術和だけで済むことになるため、計算時間を大幅に短縮できるであろう。

本論文は、このような考え方に基づき、円形要素を核として用いた模似矩形要素モデルを提案するものであり、妥当性の検証は実験等との比較を通して行い、ブロックや連続体への適用性も検討する。

2. 提案する模似矩形要素モデル

(1) 分布ばねの定義

2つの円形要素はその接觸面において互いの2辺間の法線方向と接線方向に一様に分布するばねとダッシュポットによって結ばれているものとする。2辺は共に直線であり、その長さは円形要素の直径に等しいとする。これを模式的に示したもののが図-1である。円形要素の半径を r とし、奥行きの長さを ℓ とすれば、接觸面の面積 A が次式で表される。

$$A = 2rl \quad (1)$$

要素間に図-2に示すような $s-n$ 座標系をとって、 s 座標を $r\xi$ ($-1 \leq \xi \leq 1$) で表す。接觸面内の分布ばねの変位を定義するため、図-3に示すように要素2が要素中心回りに回転したときを考える。このときの n 方向変位は、接觸面中心回りに回転した後に要素中心が回転前の位置に一致するように並進移動させた場合と同一である。要素1についても同様であり、また、 s 方向変位も同様にして、結局、接觸面内の分布ばねの変位 u, v が次式で定義される。

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \bar{u} + r\xi(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \\ &\quad - r(1 - \cos \theta_1) - r(1 - \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \bar{v} - r\xi(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\ &\quad + r(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\bar{u} = u_1 - u_2 \quad (2.3)$$

$$\bar{v} = v_1 - v_2 + r\theta_1 + r\theta_2 \quad (2.4)$$

ここで、 u と v は分布ばねの変位の n 方向成分と s 方向成分、 \bar{u} と \bar{v} は通常のDEMで用いていいる要素中心間の n 方向相対変位成分と $\xi=0$ における s 方向相対変位成分、 u_1 と v_1 と θ_1 は要素1の中心の n 方向変位成分と s 方向変位成分と中心回りの回転成分、 u_2 と v_2 と θ_2 は要素2の中心の n 方向変位成分と s 方向変位成分と中心回りの回転成分をそれぞれ表す。これらの変位量と回転量は両要素が接触を開始してからの量であり、分布ばねの変位は圧縮を正とし、要素の回転は反時計回りを正とする。式(2.1)の右辺に $-r\xi^2$ を足し、式(2.2)の右辺から \bar{v} を減じると、久武らの定義式に一致する。

上式より、微小時間増分 Δt に対する分布ばねの変位増分 $\Delta u, \Delta v$ が次式で表される。

$$\begin{aligned}\Delta u(\xi) &= \Delta \bar{u} + r\xi(\cos \theta_1 \Delta \theta_1 - \cos \theta_2 \Delta \theta_2) \\ &\quad - r(\sin \theta_1 \Delta \theta_1 + \sin \theta_2 \Delta \theta_2)\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\Delta v(\xi) &= \Delta \bar{v} + r\xi(\sin \theta_1 \Delta \theta_1 - \sin \theta_2 \Delta \theta_2) \\ &\quad + r(\cos \theta_1 \Delta \theta_1 + \cos \theta_2 \Delta \theta_2)\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$\Delta \bar{u} = \Delta u_1 - \Delta u_2 \quad (3.3)$$

$$\Delta \bar{v} = \Delta v_1 - \Delta v_2 + r\Delta \theta_1 + r\Delta \theta_2 \quad (3.4)$$

ここで、 $\Delta u, \Delta v, \Delta \bar{u}, \Delta \bar{v}, \Delta u_1, \Delta v_1, \Delta \theta_1, \Delta u_2, \Delta v_2, \Delta \theta_2$ は上述の変位成分または要素中心回りの回転成分と同様の変位増分または回転増分である。

次に、分布ばねのひずみ増分を次式で定義する。

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon(\xi) &= \Delta u(\xi) / (r_1 + r_2) \\ \Delta \gamma(\xi) &= \Delta v(\xi) / (r_1 + r_2)\end{aligned}\quad (4)$$

ここで、 $\Delta \varepsilon$ と $\Delta \gamma$ は分布ばねのひずみ増分の n 方向（要素間の法線方向または直方向）成分と s 方向（要素間の接線方向またはせん断方向）成分をそれぞれ表す。要素1と要素2の半径を r_1 と r_2 で表しているのは境界面と擬似矩形要素の間について後述するためのものである（以下同様）。

また、分布ばねの分布力増分を次式で定義する。

$$\begin{aligned}\Delta \sigma(\xi) &= k_n \Delta \varepsilon(\xi) \\ \Delta \tau(\xi) &= k_s \Delta \gamma(\xi)\end{aligned}\quad (5)$$

ここで、 $\Delta \sigma$ と $\Delta \tau$ は分布ばねの分布力増分の n 方向（要素間の法線方向または直方向）成分と s 方向（要素間の接線方向またはせん断方向）成分、 k_n と k_s は単位ひずみに対する単位面積当たりの力に相当する法線方向ばね係数と接線方向ばね係数をそれぞれ表す。

分布力とひずみの符号については、図-1に示すばねが圧縮になるときを正とする。従って、法線方向の分布力とひずみは要素が接近するときが正であり、接線方向の分布力とひずみは要素2が $+s$ 方向へ要素

1が $-s$ 方向へ移動するときが正である。

(2) 離散的に分布したモデル

接触面内の分布力を厳密に積分することは計算時間の増大につながる。これに対して、接触面を幾つかに区分し、その区分した接触面（以下、区分接触面と呼ぶ）毎に一様分布モデルと等価な離散的なばねとダッシュポットを1組ずつ配すれば、各組に生じる力の算術和だけで済ませることができるようになる。

