

# 非均質弾塑性体のマルチスケール解析 のための一般化アルゴリズム

寺田賢二郎<sup>1</sup>・菊池 昇<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 正会員 Ph.D. 東北大学助教授 情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

<sup>2</sup> Ph.D. ミシガン大学教授 工学部機械工学及び応用力学科 (Ann Arbor, MI48109, USA)

非均質弾塑性体のためのマルチスケール解析について、一般化収束論を用いた均質化法の定式化を示し、新規の弾塑性マルチスケール解析アルゴリズムを提示する。一般化変分原理に基づく弾塑性問題の基礎式から、Two-scale 収束論を用いてミクロおよびマクロスケールにおける支配方程式を導出し、マルチスケールモデリングの数理構造を明示する。ミクロ、マクロスケールのそれぞれの応答が統合した計算アルゴリズムを確立し、漸近展開法に基づく定式化を増分表示したつり合い方程式に適用する従来のアプローチとの相違点を強調する。開発したアルゴリズムを適用した数値解析例を示すとともに、問題点と実用化への今後の指針を与える。

**Key Words** : multiscale analysis, homogenization method, two-scale convergence, heterogeneous media, computational elastoplasticity

## 1. はじめに

数学的均質化法<sup>1),2)</sup>の最も有利な特徴は、非均質材料の非線形力学応答に対する Global-Local 的な解析を可能にすることであろう。すなわち、構造物の巨視的な(マクロ)挙動が、非均質性が定義される微視的な(ミクロ)力学応答を数学的に関連づけることができるため、物理的な考察をそれほど行わなくてもマルチスケール解析の定式化が可能になる。また、均質化理論が変分法に基づく一般化収束論<sup>3)</sup>を基調とするため、得られる定式は直接有限要素解析に適用でき、比較的簡単に数値解を得ることができる。

このような利点を背景に、主に計算力学分野で受け入れられてきた均質化法に基づくマルチスケール解析法ではあるが、非均質弾塑性体に対する既往の定式化は、工学的にも重要な課題であるにも関わらず、未だ実用化に耐えうる決定的なアルゴリズムを与えるに至っていない<sup>4)-6)</sup>。この理由として、線形問題について紹介された漸近展開法による定式化<sup>7)</sup>を直接的に応用してきたことが本質的なマルチスケール構造を見えにくくしていることが考えられる。線形問題の拡張として捉える従来型のアプローチを改め、非線形均質化理論を取り入れた統一的な計算アルゴリズムの提案が望まれているといえる。

本研究では、非均質弾塑性体のためのマルチスケール解析について、一般化収束論を用いた均質化法の定式化を与え、新規の弾塑性マルチスケール解析アルゴ

リズムを提示する。まず、一般化変分原理に基づく弾塑性問題の定式化<sup>10)</sup>を出発点することで得られるミクロおよびマクロスケールにおける支配方程式の関係を明示する。次に、その定式化から自然に導かれるマルチスケール計算アルゴリズムを詳説し、漸近展開法に基づく定式化を増分表示したつり合い方程式に適用する従来のアプローチとの相違点を強調する。最後に、開発したアルゴリズムを用いた計算例を示し、問題点と実用化への今後の指針を与える。

## 2. 非均質弾塑性体の均質化法

### (1) 弾塑性挙動の記述<sup>10)</sup>

図-1(a)に示すような複数の弾塑性構成材料からなる非均質体を考える。実数を  $\mathcal{R}$  で表し、この構造全体の  $n_{\text{dim}}$  次元領域  $\Omega^f \subset \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$  は、代表長さ  $\varepsilon$  を有する基本周期構造領域(ユニットセル)  $\varepsilon Y$  を繰り返し配置することによって覆うことができるものとする。さらに、ユニットセルは構造全体に対して非常に小さいものと仮定すると、この物体全体の力学挙動は、ミクロ構造内の材料の配置および物性に支配されるとともにその大きさ  $\varepsilon$  にも影響される。以下の定式化では、領域  $\Omega^f$  に座標系  $x \in \Omega^f$  を導入して変位、Cauchy 応力、全ひずみをそれぞれ  $u^\varepsilon(x)$ 、 $\sigma^\varepsilon(x)$ 、 $\varepsilon^\varepsilon(x)$  などと表し、各変数に添え字  $\varepsilon$  を用いてミクロ構造への依存性を明記することにする。また、各構成材料の弾塑性挙動について、最大塑性仕事の原理が成り立つと仮定し、等方硬化の

みを考慮した  $J^2$  塑性理論に限定する。

蓄えられる弾性エネルギーを  $W^\varepsilon: \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}(n_{\text{dim}}+1)/2} \rightarrow \mathcal{R}$ , ひずみ硬化によるポテンシャルエネルギーを  $\mathcal{H}^\varepsilon: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  とすると, 塑性変形に関する自由エネルギー関数は,

$$\psi^\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pe}}, \alpha^\varepsilon) := W^\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pe}}) + \mathcal{H}^\varepsilon(\alpha^\varepsilon) \quad (1)$$

で定義される。ここで,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pe}}$  は塑性ひずみ,  $\alpha^\varepsilon$  は等方硬化に関する内部変数であり, 相当塑性ひずみが

$$\alpha^\varepsilon = \bar{\varepsilon}^{\text{pe}} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pe}}(\tau)\| d\tau \quad (2)$$

で与えられる。ただし,  $\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pe}}\| = (\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pe}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pe}})^{1/2}$  としている。このとき, 応力  $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$  とひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon$  の関係は,

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \frac{\partial \psi^\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon, \alpha^\varepsilon)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon} = \frac{\partial W^\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon, \alpha^\varepsilon)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon} \quad (3)$$

で与えられ, 内部変数  $\alpha^\varepsilon$  と Legendre 変換を介して共役な硬化パラメータ  $q^\varepsilon$  が,

$$q^\varepsilon = -\frac{\partial \mathcal{H}^\varepsilon(\alpha^\varepsilon)}{\partial \alpha^\varepsilon} := -\nabla \mathcal{H}^\varepsilon(\alpha^\varepsilon) \quad (4)$$

$$\dot{q}^\varepsilon = -\nabla^2 \mathcal{H}^\varepsilon(\alpha^\varepsilon) \dot{\alpha}^\varepsilon \quad (5)$$

なる関係にある。また, 最大塑性仕事の原理により, 塑性 consistency パラメータ  $\gamma^\varepsilon$  を用いて,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pe}} = \gamma^\varepsilon \frac{\partial f^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon, q^\varepsilon)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon} \quad (6)$$

$$\dot{\alpha}^\varepsilon = \gamma^\varepsilon \frac{\partial f^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon, q^\varepsilon)}{\partial q^\varepsilon} \quad (7)$$

のように流れ則および硬化則の関連性が保証される。ここで,  $f^\varepsilon$  は Mises の降伏関数であり, 一軸状態での初期降伏応力を  $\sigma_Y$ , Cauchy 応力の偏差成分を  $\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon)$  と表して,

$$f^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon, q^\varepsilon) := \|\text{dev} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon\| + q^\varepsilon - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y \quad (8)$$

で与えられる。この降伏関数は, 式 (4) によって  $f^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon, \alpha^\varepsilon)$  と同一視され, 塑性硬化ポテンシャル  $\mathcal{H}^\varepsilon$  の内部変数  $\alpha^\varepsilon$  に関する二次形式,  $\mathcal{H}^\varepsilon(\alpha^\varepsilon) = (1/2) H \alpha^{\varepsilon 2}$  を仮定すると, 塑性変形を規定する

$$f(\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon, \alpha^\varepsilon) := \|\text{dev} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon\| - \left( H \alpha^\varepsilon + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y \right) \leq 0 \quad (9)$$

が降伏条件となる。ここで,  $H$  は等方硬化係数である。また, この場合式 (5) において  $\nabla^2 \mathcal{H}^\varepsilon(\alpha^\varepsilon) = H$  であるので, 式 (7) の硬化則は

$$\dot{q}^\varepsilon = -\gamma^\varepsilon H \frac{\partial f^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon, q^\varepsilon)}{\partial q^\varepsilon} \quad (10)$$

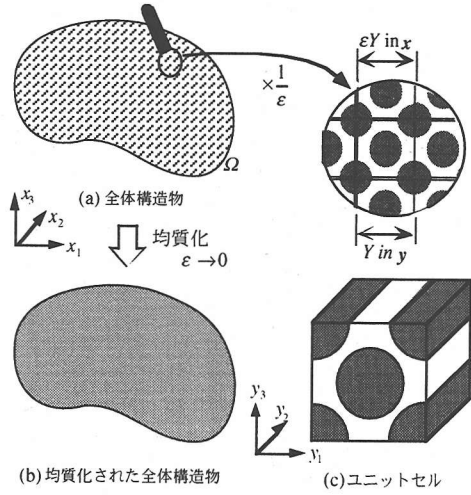


図-1 非均質弾塑性材料と均質化の過程

となる。さらに, 最大塑性仕事を仮定しているため, この条件式が凸であること, および载荷/除荷条件が Kuhn-Tucker 形式,

$$f^\varepsilon \leq 0, \gamma^\varepsilon \geq 0, \gamma^\varepsilon f^\varepsilon = 0 \quad (11)$$

