

補間問題における対数正規 Kriging 法と CPDF 法の等価性

野田 茂¹・星谷 勝²

¹正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部社会開発システム工学科 (〒680-0945 鳥取市湖山町南4-101)

²正会員 Ph. D. 武蔵工業大学教授 工学部土木工学科 (〒158-0087 東京都世田谷区玉堤1-28-1)

複数地点で観測値が与えられた条件付対数正規確率場において、不偏推定・最小誤差共分散規範に基づく Kriging 法と条件付確率密度関数法には固有な差があるのだろうか。この疑問に答えるため、前者から導いた最適推定値、推定誤差共分散、後者からの条件付平均値、条件付共分散の検討結果ならびに数値分析の結果、1) 最適推定値と条件付平均値は完全に一致すること、2) 推定誤差共分散は条件付共分散と異なること、3) 推定誤差共分散は観測位置のみに依存し、観測値に無関係であるが、条件付共分散は観測値に依存すること、4) 推定誤差共分散は条件付シミュレーションに関与しないことが見出された。2つの方法は正規確率場において完全に等価であるが、ここで指摘した知見は条件付正規確率場とは異なる性質である。

Key Words: lognormal kriging, conditional probability density function method, stochastic field, interpolation and extrapolation, conditional simulation

1. はじめに

本論文では、対数正規確率場の物理量が空間上で不規則に生起あるいは分布する離散確率場において、複数地点で得られた観測値を用いて未観測点の物理量を推定する問題に対し、不偏推定・最小誤差共分散規範に基づく Kriging 法ならびに条件付確率密度関数 (CPDF) 法から導かれる推定量の関係を、理論分析、条件付シミュレーションによって明らかにしている。

空間補間としての内外挿問題とは、既知の空間位置で複数の観測値が与えられたとき、このデータに基づいて任意地点における変数の状態量を求めることである。一方、時系列解析では、スムージング(平滑)、フィルタリング(濾波)、プレディクション(予測)という用語が使われる。現時点を含め過去の時系列データが利用できるとき、スムージングとは過去の任意時点における状態量の最適推定値を、フィルタリングとは現時点での推定値を、プレディクションとは将来時点における推定値を求めることを意味する。

空間補間の状態推定問題は、この時系列解析の状態推定における概念と同様なアナロジーを有する。空間補間によると、スムージングは内挿、フィルタリングは観測点での状態推定、プレディクションは外挿に相当すると考えられる。ノイズを伴わないとき、フィルタリング値は観測値と完全に一致する。文献1)では、一定の未知パラメータに対する推論を推定 (Estimation)、確率変量の推論を予測 (Prediction) として区別し、より一般化して空間補間を Spatial Prediction と呼んでいる。

ここではこのような区別を厳密に行わずに空間補間問題を捉える。また、推定量とは確率変数を意味し、推定値とはその実現値で、推定値を与える式が推定量であるが、以後はおおむねこれらを区別して使用することにする。

以下、2. では空間補間法である Kriging 法の考え方、歴史、発展過程について、3. では観測に伴う確率場の更新、Kriging 研究の問題点、正規確率場における Kriging 法と CPDF 法の関係について、4. では対数正規確率場における Kriging 法について、5. では同確率場における CPDF 法を用いた理論推定式の誘導、Kriging 法と CPDF 法の関係について、6. では対数正規確率場の条件付シミュレーションに関する効率化法について、7. では数値解析例ならびに分析結果について述べた上で、8. でまとめとする。

なお、対数正規 Kriging 法については既に文献2)で基本式を提示しているが、そこでは推定誤差共分散、CPDF 法による条件付推定量 (条件付平均値、条件付共分散) に関する式の誘導過程を示していない。このようなことから、本研究ではそれらの理論式の誘導、条件付対数正規確率場における Kriging 法と CPDF 法の定性的な関係、正規確率場の推定問題との違いを詳細に述べるとともに、効率的な条件付シミュレーション法を提案し、理論展開ならびに数値シミュレーションによって得られた分析結果、知見を示す。

2. Kriging法の起源と発展

ノイズに乱された観測値から真値を推定するための代表的な方法は最小2乗法である。これは、19世紀の初めにGauss³⁾がヨーロッパ各地で観測されたデータを基にして、惑星の軌道パラメータを推定するのにこの方法を用いて以来、多くの分野で広く利用されている。1940年代にはKolmogorovやWienerによって最適線形推定理論が導かれた(例えば文献4)参照)。この理論は、推定値を観測値の線形和で表し、推定誤差分散を最小にするという考え方に基づいている。その特徴は、1) 推定値が平均値に依存しないこと、2) 推定値が不偏推定値でないこと、3) 均一性あるいは定常性の仮定を設けていないことにある。最小2乗法は、推定アルゴリズムが簡単なこと、ノイズの確率分布が未知であっても適用できることなど、多くの利点を有する。その反面、推定値の偏りが無視できない場合には何らかの補正を必要とする。そのため1)と2)の項目に関する条件設定を再考することが望まれていた。

Krigingとは一般には1次・2次統計量(平均値、共分散)に依存して空間的に変動する確率場に対し、最小2乗法を用いた内外挿技術と考えられる。Krigingは南アフリカ共和国の鉱山技術者であるが、金属鉱床の炭鉱において取得された鉱石品位に関する頻度分布から真の鉱石品位分布を決定するのに経験的な手法を用いた。対象とした分布は対数正規分布であった。従って空間補間の問題は本来対数正規分布に従う物理量に端を発するが、線形補間式を基にした最小2乗法の考えによるところが大なので、長い間対数正規分布などの非正規分布に従う空間分布推定法は顧られなかった。

フランスのMatheronはKriging以来用いられていた経験的な空間データ処理法に対し、空間的に分布するデータを数学的に定式化するとともに、地球統計学なる一つの学問分野を築いた⁵⁾。Matheronは最適線形補間法をKrigingと名付けた。この方法が鉱山工学で発展しているとき、ほぼ同様なアイデアが同時期に旧ソ連のGandin⁶⁾により気象学で使われた。両方法は最適線形推定を共分散ではなくバリオグラムで表している。Gandinの方法は客観的解析(Objective Analysis)と呼ばれ、彼はKrigingの代わりに最適内挿(Optimum Interpolation)という用語を用いた。ただし最適空間推定法はKrigingを源とするのではなく、上述したようにKolmogorov、Wienerが寄与していることに注意したい。

Wiener-Kolmogorovの最適線形推定式によると、推定点(あるいは時間的)に近い観測値ほど推定値に影響を及ぼすので、大きな重み係数が与えられる。その重み係数は後述の式(7)を推定したい全ての地点に対して解けば得られる。式(7)で示される空間補間の正規方程

式は実は時系列解析で用いられる手法の拡張となっており、Wienerの正規方程式の導出法と同一である。

推定を行うときに問題となるのは、1) 観測点数の増加とともに推定値が真値に近づくかどうか、2) 観測によって得られた情報を最大限に利用して最適な推定が行われているかどうかである。推定誤差共分散行列が準正定値であれば、推定量は最小分散推定量(MVE, Minimum Variance Estimator)となる。しかしながら最小分散特性だけに注目しても望ましい結果が得られる保証はない。最小分散推定を意味あるものにするには推定量の不偏性条件を付加する必要がある。線形不偏推定量の中で最小分散を与えるのが最良線形不偏推定量(BLUE, Best Linear Unbiased Estimator)である。Wiener-Kolmogorovの推定量はMVEであるが、Krigingによるものは不偏性を条件としているのでBLUEに相当する。

Kriging法は、複数地点で観測値が与えられた条件下で、問題とする変数に対してBLUEを選択する確率的な内外挿法の一つである。この方法が他の内外挿法と異なるのは変数の空間的構造が考慮されており、確率論的補間手法であるため、推定誤差分散によって内外挿推定誤差を定量的に評価できることにある。また、多項式による最小2乗近似のような確率論的補間手法と異なり、推定点が観測点と一致するとき、ノイズが存在しないと、推定値は完全に観測値に一致する。この意味でKriging法は条件付確率場の推定理論であると言える。

前述のWiener-Kolmogorovの無制約推定量における特徴1)と3)に対して拘束条件を設定した種々のKriging手法が考案されている。そのうち最も基本的なSimple Krigingは平均値が既知で非均一場に適用できる補間手法であり、平均値に依存した推定値が得られる。Ordinary Kriging、Universal Krigingの推定値は平均値を陽に含まず、正規場においてWiener-Kolmogorov式と同様に観測値の線形和で表せる。これは平均場が未知であるため、Ordinary Krigingでは均一な、Universal Krigingでは非均一な平均場を対象にしている。その他これらの概念を拡張して、現在では色々なKriging手法(例えばBlock Kriging、Intrinsic Kriging、Bayesian Kriging、Robust Kriging、Median-Polish Kriging、Factorial Kriging、Indicator Kriging、Soft Kriging、Cokriging、Disjunctive Krigingなど)が提案されている。

Krigingに関連した研究成果および刊行物は文献1)、7)~21)のように海外で多く見られる。鉱山を見つけ、その資源開発を行うために生まれた技術であるため、Krigingは鉱山工学、地質学、地盤工学、石油工学、水文地質学など、資源探査技術に萌芽を持った学問分野で積極的に取り扱われてきた。国内でもこの手法の応用範囲は、地質学、地球物理学に留まらず、農業、土木、リモートセンシング、地理学など、益々広がってきてい

る。データが豊富であること、かつ不確定性が高いということより、土木工学ではこれまで主に地盤工学や地下水学で適用されてきた。現在では文献1), 5)~21)を読めば、地球統計学なる分野の動向、数学的な解析法、適用範囲とその限界を理解することができる。中でも文献1)では最もコンパクトに内容が整備されている。

3. 正規確率場におけるKriging法とCPDF法

Gauss流の最小2乗法は推定のための先験的情報を必要としない点に特徴があるが、先験的情報が利用できる場合にはその情報を活用することにより、より優れた推定が可能となる。このような方法としてBayes推定法、最尤推定法などが知られている。

変数の事前情報は、現地観測によるデータ、あるいは直接現地実測できないときには他の同様な地域におけるデータに基づいた判断によっておおよその範囲として決められる。このようにして決められた平均値、共分散あるいはバリオグラムよりなる事前確率場は観測値が利用可能な場合に更新され、事前推定値は事後推定値に改められる。

Kriging法では観測情報に基づいて事前に設定したあるいは既往の先験的知識によって与えられた事前確率場に対して観測値を活かして更新し、事後確率場を求めることになる。このことは事前の確率場を上述したBayes流に従って条件付確率分布を用いて更新することを意味するので、Kriging法にはCPDFが深く関与する。そのため事前確率場からの推定の確からしさは、1)対象とする変数の確率分布特性を正確に表現しているか、2)不偏性、推定誤差を定量的に評価しているか、3)対象とするモデルが現実のシステムに対応しているかなどによって影響を受ける。

しかしながら既往の研究論文の中には上記1)の確率分布特性を全く念頭に置いていなかったり、Simple Krigingの問題設定に対してOrdinary KrigingあるいはUniversal Krigingの、あるいは逆の定式化を用いたりする例が見られる。後者のような誤った取り扱い、平均場の空間依存性、不確定要因の介在、対象システムの非線形性などによって確率論的空間分布推定手法に本質的な違いが見られるにも係わらず、十把一絡げにKriging手法を捉えていることに原因しているものと考えられる。

線形回帰式を用いた研究は正規確率場を大前提にしたものである。そのため、対象とした物理量が対数正規確率分布などの非正規性に従うときに、あるいは対象システムが非線形性を有するときにこのような線形補

間式によって推定値あるいは推定誤差分散を得たとしても、それは意味ある結果を与えるものではない。この事実は上述のように各種Kriging手法が正当に評価されていないこととともに、確率的補間手法を使用する際の重要な問題となっている。