接触面を s 方向に N 等分し、区分接触面内の位置 $s_i = r\xi_i$ ($i = 1 \sim N$)における分布力増分が各区分接触面内の分布力増分の平均値とみなせるものとする。このとき、各位置 s_i ($i = 1 \sim N$)に離散的なばねとダッシュポットを配すれば、離散的なばねに関する次のような弾性抗力増分式が得られる。

$$\Delta P_{e(i)} = \Delta \sigma(\xi_i) A/N = K_n \Delta u(\xi_i) \quad (6.1)$$

$$\Delta Q_{e(i)} = \Delta \tau(\xi_i) A/N = K_s \Delta v(\xi_i) \quad (6.2)$$

$$K_n = k_n A/(r_1 + r_2)N \quad (6.3)$$

$$K_s = k_s A/(r_1 + r_2)N \quad (6.4)$$

ここで、 $\Delta P_{e(i)}$ と $\Delta Q_{e(i)}$ は i 番目の離散的な法線方向ばねと接線方向ばねの弾性抗力増分、 K_n と K_s は単位変位に対する弾性抗力に相当する法線方向ばね係数と接線方向ばね係数をそれぞれ表す。

離散的なばねの弾性抗力は式(6.1), (6.2)を接触開始から累計すれば求められる。

離散的なばねと並列配置する離散的なダッシュポットに関する粘性抗力式は次式で与える。

$$P_{d(i)} = \eta_n \Delta u(\xi_i) / \Delta t \quad (7.1)$$

$$Q_{d(i)} = \eta_s \Delta v(\xi_i) / \Delta t \quad (7.2)$$

$$\eta_n = 2h_n \sqrt{K_n N m_1 m_2 / (m_1 + m_2)} / N \quad (7.3)$$

$$\eta_s = \eta_n \sqrt{K_s / K_n} \quad (7.4)$$

ここで、 $P_{d(i)}$ と $Q_{d(i)}$ は i 番目の離散的な法線方向ダッシュポットと接線方向ダッシュポットの粘性抗力、 η_n と η_s は法線方向粘性係数と接線方向粘性係数、 h_n は法線方向減衰係数、 m_1 と m_2 は擬似矩形要素1と2の質量をそれぞれ表す。

(3) 状態の判定と接触力の算出

分布ばねの法線方向分布力は引張強度 σ_t を超えないものとする。これより、 i 番目の離散的な法線方向ばねの弾性抗力が

$$P_{e(i)} < -\sigma_t A/N \quad (8)$$

となつたとき、その位置の離散的連結は消滅して、

弾性抗力も粘性抗力も働くかないものとし、

$$P_{e(i)} = P_{d(i)} = Q_{e(i)} = Q_{d(i)} = 0 \quad (9)$$

とする。

分布ばねの接線方向分布力はクーロンの摩擦則に従うものとし、離散的な接線方向ばねとダッシュポットの抗力は次のような限界を持つものとする。

$$\begin{aligned} |Q_{e(i)}| &> \tau_y(\xi_i) A / N \text{ のとき} \\ |Q_{e(i)}| &= \tau_y(\xi_i) A / N, \quad Q_{d(i)} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\tau_y(\xi_i)$ は接触面のせん断強度に相当するものであり、次式で表される。

$$\tau_y(\xi_i) = c + \sigma(\xi_i) \tan \phi \quad (11)$$

ただし、 c は粘着力、 ϕ は摩擦角である。

時刻 t における要素間の接触状態は以下のように判定する（要素中心間距離を D_{12} とする）。

直前（時刻 $t - \Delta t$ ）が非接触状態のとき

$$D_{12} > r_1 + r_2 \quad \text{ならば 非接触状態}$$

$$D_{12} \leq r_1 + r_2 \quad \text{ならば 接触状態}$$

直前（時刻 $t - \Delta t$ ）が接触状態のとき

離散的連結が 1 つでもあれば接触状態

離散的連結が 1 つもなければ非接触状態

時刻 t における i 番目の離散的な連結状態は以下のように判定する。

直前（時刻 $t - \Delta t$ ）が非連結状態のとき

$$u(\xi_i) < 0 \quad \text{ならば 非連結状態}$$

$$u(\xi_i) \geq 0 \quad \text{ならば 連結状態}$$

直前（時刻 $t - \Delta t$ ）が連結状態のとき

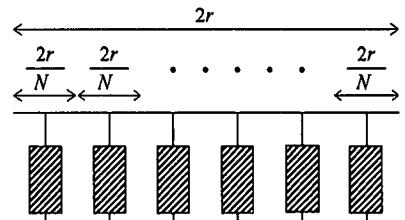
式(8)が成り立てば非連結状態

式(8)が成り立たなければ連結状態

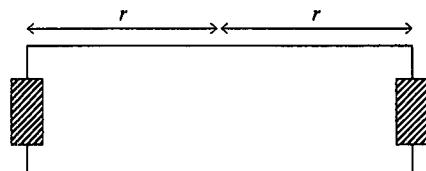
接触状態にある要素間の接触力および接觸力によって生じる回転モーメントは、次式に示すように離散的なばねの弾性抗力と粘性抗力を用いた単純な算術和で求められる。

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^N P_{(i)} = \sum_{i=1}^N (P_{e(i)} + P_{d(i)}) \\ Q &= \sum_{i=1}^N Q_{(i)} = \sum_{i=1}^N (Q_{e(i)} + Q_{d(i)}) \\ M_1 &= -\eta Q - \sum_{i=1}^N r \xi_i P_{(i)} \\ M_2 &= -r_2 Q + \sum_{i=1}^N r \xi_i P_{(i)} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 P と Q は接触面に働く抗力の合力の法線方向成分と接線方向成分、 M_1 と M_2 は接触面の抗力が要素1と要素2に作用する回転モーメントをそれぞれ表す。



(a) 各区分接觸面の中心



(b) 接触面の両端

図-4 離散的連結（ばねとダッシュポット）の位置
(斜線部に法線方向と接線方向に 1 組ずつ配置)

(4) 離散的連結の位置

離散的連結の位置としては、図-4(a)および(b)に示すような位置が考えられ、これらの場合それぞれ次式で表される。

$$\xi_i = (2i - 1 - N)/N \quad (i = 1 \sim N) \quad (13.1)$$

および

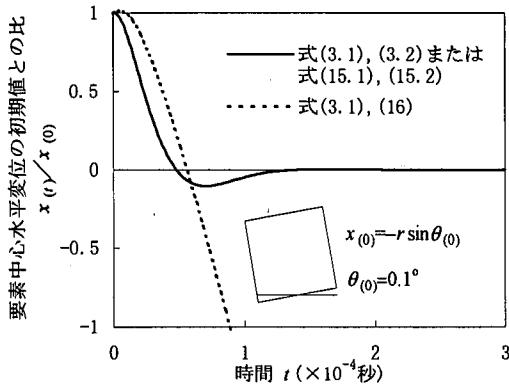
$$\xi_i = 2i - 3 \quad (i = 1 \sim N; \quad N = 2) \quad (13.2)$$