で与えられることが示される。

## (2) 境界値問題の支配方程式

静的なつり合い状態は平衡方程式,

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon + \rho^\varepsilon \mathbf{b} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}^{\text{T}} = \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \quad (12)$$

で与えられ, これに変位-ひずみ関係,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon = \text{sym}(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon + (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon)^{\text{T}}) \quad (13)$$

および弾性変形についての構成式 (3), 塑性変形についての流れ則 (6), 硬化則 (10), 载荷/除荷条件 (11) を与えることによって塑性変形を記述できるものとする。ここで  $\text{sym}(\bullet)$  は 2 階のテンソルの対称成分,  $\rho^\varepsilon \mathbf{b}$  は  $\rho^\varepsilon$  を密度とした単位体積あたりの物体力である。また, この物体の占める領域  $\Omega^\varepsilon$  の境界  $\partial \Omega$  には,  $\Gamma_u \subset \partial \Omega$  に変位  $\mathbf{g}$ ,  $\Gamma_\sigma \subset \partial \Omega$  は表面力  $\mathbf{T}$  が

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{g} \text{ on } \Gamma_u, \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{T} \text{ on } \Gamma_\sigma \quad (14)$$

と与えられる。ここで,  $\hat{\mathbf{n}}$  は境界  $\Gamma_\sigma$  における外向き単位法線ベクトルである。

弾塑性問題の境界値問題に関するこれらの支配方程式を変分(弱)形式で記述すると, 各式は領域  $\Omega^\varepsilon$  の”ほとんどいたるところで”(a.e.) 成り立っていればよい。以降の弱形式による定式化において, 各変数は  $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}^\varepsilon$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}^\varepsilon$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}^\varepsilon$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pe}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}^\varepsilon$ ,  $q^\varepsilon \in \mathcal{V}_q^\varepsilon$  などと表記する。ここで,

$$U^\varepsilon := \left\{ \mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \mathbf{v}_i^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon), \mathbf{v}^\varepsilon = \mathbf{g} \text{ on } \Gamma_u \right\} \quad (15)$$

$$S^\varepsilon := \left\{ \boldsymbol{\tau}^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}(n_{\text{dim}}+1)/2} \mid \tau_{ij}^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon) \right\} \quad (16)$$

$$\mathcal{V}_q^\varepsilon := \left\{ q^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathcal{R} \mid q^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon) \right\} \quad (17)$$

であり、 $L^2$  は 2 乗 Lebesgue 可積分空間、 $H^1$  は一階の微分までが  $L^2$  に属する Sobolev 空間である<sup>10)</sup>。また、式 (15) が試行関数の集合を表すのに対して、

$$\mathcal{V}^\varepsilon := \left\{ \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \boldsymbol{\eta}_i^\varepsilon \in H^1(\Omega), \boldsymbol{\eta}^\varepsilon = \boldsymbol{\theta} \text{ on } \Gamma_u \right\} \quad (18)$$

を変分形式における試験関数の空間と定義しておく。さらに、 $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$  および  $q^\varepsilon$  は塑性降伏条件をみたすことから、

$$\mathcal{E}^\varepsilon := \left\{ (\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon, q^\varepsilon) \in S^\varepsilon \times \mathcal{R} \mid f(\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon, q^\varepsilon) \leq 0 \right\} \quad (19)$$

であり、弾塑性問題の支配方程式は本来変分不等式で記述されるが、塑性 consistency パラメータ  $\gamma^\varepsilon \in \mathcal{K}_p^\varepsilon$  を Lagrange 乗数として用いることで応力に対する拘束を外すことができる。ここで、 $\mathcal{K}_p^\varepsilon$  は

$$\mathcal{K}_p^\varepsilon := \left\{ \gamma^\varepsilon \in \mathcal{R} \mid \gamma^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon); \gamma^\varepsilon \geq 0 \right\} \quad (20)$$

なる凸集合である。

### (3) 時間について離散化した変分方程式

時間について離散形で書かれた古典塑性理論における支配方程式が Euler-Lagrange 方程式になるような離散的な汎関数を考え、一般化変分原理に基づく均質化法の定式化のための基礎式を与える。ここでの定式は、Simo and Hughes<sup>10)</sup> の記述に従うもので、応力積分アルゴリズムと整合した変分方程式が与えられる。

考えている時間範囲  $[0, T] \in \mathcal{R}^+$  を離散化したときの代表的な区間  $[t_n, t_{n+1}]$  において、 $t_n$  での状態変数の値はすべて与えられているものとし、現時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  における状態変数の組を便宜的に

$$\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon := \left\{ \mathbf{u}_{n+1}^\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{pl}}, q_{n+1}^\varepsilon, \Delta \gamma^\varepsilon \right\} \quad (21)$$

と書くことにする。ただし、 $\Delta \gamma^\varepsilon := \gamma^\varepsilon \Delta t$  である。このとき、後退 Euler 差分近似を行うことで、時刻  $t_n$  における全エネルギーは、時刻  $t_{n+1}$  におけるポテンシャルエネルギーと区間  $[t_n, t_{n+1}]$  における散逸増分の和として表される。すなわち、離散形の汎関数 (Lagrangian) は、時刻  $t_{n+1}$  での状態変数を用いて、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^\varepsilon(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon) := & \mathcal{W}_{n+1}^\varepsilon + \frac{1}{2} q_{n+1}^\varepsilon H^{\varepsilon-1} q_{n+1}^\varepsilon \\ & + \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\varepsilon : (\text{sym}(\nabla \mathbf{u}_{n+1}^\varepsilon) - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^\varepsilon) \\ & - \Delta \gamma^\varepsilon f_{n+1}^\varepsilon + (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{pl}} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pl}}) : \partial_\varepsilon \mathcal{W}_{n+1}^\varepsilon \\ & - q_{n+1}^\varepsilon H^{\varepsilon-1} (q_{n+1}^\varepsilon - q_n^\varepsilon) \end{aligned} \quad (22)$$

と定義される。ここで、 $\mathcal{W}_{n+1}^\varepsilon$  および  $f_{n+1}^\varepsilon$  を

$$\mathcal{W}_{n+1}^\varepsilon := \mathcal{W}^\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^\varepsilon - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{pl}}) \quad (23)$$

$$f_{n+1}^\varepsilon := f^\varepsilon(\partial_\varepsilon \mathcal{W}^\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^\varepsilon - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{pl}}), q_{n+1}^\varepsilon) \quad (24)$$

とした。

前節で与えた支配方程式で記述される弾塑性体のつり合い問題は、次の Hu-Washizu 汎関数の停留値問題と等価であることが示される。

$$\mathcal{F}_n(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon) := \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{L}_n^\varepsilon(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon) d\nu + \mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}_{n+1}^\varepsilon) \quad (25)$$

ここで、 $\mathcal{F}_{\text{ext}}$  は

$$\mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}_{n+1}^\varepsilon) := - \int_{\Omega^\varepsilon} \rho^\varepsilon \mathbf{b}_{n+1} \cdot \mathbf{u}_{n+1}^\varepsilon d\nu - \int_{\Gamma_s} \mathbf{T}_{n+1} \cdot \mathbf{u}_{n+1}^\varepsilon ds \quad (26)$$

で与えられる外力仕事ポテンシャルである。この汎関数  $\mathcal{F}_n$  の停留値は、式 (21) の 6 変数それぞれについての停留条件を考えることで得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla \boldsymbol{\eta}^\varepsilon : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\varepsilon d\nu = & \int_{\Omega^\varepsilon} \rho^\varepsilon \mathbf{b}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta}^\varepsilon d\nu \\ & + \int_{\Gamma_s} \mathbf{T}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta}^\varepsilon ds \quad \forall \boldsymbol{\eta}^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon \end{aligned} \quad (27)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \boldsymbol{\tau}^\varepsilon : (\text{sym}(\nabla \mathbf{u}_{n+1}^\varepsilon) - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^\varepsilon) d\nu = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}^\varepsilon \in S^\varepsilon \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} \boldsymbol{\gamma}^\varepsilon : \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{W}_{n+1}^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\varepsilon \right) \right. \\ \left. + \mathbf{a}_{n+1}^\varepsilon : \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{pl}} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pl}} - \Delta \gamma^\varepsilon \frac{\partial f_{n+1}^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon} \right) \right] d\nu = 0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma}^\varepsilon \in S^\varepsilon \end{aligned} \quad (29)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \boldsymbol{\gamma}^\varepsilon : \mathbf{a}_{n+1}^\varepsilon : \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{pl}} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pl}} - \Delta \gamma^\varepsilon \frac{\partial f_{n+1}^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon} \right) d\nu = 0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma}^\varepsilon \in S^\varepsilon \quad (30)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \left[ H^{\varepsilon-1} (q_{n+1}^\varepsilon - q_n^\varepsilon) + \Delta \gamma^\varepsilon \frac{\partial f_{n+1}^\varepsilon}{\partial q^\varepsilon} \right] d\nu = 0 \quad \forall p^\varepsilon \in \mathcal{V}_q^\varepsilon \quad (31)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon f_{n+1}^\varepsilon d\nu = 0 \quad \forall \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon \in \mathcal{K}_p^\varepsilon \quad (32)$$

