

密な砂地盤における長方形基礎の支持力特性の 分岐理論による考察

山川 優樹¹・池田 清宏²・高橋 加代子³・樋口 雄一⁴・川崎 宏二⁵

¹ 学生員 日本学術振興会特別研究員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)

² 正会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

³ 正会員 国際航業株式会社 東日本事業本部 (〒102-0075 千代田区三番町 5 番地)

⁴ 正会員 大成建設株式会社 技術研究所 (〒245-0051 横浜市戸塚区名瀬町 344-1)

⁵ 正会員 大成建設株式会社 技術本部技術企画部

基礎の支持力問題や斜面の安定問題といった地盤工学の応用分野では、その簡便性や信頼性から、極限解析に基づく算定式が古くから用いられてきた。しかし近年、より合理的な評価のためには、進行性破壊や分岐の考慮が必要であるとの認識が広まりつつある。本論文は、遠心載荷実験を行うことにより基礎の支持力特性を求め、そのメカニズムを分岐理論により明らかにするものである。基礎の支持力特性の3次元効果について考察すると共に、漸近的分岐理論の手法を用いて、荷重-変位曲線をもとに分岐現象の介在を検証し、基礎形状などによる強度や破壊モードの変動が分岐現象として説明可能であることを示す。

Key Words : *bifurcation, rectangular footing, bearing capacity, centrifuge model test, failure modes, three-dimensional effects*

1. はじめに

砂や粘土などの地盤材料は、鋼材などの延性材料と比べて変形が比較的小さな段階から、微細な亀裂やすべりが発生し、その進展により大規模なすべり面を形成し、全体の崩壊に至るといって、進行的な破壊プロセスを示すことがよく知られている。こうした地盤の進行性破壊は、ある変形形態が不安定化することによって別の変形形態へと遷移する現象、すなわち分岐現象であると捉えることができる。

近年、地盤材料の分岐に関する研究が盛んに行われている。その先駆的な研究として、Hill and Hutchinson¹⁾ や Rudnicki and Rice²⁾ は、解の唯一性を検討することにより、せん断帯発生条件、つまり分岐条件を理論的に記述している。その後、数値解析手法の急速な発達により、より実現象に近い条件下での力学挙動のシミュレーションが行われるようになった。Asaoka and Noda³⁾ は、水/土骨格連成系の分岐現象に関して、実験と数値解析の両側面からの研究を行っている。Yatomi et al.⁴⁾ は、せん断帯発生、さらには拡散モード発生のシミュレーションに成功している。小林⁵⁾ は、水/土連成変形・安定解析法を用いて、地盤材料の漸近的な局所変形モードの遷移について考察している。このように、地盤材料の破壊メカニズムには分岐が密接に関わっていることが明らかになってきているが、実挙動と解析によるシミュレーションとの間には依然ギャップが存在するのが現状であり、実験で得られる応力-ひずみ(荷

重-変位) 曲線をもとにして、どのような分岐現象であるかを記述する手法の開発が重要な段階であると言えよう。

著者らは、分岐挙動の定性論^{6),7)}を開発しており、漸近的分岐理論の手法を用いて、砂の三軸圧縮供試体の分岐挙動について考察している⁸⁾。本論文では、より実際の例として、基礎の支持力問題を取り上げ、本手法の適用可能性と妥当性を検証するものである。

地盤工学的に重要な、斜面の安定問題や基礎の支持力問題では、予めすべり面を仮定し、極限つり合い状態での安定性を検討する手法が古くから用いられてきている。基礎の支持力問題では、地盤材料を等方的な剛塑性体と仮定すれば、二次元帯基礎の極限支持力に対する算定式が Terzaghi などにより与えられている。実際には、支持力公式に各種修正係数を取り入れることにより、材料パラメータや基礎の形状、形式といった要因を考慮するという手法が一般に用いられており、これらの修正係数の与え方が研究対象として残されている。また最近では、より応用性の強い問題についての研究も盛んであり、傾斜地近傍の基礎⁹⁾、偏心荷重を受ける基礎¹⁰⁾、繰返し荷重を受ける基礎¹¹⁾の問題などに関する議論が活発に行われている。

しかしながら、地盤材料は異方性や拘束圧依存性を有するなど、単純に理想化できないことや、必ずしも仮定したすべり面で全般せん断破壊を生じるとは限らないことなどの理由から、近年、より合理的に極限支