図-4(a)に示す位置を各区分接觸面の中心点とすればそれぞれの平均的な変位や分布力が代表値として評価されるが、斜面上の矩形ブロックのように回転によって隅角部の一端が離れる瞬時に他端の接触だけになる場合には、図-4(b)に示すように接觸面の端部だけで評価した方がよいと考えられる。

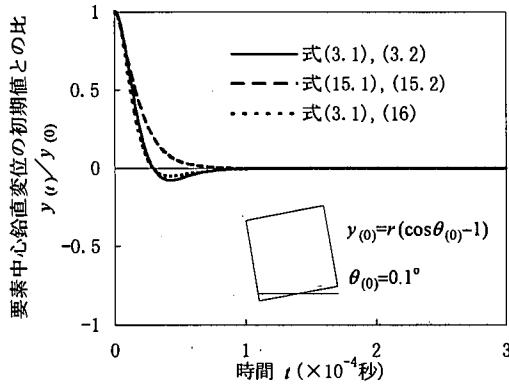
(5) 分布ばねの変位式の修正

図-3(a)に示すように接觸面の中心回りに要素2が回転した場合、式(2.1)～(2.4)を用いると、接線方向変位は接觸面上で一定でなくなる。このとき接觸面の全域で接線方向分布力が接觸面のせん断強度を超えない場合は接線方向弾性抗力は左右で打ち消し合って 0 となる。要素2の回転角 θ_2 が微小のとき、あるいはより一般的に換言すれば接觸面の交差角が微小のとき、接線方向変位の大きさは法線方向変位に比べて無視し得るほど小さく、また、法線方向変位は接觸面内で線形とみなすことができる。

これらのことより、接觸面中心回りに回転し、かつ、接觸面の交差角が微小のとき、接線方向変位は無視し、法線方向変位は接觸面内で線形とすることにする。すなわち、式(2.1), (2.2)に替わり次式を



(a) 要素中心の水平変位(初期接触面の接線の方向)



(b) 要素中心の鉛直変位(初期接触面の法線の方向)

図-5 接触面中心回りの小さな回転後の擬似矩形要素の運動に及ぼす分布ばねの変位増分式の影響

用いることができる場合もあるとする。

$$u(\xi) = \bar{u} + r\xi(\theta_1 - \theta_2) \quad (14.1)$$

$$v(\xi) = \bar{v} \quad (14.2)$$

これから導かれる変位増分式は次式となる。

$$\Delta u(\xi) = \Delta \bar{u} + r\xi(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) \quad (15.1)$$

$$\Delta v(\xi) = \Delta \bar{v} \quad (15.2)$$

これらの式の妥当性を検討するため、図-3(a)に示すように接触面の中心回りに要素2をわずかだけ($\theta_2 = 0.1^\circ$)静的に強制回転させた後の要素の運動を本提案モデルによるDEMで解析する。ただし、要素1は擬似矩形要素ではなく後述するような境界面に置き換え、また、回転前の要素2の中心を座標の原点とした。この場合、接触面からの抗力による自由運動であるため、弾性範囲内であれば要素は元の位置に戻るはずである。

解析結果を図-5に示す。同図には次式に帰着できる久武ら⁷⁾の接線方向変位増分式による結果も比較のために示してある。

$$\begin{aligned} \Delta v(\xi) &= r\xi(\sin\theta_1\Delta\theta_1 - \sin\theta_2\Delta\theta_2) \\ &+ r(\cos\theta_1\Delta\theta_1 + \cos\theta_2\Delta\theta_2) \end{aligned} \quad (16)$$

これら3組の変位増分式を用いた解析のいずれにおいても、図-4(b)または式(13.2)で示される接触面の両端を離散的連結の位置とし、式(2.1)と(2.2)から求められる接触面内の両端におけるばねの初期分布力に対して引張強度とせん断強度が十分大きくなるように接線方向強度定数を定め、また、最も減衰し易くなるように法線方向減衰係数 $h_n = 1$ とした。図中の要素中心の変位 $x_{(t)}, y_{(t)}$ は自由運動を開始してからの時間 t における要素中心の座標を表し、初期接触面の接線と法線のそれぞれの方向の変位に対応する。初期値 $x_{(0)}, y_{(0)}$ は回転直後の要素中心座標に一致する。

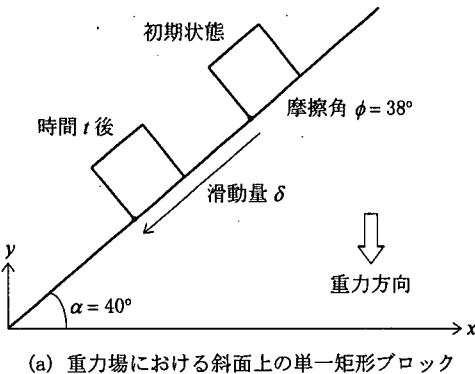
図-5(a)より、接線方向変位については、本論文で定義した分布ばねの変位増分式を用いれば弾性的に復元するのに対し、久武らの接線方向変位増分式を用いると収束せずに発散することがわかる。また、図-5(b)より、法線方向変位については、本論文で定義した変位増分式を用いれば弾性的に復元すること、しかも、式(15.1)を用いれば単調に復元することがわかる。なお、ここには図示していないが、要素の回転角については、3組の変位増分式のいずれを用いてもほぼ同様に復元することを確かめている。

小さな要素間回転角は陽解法を用いているDEMにとって避けられないことである以上、このような弾性的復元性を有することは重要であり、この点に関して式(15.1), (15.2)は式(3.1), (3.2)と同様な結果を与えるといえる。式(3.1), (3.2)の替わりに式(15.1), (15.2)を用いれば三角関数を使う必要がないため計算が単純化するだけでなく、要素間が接触を開始してからの両要素の回転角を必要としないため計算時の記憶容量が節約できるという利点もある。