よく多用される最も基本的なSimple Krigingでは、推定点ならびに観測点に応じた重み係数を観測された全てのデータに乗じて足し合わせると、ある地点での推定値を与えることになる。その際必要な情報は、推定点ならびに観測点での平均値、2地点間の共分散あるいはバリオグラム、観測点配置、観測値のみである。このような線形回帰式を用いた推定問題は取り扱いが簡単のため、各分野で応用されている。

線形回帰において線形モデルとその周りに定数の分散値を仮定することは同時正規分布に従う母集団に本来備わった性質である。逆に対象とする母集団が同時正規分布に従う場合には線形回帰を用いることが正しい。BLUEとしてのKrigingの最適推定値、推定誤差分散は、変数が同時正規分布を有するときの条件付平均値、条件付分散に相当する。このときの条件付平均値は観測値に依存するが、条件付分散は観測値に独立である。実はこのような性質は確率論の基礎としてよく知られことではあるが、このような観点でKriging法とCPDF法の関係を明示的に分析した研究はそれほど多くはない^{22)~25)}。

文献22)ではSimple Krigingの基本に従って最適推定値と推定誤差分散を求めている。ただしこの結果は星谷も指摘しているようにこれまで知られてきた常識である。確率場が正規性を有するならば、最適推定値、推定誤差分散がおのおの条件付平均値、条件付分散と一致し、CPDFを厳密に構成すると言う事実は文献22)の発表以前陽に考えられていなかった。星谷・桑名²³⁾は線形補間推定式に基づくKriging法が決して統計的推定法による近似ではなく、条件付正規確率場における厳密な理論を構築していることを理論的ならびに数値的に実証している。さらに、Shinozuka and Zhang²⁴⁾は、文献22), 23)の結果をより一般化して、条件付正規確率場におけるKriging法とCPDF法間の等価性を理論的に分析している。

Kriging法は推定値、推定誤差を知るのには強力であるが、異常値の空間分布を知るためには不向きである。そこでJournelはモンテカルロ法、ブートストラップ法概念を用いることにより、確率的に記述された変数に対して具体的なサンプル場を得る方法を初めて考えた(例えば文献9)参照)。なおシミュレーションを多数回行ってその平均値を求めると、それはKrigingの最適推定値になる。

星谷²²⁾、Hoshiya²⁵⁾による研究の最大の特徴は、

Journalの古典的な条件付シミュレーションの効率化を図るための理論を提案したことにある。2つの方式が提案されているが、これには未観測点における推定値と推定誤差、観測点での変数と未観測点の推定誤差が直交し、互いに無相関・独立になることを利用している。複数の未観測点におけるサンプル場は、Krigingの推定値(あるいは条件付平均値)ベクトルに推定誤差共分散行列(あるいは条件付共分散行列)のコレスキー分解などで得た乱数ベクトルを加えることにより求められる。この推定誤差共分散を用いる方式を採用すれば、未観測点数に応じた次元の解析が必要になる。さらに、他のシミュレーション法によると、平均値0、推定誤差分散を有する正規乱数を発生させてKriging推定値に加え、ある未観測点でのサンプル値を得た上で、これを既知のサンプル値に追加して観測点の数を1つ増やすことにより、同様なシミュレーション方式を用いて他の未観測点におけるサンプル値を求めることができる。従ってこの推定誤差分散を用いる漸次拡張方式では複数の未観測点上でサンプル場を容易に得ることができる。この方式だと、計算容量が少なくなり、未観測点数が増えても数値的な安定性は劣化しない。Shinozuka and Zhangは文献22)、25)の方法をより一般化し、この漸次拡張方式による条件付シミュレーション法が数学的に正しいことを証明している。

以上述べたように、条件付正規確率場における補間推定問題、条件付シミュレーションに対してKriging法とCPDF法はお互いに密接に関与していることがわかった。そこでこれらの結果を踏まえた上で、本論文では、非線形の補間推定問題、条件付シミュレーション問題において条件付対数正規確率場のKriging法とCPDF法に固有な差があるかどうかを理論的に分析し、正規確率場の性質と対比させる。そのために最適推定値、条件付平均値、推定誤差共分散、条件付共分散の関係を議論するとともに、文献22)~25)と同様に、漸次拡張方式による効率的な条件付シミュレーション法を提案する。

対数正規確率場を対象にしたのは、1) Krigeが元々対数正規確率変数を分析していたこと、2) 透水係数、最大地動などのように、土木分野では対数正規分布に従う物理量を取り扱う必然性があること、3) 対数正規分布に従う変数に対して正規確率場のKriging法をそのまま踏襲した事例研究あるいは条件付対数正規確率場理論の不備がこれまで多数見られることから、理論的な枠組みを完成させる必要があると判断したためである。

4. 対数正規Kriging法

X 地点の変数 $W(X)$ に対し、 $\ln W(X)$ のKrigingは興味ある現実の場 $W(X)$ を念頭に置くのではなく、その場の対数値における不偏推定誤差を最小にすることを基本としている。従って、対数正規確率場を正規確率場に変換したKriging推定値が求められれば、元の対数正規Kriging値を得なくてもよいという議論があるかもしれない。しかしながらこの論理は、 $\ln W(X)$ に対応する正規確率場のKrigingと $W(X)$ の対数正規確率場上におけるKrigingの関係を正確に把握できていないために生じるものと考えられる。我々が最終的に知りたいのは $\ln W(X)$ の推定値ではなく、現実の確率場である $W(X)$ の推定値なのである。このようなことから、両確率場における比較分析は大いに価値あることである。

以上のことはKriging法の定義に従う考え方である。Kriging法では2乗誤差平均を最小にするように、最適推定値、最小誤差分散が求められる。つまり誤差分散の最小化規範に基づく条件付推定法がKriging法なのである。Kriging法の推定規範に捕われずに他の規範を考えると、それに応じた最適推定値が求められる。例えば絶対誤差規範によると、条件付中央値が最適推定値になる。しかし本論文では最小2乗誤差規範に基づいて理論推定式を展開しているので、この規範に従う限り条件付中央値は最適推定値にはならない。つまり、Kriging法に従う限り、上記事実は唯一正しい考え方と言える。

そこで本章では文献2)で提案した対数正規Kriging法の基本式を要約するとともに、条件付対数正規確率場、条件付正規確率場のKriging式の関係を対比した上で、文献2)では示していない推定誤差共分散式を誘導する。

(1) 問題の設定

空間位置 X における対数正規確率場 $W(X)$ の平均値を $m(X)$ 、分散を $\sigma^2(X)$ 、 X と Y 地点における共分散を $C(X, Y)$ とする。これら無条件対数正規確率分布における特性値は観測値から推定されるか、あるいは既往の先験的知識によって既知量として定められるものとする。なおこれらは空間位置の関数として与えることができるので、確率場は必ずしも均一場に限定しなくてもよい。

さて、対数正規確率変数 $W(X)$ の対数値をとった $\ln W(X)(= W_c(X))$ は正規分布に従い、平均値 $m_c(X)$ 、分散 $\sigma_c^2(X)$ 、共分散 $C_c(X, Y)$ を有し、これら諸量は上述した事前特性値 $m(X), \sigma^2(X), C(X, Y)$ から、以下の各式によって求められる。

$$m_c(X) = \ln m(X) - \frac{1}{2}\sigma_c^2(X) \quad (1.a)$$

$$\sigma_e^2(\mathbf{X}) = \ln \left(1 + \frac{\sigma^2(\mathbf{X})}{m^2(\mathbf{X})} \right) \quad (1.b)$$

$$C_e(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \ln \left(1 + \frac{C(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{m(\mathbf{X})m(\mathbf{Y})} \right) \quad (1.c)$$

ここに、添字 e は正規確率変数に関する項を意味する。

以上の設定条件のもとで、ここでは未観測点 \mathbf{X}_r における推定量 $\widehat{W}(\mathbf{X}_r)$ を既観測点 $\mathbf{X}_i (i = 1 \sim N)$ における変数 $W(\mathbf{X}_i)$ の非線形補間式として求める方式を誘導する。あるいは既知の観測値 $\underline{W}(\mathbf{X}_i) (i = 1 \sim N)$ が与えられたときには推定値 $\widehat{W}(\mathbf{X}_r)$ を求めることになる。下線の付いた記号は実現値を、下線の付かないのは確率変数を、 $\widehat{}$ は推定値、推定量に関する項を示している。

観測値がノイズを含まないとき、 \mathbf{X}_r が N 個の観測点 \mathbf{X}_i のいずれかに一致するときには、 $\widehat{W}(\mathbf{X}_r)$ は既知の観測値 $\underline{W}(\mathbf{X}_i)$ と、あるいは $\widehat{W}(\mathbf{X}_r)$ は $W(\mathbf{X}_i)$ と完全に一致することが条件となる。この意味で、本論は条件付推定、条件付シミュレーションを取り扱う問題になっている。

(2) Krigingの基本理論式

Krigingの基本に従って観測点における確率場 $\ln W(\mathbf{X}_i) (= W_e(\mathbf{X}_i)) (i = 1 \sim N)$ を用いると、未観測点の確率場 $\ln \widehat{W}(\mathbf{X}_r) (= \widehat{W}_e(\mathbf{X}_r))$ は次式のように線形補間式で表せる。

$$\ln \widehat{W}(\mathbf{X}_r) = \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r) \ln W(\mathbf{X}_i) + k(\mathbf{X}_r) \quad (2)$$

ただし、 $\lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r), k(\mathbf{X}_r)$ は未知定数である。

未知定数の $k(\mathbf{X}_r)$ は不偏性条件(式(3))、 N 個の重み係数 $\lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r)$ は最小誤差分散の条件式(式(4))から求められる。

$$E[\widehat{W}(\mathbf{X}_r) - W(\mathbf{X}_r)] = 0 \quad (3)$$

$$\sigma^2(\widehat{W}(\mathbf{X}_r) - W(\mathbf{X}_r)) = E[(\widehat{W}(\mathbf{X}_r) - W(\mathbf{X}_r))^2] \rightarrow \text{Min} \quad (4)$$

文献2)によれば、式(2)～(4)から誘導できるKrigingの推定量 $\widehat{W}_K(\mathbf{X}_r)$ は次式で、

$$\widehat{W}_K(\mathbf{X}_r) = \exp \left\{ \widehat{W}_{K_e}(\mathbf{X}_r) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r) (\sigma_e^2(\mathbf{X}_i) - C_e(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_r)) \right\} \quad (5.a)$$

ここに、

$$\widehat{W}_{K_e}(\mathbf{X}_r) = \ln m(\mathbf{X}_r) + \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r) \cdot (\ln W(\mathbf{X}_i) - \ln m(\mathbf{X}_i)) \quad (5.b)$$

また推定誤差分散 $\sigma_K^2(\mathbf{X}_r)$ は

$$\sigma_K^2(\mathbf{X}_r) = m^2(\mathbf{X}_r) e^{\sigma_e^2(\mathbf{X}_r)} \left(1 - e^{-\sigma_{K_e}^2(\mathbf{X}_r)} \right) \quad (6.a)$$

ここに、

$$\sigma_{K_e}^2(\mathbf{X}_r) = \sigma_e^2(\mathbf{X}_r) - \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r) C_e(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_r) \quad (6.b)$$

と表せる。ただし添字の K はKriging式を意味する。

重み係数 $\lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r)$ は式(4)の条件式から次の正規方程式を満たす必要がある。

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{e_j}(\mathbf{X}_r) C_e(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = C_e(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_r) \quad (i = 1 \sim N) \quad (7)$$

なお、上式は正規確率場における最小誤差分散の条件式(式(8))から得られる連立方程式と同一である。

$$\sigma_e^2(\widehat{W}_e(\mathbf{X}_r) - W_e(\mathbf{X}_r)) = E \left[(\widehat{W}_e(\mathbf{X}_r) - W_e(\mathbf{X}_r))^2 \right] \rightarrow \text{Min} \quad (8)$$