が変分形式で与えられる支配方程式となる。ここで、 $\mathbf{a}_{n+1}^\varepsilon$  は  $\mathbf{a}_{n+1}^\varepsilon := \partial^2 \mathcal{W}_{n+1}^\varepsilon / \partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\varepsilon 2}$  なる弾性係数であり、線形弾塑性体に対しては定数をとる。

注 1: 等方性や降伏条件など、本節での材料に関する各仮定は本質的なものではない。与えた構成関係は最も単純なものであるが、弾塑性理論で受け入れられている各種モデルも同様に定式化に組み入れることが可能である。

### (4) ミクロ/マクロスケールと一般化収束論

一般的な均質化理論の表記<sup>1),2)</sup>に従って、微視的な非均質性が観察できないマクロスケール  $\mathbf{x} \in \Omega$  と非均質性を測る尺度であるミクロスケール  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$  を導入

する<sup>1)</sup>。ここで、これらのスケールはマイクロ構造の大きさ $\varepsilon$ によって、 $y = x/\varepsilon$ のように関連づけられている。スケール $x$ は、マイクロ構造の大きさに依存しない物体の領域 $\Omega$ を測るためのもので、マイクロ構造領域 $\varepsilon\mathcal{R}^n$ 内で分布する場の変数を測るためにはスケール $y$ を用いることになる(図-1(c)参照)。このようにマイクロとマクロの2つのスケールを用いることによって、場の変数が $x$ と $y$ のそれぞれで測ることができる。このことを明示するために、変位、真応力および微小ひずみをそれぞれ $u(x, y)$ ,  $\sigma(x, y)$ ,  $\varepsilon(x, y)$ などと書くことにする。

この非均質体のマイクロ構造は、領域 $\varepsilon\mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ に無限な広がりを持ち、周期的に配置されて全体の領域 $\Omega^\varepsilon$ を構成するものと仮定している。このユニットセルの領域を $Y$ で表すと構造全体の領域 $\Omega^\varepsilon$ は積空間 $\Omega \times \varepsilon\mathcal{R}^n$ とみなされ、対象とする領域が便宜的に

$$\Omega^\varepsilon := \{y \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid y = x/\varepsilon\} = \Omega \times \varepsilon Y \quad (33)$$

と表される。このような設定のもとで、変位、応力、ひずみなどの各変数はスケール $y$ について周期的(Y-periodic)であると仮定する。

以上のようなマイクロおよびマクロスケールを導入して考えている非均質弾塑性体のマクロ挙動を支配する方程式を導く数学的な手続は、均質化(homogenization<sup>11)</sup>)と呼ばれており、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとることを前提としている。均質化法の数学理論によれば、マイクロおよびマクロ変数について個別の境界値問題を設定でき、有限要素法などの解析手法を用いてマルチスケール解析が実現されることが知られている。この数学理論は一般化収束論の枠組みに属するが、代表的な力学問題についてはマイクロ-マクロ変数表示を用いた漸近展開法に基づく定式化が一般的である<sup>1)</sup>。漸近展開法によれば、特に数学的な記述を用いなくても直感的に理解しやすい、システマティックな支配方程式の導出が可能となっており、これまで工学分野で紹介されてきた定式化の多く<sup>4)-9)</sup>がこの方法論に基づいている。

しかしながら、この手法は漸近展開形の解の存在を仮定するもので、問題によってはTartarのエネルギ法<sup>12)</sup>などによる個別の証明が必要とされる。特に、本論文で考えている弾塑性問題のように、内部変数の発展方程式を含む非線形方程式が対象となる場合、特異摂動の取り方が一意に定まらず、漸近展開法は適用性の保証がない。したがって、G-,  $\Gamma$ -, H-あるいはTwo-scale収束論などの一般化収束論<sup>3)</sup>に基づいた均質化の定式化が必要となる。本研究では、AllaireのTwo-scale収束理論<sup>13)</sup>を用いて定式化を行う。このTwo-scale収束理論は均質化法に特化した収束理論であり、他の収束論よりは一般性を欠くものの、本研究での問題設定に対しては十分な情報を提供するものである。

Two-scale収束は次のように定義される<sup>13)</sup>。

定義：任意の関数 $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\text{per}}^\infty(Y))$ について、

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} h^\varepsilon(x) \varphi(x, x/\varepsilon) dv \\ & = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y h^0(x, y) \varphi(x, y) dy dx \end{aligned} \quad (34)$$

が成り立つとき、部分関数列 $h^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ は、 $L^2(\Omega \times Y)$ に属する $h^0(x, y)$ にTwo-scale収束するという。

ここで、 $|Y|$ は領域 $Y$ の体積である。また、この定義において、 $\mathcal{D}(\Omega; C_{\text{per}}^\infty(Y))$ はマイクロおよびマクロスケールを用いた試験関数の空間で、各点 $x \in \Omega$ が $Y$ -periodicかつ滑らかな関数空間 $C_{\text{per}}^\infty(Y)$ と関連づけられている。同様に、 $L^2(\Omega \times Y) := L^2(\Omega; L^2_{\text{per}}(Y))$ などと定義した。実際、関数列 $v^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ から $h^0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ にTwo-scale収束する部分数列が抽出できることが証明されている。さらに、Two-scale収束論において、固体力学の問題で特に有用な結論は、 $h^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ に関する次の定理である<sup>13)</sup>。

定理：関数列 $h^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ から抽出される部分関数列について、 $h^\varepsilon$ は $h^0(x) \in H^1(\Omega)$ にTwo-scale収束し、 $L^2(\Omega; H^1_{\text{per}}(Y))$ に属する関数 $h^1(x, y)$ が存在して $\nabla h^\varepsilon$ は $\nabla_x h^0(x) + \nabla_y h^1(x, y)$ にTwo-scale収束する。

ここで、 $\nabla_x, \nabla_y$ はそれぞれマクロ、ミクロスケールについて勾配をとる演算子である。また、 $h^1(x, y)$ は漸近展開法における $\varepsilon$ の一次のオーダーに対応するものであり、 $h^0(x)$ は $y$ に依存しないことから $Y$ 内では定数パラメータと見なされる。これらの厳密な記述と証明は文献3), 13)などを参照されたい。

注2：ここで紹介したTwo-scale極限は $x \in \Omega$ で定義される位相についての弱い意味の極限であるので、式(34)右辺の $x \in \Omega$ についての被積分関数である $(1/|Y|) \int_Y h^0(x, y) \varphi(x, y) dy$ は $\Omega$ の各点で定義される必要はない。したがって、 $y$ を測度とする領域 $Y$ が $\Omega$ 内のほとんどいたるところで定義されれば、そこでの関数 $h^0(x, y) \varphi(x, y)$ は $L^2_{\text{per}}(Y)$ に属し、かつ $Y$ における体積平均が $L^2(\Omega)$ に属するものと解釈される。このことは、後述する非線形マルチスケール解析における局所的な周期性の仮定を正当化しており、得られる数値解の妥当性を保証するものである。

注3：本研究で考えている弾塑性問題について、上の式(34)や定理で与えられる関係が成立するためには、小節(1), (2), (3)で与えた問題設定との整合性が保たれていなければならない。今の場合、式(25)で

与えられる汎関数の  $y$  についての凸性を仮定することによって  $\Gamma$ -収束性が保証され、Two-scale 極限が意味を持つことになる<sup>14),15),16)</sup>.

### (5) マルチスケール境界値問題

小節 (3) で得られた変分方程式 (27)~(32) について  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとると、Two-scale 収束論によって次の変分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} (\nabla_x \boldsymbol{\eta}^0 + \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^0 dy \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} \rho \boldsymbol{b}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 dy \right] dx + \int_{\Gamma_n} \boldsymbol{T}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 ds \\ & \quad \forall \boldsymbol{\eta}^0 \in \mathcal{V}, \boldsymbol{\eta}^1 \in \mathcal{V}^0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^0 : \left( \frac{\partial \mathcal{W}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^0} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^0 \right) \right. \\ & \left. + \boldsymbol{a}_{n+1} : \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_n^0 - \Delta \boldsymbol{\gamma}^0 \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} \right) dy \right] dx = 0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma}^0 \in \mathcal{S}^0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} \boldsymbol{\tau}^0 : \left( \text{sym}(\nabla_x \boldsymbol{u}_{n+1}^0) + \text{sym}(\nabla_y \boldsymbol{u}_{n+1}^1) \right. \right. \\ & \left. \left. - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^0 \right) dy \right] dx = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}^0 \in \mathcal{S}^0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^0 : \boldsymbol{a}_{n+1} : \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_n^0 - \Delta \boldsymbol{\gamma}^0 \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} \right) dy \right] dx = 0 \\ & \quad \forall \boldsymbol{\gamma}^0 \in \mathcal{S}^0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} \boldsymbol{p}^0 \left[ \boldsymbol{H}^{-1}(q_{n+1}^0 - q_n^0) + \Delta \boldsymbol{\gamma}^0 \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q^0} \right] dy \right] dx = 0 \\ & \quad \forall \boldsymbol{p}^0 \in \mathcal{V}_q^0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} \lambda^0 f_{n+1} dy \right] dx = 0 \quad \forall \lambda^0 \in \mathcal{X}_p^0 \quad (40)$$