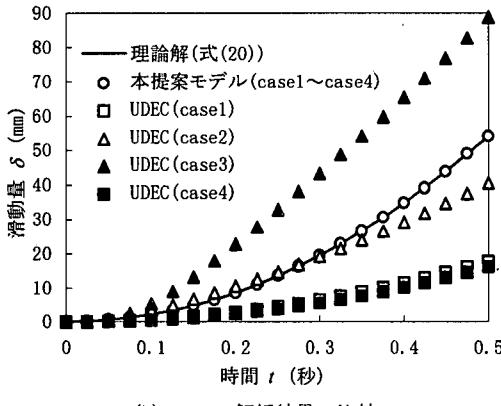
コンクリートなどの連続体を幾つかの擬似矩形要素でモデル化する場合、接触面の交差角はあまり大きくならないであろう。すなわち、接触面の交差角がわずかに大きくなるだけですぐに剥離するであろう。従って、このような場合、式(3.1), (3.2)に替えて式(15.1), (15.2)を用いることができると考えられる。しかし、後述するような斜面上の矩形ブロックの回転を伴う挙動のように接触面の交差角が大きくなってしまい隅角部の接触が重要な場合には式(3.1)を用いる必要がある。

(6) 質量と慣性モーメントの定義および境界面との間ににおける接触面への式の修正

擬似矩形要素の質量と慣性モーメントは正方形要



(a) 重力場における斜面上の単一矩形ブロック



(b) DEM解析結果の比較

図-6 重力場における斜面上の単一矩形ブロックの滑動量に関するDEM解析結果の比較

素のそれらと同じにする。すなわち、半径 r 、奥行き長 ℓ 、質量密度 ρ の擬似矩形要素の質量 m と慣性モーメント I は次式で与える。

$$m = 4r^2\ell\rho, \quad I = \frac{2}{3}r^2m \quad (17)$$

なお、変位増分式として式(15.1)、(15.2)を用い、離散的連結位置として式(13.1)、 $N=1$ を用い、さらに質量と慣性モーメントを次式で与えれば、粒状体などに対する通常の円形要素のDEMと全く同じになる。

$$m = \pi r^2\ell\rho, \quad I = \frac{1}{2}r^2m \quad (18)$$

最後に、境界面と擬似矩形要素との間に 대해서は、上述のすべての式と記述を少し修正するだけでモデル化できる。すなわち、図-1～図-3において要素1を直線境界に置き換え、上述のすべての式と記述から要素1に関する項($r_1, u_1, v_1, \theta_1, M_1$)を削除し、式(7.3)を次式のように変えるだけである。

$$\eta_n = 2h_n \sqrt{K_n N m_2} / N \quad (19)$$

表-1 重力場の斜面問題に対してDEMで用いた諸元

	case1	case2	case3	case4
法線方向ばね係数 K_n (kN/mm)	12	12	12	1200
ばね係数比 K_s/K_n	1	0.01	0.001	1
時間増分 Δt (秒)	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-7}

3. 提案モデルの妥当性の検討

本提案モデルの直線境界-擬似矩形要素間の滑動に対する妥当性と計算効率を重力場における斜面上の矩形ブロックの滑動問題を通して検証し、回転を伴いながら移動する擬似矩形要素に対する妥当性を斜面上の矩形ブロックの底面摩擦模型実験結果と比較検討して検証し、要素-要素間の主に剥離についての妥当性をコンクリートモルタルの曲げ試験結果と比較検討して検証する。

(1) 重力場における斜面上の矩形ブロックの滑動

重力場における斜面上の単一矩形ブロックの滑動問題について、多角形要素を用いた市販DEM解析コードUDECおよび理論解との比較を通して本提案モデルの直線境界-擬似矩形要素間の滑動に対する妥当性と計算効率を検討する。

図-6(a)に示すように傾斜角 $\alpha = 40^\circ$ の斜面上に正方形のブロック(1辺の長さ=25mm、質量=67.1g)が置かれ、斜面-ブロック間の摩擦角が $\phi = 38^\circ$ であるとする。斜面上の単一ブロックの挙動に対するSagasetaの条件⁸⁾よりこのブロックは滑動をし、滑り始めてからの時間 t における滑動量 $\delta(t)$ は次式で与えられる。

$$\delta(t) = \cos \alpha (\tan \alpha - \tan \phi) \frac{1}{2} g t^2 \quad (20)$$

ここで、 g は重力加速度である。

表-1に示すような4通りの大きさのばね係数と時間増分に対して、本提案モデルによる擬似矩形要素を用いたDEM解析結果をUDECによる解析結果および理論解とともに図-6(b)に示す。直線境界-擬似矩形要素間については分布ばねの変位増分式として式(3.1)、(3.2)を用い、離散的連結位置として式(13.2)を用いた。

同図より、ばね係数の大きさによってUDECの解析結果が大きく変化するのに対し、本提案モデルによればいずれのケースにおいても変化せず常に理論解と一致することがわかる。

計算時間はいずれのケースにおいてもUDECに比べ

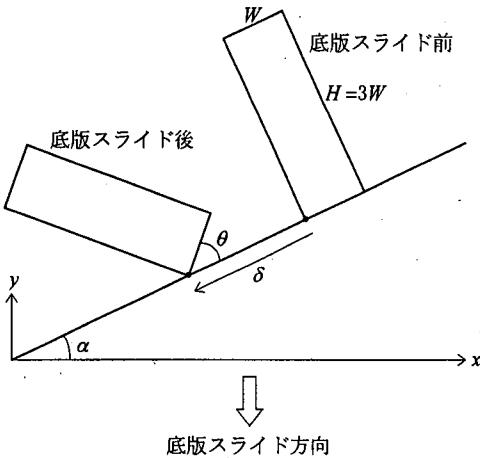


図-7 底面摩擦力場における斜面上の単一矩形ブロック

表-2 底面摩擦力場の斜面問題で用いた要素間モデル式

	擬似矩形要素－ 擬似矩形要素間	擬似矩形要素－ 直線境界間
法線方向変位増分 Δu	式(15.1)	式(3.1)
接線方向変位増分 Δv	式(15.2)	式(15.2)
離散的連結位置	式(13.1), $N=2$	式(13.2)