観測値 $\underline{W}(\mathbf{X}_i)$ が与えられたときには、式(5)より、推定値 $\widehat{W}_K(\mathbf{X}_r)$ を次式で表すことができる。

$$\widehat{W}_K(\mathbf{X}_r) = \exp \left\{ \widehat{W}_{K_e}(\mathbf{X}_r) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r) (\sigma_e^2(\mathbf{X}_i) - C_e(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_r)) \right\} \quad (9.a)$$

ここに、

$$\widehat{W}_{K_e}(\mathbf{X}_r) = \ln m(\mathbf{X}_r) + \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r) \cdot (\ln \underline{W}(\mathbf{X}_i) - \ln m(\mathbf{X}_i)) \quad (9.b)$$

式(7)を調べると、

$$\lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r) = \begin{cases} 1: r = i \\ 0: r \neq i \end{cases} \quad (10)$$

の性質があるので、未観測点 \mathbf{X}_r が観測点の一つ \mathbf{X}_i に一致するとき($r = i$ のとき)、式(5)より $\widehat{W}_K(\mathbf{X}_i) = W(\mathbf{X}_i)$ 、式(9)より $\widehat{W}_{K_e}(\mathbf{X}_i) = \underline{W}(\mathbf{X}_i)$ となり、確率場、サンプル場ではおのの観測点における確率変数、観測値と一致する。またこのとき式(6.b)より $\sigma_{K_e}^2(\mathbf{X}_i) = 0$ となり、従って式(6.a)より $\sigma_K^2(\mathbf{X}_i) = 0$ となることがわかる。

式(5.b)の $\widehat{W}_{K_e}(\mathbf{X}_r)$ 、式(9.b)の $\widehat{W}_{K_e}(\mathbf{X}_r)$ 、式(6.b)の $\sigma_{K_e}^2(\mathbf{X}_r)$ は、与えられた対数正規分布に従う確率変数、観測値を正規確率変数ならびにそれに対応する実現値に変換し、正規確率場において得られた推定量、推定値に関連した項、推定誤差分散である。これらは3.で述べたように正規確率場におけるKriging手法として既に多方面で活用されてきており、その基本的な性質が明らかになってきている。

式(5.a)、(9.a)よりわかるように、正規確率場の最適推定量に関連した項 $\widehat{W}_{K_e}(\mathbf{X}_r)$ ならびにその推定値に関連した項 $\widehat{W}_{K_e}(\mathbf{X}_r)$ の指数をとっても対数正規確率場における最適推定量 $\widehat{W}_K(\mathbf{X}_r)$ 、最適推定値 $\widehat{W}_K(\mathbf{X}_r)$

は得られない。本章の冒頭で述べた論理は、 $e^{\widehat{W}_{K_e}(X_r)}$ 、 $e^{\widehat{W}_{K_e}(X_s)}$ として $\widehat{W}_K(X_r)$ 、 $\widehat{W}_K(X_s)$ を得ることを念頭においた考え方(絶対誤差規範に基づく推定)に立脚するものであり、2乗誤差規範に基づくKrigingの推定問題を論じる上で不相応であると言える。式(5)、(9)は我々が注目している場すなわち対数正規確率場における不偏推定式に基づいて定式化されている。このような不偏推定の規範が面倒だからと言って、 $\widehat{W}_{K_e}(X_r)$ 、 $\widehat{W}_{K_e}(X_s)$ の指数をとっても条件付対数正規確率場を正しく把握したことはない。Kriging法の定義によれば、このことは理論展開上明らかなことである。

式(1.b)は無条件確率場における対数正規確率変数と正規確率変数の分散の関係を示している。そこで同式において $\sigma^2(X)$ を推定誤差分散と見なし、 $m(X)$ の代わりに推定量 $\widehat{W}_K(X_r)$ を、 $\sigma_e^2(X)$ の代わりに $\sigma_{K_e}^2(X_r)$ を代入する。この考えによって推定誤差分散を

$$\widehat{W}_K^2(X_r) \left(e^{\sigma_{K_e}^2(X_r)} - 1 \right) \quad (11)$$

で評価することがある。また $m(X)$ の代わりに推定値 $\widehat{W}_K(X_r)$ を、 $\sigma_e^2(X)$ の代わりに $\sigma_{K_e}^2(X_r)$ を代入すると、

$$\widehat{W}_K^2(X_r) \left(e^{\sigma_{K_e}^2(X_r)} - 1 \right) \quad (12)$$

が得られる。

既往の研究では上記のような考え方・理論式によって対数正規確率場の推定誤差分散を求めることがある。しかしながら式(11)、(12)を式(6.a)と比較すると明らかのように、このような論理で最小誤差分散 $\sigma_{K_e}^2(X_r)$ を評価することはできない。つまり、推定誤差分散と条件付分散はその意味が異なるのである。式(12)は条件付分散そのものである。条件付確率変数に関する条件付分散の数学的期待値が推定誤差分散になることを考えると、定義上条件付分散を推定誤差分散と見なすことは正しくない。両者は正規確率場で同一になるが、非正規確率場においては異なる量となることに注意しなければならない。

(3) 推定誤差共分散

今、未観測点 X_r, X_s における推定誤差すなわち $\widehat{W}(X_r) - W(X_r)$ と $\widehat{W}(X_s) - W(X_s)$ の相関を見ると、推定誤差共分散として

$$\begin{aligned} C_K(X_r, X_s) &= E[(\widehat{W}(X_r) - W(X_r))(\widehat{W}(X_s) - W(X_s))] \\ &= E[(\widehat{W}(X_r) - m(X_r))(\widehat{W}(X_s) - m(X_s))] \\ &\quad + E[(W(X_r) - m(X_r))(W(X_s) - m(X_s))] \\ &\quad - E[(\widehat{W}(X_r) - m(X_r))(W(X_s) - m(X_s))] \\ &\quad - E[(W(X_r) - m(X_r))(\widehat{W}(X_s) - m(X_s))] \end{aligned} \quad (13)$$

が成り立つ。

式(13)右辺第1項は不偏性($E[\widehat{W}(X)] = m(X)$)ならびに式(1.c)の関係を考慮すると、

$$\begin{aligned} E[(\widehat{W}(X_r) - m(X_r))(\widehat{W}(X_s) - m(X_s))] &= m(X_r)m(X_s) \left(e^{C(\widehat{W}_e(X_r), \widehat{W}_e(X_s))} - 1 \right) \end{aligned} \quad (14.a)$$

となる。 $C(\widehat{W}_e(X_r), \widehat{W}_e(X_s))$ はその定義式、式(2)とその期待値に関する式を用いると、

$$\begin{aligned} C(\widehat{W}_e(X_r), \widehat{W}_e(X_s)) &= E[(\ln \widehat{W}(X_r) - E[\ln \widehat{W}(X_r)]) \\ &\quad \cdot (\ln \widehat{W}(X_s) - E[\ln \widehat{W}(X_s)])] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{e_i}(X_r) \lambda_{e_j}(X_s) C_e(X_i, X_j) \end{aligned} \quad (15)$$

の関係が成り立つので、この式を式(14.a)に代入すると、

$$\begin{aligned} E[(\widehat{W}(X_r) - m(X_r))(\widehat{W}(X_s) - m(X_s))] &= m(X_r)m(X_s) \left\{ \exp \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{e_i}(X_r) \lambda_{e_j}(X_s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot C_e(X_i, X_j) \right) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (14.b)$$

が得られる。

式(13)の右辺第2項は式(1.c)より

$$\begin{aligned} E[(W(X_r) - m(X_r))(W(X_s) - m(X_s))] &= m(X_r)m(X_s) \left(e^{C_e(X_r, X_s)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (16)$$

である。

式(13)右辺第3項を求めるために、式(2)とその期待値に関する式を用いると、

$$\begin{aligned} C(\widehat{W}_e(X_r), W_e(X_s)) &= E[(\ln \widehat{W}(X_r) - E[\ln \widehat{W}(X_r)]) \\ &\quad \cdot (\ln W(X_s) - E[\ln W(X_s)])] \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(X_r) C_e(X_i, X_s) \end{aligned} \quad (17)$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} E[(\widehat{W}(X_r) - m(X_r))(W(X_s) - m(X_s))] &= m(X_r)m(X_s) \left(e^{C(\widehat{W}_e(X_r), W_e(X_s))} - 1 \right) \end{aligned} \quad (18.a)$$

の式に式(17)を代入すると、

$$\begin{aligned} E[(\widehat{W}(X_r) - m(X_r))(W(X_s) - m(X_s))] &= m(X_r)m(X_s) \\ &\quad \cdot \left\{ \exp \left(\sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(X_r) C_e(X_i, X_s) \right) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (18.b)$$

が求められる。同様の展開を式(13)右辺第4項に実施すると、次式が得られる。

$$E\left[(W(X_r) - m(X_r))(\widehat{W}(X_s) - m(X_s))\right] \\ = m(X_r)m(X_s) \\ \cdot \left\{ \exp\left(\sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(X_s)C_e(X_i, X_r)\right) - 1 \right\} \quad (19)$$

式(14.b), (16), (18.b), (19)を式(13)に代入した上で、式(6.b), (7)の関係式を考慮して整理すると、未観測点 X_r と X_s における推定誤差共分散は次式で表せる。

$$C_K(X_r, X_s) = m(X_r)m(X_s) \\ \cdot e^{C_e(X_r, X_s)} \left(1 - e^{-C_{K_e}(X_r, X_s)}\right) \quad (20.a)$$

ただし、

$$C_{K_e}(X_r, X_s) = C_e(X_r, X_s) \\ - \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(X_s)C_e(X_i, X_r) \quad (20.b)$$

式(20.b)は正規確率場における推定誤差共分散である。同式は式(7)と類似しているが、 X_r, X_s が未観測点であることから、右辺は0とはならない。また式(20)において X_r と X_s が一致すると、式(20.a)は式(6.a)に、式(20.b)は式(6.b)となり、未観測点 X_r の推定誤差分散を与えることになる。

以上のことから、複数の未観測点上の推定誤差共分散行列は式(20)を要素として容易に表せることがわかる。

5. 対数正規確率場のCPDF法

観測値が与えられたとき、未観測点の条件付平均値は推定誤差分散を最小にする最適な推定値である。すなわち、最小分散推定値は確率分布のいかに係わらず、条件付平均値で与えられる。このことは確率論の基本的な常識であるが、本題を議論する上で必要不可欠である。

ここでは場の確率変数が全て対数正規性を有すると仮定しているので、条件付確率密度関数(CPDF)は対数正規分布をしていることが示される。ゆえに、CPDFが求められれば、条件付平均値、条件付共分散を決定することができる。この場合、対数正規確率変数と正規確率変数の間には式(1)の関係が成り立つので、これを利用して条件付正規確率場の条件付平均値、条件付共分散から条件付対数正規確率場のそれらを求めた上で、4.のKriging法の結果と比較検討する。

(1) 条件付正規確率場の理論推定式

以下、複数の未観測点 X_{N+k} における確率変数 $\ln \widehat{W}(X_{N+k})$ ($k = 1 \sim M$)よりなるベクトルを \widehat{W}_e ,

N 観測点における確率変数 $\ln W(X_i)$ ($i = 1 \sim N$)よりなるベクトルを W_e と表す。このとき、 \widehat{W}_e, W_e の平均値ベクトル $m_{\widehat{W}_e}, m_{W_e}$ は $m_e(X_{N+k})$ ($k = 1 \sim M$), $m_e(X_i)$ ($i = 1 \sim N$)を、 \widehat{W}_e, W_e の共分散行列 $C_{\widehat{W}_e}, C_{W_e}$ は $C_e(X_{N+k}, X_{N+l})$ ($k, l = 1 \sim M$), $C_e(X_i, X_j)$ ($i, j = 1 \sim N$)を要素として表せる。また、 \widehat{W}_e と W_e, W_e と \widehat{W}_e の共分散行列 $C_{\widehat{W}_e W_e}, C_{W_e \widehat{W}_e}$ はおのおの $C_e(X_{N+k}, X_i)$ ($k = 1 \sim M, i = 1 \sim N$), $C_e(X_i, X_{N+k})$ ($i = 1 \sim N, k = 1 \sim M$)を要素とする。