ただし、

$$\boldsymbol{W}_{n+1} := \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_n^0) \quad (41)$$

$$f_{n+1} := f\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^0} \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_n^0), q_{n+1}^0\right) \quad (42)$$

$$\boldsymbol{a}_{n+1} := \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}_{n+1}}{\partial (\boldsymbol{\varepsilon}^0)^2} \quad (43)$$

とした。ここで、各変数に付した右上付きの 0 あるいは 1 は、前小節の定義および定理におけるそれに対応している。また、式 (35) における許容関数の集合は明らかに  $\mathcal{V}^0 := \mathcal{V} \times \boldsymbol{W}_{\text{per}} = H^1(\Omega; H^1_{\text{per}}(Y))$  であり、

$$\boldsymbol{W}_{\text{per}} := \{ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \boldsymbol{w}_i \in H^1(Y); Y\text{-periodic} \} \quad (44)$$

$$\mathcal{V} := \{ \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \boldsymbol{\eta}_i \in H^1(\Omega), \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma_u \} \quad (45)$$

などと定義されている。また、 $\mathcal{S}^0$ ,  $\mathcal{V}_q^0$ ,  $\mathcal{X}_p^0$  は、式 (16), (17), (20) の各変数をそれぞれ  $\boldsymbol{\tau}_i^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ,  $q^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ,  $\boldsymbol{\gamma}^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$  として、 $L^2(\Omega \times Y)$  に属するとしたものである。式 (35)~(43) で与えられる変分問題は、Two-scale 均質化問題として知られており、解の存在が証明されている<sup>13)</sup>。

さらに、式 (35) は、 $\boldsymbol{\eta}^1$  を  $\mathcal{V}$  から選ぶことで、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla_x \boldsymbol{\eta}^1 : \left[ \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^0 dy \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} \rho \boldsymbol{b}_{n+1} dy \right] \cdot \boldsymbol{\eta}^0 dx + \int_{\Gamma_n} \boldsymbol{T}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 ds \quad \forall \boldsymbol{\eta}^0 \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (46)$$

がマクロスケールの方程式として得られる。これを元式 (35) に代入することでミクロスケールの方程式は、

$$\int_{\gamma} \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1 : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}^1 \in \boldsymbol{W}_{\text{per}} \quad (47)$$

で与えられ、ミクロ応力  $\boldsymbol{\sigma}^0$  が自己つり合い状態にあることが分かる。

また、変分方程式 (36)~(40) は、 $\Omega$  内のほとんどいたるところで  $\boldsymbol{x}$  に関する被積分項がゼロになることを示しており、

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^0 : \left( \frac{\partial \mathcal{W}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^0} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^0 \right) dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma}^0 \in \mathcal{S}^0 \text{ a.e. in } \Omega \quad (48)$$

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{\tau}^0 : \left( \text{sym}(\nabla_x \boldsymbol{u}_{n+1}^0) + \text{sym}(\nabla_y \boldsymbol{u}_{n+1}^1) - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^0 \right) dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}^0 \in \mathcal{S}^0 \text{ a.e. in } \Omega \quad (49)$$

などが成り立つ。さらに、 $Y$  のほとんどいたるところでも等式が成立することから、

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^0 = \frac{\partial \mathcal{W}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^0} \text{ a.e. in } \Omega \times Y \quad (50)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^0 = \text{sym}(\nabla_x \boldsymbol{u}_{n+1}^0(\boldsymbol{x}) + \nabla_y \boldsymbol{u}_{n+1}^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \text{ a.e. in } \Omega \times Y \quad (51)$$

が局所的な応力-ひずみ関係および変位-ひずみ関係式となり、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}_n^0 + \Delta \boldsymbol{\gamma}^0 \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} \text{ a.e. in } \Omega \times Y \quad (52)$$

$$q_{n+1}^0 = q_n^0 - \Delta \boldsymbol{\gamma}^0 \boldsymbol{H} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q^0} \text{ a.e. in } \Omega \times Y \quad (53)$$

$$\Delta \boldsymbol{\gamma}^0 \geq 0, f_{n+1} \geq 0, \Delta \boldsymbol{\gamma}^0 f_{n+1} = 0 \text{ a.e. in } \Omega \times Y \quad (54)$$

はそれぞれ時間に関して離散形で表した流れ則、硬化則、載荷/除荷条件となる。これらは、領域  $Y$  における状態変数の評価/更新を行うためのもので、ミクロスケールの支配方程式と見なすことができ、マクロス

ケールの方程式も同時に満たされる。したがって、式 (47) および (50)~(54) はミクロ問題を構成する。

一方、マクロスケールの変分方程式は、式 (46), (36), (37) において、 $\rho^H = (1/|\gamma|) \int_Y \rho dy$  および、

$$\Sigma_{n+1}(x) = \frac{1}{|\gamma|} \int_Y \sigma_{n+1}^0(x, y) dy \quad (55)$$

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{|\gamma|} \int_Y \epsilon_{n+1}^0(x, y) dy \quad (56)$$

とおき式 (51) を考慮することで、3つのマクロな独立変数である変位、応力、ひずみの組  $(u^0(x), \Sigma(x), E(x)) \in (U, S, S)$  についての次式で与えられる。

$$\int_{\Omega} \nabla_x \eta^j : \Sigma_{n+1}(x) dx = \int_{\Omega} \rho^H b_{n+1} \cdot \eta^j dx + \int_{\Gamma_n} T_{n+1} \cdot \eta^j ds \quad \forall \eta^j \in \mathcal{V} \quad (57)$$

$$\int_{\Omega} \Gamma : \left[ \frac{1}{|\gamma|} \int_Y \frac{\partial W_{n+1}}{\partial \epsilon^0} dy \right] - \Sigma_{n+1}(x) dx = 0 \quad \forall \Gamma \in S \quad (58)$$

$$\int_{\Omega} T : \left[ \frac{1}{|\gamma|} \int_Y \text{sym}(\nabla_x u_{n+1}^0(x)) dy \right] - E_{n+1}(x) dx = 0 \quad \forall T \in S \quad (59)$$

ここで、 $U$  は式 (15) で与えられる集合と同型の

$$U := \{v^0(x) \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid v_i^0 \in H^1(\Omega), v^0 = g \text{ on } \Gamma_u\} \quad (60)$$

で与えられ、応力とひずみテンソルの許容関数は、

$$S = \left\{ T(x) \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}(n_{\text{dim}}+1)/2} \mid T_{ij} \in L^2(\Omega), \right. \\ \left. T = 1/|\gamma| \int_Y \tau^0(x, y) dy; \tau^0 \in S^0 \right\} \quad (61)$$

に属するものとした。また、式 (51) から、ユニットセル内の変位は、

$$w_{n+1} = E_{n+1} \cdot y + u_{n+1}^1 \quad (62)$$

で与えられることが示される<sup>1)</sup>。ここで、 $u_{n+1}^1$  は  $Y$ -periodic な関数であることからその勾配の  $Y$  での体積平均はゼロであり、この式が式 (59) を満たしていることが分かる。

以上の定式化をまとめると、弾塑性問題についてのマルチスケール解析は以下ようになる。

**弾塑性問題マルチスケール問題：** 式 (47) および (50)~(54) を満足するような、状態変数

$$\chi_{n+1}^0 := \{u_{n+1}^1, \epsilon_{n+1}^0, \sigma_{n+1}^0, \epsilon_{n+1}^{0p}, q_{n+1}^0, \Delta \gamma^0\} \quad (63)$$

を求め、それらの体積平均量を含む変数の組

$$\chi_{n+1} := \{u_{n+1}^0, \Sigma_{n+1}, E_{n+1}\} \quad (64)$$

が式 (57)~(59) を満たすように定めよ。

次節では、この非均質弾塑性体に対するマルチスケール問題の数値解法について説明する。

注 4：このような定式化によれば弾塑性挙動に関わるすべてのミクロスケールの未知変数は、陽なかたちでマクロスケールの変分形式に現れず、力学的には”隠された”変数として機能することがわかる。実際の解を得るには、すべての  $x$  におけるすべてミクロ変数を評価しなければならないが、数値解析に際しては有限個の値を用いて近似することになる。

注 5：線形問題に対する均質化法では、漸近展開法に基づく定式化が一般的である。ここでの定式化は、非線形つり合い問題を増分形で記述することで線形問題のそれを直接応用する手段とは根本的に異なる。既往の速度形の定式化<sup>4)~7)</sup>では時間差分において陽的なアプローチを取ることになり、計算結果が離散化誤差を多く含む可能性がある。

### 3. マルチスケール値解析アルゴリズム

前節で示したように、均質化法に基づくマルチスケール解析は、全体系の応答とその各点の挙動に依存した微視構造系の解を求めるといふ、マイクロマクロの力学挙動が連成した境界値問題を解くものである。すなわち、ミクロ問題 (47), (50)~(54) およびマクロ問題 (57)~(59) を同時に満足するような解を数値解析によって求めることになる。