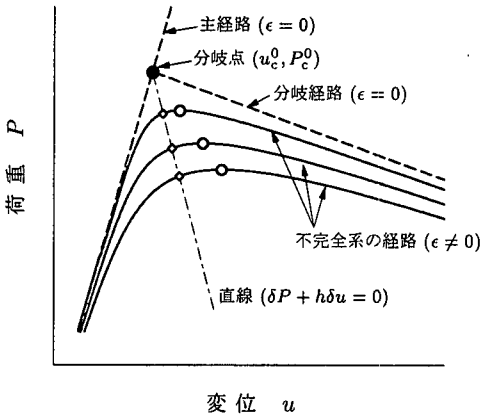


図-1 分岐の一般図

持力を評価するためには、進行性破壊のメカニズムの解明が不可欠であるとの認識が地盤工学の応用分野でも広まりつつある。

そこで本論文では、密な砂地盤における長方形基礎の遠心載荷実験を対象とし、基礎の形状、寸法が極限支持力に及ぼす影響や、地盤の破壊モードに対する3次元効果について考察する¹。また、漸近的分岐理論に基づく手法を適用し、支持力特性や地盤の破壊挙動に対する分岐現象の介在を検証する。

2. 理論

(1) 分岐方程式・初期不整合度則

本節では、文献⁷⁾を再構成することにより、漸近的分岐理論の成果を紹介する。十分滑らかな非線形のつり合い式

$$F(u, P, \epsilon) = 0 \quad (1)$$

を考える。ここで、 $u = [u_1, \dots, u_N]$ は N 次元の変位ベクトル、 P は荷重パラメータ、 ϵ は初期不整合数である。さらに、以下のように定義しておく。

- (u_c^0, P_c^0) : 完全系の分岐点、図-1 に (●) で示す。
- (u_c, P_c) : 不完全系の極大点、図-1 に (○) で示す。

完全系 ($\epsilon = 0$) の安定な主経路上の最初の分岐点 (u_c^0, P_c^0) を考える。ここで、上付き添字 (0) は完全系であることを、下付き添字 (c) は特異点での値であることをそれぞれ表す。分岐点において、この系の接線剛性行列 $J_c^0 = (\partial F / \partial u)_c^0$ は特異となる。また、接線剛性行列 J_c^0 の核空間の次元によって、単純分岐点、2重分岐点などと呼ぶ。この接線剛性行列 J_c^0 の固有ベクトル $\{\eta_i \mid i = 1, \dots, N\}$ を、

$$J_c^0 \eta_1 = 0, \quad J_c^0 \eta_i \neq 0, \quad i = 2, \dots, N \quad (2)$$

というように、 η_1 がゼロ固有値に対応するよう選ぶ。不完全系 ($\epsilon \neq 0$) のつり合い点 (u, P) と完全系の分岐点 (u_c^0, P_c^0) の間の増分 $(\delta u, \delta P)$ を、

$$\delta u = u - u_c^0 = \sum_{j=1}^N w_j \eta_j, \quad \delta P = P - P_c^0 \quad (3)$$

と定義する。ここで、 w_j は固有ベクトル η_j 方向の増分変位を表す。

完全系の分岐点 (u_c^0, P_c^0) と不完全系のつり合い点 (u, P) の2点について式(1)の差を取ると、増分つり合い式

$$G_1(w, \delta P, \epsilon) = a_1 \delta P + b_1 \epsilon + c_1 w^2 + \text{h.o.t.} = 0, \quad (4)$$

$$G_i(w, \delta P, \epsilon) = (\lambda_i)_c^0 w_i + a_i \delta P + b_i \epsilon + c_i w^2 + \text{h.o.t.} = 0, \quad i = 2, \dots, N \quad (5)$$

が得られ、 G_1 と G_i ($i = 2, \dots, N$) とは異なる形の式となる。ここで、 $(\lambda_i)_c^0$ は J_c^0 の第 i 番目の固有値、 a_i, b_i, c_i は定数、h.o.t. は高次項である。また w_1 については、 w_i ($i = 2, \dots, N$) とは異なる性質を持つため、 $w \equiv w_1$ と表記し、 G_1 の w のべき乗項の先頭項である w^2 の項は表記してある。さらに、Liapunov-Schmidt reduction¹²⁾ と呼ばれる手法により、式(4)、(5)から passive coordinates である w_i ($i = 2, \dots, N$) を消去すると、分岐 (特異) モードに対応する増分変位 w で表した分岐方程式が、

$$\bar{G}(w, \delta P, \epsilon) = A_{110} w \delta P + A_{300} w^3 + A_{001} \epsilon + \text{h.o.t.} = 0 \quad (6)$$