このとき、既往の研究成果^{23)~25)}を参考にすれば、 N 個の観測点 X_i における観測値ベクトル $\underline{W}_e = (\dots \ln W(X_i) \dots)^T$ ($i = 1 \sim N$)が与えた条件下において、条件付平均値ベクトルは式(21)、条件付共分散行列は式(22)で表せる。

$$m_{\widehat{W}_e | \underline{W}_e} = m_{\widehat{W}_e} + C_{\widehat{W}_e W_e} C_{W_e}^{-1} (\underline{W}_e - m_{W_e}) \quad (21)$$

$$C_{\widehat{W}_e | \underline{W}_e} = C_{\widehat{W}_e} - C_{\widehat{W}_e W_e} C_{W_e}^{-1} C_{W_e \widehat{W}_e} \quad (22)$$

式(21), (22)において、

$$A_e = C_{\widehat{W}_e W_e} C_{W_e}^{-1} \quad (23)$$

とおくと、 A_e は $\lambda_{e_i}(X_{N+k})$ ($i = 1 \sim N, k = 1 \sim M$)を要素とする M 行 N 列の行列である。つまり式(7)と同様な連立方程式が成立している。このとき、式(21)より、 X_{N+k} 地点の条件付平均値は式(1.a)を用いると次のようになる。以下、簡単のため条件付正規確率場において観測値が与えられた条件下で求められたCPDFの結果を添字CPeで表す。

$$m_{\widehat{W}_e | \underline{W}_e} \\ = E[\ln W(X_{N+k}) | \underline{W}_e] \\ = \widehat{W}_{CPe}(X_{N+k}) \\ = m_e(X_{N+k}) \\ + \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(X_{N+k}) (\ln \underline{W}(X_i) - m_e(X_i)) \\ = \ln m(X_{N+k}) \\ + \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(X_{N+k}) (\ln \underline{W}(X_i) - \ln m(X_i)) \\ - \frac{1}{2} \sigma_e^2(X_{N+k}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(X_{N+k}) \sigma_e^2(X_i) \\ = \widehat{W}_{K_e}(X_{N+k}) \\ - \frac{1}{2} \sigma_e^2(X_{N+k}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(X_{N+k}) \sigma_e^2(X_i) \quad (24)$$

条件付共分散行列 $C_{\widehat{W}_e | \underline{W}_e}$ の r, s 成分 ($r, s = N+1 \sim N+M$)、すなわち未観測点 X_r と X_s の条件付共分散は式(22)より

$$C(\ln W(X_r), \ln W(X_s) | \underline{X}_e)$$

$$\begin{aligned}
&= C_e(\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_s | \mathbf{W}_e) \\
&= C_{CPe}(\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_s) \\
&= C_e(\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_s) - \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r) C_e(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_s) \quad (25)
\end{aligned}$$

となり、また \mathbf{X}_r 地点の条件付分散は

$$\begin{aligned}
&\sigma^2(\ln W(\mathbf{X}_r) | \mathbf{W}_e) \\
&= \sigma_e^2(\mathbf{X}_r | \mathbf{W}_e) \\
&= \sigma_{CPe}^2(\mathbf{X}_r) \\
&= \sigma_e^2(\mathbf{X}_r) - \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r) C_e(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_r) \quad (26)
\end{aligned}$$

と表せる。

$C_{\widehat{W}_e | \mathbf{W}_e}$ は対称行列であるので、式(25)の条件付共分散は式(20.b)に示したKrigingの推定誤差共分散、式(26)の条件付分散は式(6.b)の推定誤差分散と同一になることがわかる。式(24)の右辺第3式に示した条件付平均値は正規確率場におけるKrigingの最適推定値を厳密に表しているの、式(9.b)に示す $\widehat{W}_{Ke}(\mathbf{X}_r)$ はこの最適推定値の関連項に相当する。

式(24)～(26)より、観測値が与えられたときの条件付正規確率場における条件付平均値は観測値によって決められるが、条件付分散、条件付共分散は観測点の空間位置のみに依存し、観測値には独立であることがわかる。

(2) 条件付対数正規確率場の理論推定式

問題は、観測値 $\underline{W}(\mathbf{X}_i)(i = 1 \sim N)$ よりなるベクトル $\mathbf{W} = (\dots \underline{W}(\mathbf{X}_i) \dots)^T$ が与えられたとき、条件付対数正規確率場における条件付平均値 $E[W(\mathbf{X}_{N+k}) | \mathbf{W}]$ すなわち $\widehat{W}_{CP}(\mathbf{X}_{N+k})$ 、条件付共分散 $C(\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_s | \mathbf{W})$ すなわち $C_{CP}(\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_s)$ 、条件付分散 $\sigma^2(\mathbf{X}_r | \mathbf{W})$ すなわち $\sigma_{CP}^2(\mathbf{X}_r)$ を求めることである。ここに添字のCPは条件付対数正規確率場において観測値が与えられたとき、CPDF法によって得られた結果を意味する。

式(1.a)の関係を考慮すると、対数正規確率場における条件付平均値は

$$\begin{aligned}
m_{\widehat{W}_{N+k} | \mathbf{W}} &= E[W(\mathbf{X}_{N+k}) | \mathbf{W}] \\
&= \widehat{W}_{CP}(\mathbf{X}_{N+k}) \\
&= \exp \left(E[\ln W(\mathbf{X}_{N+k}) | \mathbf{W}_e] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma^2(\ln W(\mathbf{X}_{N+k}) | \mathbf{W}_e) \right) \\
&\quad (k = 1 \sim M) \quad (27)
\end{aligned}$$

となるが、この式に式(24)、(26)を代入すると、 \mathbf{X}_r 地点の条件付平均値は

$$\begin{aligned}
\widehat{W}_{CP}(\mathbf{X}_r) &= \exp \left\{ \widehat{W}_{CPe}(\mathbf{X}_r) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r) (\sigma_e^2(\mathbf{X}_i) - C_e(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_r)) \right\} \\
&\quad (r = N+1 \sim N+M) \quad (28.a)
\end{aligned}$$

ただし、 $\widehat{W}_{Ke}(\mathbf{X}_r)$ の代わりに $\widehat{W}_{CPe}(\mathbf{X}_r)$ を用いて、

$$\begin{aligned}
\widehat{W}_{CPe}(\mathbf{X}_r) &= \ln m(\mathbf{X}_r) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \lambda_{e_i}(\mathbf{X}_r) (\ln \underline{W}(\mathbf{X}_i) - \ln m(\mathbf{X}_i)) \quad (28.b)
\end{aligned}$$

と定式化される。

一方、未観測点 $r, s = N+1 \sim N+M$ に対し、条件付共分散は式(1.c)より式(29)、条件付分散は式(1.b)より式(30)で表せる。

$$C_{CP}(\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_s) = \widehat{W}_{CP}(\mathbf{X}_r) \widehat{W}_{CP}(\mathbf{X}_s) \cdot (e^{C_{CPe}(\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_s)} - 1) \quad (29)$$

$$\sigma_{CP}^2(\mathbf{X}_r) = \widehat{W}_{CP}^2(\mathbf{X}_r) (e^{\sigma_{CPe}^2(\mathbf{X}_r)} - 1) \quad (30)$$

従って式(29)、(30)に式(25)、(26)、(28)を代入すると、対数正規確率場における条件付共分散、条件付分散が得られることになる。

これより複数の未観測点上での条件付共分散行列を容易に求めることが可能である。

(3) 対数正規Kriging法との関係

上述したように、 $\widehat{W}_{CP}(\mathbf{X}_r) = \widehat{W}_K(\mathbf{X}_r)$ 、 $\widehat{W}_{CPe}(\mathbf{X}_r) = \widehat{W}_{Ke}(\mathbf{X}_r)$ 、 $\sigma_{CPe}^2(\mathbf{X}_r) = \sigma_{Ke}^2(\mathbf{X}_r)$ が成り立つので、式(12)は対数正規確率場の条件付分散と完全に一致する。しかしながら同式は推定誤差分散を意味しない。

条件付正規確率場においては3.でも述べたように、最適推定値と条件付平均値が、推定誤差分散と条件付分散が完全に一致する。その結果Kriging法とCPDF法の等価性が成り立つ。このとき最適推定値、条件付平均値は式(24)のように観測値に依存するが、推定誤差分散、条件付分散は式(26)のように観測値の影響を受けない。

一方、条件付対数正規確率場においては、1)未観測点においてKriging法によって得られた最適推定値はCPDF法による条件付平均値に等しいが、2)条件付確率変数に関する条件付共分散の数学的期待値が推定誤差共分散になるので、推定誤差共分散は条件付共分散とは異なること、3)最適推定値(あるいは条件付平均値)、条件付共分散は観測値によって決められる $\widehat{W}_{Ke}(\mathbf{X}_r)$ (あるいは $\widehat{W}_{CPe}(\mathbf{X}_r)$)を評価式に含んでいるので、その値は観測値に依存するが、4)推定誤差共分散の評価式は

観測値を含まないため、観測点の空間位置のみに依存することがわかる。これらの現象は対数正規確率分布に従う条件付確率場の特徴であり、正規確率場の場合と異なる。

以上のことから、対数正規確率場のように非正規性を有するとき、Kriging法とCPDF法は完全な等価性を示さないことが理解できる。Kriging法では推定誤差共分散、CPDF法では条件付共分散により、観測情報に基づいて事前に設定した確率場を更新するときの確からしさを確認できると言える。ただし更新程度を直接表す指標は条件付分散よりもむしろ条件付変動係数である。この事実については後述の数値計算例によって実証する。

また、モンテカルロ法を用いてサンプル場を得たいときには上述した性質により、推定誤差共分散は条件付シミュレーションに関与せず、条件付平均値、条件付共分散を用いる必要のあることがわかる。

6. 条件付シミュレーション

確率過程、確率場のシミュレーションにおいては、無条件シミュレーションの研究が過去数十年にわたって主に行われてきた。実現値が観測された既知情報の条件下における確率過程・確率場のシミュレーション研究の実施は工学的応用の重要性にも係らず、比較的最近のことである。Kriging法を用いた効率的な条件付シミュレーションは3.で述べたように星谷²²⁾によって、またCPDF法による条件付シミュレーションはKameda and Morikawa²⁶⁾によって最初に提案された。CPDF法では解析的に誘導された条件付平均値、条件付分散を用いてシミュレーションが実施される。

本章では、文献22)～25)に示されている正規確率場の条件付シミュレーション法の考え方と同様に、条件付対数正規確率場におけるサンプル実現値を得るため、条件付シミュレーションの効率化法を提案する。なお、前章で示したようにKriging法では条件付共分散が得られないため、シミュレーションはCPDF法に基づいて実行しなければならない。

ここでは、コレスキー分解法、スペクトル分解法に基づいて複数地点のサンプル場を同時に得るシミュレーション法(例えば文献1), 27)参照), 1サンプル場のシミュレーションを順次拡げていく漸次拡張方式による条件付シミュレーション法を以下に示す。

(1) コレスキー分解法

M 個の未観測点 $X_r (r = N + 1 \sim N + M)$ におけるサンプル実現値 $\widehat{W}(X_r)$ は、観測点でのサンプル実現

値ベクトル \underline{W} 、正規確率場における条件付平均値ベクトル $m_{\widehat{W}_e|\underline{W}_e}$ (式(21)), 条件付共分散行列 $C_{\widehat{W}_e|\underline{W}_e}$ (式(22))に基づいてまず正規確率場におけるサンプル実現値ベクトル $\widehat{W}_e = (\dots \widehat{W}_e(X_r) \dots)^T$ を求めた上で、これを与えられた対数正規確率場に変換すれば得られる。