て 1/10 程度であった。これは多角形要素を用いる場合より接触判定が大幅に簡略化されるためと考えられる。

以上より、直線境界－擬似矩形要素間の滑動に対する本提案モデルの妥当性および多角形要素を用いた DEMに対する計算効率の優位性が認められる。

(2) 底面摩擦力場における矩形ブロックの挙動

斜面上の単一矩形ブロックが移動と回転を同時に起こすような場合に、提案した擬似矩形要素でモデル化し得るかどうかを検証する。重力場の実験では計測や再現性に難点があることから、ここでは岩盤力学の分野で古くから用いられている図-7に示すような底面摩擦模型実験の結果と比較することによって検討する。

底面摩擦模型実験では、アルミ製の直方体（縦 $H=75\text{mm}$ 、横 $W=25\text{mm}$ 、厚さ $=40\text{mm}$ 、質量 $=201.4\text{g}$ ）を実験装置の底版の上に、直方体の横の面が斜面に接するように置き、斜面は固定しておく。底版をスライドさせると、直方体の底面と底版との間に摩擦力（以下、底面摩擦力）が作用し、2次元重力場に似た状態となる。底版と斜面は表面に硬質のゴムシートを貼り、大きな摩擦力が生じるようにしてある。

DEMでは矩形ブロックを3つの擬似矩形要素に分割してモデル化した。解析では、重力を作用させ

表-3 底面摩擦力場の斜面問題で用いたDEMの諸元

法線方向ばね係数 $k_n (\text{N/mm}^2)$	3
接線方向ばね係数 $k_s (\text{N/mm}^2)$	0.75
法線方向減衰係数 h_n	1
擬似矩形要素－斜面境界間の摩擦角 ϕ_w (度)	38
擬似矩形要素(円形要素)の半径 r (mm)	12.5
擬似矩形要素の質量 m (g)	67.1
奥行き ℓ (mm)	40
底面摩擦係数 μ_B	0.42
底版スライド速度 v_B (mm/秒)	-5
時間増分 Δt (秒)	0.00001

粘着力と引張強度については

擬似矩形要素－斜面境界間はともに0

擬似矩形要素－擬似矩形要素間はともに十分大

るのでなく、底面摩擦模型実験に合わせて、次式に示すような円形要素に対する著者ら⁹⁾の梢円体型底面摩擦力式で求められる底面摩擦力を作用させる。

$$B_x = - \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - v_B)^2 + (r\dot{\theta})^2}} \mu_B mg$$

$$B_y = - \frac{\dot{y} - v_B}{\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - v_B)^2 + (r\dot{\theta})^2}} \mu_B mg \quad (21)$$

$$B_\theta = - \frac{r\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - v_B)^2 + (r\dot{\theta})^2}} \frac{2}{3} \mu_B mg$$

ここで、 B_x と B_y は要素に作用する底面摩擦力の x 方向成分と y 方向成分、 B_θ は底面摩擦力によって要素に作用する回転モーメントを要素の半径 r で除したもの、 \dot{x} と \dot{y} は要素中心の並進速度の x 方向成分と y 方向成分、 $\dot{\theta}$ は要素中心回りの回転角速度、 m は要素の質量、 μ_B は底面摩擦係数、 $v_B (< 0)$ は底版スライド速度の y 方向成分をそれぞれ表す。

接触面における要素間モデルの中の幾つかの式は表-2のように選択した。ここで、擬似矩形要素－直線境界間の法線方向変位増分の式と離散的連結位置の式以外は他の式、例えば、式(15.1)を式(3.1)に替えてほとんど同じ結果が得られた。

DEMで用いた諸元は表-3に示すとおりである。ここで、ばね係数 k_n, k_s の値は特に重要ではなく、例えば、それぞれ100倍しても時間増分 Δt を0.1倍にすればほとんど同じ結果が得られる。底面摩擦係数 μ_B は斜面の傾斜角 α を0にした底面摩擦模型実験において斜面にかかる力を測定して求めたものである。擬似矩形要素と斜面境界の間の摩擦角 ϕ_w は矩形ブロックが回転しないようにブロックの長辺を斜面に接して底面摩擦模型実験を行なったときの滑り量 δ を測定し、次の理論式^{9), 10)}から求めたもので

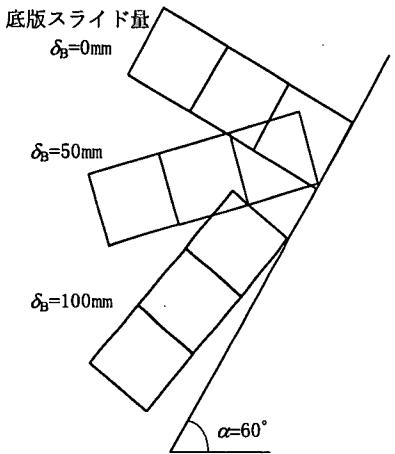


図-8 DEMの解析例（斜面傾斜角 $\alpha = 60^\circ$ のとき）

ある。

$$\delta / \delta_B = \sin \alpha - \tan \phi_w \cos \alpha \quad (22)$$

ここで、 δ_B は底版スライド量である。

底版スライド速度 v_B は実験時の速度 ($= -5\text{mm}/\text{分}$) の60倍に設定したものである。これは、DEM 解析結果に対する底版スライド速度の影響が小さかつたことから、演算時間を削減する目的で設定したものである。擬似矩形要素—擬似矩形要素間の強度定数 c, ϕ, σ_t の値は要素間の連結が離れない程度に大きな値である。

擬似矩形要素を用いたDEM解析の結果の一例を図-8に示す。同図は核となる各円形要素の中心座標と回転角から移動・回転した正方形を表示したものであり、要素間が完全に結合した矩形ブロック状を保ちながら、かつ、矩形ブロックの隅角部と斜面が接した状態と同じ状態を保ちながら、斜面上で転倒と滑動を起こしている様子が確認できる。