と求まる。ここで、 $A_{110}, A_{300}, A_{001}$ は定数である。

ところで、実験で一般に計測されるのは、 $P-w$ 曲線ではなく、 $P-u$ 曲線である。ここで、ある $i = i^*$ について $u \equiv u_{i^*}$ とする。式(6)をこのような計測される変位 u による表現にするため、式(3)、(5)より、 $\delta u \equiv u_{i^*} - (u_{i^*})_c^0$ を w と δP を用いて表わすと、

$$\delta u = \sum_{j=1}^N w_j \eta_{i^*j} = \eta_{i^*1} w + r \delta P + s w^2 + \text{h.o.t.} \quad (7)$$

となる。ここで、 η_{i^*j} は固有ベクトル $\eta_j = [\eta_{1j}, \dots, \eta_{Nj}]$ の第 i^* 番目の成分であり、また、

$$r = - \sum_{j=2}^N \frac{\eta_{i^*j} a_j}{(\lambda_j)_c^0}, \quad s = - \sum_{j=2}^N \frac{\eta_{i^*j} c_j}{(\lambda_j)_c^0} \quad (8)$$

は定数である。式(7)中の w の項の係数 η_{i^*1} が消失するか否かによって δu を以下のように分類できる。

- (a) $\eta_{i^*1} = 0 \dots \delta u$ は w^2 のオーダー
- (b) $\eta_{i^*1} \neq 0 \dots \delta u$ は w のオーダー

前者は、変位 δu が

$$w \rightarrow -w \quad (10)$$

という変換に対して不変、つまり δu がこの変換に関して対称性を持っていることに対応する。地盤材料試験で計測される変位は一般にこの対称性を持つ⁸⁾ことから、

¹ 一般に破壊とは、局所的なものから大局的なものまでを指すことがあるが、ここでは荷重-変位曲線のピークを経て荷重不安定を引き起こすすべり面発生等を指している。

式(9)の(b)の場合の分岐方程式の誘導とその適用例については、文献¹³⁾に譲ることとし、本論文では(a)の場合について、増分変位 δu の表現による分岐方程式を誘導する。

(a)の場合、式(6)、(7)より、 δu 、 δP は、

$$\begin{cases} \delta u = -r \left(\frac{A_{300}}{A_{110}} w^2 + \frac{A_{001}\epsilon}{A_{110}w} \right) + sw^2, \\ \delta P = -\frac{A_{300}}{A_{110}} w^2 - \frac{A_{001}\epsilon}{A_{110}w} \end{cases} \quad (11)$$

というように、 w によるパラメータ表示ができる。これより w を消去することにより、分岐方程式

$$\pm \sqrt{\frac{1}{s} \left(\delta u - \frac{\delta P}{E} \right)} \left[\delta P + \frac{A_{300}}{A_{110}} \frac{1}{s} \left(\delta u - \frac{\delta P}{E} \right) \right] + \frac{A_{001}}{A_{110}} \epsilon + \text{h.o.t.} = 0 \quad (12)$$

を得る。ここで $\frac{1}{s} \left(\delta u - \frac{\delta P}{E} \right) \geq 0$ であり、 $E \equiv 1/r$ は完全系 ($\epsilon = 0$) の主経路の勾配である。完全系的主経路は自明解 $w = 0$ に対応する。ここで、

$$p = \frac{A_{300}}{A_{110}} \frac{1}{s}, \quad q = \frac{A_{001}}{A_{110}} |s|^{1/2} \quad (13)$$

と置いて分岐方程式(12)を書き改めると、

$$\sqrt{\text{sign}(s) \left(\delta u - \frac{\delta P}{E} \right)} \left[\delta P + p \left(\delta u - \frac{\delta P}{E} \right) \right] \pm q\epsilon + \text{h.o.t.} = 0 \quad (14)$$

を得る²。ここで、 $\text{sign}(s)$ は s の符号を表し、 p, q は定数である。

ところで、不完全系 ($\epsilon \neq 0$) の経路の極大点における増分荷重 δP_c は、式(11)とその極値条件式

$$\frac{d(\delta P)}{dw} = -\frac{2A_{300}}{A_{110}} w + \frac{A_{001}\epsilon}{A_{110}w^2} = 0 \quad (15)$$

より、

$$\delta P_c = -\text{sign}(s) \frac{3p^{1/3} q^{2/3}}{2^{2/3}} \epsilon^{2/3} + \text{h.o.t.} \quad (16)$$