互いに独立な標準正規乱数 $\varepsilon_r (r = N + 1 \sim N + M)$ を M 個発生させて得た乱数ベクトルを $\varepsilon_1 = (\dots \varepsilon_r \dots)^T$ とし、 $C_{\widehat{W}_e|\underline{W}_e}$ をコレスキー分解によって得た下三角行列 L を用いると、 \widehat{W}_e は次式のように表せる。

$$\widehat{W}_e = m_{\widehat{W}_e|\underline{W}_e} + L\varepsilon_1 \quad (31)$$

ここに、

$$C_{\widehat{W}_e|\underline{W}_e} = LL^T \quad (32)$$

式(31)より、未観測点 X_r のサンプル実現値は次式のように求められる。

$$\widehat{W}(X_r) = e^{\widehat{W}_e(X_r)} \quad (33)$$

(2) スペクトル分解法

(1)と同様に標準正規乱数ベクトル ε_2 を発生させた上で、次式により \widehat{W}_e を求める。

$$\widehat{W}_e = m_{\widehat{W}_e|\underline{W}_e} + C_{\widehat{W}_e|\underline{W}_e}^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2 \quad (34)$$

ここで、条件付共分散行列 $C_{\widehat{W}_e|\underline{W}_e}$ の固有値解析を行い、固有値 $\lambda_r (r = N + 1 \sim N + M)$ からなる対角行列 $\Lambda^{\frac{1}{2}} = \text{diag} \{ \dots \lambda_r^{\frac{1}{2}} \dots \}$ 、固有ベクトルからなる行列 Q を用いると、 $C_{\widehat{W}_e|\underline{W}_e}^{\frac{1}{2}}$ は次式によって得られる。

$$C_{\widehat{W}_e|\underline{W}_e}^{\frac{1}{2}} = Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T \quad (35)$$

式(34)によって得られた正規確率場のサンプル実現値を式(33)に代入すれば、複数の未観測点における対数正規確率場の同時シミュレーションを実施することができる。

(3) 漸次拡張方式

前述の(1)、(2)の同時シミュレーションでは未観測点での個数 M を次元とする正規確率場の条件付共分散のコレスキー分解、スペクトル分解が必要である。従って補間値あるいはサンプル実現値を得たい未観測点の個数の増大とともに分解精度が問題になってくる。そこでここでは誤差の異積も少なく数値解析的に安定した方式を考える。

漸次拡張方式によるシミュレーションでは、式(1.a), (1.b)に基づき、式(28.a)の条件付平均値 $\widehat{W}_{CP}(X_r)$ 、式(30)の条件付分散 $\sigma_{CP}^2(X_r)$ 、標準正規乱数 ε_3 を用いて条件付正規乱数を得た上で、次式から未観測点 X_r におけるサンプル実現値を求める。

$$\widehat{W}(X_r) = \exp \left(\ln \widehat{W}_{CP}(X_r) \right)$$

$$-\frac{1}{2}A(X_r)^2 + A(X_r)\varepsilon_3 \quad (36.a)$$

ただし、

$$A(X_r) = \sqrt{\ln \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma_{CP}(X_r)}{\widehat{W}_{CP}(X_r)} \right)^2 \right\}} \quad (36.b)$$

今、上式で求めたサンプル場を既知のサンプル実現値 $\underline{W} = (\dots W(X_i) \dots)$ ($i = 1 \sim N$) に追加し、合計 $N+1$ 箇所サンプル実現値が観測されていると考える。これより X_r とは異なる未観測点 X_s 上でのサンプル実現値を得るためには式(36)において $\widehat{W}_{CP}(X_s)$, $\sigma_{CP}^2(X_s)$ が必要になるが、これは式(28), (30)(ならびに式(26))において総和の N を $N+1$ とすることにより容易に求めることができる。ただし、式中における重み係数 $\lambda_{e_i}(X_s)$ の算定のためには Kriging 行列すなわち C_{W_e} の逆行列を必要とする。

X_{N+m+1} 地点における重み係数 $\lambda_{e_i}(X_{N+m+1})$ ($i = 1 \sim N+m, m = 0, 1, 2, \dots$) よりなるベクトルを $A_{e_{N+m}}$ とすると、 $A_{e_{N+m}}$ は次の公式を用いることにより求められる。これより計算容量、計算時間の短縮を図ることが可能である。

$$A_{e_{N+m}} = \Sigma_{N+m}^{-1} S_{N+m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (37.a)$$

ただし、

$$\Sigma_{N+m+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{N+m}^{-1} + P_{N+m} P_{N+m}^T / Q_{N+m} & \\ & -P_{N+m}^T / Q_{N+m} \\ -P_{N+m} / Q_{N+m} & \\ & 1 / Q_{N+m} \end{bmatrix} \quad (37.b)$$

$$P_{N+m} = \Sigma_{N+m}^{-1} A_{N+m} \quad (37.c)$$

$$Q_{N+m} = B_{N+m} - P_{N+m}^T A_{N+m} \quad (37.d)$$

ここに、 S_{N+m} は観測点 X_i と未観測点 X_{N+m+1} 間の共分散 $C_e(X_i, X_{N+m+1})$ ($i = 1 \sim N+m$) を要素とするベクトルである。行列 Σ_{N+m} の要素は $C_e(X_i, X_j)$ ($i, j = 1 \sim N+m$)、ベクトル A_{N+m} の要素は $C_e(X_{N+m+1}, X_i)$ ($i = 1 \sim N+m$)、スカラーの B_{N+m} は $\sigma_e^2(X_{N+m+1})$ で表せる。

サンプル実現値を得たい未観測点が観測点よりも遠方場に位置するとき、それらの間の共分散は無視できるほど小さくなる。従って観測値は未観測点のサンプル実現値に影響を及ぼさないので、このような場合には本論で提案した条件付シミュレーション法は同時シミュレーション法に比べて計算効率の点で優れている。

7. 数値計算例および考察

数値分析により、Kriging 法による補間理論(条件付推定理論)の理解を深めた上で、条件付シミュレーシ

ン手法の精度を検証する。ここではシミュレーションによる結果と理論値の比較を行うため、簡単のために一次元の確率場を対象にする。対数正規確率分布の事前平均値 $m(X)$ 、事前共分散 $C(X, Y)$ として次の3つのケースを想定した。

- 1) ケース1: $m(X) = 2(1 + |\sin \frac{\pi}{50} X|)$, $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{4}}$
- 2) ケース2: $m(X) = 2$, $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{4}}$
- 3) ケース3: $m(X) = 2(1 + |\sin \frac{\pi}{50} X|)$, $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{10}}$

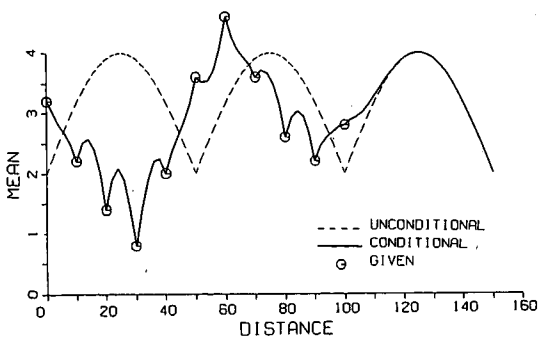
ケース1と3は非均一な平均場、ケース2は均一な平均場よりなる。事前分散は2、2地点の相関距離としては4、10を考えた。従って、ケース1と2、ケース1と3の結果の比較により、確率場の均一・非均一性、相関距離の影響を調べることができる。

観測されたサンプル実現値は等間隔に11点($X_i = 10(i-1), i = 1 \sim 11$)で与えた。比較検討のため、この実現値は3つのケースで同一の値をとるものと仮定した。Fig.1, Fig.6, Fig.9の中の○印が事前に与えられた観測値である。

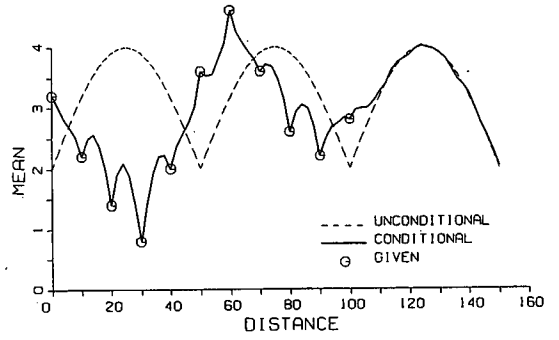
上記前提条件の設定下で求められたケース1の結果が Fig.1~Fig.5、ケース2の結果が Fig.6~Fig.8、ケース3の結果が Fig.9~Fig.11 である。

まず、Fig.1には、ケース1に対する理論解(Kriging法, CPDF法)による最適推定値・条件付平均値(実線)、条件付シミュレーション法(コレスキー分解法, スペクトル分解法, 漸次拡張方式)によって求められた条件付平均値(実線)、無条件平均値(破線)を示す。条件付シミュレーションでは76点の未観測点($X_r = 2r, r = 0 \sim 75$)で1,000サンプルを抽出し、得られた結果から各点においてサンプル平均値を求めている。なお、漸次拡張方式によるシミュレーションでは、11地点の観測値をもとに左から右の方向へ1未観測点ずつのサンプル実現値を得、それをそれぞれ観測値に取り込み、観測データ数を増やして漸次拡張することにより計算した。

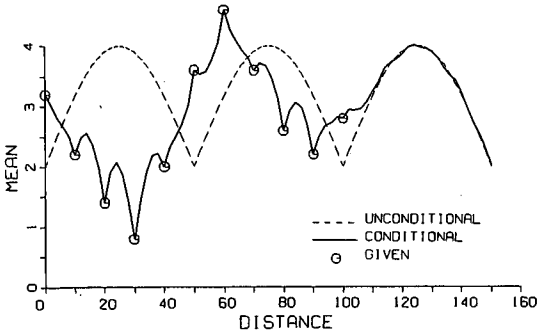
Fig.1を見るとわかるように、理論値とシミュレーションによる結果はほぼ一致しており、ここで提案した条件付シミュレーション法の有効性が確認できる。また内挿点の最適推定値、条件平均値は無条件平均値に近づくように補間されている。さらに、この傾向は観測値が無条件平均値より大きくても小さくても同じである。補間点と観測点が一致すると、得られた結果は観測値と完全に同じ値となっている。観測点から離れた点を外挿すると、観測値の影響が小さくなるため、最適推定値、条件付平均値は無条件平均値に近づくことがわかる。シミュレーションによる結果はこのような特性も満足している。観測によって事前確率場は更新されるが、その更新の程度はどのような物理量をどこ



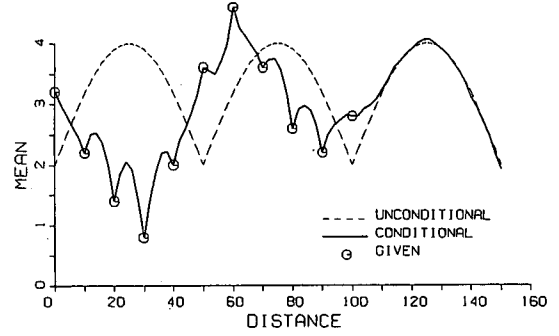
(a) Analytical solution



(b) Cholesky decomposition method

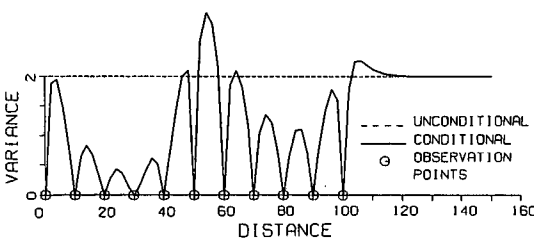


(c) Spectral decomposition method

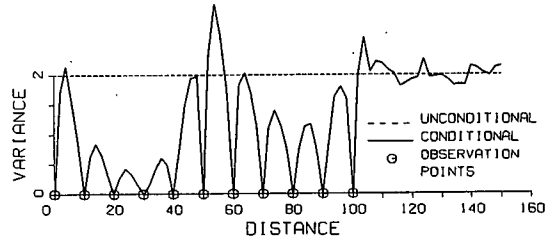


(d) Step-by-step expanded method

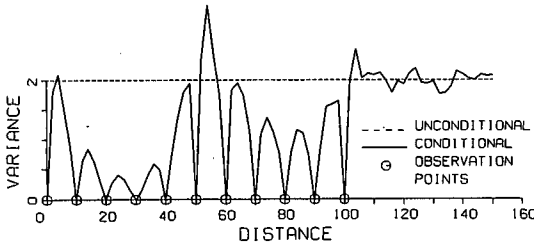
Fig.1 Optimum estimate (conditional mean) for a one-dimensional discrete lognormal field with mean $m(X) = 2(1 + |\sin \frac{\pi}{50} X|)$ and with the covariance $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{4}}$