図-7に示す矩形ブロックの回転量 θ と隅角部の斜面に沿った移動量 δ の底面摩擦模型実験結果とDEM解析結果を図-9に示す。図中のDEM解析結果において、回転量は斜面に接する擬似矩形要素の回転角であり、隅角部の移動量 δ はその要素の中心の座標 x, y および回転角 θ から次式で求めたものである。

$$\delta = (x_{co} - x_c) \cos \alpha + (y_{co} - y_c) \sin \alpha \quad (23)$$

ここで、 x_{co}, y_{co} は次式で求められる隅角部の座標 x_c, y_c の初期値である。

$$x_c = x + \sqrt{2}r \cos\left(\frac{5}{4}\pi + \alpha + \theta\right) \quad (24)$$

$$y_c = y + \sqrt{2}r \sin\left(\frac{5}{4}\pi + \alpha + \theta\right)$$

図には次式に示すような底面摩擦力場の回転を記述

するBray & Goodmanの式¹⁰⁾を数値解析的に解いて得られた回転量も示してある。

$$\int_0^H \int_0^W \frac{T - R^2(\dot{\theta}/v_B)}{\sqrt{1 - 2T(\dot{\theta}/v_B) + R^2(\dot{\theta}/v_B)^2}} dw dh = 0 \quad (25)$$

$$T = w \cos \psi - h \sin \psi, \quad R^2 = w^2 + h^2$$

$$\psi = \alpha + \theta$$

同図より、若干の相違は認められるが、擬似矩形要素を用いたDEMの解析結果は実験値によく対応しているといえる。この若干の相違は、アルミ製ブロックの隅角部にわずかな丸みがあることが影響しているものと思われる。同図には半径 $r = 2.5\text{mm}$ 、質量 $m = 2.685\text{g}$ の擬似矩形要素75個でモデル化したDEM解析結果も示してあるが、要素分割を細かくすることによって回転量はほとんど変わらないものの隅角部の移動量は初めのうちほとんど0となって実験値によく一致することが確認される。

斜面傾斜角 $\alpha = 60^\circ$ および 75° のとき、矩形ブロックが初めの転倒だけの挙動から転倒と滑動が同時に生じる挙動に移行するという実験で観察された様子がDEMでも再現されている。これは、Bray & Goodmanの式(25)でも、また、斜面上の単一ブロックの挙動に対するSagatsetaの条件⁸⁾でも示し得ないことである。

以上より、回転を伴いながら移動する矩形ブロックに対しても、提案した擬似矩形要素でよい対応を示すモデル化が可能であるといえる。

(3) コンクリートモルタルの曲げ試験

擬似矩形要素間の主に剥離についての妥当性をコンクリートモルタルの曲げ試験と比較することによって検討する。

コンクリートモルタルは池口ら¹¹⁾のものと同様であり、豊浦標準砂と普通ポルトランドセメントと水を3:2:1の重量比で配合し、7日間気中養生したものである。試験から得られた材料定数を表-4に示す。用いた供試体の寸法は断面4cm×4cm、長さ16cmであり、中央1点載荷、支点間距離10cmである。

DEMで用いた要素間モデルの式は表-5に示すとおりである。モルタル部の要素間の離散的連結位置は様々に変えて比較するが、要素間の変位増分の式を表-5のように選択しているので、モルタル部の要素間の離散的連結位置として式(13.1)、 $N=1$ を用いたものは通常のDEMと同一となる。以下の説明で通常のDEMとはこれを表す。また、モルタル部以外の要素も通常のDEMと同一である。