本節では、これを有限要素法によって解析するための定式化とアルゴリズムの詳細を述べる。 $n_{\text{dim}}=2$  or  $3$  として、煩雑さを避けるために  $u$  を  $u^1$ ,  $U$  を  $u^0$ ,  $\sigma$  を  $\sigma^0$  に対応させて表記する。また、以降の表記において  $\delta$ ,  $\Delta$  を付することで、それぞれ Newton-Raphson 反復による修正量、その荷重ステップにおける増分量を表わすことにし、上付添字 (\*) は Newton-Raphson 法の修正回数、下付添字  $n$  等は時刻  $t_n$  で評価されることを示す。

#### (1) ミクロスケールの解析アルゴリズム

つり合い状態にある荷重ステップ  $n$  から、荷重ステップ  $n+1$  になった状態を考える。このとき、ミクロスケールの問題を与える式 (47) について、荷重に相当する量はマクロひずみ  $E_{n+1}$  であり、弾塑性構成関係を示す式 (50)~(54) を用いて自己つり合い状態を満たす  $Y$ -periodic なミクロ変位  $u_{n+1}$  を求めればよい。いま、荷重ステップ  $n+1$  の第 ( $j$ ) 反復ステップにおいて、

$$g(w_{n+1}^{(j)}, \eta^j) := \int_Y \nabla_y \eta^j : \sigma_{n+1}^{(j)} dy \neq 0 \quad (65)$$

とすると、一般的な線形化の手続き<sup>17)</sup>によって、

- (i) set  $j \leftarrow 0$  ;  
 $\mathbf{w}_{n+1}^{(0)} \leftarrow \mathbf{E}_{n+1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}_n$ ,  $\mathbf{u}_{n+1}^{(0)} \leftarrow \mathbf{u}_n$  and  $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(j)} = \mathbf{0}$
- (ii) For a given  $\mathbf{w}_{n+1}^{(j)}$  compute  $\delta \mathbf{u}_{n+1}^{(j+1)}$  by solving  
 $Dg(\mathbf{w}_{n+1}^{(j)}, \boldsymbol{\eta}^j) \cdot \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(j+1)} = -g(\mathbf{w}_{n+1}^{(j)}, \boldsymbol{\eta}^j)$
- (iii)  $\mathbf{u}_{n+1}^{(j+1)} \leftarrow \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(j+1)}$  where  $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(j+1)} = \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(j)} + \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(j+1)}$
- (iv)  $\mathbf{w}_{n+1}^{(j+1)} = \mathbf{E}_{n+1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}_{n+1}^{(j+1)}$   
 $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{(j+1)} = \text{sym}(\nabla_y \mathbf{w}_{n+1}^{(j+1)})$
- (v) integrate the stress to obtain  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(j+1)}$   
 by the radial return algorithm
- (vi) if  $|g(\mathbf{w}_{n+1}^{(j+1)}, \boldsymbol{\eta}^j)| / |g(\mathbf{w}_{n+1}^{(0)}, \boldsymbol{\eta}^j)| < \text{TOL}$ , then  
 compute  $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma}_{n+1} dy$ ,  
 set  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{(j+1)}$ ,  $F = j+1$  and EXIT,  
 else  
 set  $j \leftarrow j+1$  and GOTO (ii)

図-2 ミクロつり合い問題における Newton-Raphson 反復解法

$$Dg(\mathbf{w}_{n+1}^{(j)}, \boldsymbol{\eta}^j) \cdot \delta(\mathbf{E}_{n+1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}_{n+1})^{(j+1)} = -g(\mathbf{w}_{n+1}^{(j)}, \boldsymbol{\eta}^j) \quad (66)$$

が Newton-Raphson 反復解法のための線形化方程式である。ここで、左辺は  $g(\mathbf{w}_{n+1}^{(j)}, \boldsymbol{\eta}^j)$  の方向微分を表し、

$$\begin{aligned} Dg(\mathbf{w}_{n+1}^{(j)}, \boldsymbol{\eta}^j) \cdot \delta(\mathbf{E}_{n+1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}_{n+1})^{(j+1)} \\ := \int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^j : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(j)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{(j)}} : \delta(\mathbf{E}_{n+1} + \nabla_y \mathbf{u}_{n+1})^{(j+1)} dy \quad (67) \\ \approx \int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^j : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(j)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{(j)}} : \nabla_y \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(j+1)} dy \end{aligned}$$

と評価される。すなわち、未知の修正量  $\delta \mathbf{u}_{n+1}^{(j+1)}$  について解くべき方程式は、

$$\begin{aligned} \int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^j : \mathbf{a}_{n+1}^{(j)}(y) : \nabla_y (\delta \mathbf{u}_{n+1}^{(j+1)}) dy \\ = - \int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^j : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(j)} dy \quad \forall \boldsymbol{\eta}^j \in \mathcal{W}_{\text{per}} \quad (68) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $\mathbf{a}_{n+1}^{(j)}(y)$  は弾塑性接線剛性、

$$\mathbf{a}_{n+1}^{(j)}(y) := \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(j)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{(j)}} \quad (69)$$

であり、式(50)~(54)を用いた  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(j)}$  の積分アルゴリズムに整合する接線剛性、すなわち consistent 接線剛性を用いると二次の収束速度を得ることが良く知られている。本研究では、radial return 法によって応力積分を行うことを前提にした consistent 接線剛性を用いるが、その詳細な定式化およびアルゴリズムは計算塑性力学の教科書等<sup>10)</sup>を参照されたい。

これらの定式に従ってミクロスケールでのつり合い

状態を求めるための計算アルゴリズムを図-2に示す。このアルゴリズムは、マクロの有限要素モデルの各 Gauss 点でのマクロ状態変数の値を用いた周期変形場のつり合い問題に適用される。マクロひずみ  $\mathbf{E}_{n+1}$  を外力とみなすこと以外は、通常の弾塑性問題と同様に扱えばよい。つまり、ユニットセル領域における周期変形場からミクロひずみを求め、よく知られた radial return 応力積分アルゴリズムによってユニットセル内部での現在の応力を更新することになる。

## (2) マクロスケールの解析アルゴリズム

マクロスケールの構造体が、ある荷重ステップ  $n$  におけるつり合い状態から、荷重ステップ  $n+1$  になった状態を考える。このとき、第(i)ステップのつり合い力を、

$$G(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}^0, \zeta_{n+1}) := \int_{\Omega} \nabla_x \boldsymbol{\eta}^0 : \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}) dx - \zeta_{n+1} f_{\text{ext}} \quad (70)$$

と定義する。ここで、荷重パラメータを  $\zeta_{n+1}$  として、

$$f_{\text{ext}}(\boldsymbol{\eta}^0) := \int_{\Omega} \rho^H \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 dx + \int_{\Gamma_o} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 ds \quad (71)$$

を外荷重とした。式(57)~(59)で表される平衡状態は、Newton-Raphson 反復計算において、変位増分  $\Delta \mathbf{U}_{n+1}$  の修正量を求めることで評価される。 $G(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}^0, \zeta_{n+1})$  の方向微分を

$$DG(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}^0) \cdot \delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)} := \int_{\Omega} \nabla_x \boldsymbol{\eta}^0 : \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} : \nabla_x (\delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)}) dx \quad (72)$$

のように表すと、この修正量  $\delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)}$  を求めるための線形化方程式は、

$$DG(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}^0) \cdot \delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)} = -G(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}^0, \zeta_{n+1}) \quad (73)$$

で表される。

マクロスケールのつり合い状態を得るための Newton-Raphson 反復計算では、接線剛性

$$\mathbf{A}_{n+1}^{(i)} := \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} \quad (74)$$

がマルチスケール解析アルゴリズムと整合していることがよい収束性を得るためには必須である。ただし、式(72)の右辺に現れるマクロ応力  $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$  は、式(55)で与えられる量であるため、以下ではミクロスケールの変分方程式からこの consistent マクロ接線剛性を導く。

ミクロの問題(66)が荷重ステップ  $n+1$  で平衡状態になったとき、すなわち反復ステップ  $F = j+1$  を想定する。このとき、ミクロ変位およびミクロひずみはそれぞれ、

$$\mathbf{w}_{n+1}^{(F)} = \mathbf{E}_{n+1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}_{n+1}^{(F)} \quad (75)$$