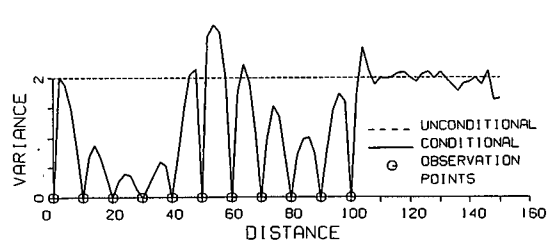
(a) Analytical solution



(b) Cholesky decomposition method



(c) Spectral decomposition method



(d) Step-by-step expanded method

Fig.2 Conditional variance for a one-dimensional discrete lognormal field with mean $m(X) = 2(1 + |\sin \frac{\pi}{50} X|)$ and with the covariance $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{4}}$

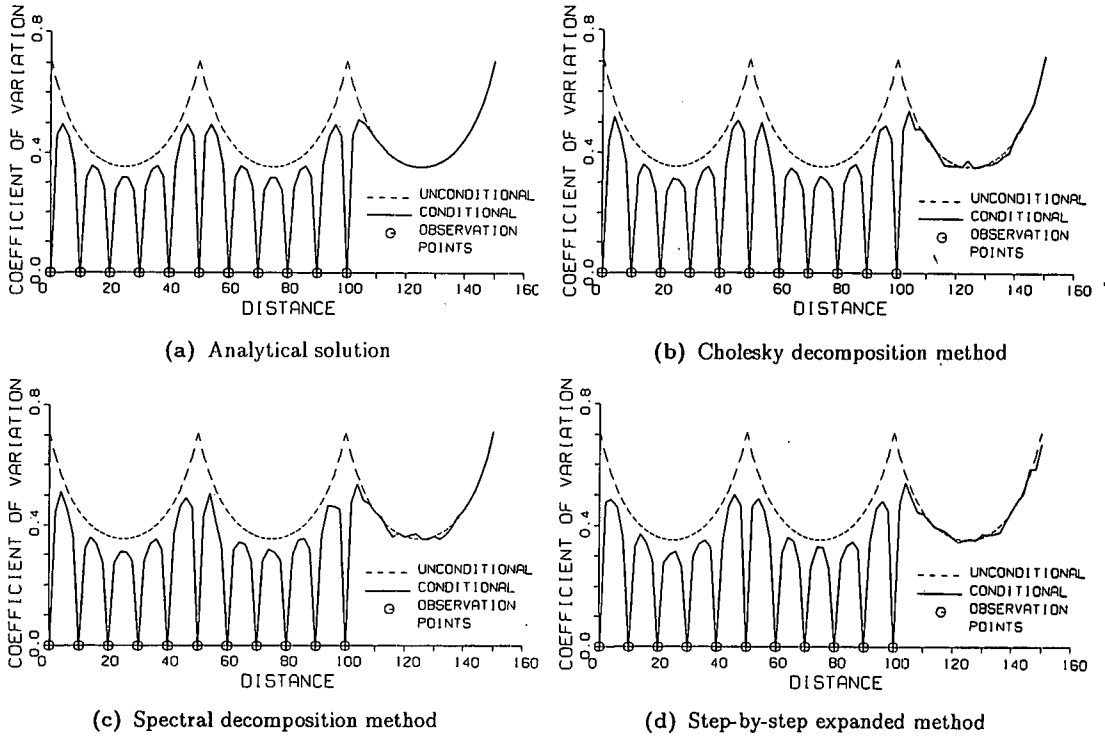


Fig.3 Conditional coefficient of variation for a one-dimensional discrete lognormal field with mean $m(X) = 2\left(1 + \left|\sin \frac{\pi}{80} X\right|\right)$ and with the covariance $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{4}}$

で観測するかによって異なる。

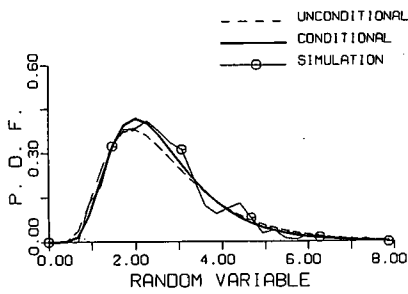
Fig.2はCPDF法による条件付分散の理論解, 条件付シミュレーションによって得られたサンプル分散である。図中の○印は観測点の位置を表したものである。サンプル回数がそれほど多くないため, 理論値とシミュレーションによる条件付分散に若干の差異が認められるが(特にその傾向は外挿点において顕著であるが), 両者はほぼ一致していると言える。なおここでは割愛したが, サンプル場のシミュレーション回数が条件付統計量(サンプル平均値, サンプル分散)に及ぼす影響を調べた結果, サンプル数が多くなるほどシミュレーション結果は理論解に近づいていき, 3万サンプル場の発生ではシミュレーションによる結果が理論解にかなり一致したことを確認している。

推定点の位置, 観測値の大きさにより, 条件付分散が無条件分散よりも大きくなるのがFig.2よりわかる。すなわちFig.1の観測値が無条件平均値よりも小さいと, 内挿点における条件付分散は無条件分散よりも小さいが, 逆に観測値が無条件平均値よりも大きいときには無条件分散よりも大きな条件付分散を与える内挿点が存在している。このことは条件付分散が観測値に依存して決定されることによる。条件付確率場では観

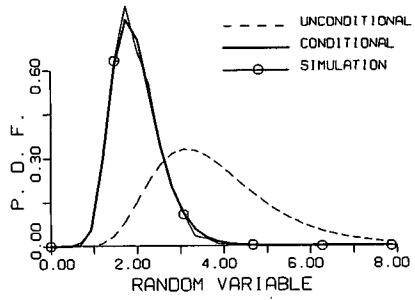
測点から遠くなり観測点における値の影響を受けなくなると, 条件付分散は無条件分散に近づく。また, 推定点が観測位置に一致すると, 条件付分散は0になっている。

条件付正規確率場においては条件付分散が無条件場の分散を超えることはない。このことは, 無条件場に観測値の条件が加わることにより, 不確定性を表すばらつきが減少することを意味する。しかしながら条件付対数正規確率場においてこのような傾向が見られないことはFig.2より明らかである。その詳細については後述するとして, 正規確率場でこのような性質を示すのは条件付分散が推定誤差分散と等価であり, 観測値に依存しないためである。

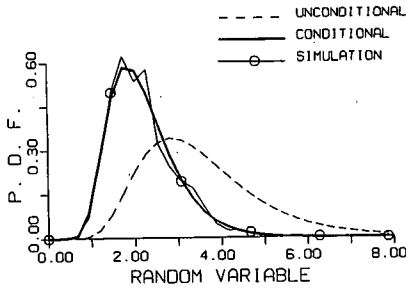
更新した事後の確率場の不確定性の減少の程度をわかりやすく明示するため, Fig.3には条件付確率場における $\sigma_{CP}(X)/\widehat{W}_{CP}(X)$ (実線), 無条件場における $\sigma(X)/m(X)$ (破線)を示した。すなわち同図ではいわゆる変動係数を示した。条件付変動係数, 無条件変動係数の比較からわかるように, 観測情報が得られることにより, 事前確率場の更新が行われ, 事後の不確定性が減少していることがわかる。つまり条件付変動係数は無条件変動係数を超えることはない。ただしこの場



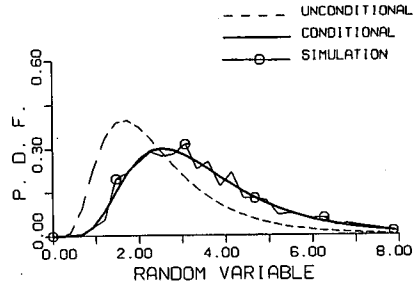
(a) Spatial point $X=6$



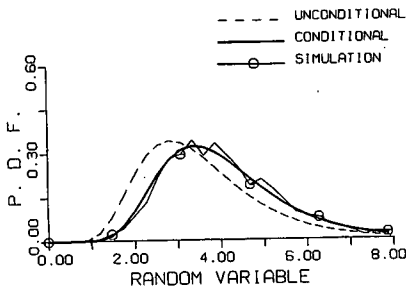
(b) Spatial point $X=18$



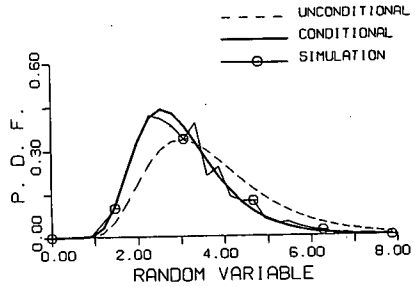
(c) Spatial point $X=36$



(d) Spatial point $X=54$



(e) Spatial point $X=64$



(f) Spatial point $X=84$

Fig.4 Conditional probability density function of samples for a one-dimensional discrete lognormal field with mean $m(X) = 2(1 + |\sin \frac{\pi}{50} X|)$ and with the covariance $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{4}}$

合においても条件付分散と同様に観測値に依存して条件付変動係数の値が決まるため、条件付変動係数は推定位置によってその値が変化している。なお、理論解とシミュレーションによる結果はほぼ一致している。また、内外挿点ならびに観測点に見られる特徴については Fig.1, Fig.2 の場合と同様である。

Fig.2 の現象を明らかにするため、事前分布として与えた対数正規確率密度関数と条件付対数正規確率密度関数の比較検討を行う。シミュレーションによる 1,000 個のサンプル場について、6 つの推定点 ($X = 6, 18, 36, 54, 64, 84$) においてサンプル値 $\bar{W}(X)$ の頻度分布を求め、各点について確率密度関数を求めた結果が Fig.4 である。図中、破線は与えられた無条件平均値

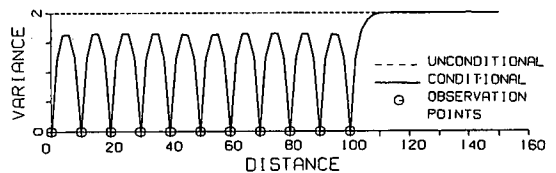
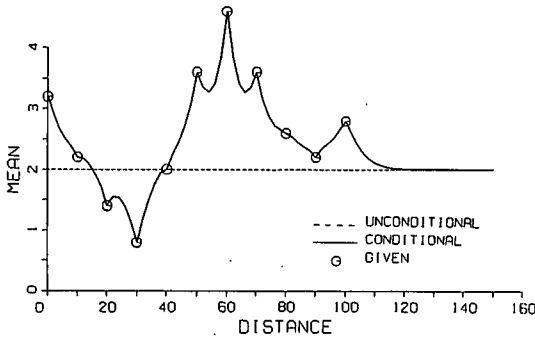
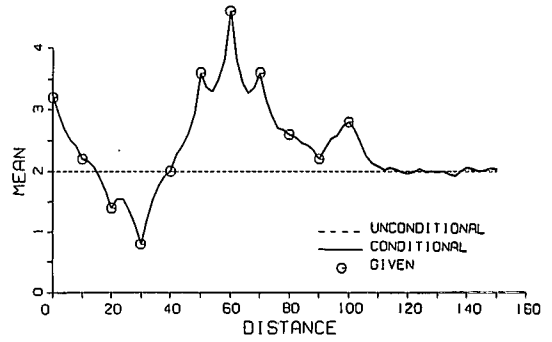