DEMで用いた材料定数や時間増分などの諸元は表-6に示すとおりであり、基本的に試験から得られ

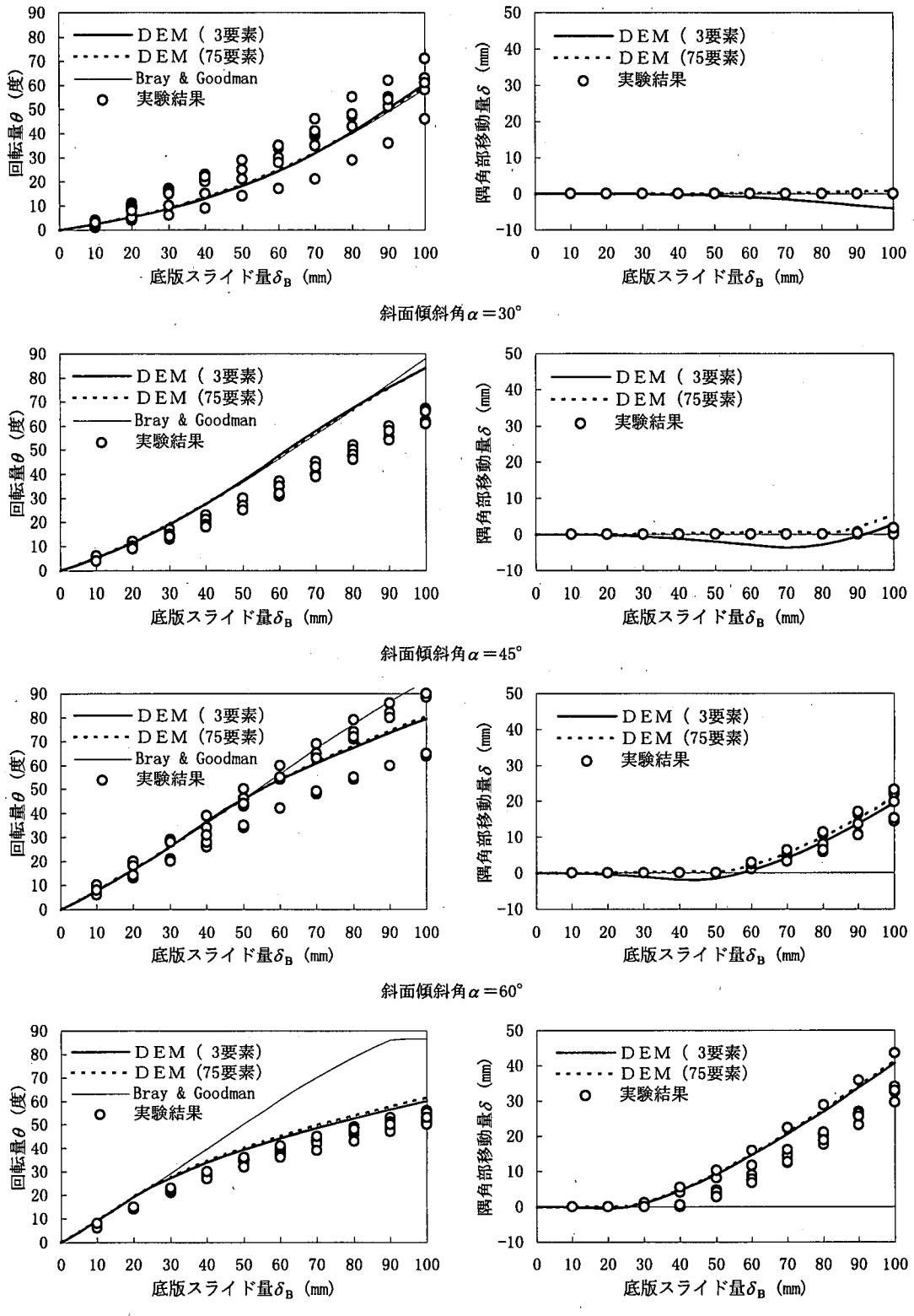


図-9 摳似矩形要素を用いたDEM解析および底面摩擦模型実験より得られた斜面上の單一ブロックの動き

表-4 コンクリートモルタルの材料定数

中央 1 点載荷曲げ引張強度 (N/mm ²)	5.6
粘着力 (N/mm ²)	5.1
内部摩擦角 (度)	28
ヤング係数 E (N/mm ²)	4000
質量密度 (g/cm ³)	2

表-5 曲げ試験に対してDEMで用いた要素間モデル式

	モルタル部の要素間	モルタル部以外の要素間
法線方向変位増分 Δu	式(15.1)	式(15.1)
接線方向変位増分 Δv	式(15.2)	式(15.2)
離散的連結位置	式(13.1)～ 式(13.2)	式(13.1), N=1

表-6 曲げ試験に対してDEMで用いた諸元

法線方向ばね係数 k_n (N/mm ²)	4300
接線方向ばね係数 k_s (N/mm ²)	1720
法線方向減衰係数 h_n	1
モルタル部の要素間引張強度 σ_t (N/mm ²)	5.6
モルタル部の要素間粘着力 c (N/mm ²)	5.1
モルタル部の要素間摩擦角 ϕ (度)	28
モルタル部の要素の質量密度 ρ (g/cm ³)	2
時間増分 Δt (秒)	0.000001

モルタル部以外の要素との間の粘着力と引張強度は0

モルタル部以外の要素との間の摩擦角は5°

た材料定数值をそのまま用いる。ただし、モルタル部の要素間粘着力、要素間摩擦角および質量密度は多少変えても結果に影響を及ぼさないことを確認している。ばね係数値はコンクリートモルタルのポアソン比を $\nu = 1/6$ と仮定し、等粒径の正方格子配列モデルに対する次式⁶⁾で求めたものである。

$$k_n = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad k_s = \frac{(1-2\nu)k_n}{2(1-\nu)} \quad (25)$$

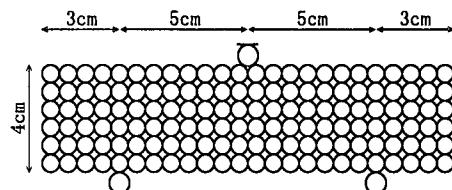
時間増分 Δt は解の安定性が得られる次の条件を十分満たす値である。

$$\Delta t < h_n \sqrt{m/k_n} \leq \eta_n / K_n \quad (26)$$

引張強度は実験時の最荷重の最大値から、また、ヤング係数は破壊前の線形部分の勾配（変位増分に対する荷重増分）の実験値から、いずれも弾性論に基づいて算出したものであるため、以下でDEM解析結果との比較の基準とする実験値は弾性論の理論値としても差し支えない。

なお、市販コードで同様の材料定数值を用いたところ、合理的な結果が得られなかつたため、本比較検討からは除外した。

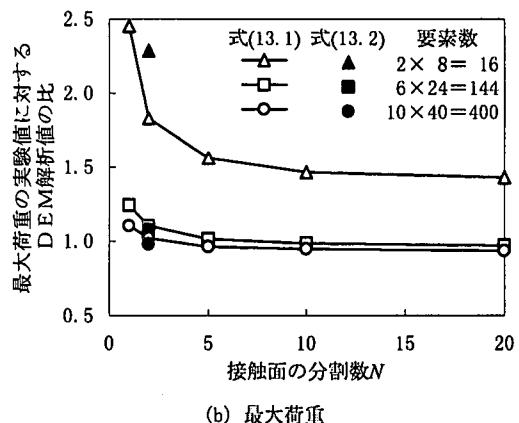
本提案モデルを用いたDEM解析結果を図-10に示す。要素配列は図-10(a)に示すような正方格子配



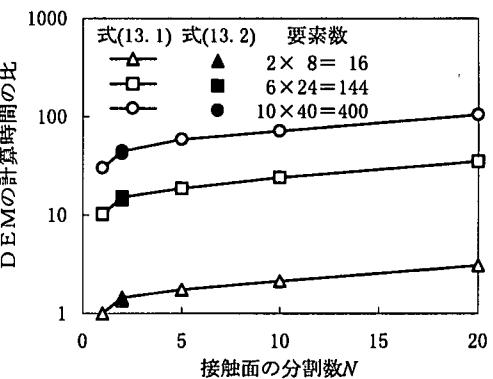
(a) DEMで用いた擬似矩形要素配列

ただし、載荷点と支点は円形要素

($6 \times 24 = 144$ 要素の場合)



(b) 最大荷重



(c) 計算時間(2x8=16要素で通常のDEMの場合を1)

図-10 曲げ試験に対するDEM解析結果

列とし、重力は無視している。載荷部に相当する直線境界を一定速度で降下させ、その境界に作用した力の最大値を載荷荷重の実験値に対する比で表したもののが図-10(b)である。

同図より、最大荷重に関する実験値との対応性については、本提案モデルの有用性が認められる。すなわち、接触面の分割数 N を大きくするほど最大荷重は実験値に漸近する。この結果から、 $N = 5$ 程度で十分であることがわかる。要素数が少ないと N を大きくするだけでは実験値に十分近い結果は得られないが、それでも通常のDEMに比べれば実