と与えられ、これは、初期不整 ϵ による強度の低下量 $|\delta P_c|$ に関する Koiter の 2/3 乗則にほかならない。

続いて、図-1 に一点鎖線で示すような、完全系の分岐点 (u_c^0, P_c^0) を通る直線

$$\delta P + h\delta u = 0 \quad (17)$$

を考えることにより、式(16)を一般化することを考える。式(17)を分岐方程式(14)に代入すると、

$$\delta u_{|h} = \gamma \epsilon^{2/3} + \text{h.o.t.} \quad (18)$$

を得る。ここで $\delta u_{|h}$ は、式(17)の直線と不完全系の経路との交点(図-1に◇)で示すと完全系の分岐点との間の増分変位であり、また、

$$\gamma = \frac{q^{2/3}}{\text{sign}(s) \left(1 + \frac{h}{E} \right)^{1/3} \left[-h + p \left(1 + \frac{h}{E} \right) \right]^{2/3}} \quad (19)$$

である。式(16)、(18)から初期不整変数 ϵ を消去すると、一般化された漸近則

$$\delta P_c = -\gamma^* \delta u_{|h} + \text{h.o.t.} \quad (20)$$

を得る。ここで、

$$\gamma^* = \frac{3}{2^{2/3}} \left[p \left(1 + \frac{h}{E} \right) \right]^{1/3} \left[-h + p \left(1 + \frac{h}{E} \right) \right]^{2/3} \quad (21)$$

である。式(20)は、 $\delta u_{|h}$ と δP_c という2つの物理量の比例関係を示しており、言い換えれば、異なる初期不整 ϵ に対する $(\delta u_{|h}, \delta P_c)$ が全て勾配 $-\gamma^*$ の原点を通る直線に乗ることを意味する。

(2) 分岐点探査法

前節で誘導した分岐方程式(14)及び一般化した漸近則(20)を、実験で得られた荷重-変位曲線に適用し、その系が分岐により支配されていることを検証するにあたり、式中のパラメータ p, q, ϵ, E の値、及び完全系の分岐点の位置 (u_c^0, P_c^0) を評価する必要がある。同一条件で行われた一連の実験により得られた、数ケースの荷重-変位曲線に対して、これらのパラメータを決定する手法とその適用例については文献⁸⁾に述べられているので、ここでは割愛することとし、本節では、1ケースの荷重-変位曲線からこれらの値を決定する手法である分岐点探査法について述べる。

$u-P$ 面上のある点を分岐点と仮定し、この点を通る直線(17)を考える。この直線と実験曲線との交点より、仮定した分岐点からの増分変位 $\delta u_{|h}$ が求められる。従って、勾配 h が ($h_i | i = 1, 2, \dots$) と異なる複数の直線を考えることにより、増分変位 ($\delta u_{|h_i} | i = 1, 2, \dots$) が各々求められる。さて、漸近則(20)が任意の h_i について成り立つことに着目し、複数の $h = h_1, h_2, \dots$ に対する $\delta u_{|h}$ を用いることにより、完全系の分岐点 (u_c^0, P_c^0)、及びパラメータ p, E の値を決定することができ、更に式(18)より $q\epsilon$ の値も決定する。こうした決定法に際しては、最小二乗近似的な手法を用いることとなり、種々の手法が考えられるが、ここではその1つを提案する。

異なる勾配 $h = h_i, h_j$ の直線を考え、式(20)の比を取ると、

$$\frac{\delta u_{|h_i}}{\delta u_{|h_j}} = \frac{\gamma_j^*}{\gamma_i^*} = \frac{\left(1 + \frac{h_j}{E} \right)^{1/3} \left[-h_j + p \left(1 + \frac{h_j}{E} \right) \right]^{2/3}}{\left(1 + \frac{h_i}{E} \right)^{1/3} \left[-h_i + p \left(1 + \frac{h_i}{E} \right) \right]^{2/3}} \quad (22)$$

となる。従って、異なる3つの値の h を用いることにより、式(22)からパラメータ p, E の値が求められる。異なる4つの値の h を用いて、3つの値による4通りの組み合わせ (h_2, h_3, h_4), (h_1, h_3, h_4), (h_1, h_2, h_4), (h_1, h_2, h_3) を考えることにより、各々の組み合わせに対し4通りのパラメータ $\{(p_i, E_i) | i = 1, \dots, 4\}$ の値が