Fig.5 Estimated error variance for a one-dimensional discrete lognormal field with mean $m(X) = 2(1 + |\sin \frac{\pi}{50} X|)$ and with the covariance $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{4}}$

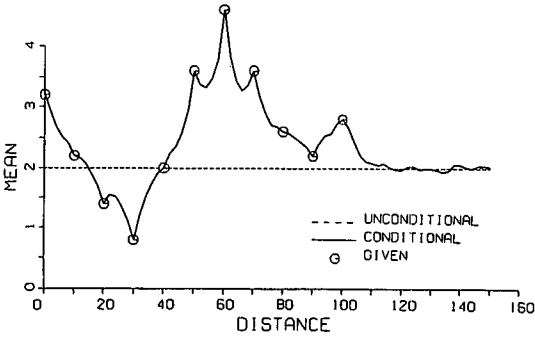
$m(X)$ と無条件分散 $\sigma^2(X)$ から得られた無条件確率密度関数、実線は Fig.1(a) の条件付平均値、Fig.2(a) の条件付分散から求められる条件付確率密度関数の理論



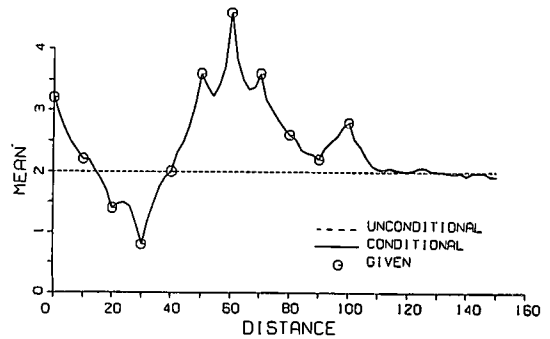
(a) Analytical solution



(b) Cholesky decomposition method



(c) Spectral decomposition method



(d) Step-by-step expanded method

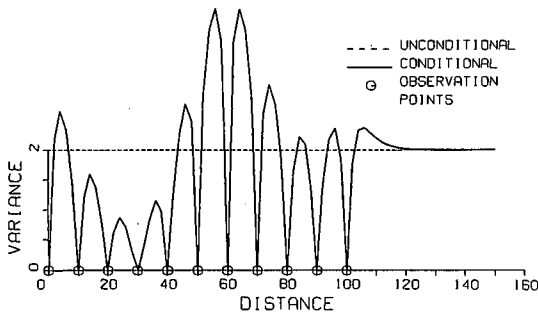
Fig.6 Optimum estimate (conditional mean) for a one-dimensional discrete lognormal field with mean $m(X) = 2$ and with the covariance $C(X, Y) = 2e^{-\frac{|X-Y|}{4}}$

解である。また、○線は漸次拡張方式の条件付シミュレーション結果 (Fig.1(d), Fig.2(d)) による条件付確率密度関数である。空間位置によらず、シミュレーションによって得られた条件付確率密度関数は理論解とほぼ一致している。このことはここで提案した条件付シミュレーション法の有効性を意味するものである。

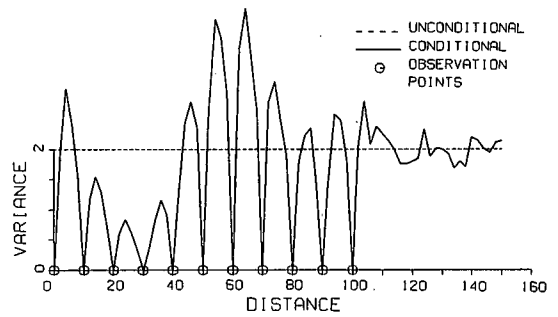
Fig.1よりわかるように、 $X = 18, 36, 84$ の地点における条件付平均値は無条件平均値よりも小さく、 $X = 6, 54, 64$ の地点では逆の傾向を示している。前者の地点は無条件平均値よりもかなり小さな観測値をもつ観測点の近傍に位置する。従って分布形は観測値に引きずられるため、無条件確率密度関数に比べると、条件付確率密度関数の形状は $W(X)$ の値の小さい方に変形している。また分布のピーク付近や裾野において、密度関数の値に差が生じていることがわかる。一方、無条件平均値よりも大きな観測値を有する観測点近傍 ($X = 54, 64$) では逆に、条件付確率密度関数の形が $W(X)$ の値の大きい方に変形している。 $X = 6$ の地点では、Fig.1, Fig.2に見られるように条件場ならびに無条件場の統計量(平均値, 分散)に極端な差が見られないため、確率密度関

数はそれほど変形していない。このような傾向が生じるのは、観測情報に依存して条件付確率密度関数が得られるためである。つまりこのことは最適推定値あるいは条件付平均値、条件付分散が観測値に依存することを意味する。一方、正規確率率場の条件付分散は観測値に従属せず独立である。このことから対数正規分布のような非正規確率場において条件付分散は推定誤差を陽に因る指標として適さないと考えられる。

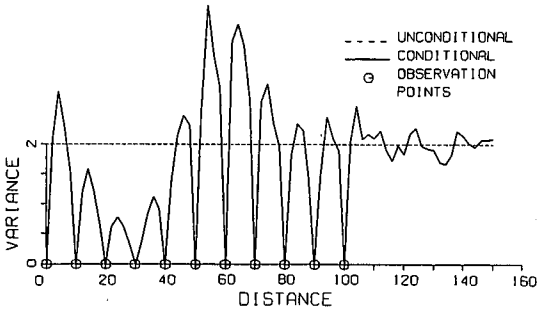
条件付確率場における推定精度を陽に明示する指標は、推定誤差評価関数の定義によると、条件付分散よりもむしろKrigingによる推定誤差分散である。何故ならば前述したように、推定誤差分散は観測値に依存せず、観測点の空間位置によって一意的に決まるからである。このことを示すために、ケース1の推定誤差分散をFig.5に図示した。同図より、1)内挿地点の推定誤差分散は無条件場の分散よりも大きくならないこと、2)観測点より離れた遠方場の推定誤差分散は無条件分散に漸近していること、3)観測点と推定点が一致すると、推定誤差分散は0になること、4)推定誤差分散は観測値とは独立に観測位置のみに左右されることがわかる。



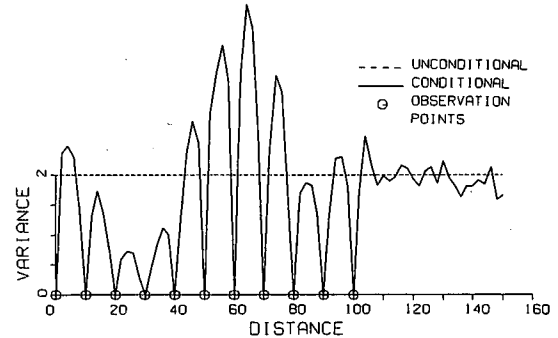
(a) Analytical solution



(b) Cholesky decomposition method



(c) Spectral decomposition method



(d) Step-by-step expanded method

Fig.7 Conditional variance for a one-dimensional discrete lognormal field with mean $m(X) = 2$ and with the covariance $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{4}}$

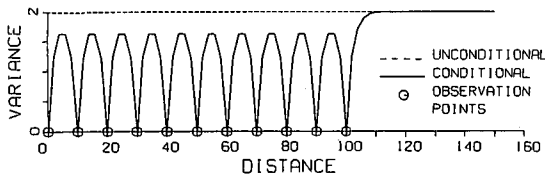


Fig.8 Estimated error variance for a one-dimensional discrete lognormal field with mean $m(X) = 2$ and with the $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{4}}$

条件付分散と推定誤差分散が一致しないこと、ならびに両者に顕著な特徴が見られることは既往の正規確率場で知られていたことは異なる新たな知見であり、本論文の成果と言える。

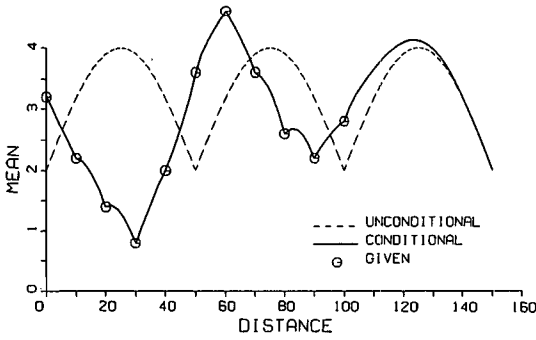
均一場のケース2に対する最適推定値すなわち条件付平均値がFig.6、条件付分散がFig.7である。Fig.6はFig.1に、Fig.7はFig.2に対応するもので、理論解、3つの条件付シミュレーションによる結果を含んでいる。Fig.8にはFig.5との比較のために推定誤差分散を示す。

ケース2における条件付平均値、条件付分散、推定誤差分散はケース1と同様の特徴を示している。すなわち、1)条件付平均値は無条件平均値に近づくように補

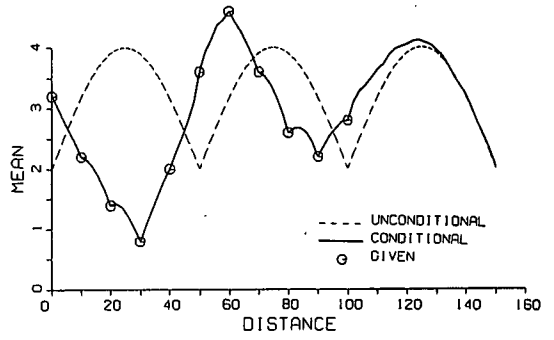
間されること、2)条件付分散は観測値に依存して推定される条件付平均値の大きさに左右され、無条件分散よりも大きくなることもあること、3)観測点から離れた遠方場の条件付特性値(条件付平均値、条件付分散)は無条件特性値に近づくこと、4)条件付分散と推定誤差分散は異なることがわかる。条件付分散は条件付平均値に依存するため、Fig.7の条件付分散はFig.2のそれよりも大きくなっている。一方で、ケース1とケース2では平均場が異なるが、得られた推定誤差分散には極端な差異が見られない。ここでは割愛したが、Fig.3と同様に条件付変動係数は無条件変動係数を超えることはない。観測情報に基づく、事後確率場の不確定性の減少程度は変動係数によって評価される。理論解はシミュレーション結果とほぼ一致しており、この場合もケース1と同様に本研究で提案した条件付シミュレーション法の妥当性が理解できる。

ケース1、ケース2の比較からわかるように、対数正規Kriging法ならびにCPDF法は確率場の空間依存性すなわち均一・非均一性によらず成立する手法であり、事前確率場に対して観測結果を用いて事後更新確率場を求める数理技法であると言える。