- (i) set  $i \leftarrow 0$ ;  $\mathbf{U}_{n+1}^{(0)} \leftarrow \mathbf{U}_n$  and  $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0}$
- (ii) in a unit cell at each Gauss point, perform
- ⟨Tangential microscopic problem⟩  
 For an equilibrated state of microscopic stress, solve for incremental characteristic response  $\chi_{kh}$ , and compute the homogenized tangential moduli  $\mathbf{A}_{n+1}^{(i)}$ .
- (iii) Using  $\mathbf{A}_{n+1}^{(i)}$  compute iterative increment  $\delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)}$  by solving
- $$DG(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}^i, \zeta_{n+1}) \cdot \delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)} = -G(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{\eta}^i, \zeta_{n+1})$$
- (iv) Update the macroscopic deformation
- $$\mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{U}_n + \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)}$$
- where  $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)} = \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i)} + \delta \mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)}$
- $$\mathbf{E}_{n+1} = \text{sym}(\nabla \mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)})$$
- (v) Compute  $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$  in a unit cell at each Gauss point, by carrying out the algorithm in Fig.1 for
- ⟨Microscopic problem⟩  
 for a given  $\mathbf{E}_{n+1}$ , obtain the self-equilibrated  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  together with  $\mathbf{u}_{n+1}$  and  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$
- (vi) if  $|G(\mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)}, \boldsymbol{\eta}^i, \zeta_{n+1})|/|G(\mathbf{U}_n, \boldsymbol{\eta}^i, \zeta_{n+1})| < \text{TOL}$ , then
- set  $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_{n+1}^{(i+1)}$ ,  $n \leftarrow n+1$ , and GOTO (i), else
- set  $i \leftarrow i+1$  and GOTO (ii)

図-3 マクロつり合い問題における Newton-Raphson 反復解法

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(F)} = \text{sym}(\nabla_y \mathbf{w}_{n+1}^{(F)}) \quad (76)$$

のように求められ, radial return アルゴリズムによってマイクロ応力  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(F)}$  が評価される. また, 自己つり合い状態を表す,

$$g(\mathbf{w}_{n+1}^{(F)}, \boldsymbol{\eta}^i) = \int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^i : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(F)} dy \approx 0 \quad (77)$$

が成り立つので, この方向微分は

$$Dg(\mathbf{w}_{n+1}^{(F)}, \boldsymbol{\eta}^i) \cdot \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(F)} = 0 \quad (78)$$

を満たす. これは, ミクロ問題における consistent 接線剛性  $\mathbf{a}_{n+1}^{(F)}$  を用いた線形化方程式

$$\int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^i : \mathbf{a}_{n+1}^{(F)} : [\delta \mathbf{E}_{n+1} + \nabla_y (\delta \mathbf{u}_{n+1}^{(F)})] dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}^i \in \mathcal{W}_{\text{per}} \quad (79)$$

である. いま, マクロひずみの修正量の  $kh$  成分を  $\delta E^{kh}$  として,  $\delta \mathbf{u}_{n+1}^{(F)} = -\chi_{kh}^{(F)} \delta E_{n+1}^{kh}$  となるようなミクロ変位の修正量  $\delta \mathbf{u}_{n+1}^{(F)}$  についての特性関数  $\chi_{kh}^{(F)}$  ( $k, h=1-2$  or  $3$ ) を定義すると, これを求める方程式が,

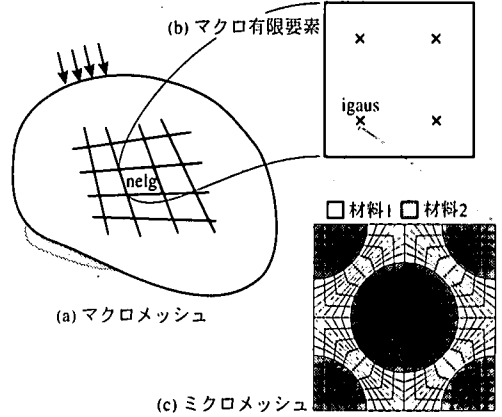


図-4 マルチスケール解析におけるマイクロ-マクロ有限要素モデル

$$\int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^i : \mathbf{a}_{n+1}^{(F)} : (\mathbf{I}^{kh} - \nabla_y \chi_{kh}^{(F)}(y)) dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}^i \in \mathcal{W}_{\text{per}} \quad (80)$$

で与えられることが分かる. ただし,

$$I_{ij}^{kh} := (1/2)(\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) \quad (81)$$

と定義した. ここでの特性関数は線形化方程式(79)のための増分的なものであり, 非線形なつり合い方程式の特性ではないことに注意されたい.

式(80)を解いて得られる特性関数増分  $\chi_{kh}^{(F)}$  および弾塑性 consistent 接線剛性  $\mathbf{a}_{n+1}^{(F)}$  を用いて, つり合い状態にある応力の増分が次式によって定義される.

$$\delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(F)} = \mathbf{a}_{n+1}^{(F)} : (\mathbf{I}^{kh} - \nabla \chi_{kh}^{(F)}) \delta E_{n+1}^{kh} \quad (82)$$

これから, 対応するマクロ応力の増分は,

$$\delta \boldsymbol{\Sigma}_n = \frac{1}{|Y|} \int_Y \delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(F)} dy = \left[ \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{a}_{n+1}^{(F)} : (\mathbf{I}^{kh} - \nabla \chi_{kh}^{(F)}) dy \right] \delta E_{n+1}^{kh} \quad (83)$$

のように得られる. したがって, マクロスケールの接線剛性(74)が, ミクロスケールにおいてつり合い状態にある応力と整合した形で,

$$\mathbf{A}_{n+1}^{(F)} = \frac{\delta \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}}{\delta \mathbf{E}_{n+1}} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{a}_{n+1}^{(F)} : (\mathbf{J} - \Xi^{(F)}) dy \quad (84)$$

と近似される. ここで,  $\Xi_{ijkh}^{(F)} := \partial \chi_{kh}^{(F)} / \partial y_j$  および  $J_{ijkh} := I_{ij}^{kh}$  と定義した.

以上の結果を用いたマクロ問題の計算アルゴリズムを図-3に示す. ただし, 図中の  $\mathbf{A}_{n+1}^{(i+1)}$  が式(84)で得られるマクロスケールの consistent 接線剛性に対応しており, 各反復ステップ ( $i+1$ ) において式(80)を解いて特性関数”増分”を評価しなければならない.

注6: 式(67)の方向微分では  $\mathbf{E}_{n+1}$  は既知量であり  $Y$ -periodic な変位  $\mathbf{u}^1$  のみの方向を取るのに対して, 式



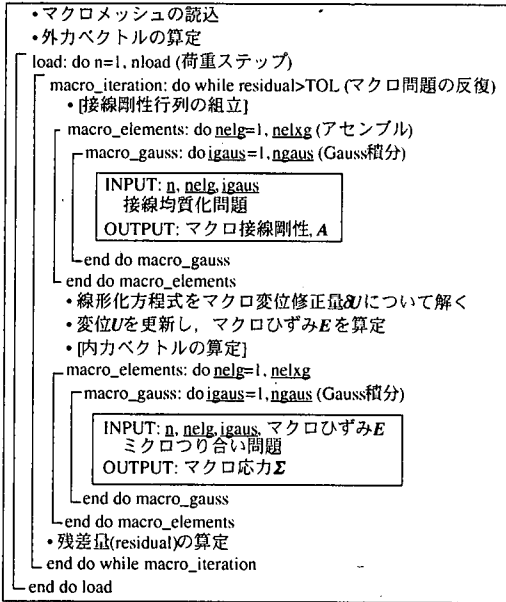


図-5 マルチスケール解析におけるマクロつり合い問題のプログラムフロー

(79)ではセルの全変位 $E, y + u'$ の方向を取っている。すなわち、式(77)～(84)では、自己つり合い状態にあるミクロ応力の、一様変形を含むセルの全変位についての変化量を求めようとしており、このことがマクロ接線剛性のミクロつり合い問題と整合したものの (consistent) にしている。

### (3) マルチスケール有限要素解析

前節で与えたミクロおよびマクロスケールの解析アルゴリズムの有限要素解析プログラムへの実装について解説しておく。特に、用いられる有限要素モデルとそれらの関連、ミクロマクロ解析システム間の入出力データの観点から、非線形マルチスケール解析システムとしての特徴を明示する。また、非線形問題を増分的に解く際に必須となる、ミクロ構造 (ユニットセル) の変形履歴の取り扱い方についても言及する。

それぞれのスケールの問題について、個々の解析領域が存在し、対応する有限要素モデルを用意する必要がある。以下、マクロスケールのつり合い問題に用いられるメッシュ (あるいは有限要素) をマクロメッシュ (要素)、ユニットセルの解析に用いられるものをセルメッシュ (要素) と呼ぶことにする。マクロ要素のプロパティである材料情報は、その要素内の Gauss 積分点に位置するユニットセル構造モデルの種類に対応する。つまり、通常の有限要素解析における材料番号は、セルメッシュのモデル番号に対応して参照されることになる。こうして、図-4に示すような各マクロ Gauss