² 実際の数値解析には式(14)よりも、パラメータ表示式(11)の方が便利である。

表-1 実験ケース一覧

ケース	遠心 加速度 n (G)	基礎			色砂
		模型 基礎幅 B (cm)	換算 基礎幅 nB (cm)	形状	
A3	1	3	3	$L/B = 3$	
B1-1	10	3	30	円形	あり
B1-2	10	3	30	円形	
B2-1	10	3	30	$L/B = 1$	あり
B2-2	10	3	30	$L/B = 1$	
B2-3	10	3	30	$L/B = 1$	
B3-1	10	3	30	$L/B = 3$	あり
B3-2	10	3	30	$L/B = 3$	
B4	10	3	30	$L/B = 5$	あり
C2-1	30	3	90	$L/B = 1$	
C2-2	18	5	90	$L/B = 1$	
C3-1	30	3	90	$L/B = 3$	
C3-2	30	3	90	$L/B = 3$	
D3	60	3	180	$L/B = 3$	

表-2 実験結果一覧

ケース	相対密度 D_r (%)	ピーク時		残留時		支持力 係数 $N_\gamma S_\gamma$
		応力 q_f (kPa)	沈下量 S/B	応力 q_r (kPa)	ピーク 応力比 q_r/q_f	
A3	87.7	139	0.133	38.2	0.275	590
B1-1	88.0	643	0.149	576	0.896	271
B1-2	86.1	601	0.129	550	0.915	254
B2-1	85.8	729	0.158	576	0.790	306
B2-2	82.0	547	0.154	511	0.934	234
B2-3	87.2	594	0.156	529	0.891	249
B3-1	87.5	862	0.175	475	0.551	362
B3-2	85.0	921	0.203	561	0.609	395
B4	86.6	1,060	0.230	457	0.431	446
C2-1	81.7	1,560	0.193	1,500	0.960	222
C2-2	83.9	1,570	0.186	1,500	0.961	218
C3-1	85.6	1,960	0.214	1,360	0.698	275
C3-2	85.8	2,180	0.195	1,460	0.671	305
D3	82.0	2,870	0.243	2,200	0.765	204

求められる。分岐点の位置 (u_c^0, P_c^0) は、これら 4 通りのパラメータの分散が極小となる点として決定される。

3. 遠心载荷実験

本章では、既往の方法に基づいて実験結果を整理し、遠心模型によるモデル化の妥当性を検証すると共に、支持力問題における 3 次元効果について考察を加える。

(1) 実験の方法

実験は遠心力場および重力場で行う。遠心模型実験では公称半径 2.65m、载荷能力 784kN の遠心装置を用い、遠心加速度 $n = 10 \sim 60G$ (G は重力加速度) を

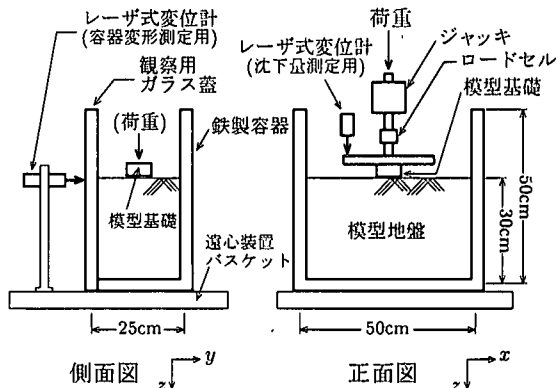


図-2 実験装置

与える。また、重力場における実験は、供試体を遠心装置のバスケット上に固定し、遠心装置を停止した状態で行う。

実験装置の概要を図-2に示す。実験容器は、前面に観察用ガラス蓋を取り付けた剛性の高い鉄製容器で、長さ 50 cm、高さ 50 cm、奥行き 25 cm である。模型基礎は硬質アルミニウムで作成し、基礎幅は標準で 3 cm とし、ジャッキ先端に剛結して载荷する。なお、地盤と基礎の間の摩擦条件を粗とするために、基礎底面に両面テープを用いて砂材料を貼り付ける。

地盤材料は、乾燥状態の豊浦砂 (土粒子密度 $\rho_s = 2.65 \text{ t/m}^3$ 、最大・最小間隙比 $e_{\max} = 0.973$ 、 $e_{\min} = 0.606$) を用いる。模型地盤は、空中落下法により作成する。模型地盤の相対密度が $D_r = 85 \pm 5\%$ となるよう、ホッパーのスリット間隔を制御し、落下高さ 50 cm として、地盤高さ 30 cm まで詰める。なお、破壊形状を測定するケースでは、深さ方向に 2 cm 間隔、厚さ 1 ~ 2 mm で水平に色砂を設置する。