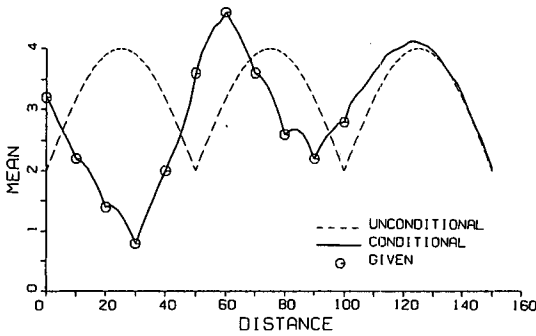
ケース3ではケース1に比べて共分散特性の相関距離



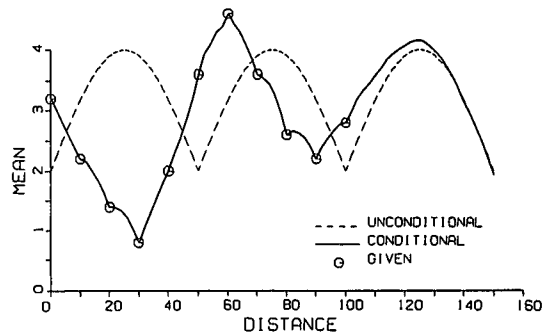
(a) Analytical solution



(b) Cholesky decomposition method

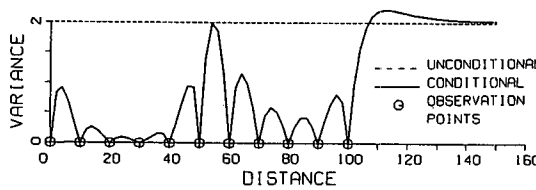


(c) Spectral decomposition method

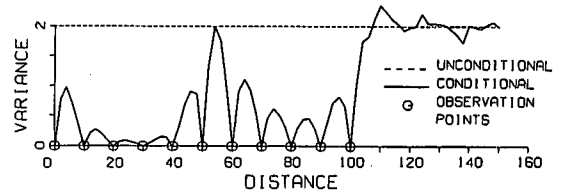


(d) Step-by-step expanded method

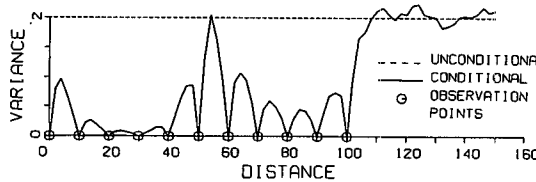
Fig.9 Optimum estimate (conditional mean) for a one-dimensional discrete lognormal field with mean $m(X) = 2(1 + |\sin \frac{\pi}{50} X|)$ and with the covariance $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{10}}$



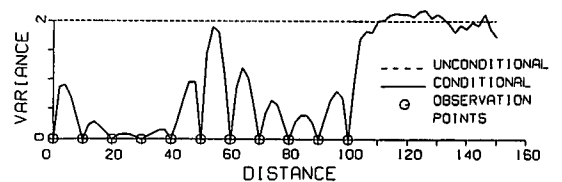
(a) Analytical solution



(b) Cholesky decomposition method



(c) Spectral decomposition method



(d) Step-by-step expanded method

Fig.10 Conditional variance for a one-dimensional discrete lognormal field with mean $m(X) = 2(1 + |\sin \frac{\pi}{50} X|)$ and with the covariance $C(X, Y) = 2e^{-\frac{\|X-Y\|}{10}}$

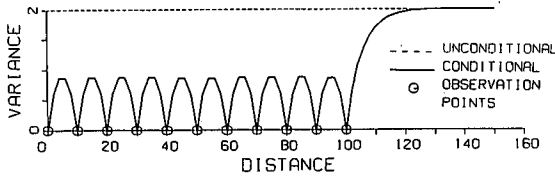


Fig.11 Estimated error variance for a one-dimensional discrete lognormal field with mean $m(X) = 2\left(1 + \left|\sin\frac{\pi}{50}X\right|\right)$ and with the covariance $C(X, Y) = 2e^{-\frac{11|X-Y|}{10}}$

を大きくしている。すなわち2点間距離が同一であっても、ケース3の相関性はケース1のときよりも高くなる。このときの条件付平均値がFig.9, 条件付分散がFig.10, 推定誤差分散がFig.11である。この場合も理論解は3つの条件付シミュレーション法による結果とほぼ同じ傾向を示している。

条件付平均値, 条件付分散, 推定誤差分散についてはこれまで述べてきた性質が同様に見られる。ケース1に比べて2地点間の相関性が高くなるため, 補間点では観測点における観測値の影響を受け易くなる。その結果, 観測点間をほぼ直線で結ぶように内挿値を得ていることがFig.9より理解できる。このためFig.9の条件付平均値回りのばらつきが減少し, 条件付分散値はFig.2に示す値よりも小さくなったと言える。この場合の事後確率場の条件付確率密度関数はFig.4の結果(実線, ○線)よりも分布の広がりが狭くなる。言い換えると, 条件付確率場における推定の確からしさは事前に設定した確率分布特性に左右されることを意味する。このとき, Fig.11の推定誤差分散値はFig.5の値よりも小さくなっているため, 更新された事後確率場の推定精度は高い。

8. おわりに

空間的に変動する確率場において単に観測値を用いて未観測点の物理量を推定する確率論的補間手法の一つとして, Kriging法が挙げられる。このKriging法は歴史的に見れば鉱山学におけるデータ解析技法として開発されたものであり, 今日では種々の分野で応用されている。しかしながら既往の研究成果の中には, Kriging法の歴史的な経緯, 種々提案されているKriging手法の相違点, 確率論的補間手法としての本質的な意味, Kriging法とCPDF法の関係, 条件付シミュレーションに当たったの注意点, 更新理論としてのKriging法の位置づけなど

に関して, 必ずしも十分に理解した上でこの概念を用いていない場合がある。

Kriging法は確率論的補間手法であるので, まず物理量の確率分布を推定することが重要である。Matheronの提案以来使用されているKrigingは線形不偏分散推定を規範としているので, 確率論的には正規分布を対象にした手法と言える。条件付正規確率場を厳密に表現する手法にも係わらず, 非正規分布に従う物理量に対してMatheron以来のKriging手法をそのまま適用しているのは論理的に正しいとは言えない。また概念の異なる色々なKriging手法があるにも係わらず, 対象とする問題設定に適した手法が用いられていない研究成果も数多く見られる。さらには条件付対数正規確率場に不対応な理論展開・考え方を適用した例がある。

こうしたことから, 本論文では始めに, Kriging法の歴史的経過, 意味, 理論的背景, 従来よく用いられてきた正規確率場のKriging法とCPDF法との関係などを整理した上で, 本題を実施する上での問題点をとりまとめた。

次に本研究では, 非正規分布の一つとして重要な対数正規分布を対象にして, 不偏推定・最小誤差共分散規範に基づくKriging理論を展開し, 最適推定値と推定誤差共分散の式を示した。さらにCPDF法に基づいて条件付平均値, 条件付共分散の式を誘導した上で, Kriging法とCPDF法の関係について議論した。またCPDF法に基づいた効率的な漸次拡張方式による条件付シミュレーション法を提案し, 古典的な多点同時シミュレーション法と比較した。

理論展開ならびに数値分析より, 1)Krigingによる最適推定値は条件付平均値に等しいこと, 2)Krigingによる推定誤差共分散は条件付共分散と異なること, 3)推定誤差共分散は観測位置に左右されるが, 条件付共分散は観測値に依存すること, 4)条件付分散は無条件分散よりも大きくなることもあるが, 条件付変動係数は無条件変動係数を超えることはないこと, 5)サンプル場は条件付平均値, 条件付共分散によって発生することができ, 推定誤差共分散は条件付シミュレーションに関与しないこと, 6)漸次拡張方式による条件付シミュレーション法はコレスキー分解やスペクトル分解を用いた相関同時シミュレーション法に比べて効率的であることなど, 新たな知見が明らかになった。

Kriging法によれば, 2乗誤差平均評価関数の最小解である最適推定値が得られる。そのためKriging法では誤差分散の最小化が推定に当たって唯一の規範となる。2乗誤差ではなく, 絶対誤差, 一様誤差などの評価規範に従った推定計算も可能である。しかしながらKriging法を適用するならば, 本論で展開した推定結果は絶対的に正しいものになる。

条件付対数正規確率場の対数をとれば正規確率場になるため、既往のKriging理論をそのまま踏襲すると、正規確率場における最適推定値と推定誤差分散が求められる。このことから徹えて元の対数正規確率場で議論する必要はないという考え方をもつかもしれない。しかしながら現実の確率場における物理量の振る舞いをKriging法を用いて分析することが目的であれば、このような考え方は正当ではない。何故ならば、Kriging法の定義によると、条件付対数正規確率場において不偏最小誤差分散推定値を求めることが推定の基本だからである。このようなことから、対象としている場で確率論的補間を実施することを目的とするならば、本論のような展開式を採用する必要のあることは理論的に自明である。

参考文献

- 1) Cressie, N. A. C.: *Statistics for Spatial Data*, Revised Edition, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- 2) 野田 茂, 星谷 勝: 条件付対数正規確率場の同定, 第9回日本地震工学シンポジウム(1994)論文集, Vol.1, pp.247-252, 1994年12月.
- 3) Gauss, C. F. (飛田武幸, 石川耕春共訳): 誤差論, 紀伊國屋書店, 1981年5月.
- 4) Wiener, N.: *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*, The Technology Press of M.I.T. and John Wiley & Sons, New York, 1949.
- 5) Matheron, G.: *Les Variables Régionalisées et Leur Estimation*, Masson et Cie, Paris, 1965.
- 6) Gandin, L. S.: *Objective Analysis of Meteorological Fields*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1965.
- 7) Guarascio, M., David, M. and Huijbregts, C. (Editors): *Advanced Geostatistics in the Mining Industry*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1976.
- 8) David, M.: *Geostatistical Ore Reserve Estimation*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1977.
- 9) Journel, A. G. and Huijbregts, C. J.: *Mining Geostatistics*, Academic Press, New York, 1978.
- 10) Ripley, B. D.: *Spatial Statistics*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- 11) Marsily, G. de: *Quantitative Hydrogeology; Ground-water Hydrology for Engineers*, Academic Press, Orlando, 1986.
- 12) Davis, J. C.: *Statistics and Data Analysis in Geology*, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- 13) Matheron, G. and Armstrong, M. (Editors): *Geostatistical Case Studies*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
- 14) David, M.: *Handbook of Applied Advanced Geostatistical Ore Reserve Estimation*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1988.
- 15) Hohn, M. E.: *Geostatistics and Petroleum Geology*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1988.
- 16) Isaaks, E. H. and Srivastava, R. M.: *Applied Geostatistics*, Oxford University Press, New York, 1989.
- 17) Armstrong, M. (Editor): *Geostatistics*, Vol.2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- 18) Webster, R. and Oliver, M. A.: *Statistical Methods in Soil and Land Resource Survey*, Oxford University Press, New York, 1990.
- 19) Christakos, G.: *Random Field Models in Earth Sciences*, Academic Press, San Diego, 1992.
- 20) Deutsch, C. V. and Journel, A. G.: *GSLIB Geostatistical Software Library and User's Guide*, Oxford University Press, New York, 1992.
- 21) Soares, A. (Editor): *Geostatistics Tróia'92*, Vols.1 and 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- 22) 星谷 勝: 条件付確率場のシミュレーション理論, 土木学会論文集, No.459/I-22, pp.113-118, 1993年1月.
- 23) 星谷 勝, 桑名智英: 条件付確率場のシミュレーション理論の検証, 土木学会論文集, No.477/I-25, pp.93-96, 1993年10月.
- 24) Shinozuka, M. and Zhang, R.: Equivalence between kriging and CPDF methods for conditional simulation, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.122, No.6, pp.530-538, June 1996.
- 25) Hoshiya, M.: Kriging and conditional simulation of Gaussian field, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.121, No.2, pp.181-186, February 1995.
- 26) Kameda, H. and Morikawa, H.: Conditioned stochastic processes for conditional random fields, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.120, No.4, pp.855-875, April 1994.
- 27) Rubinstein, R. Y.: *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley & Sons, New York, 1981.

(1998. 6. 8 受付)

EQUIVALENCE BETWEEN LOGNORMAL KRIGING AND CPDF METHODS FOR INTERPOLATION AND EXTRAPOLATION

Shigeru NODA and Masaru HOSHIYA

In a conditional lognormal stochastic field, Kriging method produces the optimum estimator and error covariance, whereas the conditional mean and conditional covariance are obtained from the conditional probability density function (CPDF) method. What is the inherent difference between these two methods? It is found that: 1) the optimum estimator is equal to the conditional mean; 2) the estimated error covariance is dependent on the locations of sample observation, but independent of the values of observed data; and 3) the conditional covariance does not coincide with the estimated error covariance. The optimum estimator and conditional mean prove to be completely equivalent. Conditional simulation can be carried out by use of not the Kriging method but the CPDF method.