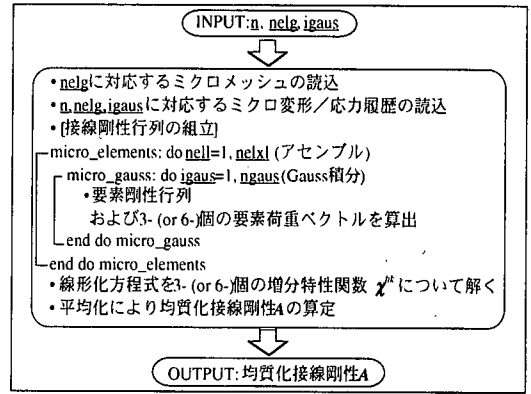


図-6 マルチスケール解析における接線剛性の均質化問題のプログラムフロー

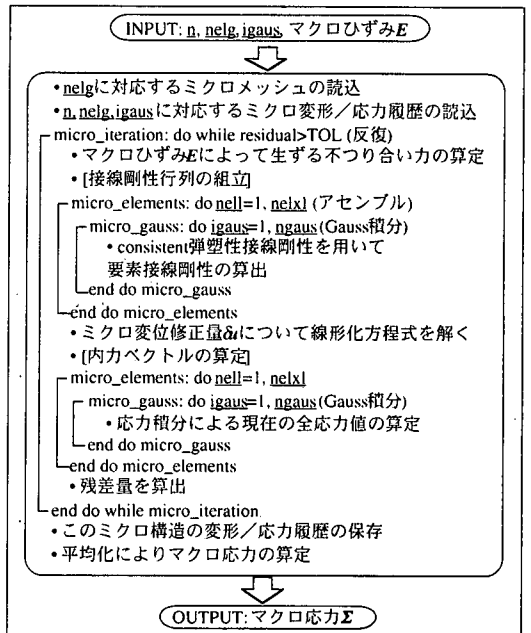


図-7 マルチスケール解析におけるミクロつり合い問題のプログラムフロー

点に一つのミクロ問題が対応し、各々の弾塑性力学応答がマクロ変形に反映され得る。

マクロスケールの解析プログラムフローを図-5に示す。このフローから分かるように、接線剛性および応力分布の求め方以外は通常非線形解析プログラムと何ら変わらない。それぞれミクロスケールの問題として定義され、図-6および図-7に示すフローに従って、各荷重ステップにおいて各マクロ Gauss 点でのマクロ変数の値に対応したミクロ応答を評価する。以下では、図-5, 6, 7のフローに従う解析をそれぞれ「マクロつり合い問題」、「接線剛性の均質化問題」、「ミクロつり

表-1 プログラムフロー内の変数

| 変数名   | 意味                |
|-------|-------------------|
| n     | $t_n$ に対応する荷重ステップ |
| nelxg | マクロメッシュの全要素数      |
| nelg  | マクロメッシュの要素番号      |
| nelxl | マイクロメッシュの全要素数     |
| nell  | マイクロメッシュの要素番号     |
| igaus | Gauss 点の番号        |

合い問題」と呼ぶことにする。また、これらのプログラムフロー内で下線を付した変数の役割については表-1にまとめた。

マクロスケールにおける接線剛性の均質化問題のための解析プログラムの流れを示す図-6について、入力データとしては、要素番号、Gauss 点番号および荷重ステップを与え、出力としてはユニットセルの解析から得られる均質化接線剛性  $A$  を得る。常にマイクロつり合い状態を満たす応力状態を用いて評価されるため、明らかに consistent マクロ接線剛性となる。一方、図-7に示されるミクロスケールのつり合い問題は、入力として要素番号、Gauss 点番号、荷重ステップおよびマクロひずみ  $E$  を与え、出力には周期境界条件のもとでユニットセルの自己つり合い状態を満たすマイクロ応力のセル内平均量としてのマクロ応力が得られる。ここで、このつり合い問題は通常の弾塑性構造解析と同様の手法が適用でき、consistent 弾塑性接線剛性を用いた反復計算となる。

最後に、ユニットセル内の変形履歴のメモリー管理について言及しておく。ここで示したプログラムフローから分かるように、マクロ解析における剛性マトリックスの組立て、およびマクロ構造の残差の評価の際に、すべてのマクロ要素内のすべての Gauss 点についてのループが存在する。したがって、マイクロ解析は各荷重ステップにおいて「マクロモデルの全自由度」 $\times$  nelxg  $\times$  ngaus 分の自由度のマイクロ変数の履歴を記憶していなければならない。しかし、これらをすべてをコアメモリ内に記憶することは、実際の計算では不可能であるため、フローに示すように各ステップ、各マイクロ解析ごとにコンピュータのディスクストレージに保存しておく必要がある。つまり、個々のマイクロ解析は、各荷重ステップにおいて履歴を読み込んで前ステップの変形/応力状態から再実行 (restart) することになる。

注 7: ミクロスケールの解析が、マクロスケールにおける構成関係を与えていることに注意されたい。すなわち、マクロ問題で非線形な構成式を陽に与える代わりに、ミクロスケールの解析を離散的な応力

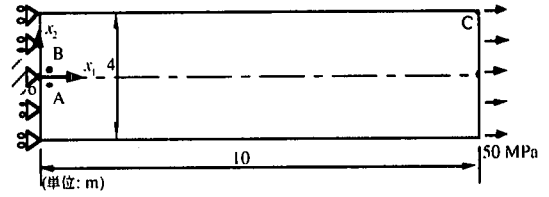


図-8 マルチスケール数値解析例に用いたマクロ構造

表-2 ユニットセル構成材料の材料定数<sup>\*)</sup>

|      | Young's modulus, $E$ (GPa) | Poisson's ratio, $\nu$ | Initial yield stress $\sigma_y$ (MPa) | Hardening parameter, $H$ (GPa) |
|------|----------------------------|------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| 材料 1 | 68.9                       | 0.30                   | 24.0                                  | 10.0                           |
| 材料 2 | 379.2                      | 0.21                   | —                                     | —                              |

—ひずみ関係として認識することになる。既報告の中にはこのような観点が見受けられるものもあるが、マルチスケールモデリングとしての論理展開には及んでいない<sup>18),19)</sup>。

注 8: ここで示した弾塑性マルチスケール解析法のアルゴリズムは、比較的容易に他の非線形マルチスケール解析<sup>20)</sup>に適用することができる。これは、一般化変分原理および Two-scale 収束論に基づく均質化法の定式化が可能にするもので、注 5 に指摘されている本論文独自の定式化の特徴が計算アルゴリズムに対して一般性を与えている。

注 9: コア外に記憶するマイクロ変数は、バイナリ形式で保存することで消費ディスクスペースを節約できる。しかしながら、ディスクへのアクセスは全体の計算効率を低下させるため、実用に耐えうる解析システムを考えるならば、図-5のマクロ解析のループ内で呼ばれるマイクロ解析ルーチンを並列化するなどの処理が必要となる。

#### 4. マルチスケール解析例

本節では、開発した弾塑性マルチスケール解析アルゴリズムによる簡単な解析例を示す。2次元平面ひずみを仮定し、1節で与えた材料挙動についての仮定を用いる。すなわち、弾塑性材料挙動は、等方性および関連流れ則に従う  $J_2$  塑性を仮定し、線形等方ひずみ硬化材料のみを扱う。また、解析を通して用いるユニットセルモデルは図-4(c)に示したような2種の構成材料からなる複合材を考え、材料2の塑性変形は許容しないことにする。与えた材料定数を表-2に示す。さらに、マイクロおよびマクロ解析の有限要素モデルには共に4節点アイソパラメトリック要素を用い、特に塑性変形のみ非圧縮性に対する対処は施さない。

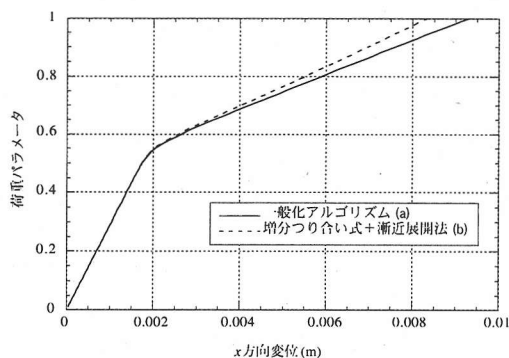


図-9 一様引張問題における変形の比較

本論文は、非均質弾塑性体の均質化法に関して新規の定式化とその解析計算アルゴリズムの開発を主題とするため、ここでの解析はそれらの解析プログラムへの実装が可能であることを示すにとどめる。非線形マルチスケール解析に付随した数値解についての各種検討は、続報<sup>2)</sup>などを参照されたい。以下ではまず、マクロ的には一様変形となるような問題を考え、開発した手法の精度および効率上の利点を示す。次に、単純なモデル計算によってミクロ（ユニットセル）構造のマクロ応答に対する影響を強調する。両解析に共通のマクロ構造としては、図-8示すような厚さは1mの長方形領域を考える。

ユニットセル内の材料2の体積比が55%であるような単一のミクロ構造からなる非均質弾塑性体が一様な引張りを受けるときのマクロ変形を求める。本論文で示したアルゴリズムを用いた解析 (a) とともに、文献7)で開発したアルゴリズムに基づく解析 (b) も行い、数値解の比較を行った。ただし、前節のアルゴリズム内の  $TOL=10^{-8}$  とし、総荷重ステップ数は100とした。