験値に近い。実験値に近づけるためには N を大きくするより要素数を増やす方が効果が高いが、要素数をかなり増やした場合（要素数=400）でもなお通常のDEMより実験値に近い結果が得られる。

図-10(c)は16要素の通常のDEMの計算時間を1とした場合の計算時間の比を示す。同図より、要素数を増やすと比例またはそれ以上の割合で計算時間が増加するが、接触面の分割数 N を大きくしても計算時間は緩やかに増加するだけであり、本提案モデルの計算効率が高いことが確かめられる。例えば、 $N=5$ のときの計算時間は通常のDEMの場合の2倍弱である。ここでは要素数によらず一定の時間増分を用いたが、要素数を増やすとその平方根に比例して要素半径が小さくなり、式(26)から時間増分を小さくしなければならなくなるため、要素数の増加に対する計算時間の増加割合は図-10(c)に示した以上であり、要素数を増やすこと以上に接触面の分割数 N を増加させることの効果は大きい。

以上より、擬似矩形要素間の剥離についての妥当性と要素数の減少に対する本提案モデルの有用性が確認される。

4. 結論

2次元円形要素を用いたDEMで粒状体だけでなく連続体もモデル化できるようにするために、円形要素を核として用いた擬似矩形要素モデルを提案し、実験結果等と比較することにより本提案モデルの妥当性を検証した。この際、直線境界—擬似矩形要素間の挙動についての妥当性は斜面問題において比較検討し、要素—要素間の主に剥離についての妥当性はコンクリートモルタルの曲げ試験結果と比較検討して検証した。

斜面問題における比較検討より、本提案モデルを用いれば、幾つかの円形要素で矩形ブロックの移動量や回転量に関してよい対応性を得ることができる。および、多角形要素を用いる場合より計算時間が非常に少ないと示した。ただし、この計算時間の優位性は1つの多角形を10個程度の擬似矩形要素でモデル化するところまでが限界である。

コンクリートモルタルの曲げ試験との比較検討より、最大荷重に関する実験値との対応性がよいこと、通常のDEMと比べて計算時間がそれほど増加しないことなどから、本提案モデルの有用性を示した。

本提案モデルは回転拘束については岩下らの回転ばねとほぼ同様の効果を表すものと考えられるが、それだけではなく、矩形ブロックの隅角部の幾何学的効果も表現できる。

ブロックや連続体の多くは正方格子状に分割できるであろうことから、本提案モデルを適用できる場合は多いと考えられる。しかし、例えば、矩形ブロックが斜面から離れた後に再接触する場合、矩形ブロックの隅角部と斜面との再接触を考慮することができず、円弧部と斜面との再接触という形でしか考慮できない。矩形ブロックどうしの再接触や連続体が破壊して幾つかに分割した後の再接触も同様である。ただし、この問題は擬似矩形要素の数を増やすことによって容認されるであろう。

また、連続体をモデル化する場合、等径正方格子配列とするため、強度や変形に関して方向性を有してしまう。従って、不規則配列にすることが望まれるが、その場合には村上ら¹²⁾と同様の方法で要素間のばね係数や強度定数を決定することによって対応させることができると考えられ、今後の課題である。

参考文献

- 1) Cundall, P.A. : A computer model for simulating progressive, large-scale movement in blocky rock systems, *Symp. of I.S.R.M.*, Nancy, pp.129-136, 1971.
- 2) Cundall, P.A. and Strack, O.D.L. : A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, Vol.29, No.1, pp.47-65, 1979.
- 3) 岩下和義、松浦浩一、小田匡寛：粒子接点でのモーメント伝達を考慮した個別要素法の研究、土木学会論文集、No. 529/III-33, pp. 145-154, 1995.
- 4) 近藤一平、歌川紀之、伊藤守、吉田望：発破解体工法における立体骨組構造の倒壊シミュレーション手法について、日本建築学会第13回情報システム利用技術シンポジウム, pp. 49-53, 1990.
- 5) 岩下和義：粒状体シミュレーションによる地盤の動的破壊解析—その1—、東京大学地震研究所彙報、Vol. 63, pp. 201-235, 1988.
- 6) 目黒公郎、伯野元彦：粒状体シミュレーションによるコンクリート構造の破壊解析、東京大学地震研究所彙報、Vol. 63, pp. 409-468, 1988.
- 7) 久武勝保、村上敏夫、森孝高：CEMによる連続体・不連続体の統一解釈の試み、第24回岩盤力学に関するシンポジウム, pp. 286-290, 1992.
- 8) Sagaseta, C. : On the models of instability of a rigid block on an inclined plane, *Rock Mech. & Rock Eng.*, Vol.19, pp.261-266, 1986.
- 9) 松井幹雄、西村和夫、今田徹：底面摩擦模型実験の個別要素法解析のための底面摩擦力の定式化、土木学会論文集、No. 589/III-42, pp. 99-108, 1998.
- 10) Bray, J.W. and Goodman, R.E. : The theory of base friction models, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol.18, pp.453-468, 1981.

- 11) 池口正晃, 猪熊 明, 宮川順一, 永井春生: 突発性崩壊に関する模型実験, トンネル工学研究発表会論文・報告集, 第5巻, pp. 129-132, 1995.
- 12) 村上敏夫, 久武勝保, 櫻井春輔: CEMによる地盤のモデル化とその入力パラメターの決定法, 土木学会論文集, No. 529/III-33, pp. 11-18, 1995.

(1998. 4. 24 受付)

PROPOSITION OF PSEUDO-RECTANGLE ELEMENT MODEL BASED ON CIRCULAR ELEMENT FOR DISTINCT ELEMENT METHOD

Mikio MATSUI and Kazuo NISHIMURA

A new type of model "Pseudo-Rectangle Element Model" using two-dimensional circular element is proposed for the Distinct Element Method so that it can analyze not only motion of granular materials but also fracture of continua. The contact surface between two elements are divided into some sections, and the piecewise discrete spring and dashpot are disposed on each section. The numerical results are compared with the results of another methods and with experiments for a rectangular block on a slope and for a bending test of concrete mortal. Those comparisons represent the usefulness of the present model.