それぞれの解析計算について、図-8中の点Cでの  $x_1$  方向変位と荷重の関係を図-9に示す。注5で指摘したように、従来は速度（増分）形のつり合い式に対して直接漸近展開形の速度場を仮定して定式化しており、自己つり合い状態を表す式(47)を含まないアルゴリズムが得られている<sup>4)-7)</sup>。つまり、ミクロスケールでの自己つり合い状態が厳密には満たさない解析 (b) では、マクロ解析における応力積分が陽的に評価されており、結果としてマクロ構造物の正確なつり合い状態を評価していない。したがって、解析 (b) の曲線に至る既往のアルゴリズムは、ミクロ-マクロの状態変数のやり取りを特徴とする均質化法に基づくマルチスケール解析における精度上の欠陥を有している。換言すれば、ここでの解析例は、増分形の定式化と漸近展開法を組み合わせた定式化の不完全性を示している。

また、マクロ構造解析に対する均質化接線剛性とし

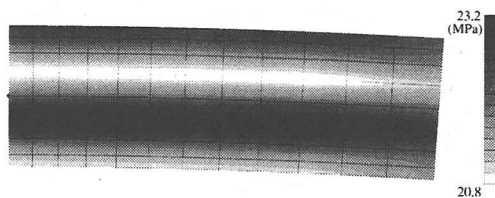
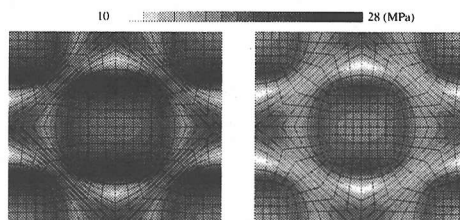
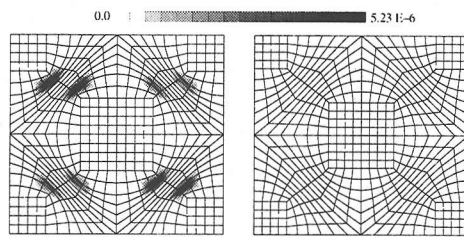


図-10 マクロ構造の変形と Mises 応力分布



点 A (a) Mises 応力分布 点 B



点 A (b) 相当塑性ひずみ分布 点 B

図-11 ユニットセル内の Mises 応力および相当塑性ひずみ分布

てミクロつり合い問題のアルゴリズムと整合したものをを用いているため、解析 (a) での各荷重ステップにおいて2, 3回の Newton-Raphson 反復でマクロつり合い問題の収束解を得ている。これは、ミクロ-マクロの整合性が保たれない解析 (b) でのアルゴリズムの5~10分の1の反復数であり、実用的な観点からも大幅な計算効率の向上であるといえる。本研究で開発したアルゴリズムの計算効率に関するより詳細な検討は別途報告していくことにする。

次に、図-8の構造物の  $x_2 > 0$  および  $x_2 < 0$  の領域には、材料2の体積比がそれぞれ45%, 55%のユニットセルが在るものを考え、開発したアルゴリズムを適用して上と同様の解析を行った。初めて塑性変形が現れた44ステップ目のマクロ構造全体の変形の様子と Mises の相当応力分布を図-10に示す。また、同荷重ステップにおいて、図-8の点A ( $x, y$ )=(0.11740, -0.19245), B (0.11740, 0.19245)に在るユニットセル内に生じる Mises 応力および相当塑性ひずみの分布を図-11に示す。マクロの各点で異なるミクロスケールの力学応答が得られ、それらをよく反映したマクロ応答が得られている。

この数値解析の結果は、注 2 での理論的裏付けおよび均質化理論に基づく非線形マルチスケール解析で得られる数値解の妥当性を検証した報告<sup>21)</sup>等によって正当化されよう。すなわち、マクロ構造のサンプリング (Gauss) 点でのユニットセルの変形が必ずしも周期的でなくても、得られるマクロ応答はある程度信頼できる数値解が得られている。

ここでの計算は、Pentium II 450 MHz の CPU を 2 基搭載し、SCSI HDD を作業ディスクに有するパーソナルコンピュータ上で行った。ただし、OS は LINUX (kernel ver. 2.0.34) を用い、コンパイラは g77 (GNU FORTRAN) である。このような計算機環境のもとで、本節の後者の計算に要した実行時間は約 66 時間であったが、更なる改良によって実際の計算も可能であることを強調しておく。注 9 で与えた並列処理に加えて、マクロ変形特性を数値的に求めておく手法の開発も実用化に向けた今後の検討事項であろう。

## 5. 結語

本論文では、非均質弾塑性体のマルチスケール構造解析について、数学的均質化法による全く新しい定式化を示し、その数値解析アルゴリズムを開発した。均質化理論で記述されるマルチスケール問題の数理構造を明らかにするとともに、速度型のつり合い式において漸近展開形の速度を仮定する従来の定式化の欠陥を指摘した。簡単な数値計算によってそのことを例示し、実用化に対するいくつかの指針を与えた。

均質化理論の本質は、応用数学における一般化収束論であり、漸近展開法という定式化の方法論ではない。このことを認識させる典型が弾塑性問題であり、本研究で示したアルゴリズムの開発に際して計算塑性力学の発展が大きく寄与している。非線形計算力学における各種の解析技術は、より複雑な非線形挙動を含むマルチスケール問題の解法に利用できるものと期待する。

謝辞：数値計算に際しては東北大学工学研究科大学院の松井和己氏にご協力いただきました。ここに記して謝意を表します。

## 参考文献

- 1) Benssousan, A., Lions, J.-L. and Papanicoulau, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- 2) Lions, J.-L.: *Asymptotic Calculus of Variations, Singular perturbations and asymptotics*, Academic Press, New York, pp.277-296, 1980.
- 3) Allaire, G.: *Mathematical approaches and methods, Homogenization and Porous Media*, ed. U. Hornung, Springer-Verlag, New York, 1996, pp. 225-250.
- 4) Jansson, S.: Homogenized nonlinear constitutive properties and local stress concentrations for composites with periodic internal structure, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.29, pp.2181-2200, 1992.
- 5) Terada, K. and Kikuchi, N.: Nonlinear homogenization method for practical applications, *Computational Methods in Micromechanics*, S. Ghosh and M. Ostoja-Starzewski eds., AMSE, AMD Vol.212, pp.1-16, 1995.
- 6) 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊池昇: 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析 (第 1 報, 定式化), 日本機械学会論文集, A 編, Vol.61, No.509, 1995, pp. 2199-2205.
- 7) 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊池昇: 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析 (第 2 報, 数値解析), 日本機械学会論文集, A 編, Vol.62, No.601, 1996, pp. 2072-2079.
- 8) Fish, J., Shck, K., Pandheeradi, M. and Shephard, M.: Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice, *Comput. Meths. Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.148, pp.53-73, 1997.
- 9) Guedes, J.M. and Kikuchi, N.: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.83, pp.143-198, 1990.
- 10) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R.: *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- 11) Babuska, I.: Homogenization and its application. Mathematical and computational problems, *Numerical solution of partial differential equations III*, Academic Press, New York, pp.89-115, 1976.
- 12) Tartar, L.: Incompressible fluid flow in a porous medium - convergence of the homogenization process, appendix of *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, by Sanchez-Palencia, E., Springer, Berlin, 1980.
- 13) Allaire, G.: Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol.23, pp.1482-1518, 1992.
- 14) Müller, S.: Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol.99, pp.189-212, 1987.
- 15) Tartar, L.: Nonlinear constitutive relations and homogenization, *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*, North-Holland, Amsterdam, pp.472-484, 1978.
- 16) Murat F. and Tartar, L.: H-convergence, *Topics in the Mathematical Modeling of Composite Materials*, Kohn, R.V. ed., Birkhauser, Boston, 1995.
- 17) Hughes, T.J.R. and Pister, K.S.: Consistent linearisation in mechanics of solids and structures, *Comput. Struct.*, Vol.8, pp.391-397, 1978.
- 18) Suquet, P.-M.: Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity, *Plasticity Today*, Sawczuk, A. et al. eds., Elsevier, New York, pp.279-309, 1985.
- 19) Swan, C.C. and Cakmak, A.S.: A hardening orthotropic plasticity model for non-frictional composites: rate formulation and integration algorithm, *Int. J. Numer. Meths. Engrg.*, Vol.37, pp.839-860, 1994.
- 20) 寺田賢二郎, 京谷孝史: 無数のひ裂を有する物体のマルチスケール応力変形解析法, 土木学会論文集, No.619/1-47, pp.23-33, 1999.
- 21) 寺田賢二郎, 松井和己: 弾塑性体に対するマルチスケール構造解析の数値解, 日本計算工学会論文集, Vol.1, pp.75-82, 1999.

(1999.4.13受付)

# A GENERALIZED ALGORITHM FOR MULTISCALE ANALYSIS OF HETEROGENEOUS ELASTIC-PLASTIC BODIES

Kenjiro TERADA and Noboru KIKUCHI

A new class of computational algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous elastic-plastic bodies is developed in this paper. Based on the two-scale convergence theories in the mathematical homogenization, the variational formulation with micro-macro representation of the field variables is newly proposed in the context of computational plasticity. The formulation does not involve the method of two-scale asymptotic expansions and therefore naturally leads to a computational strategy for fully global-local structural analyses. The consistent linearization of the discrete nonlinear equations enables us to evaluate the elastic-plastic behaviors accurately and effectively. We also present several numerical examples in order to show the possibilities of actual computations.