模型基礎、ロードセルおよびレーザ式変位計を取り付けた载荷装置を実験容器にセットし、遠心装置に取り付ける。所定の遠心加速度に達したら载荷装置を起動し、载荷速度 $v = 1.0 \text{ mm/min}$ で模型基礎を押し込む。荷重値をモニタしながら、ピーク値および残留値が確認されたら载荷を停止し、遠心装置を止める。破壊形状を測定するケースでは、载荷終了後に容器下部から水で模型地盤を飽和させ、飽和後に容器下部から排水し、地盤を自立させるために見掛けの粘着力を与える。その後、容器前面蓋を外し、模型地盤をガラス面に平行な鉛直面でスライスし、トレースおよび写真撮影により破壊形状を記録する。

実験ケースの一覧表を表-1に示す。ケース A, B, C, D は基礎幅 $B = 3 \text{ cm}$ の模型基礎を用いて、それぞれ重力場 $n = 1G$ 、遠心力場 $n = 10, 30, 60G$ において行うもので、原型換算の基礎幅 nB が異なる。さらに、換算基礎幅 nB を一定に保ったまま、円形、正方形の異なる形状、および基礎長さ L と基礎幅 B との形状

比が $L/B = 1, 3, 5$ と異なる基礎を用いた実験を行う。

(2) 実験結果

a) 測定・計測結果

模型地盤の相対密度は $D_r = 82 \sim 88\%$ 、平均値 85.4% で目標値の範囲内であった。模型基礎の荷重速度は荷重装置に取り付けた可変抵抗器により調節した。荷重速度はケース毎に多少の変動があったが、平均 1.09 mm/min でほぼ目標値に近かった。

模型容器で最も剛性が小さい前面のガラス蓋部分のたわみ量が大きいと、測定値への影響が懸念されるため、実験中、ガラス面のたわみも同時に測定した。遠心加速度の上昇および模型基礎の荷重によって、たわみ量は増加したが、最大で 0.12 mm 程度であり、 y 方向のひずみ量にして $\epsilon_y = 5 \times 10^{-4}$ 程度であるから、容器の剛性は十分に大きく、容器のたわみの影響は小さいものと考えられる。

b) 実験データの整理

各ケースについて、模型地盤の相対密度 D_r 、ピーク時・残留時それぞれの応力 q_f, q_r 、ピーク応力時の沈下量 S/B 、ピーク時・残留時の応力比 q_r/q_f 、および支持力係数 $N_\gamma S_\gamma$ を表-2 に示す。今回の実験は、砂地盤における根入れの無い浅い基礎を対象としているので、Terzaghi 公式に 3 次元効果を考慮した式のうち、地盤の粘着力による項と基礎根入れ深さによる項を除いた式

$$q_f = \frac{P_f}{BL} = \frac{1}{2} \gamma_d(nB) N_\gamma S_\gamma \quad (23)$$

に基づいて実験結果を整理した。ここで、 q_f は極限支持力 (kPa)、 P_f は荷重 (kN)、 B は模型基礎の幅 (m)、 L は模型基礎の長さ (m)、 γ_d は模型地盤の単位体積重量 (kN/m^3)、 n は模型縮小比 (= 遠心加速度比)、 N_γ は支持力係数、 S_γ は 3 次元効果を表す形状係数である。

また、荷重-沈下量曲線は、沈下量 S を模型基礎幅 B で除して正規化した値 S/B および応力 q を式 (23) に基づいて正規化した値 $2q/\gamma_d nB$ を用いて表記する。

c) 実験結果の信頼性の検証

Modeling of models 手法¹⁴⁾に基づいて相似則を確認することにより、遠心実験によるモデル化の妥当性を検証する。ケース C2-1 は遠心加速度 30 G で、幅 $B = 3 \text{ cm}$ の模型基礎を用いたものであり、ケース C2-2 は遠心加速度 18 G で、幅 $B = 5 \text{ cm}$ の模型基礎を用いたものである。原型換算の基礎幅は共に $nB = 90 \text{ cm}$ 、基礎形状は共に正方形である。それぞれの実験で得られた荷重-沈下量曲線は 図-3 に示すようによく一致しており、また、表-2 に示した各種の値もほぼ一致している。このことから、正方形基礎の場合の相似則はほぼ成立しており、遠心実験によるモデル化は妥当であるといえる。

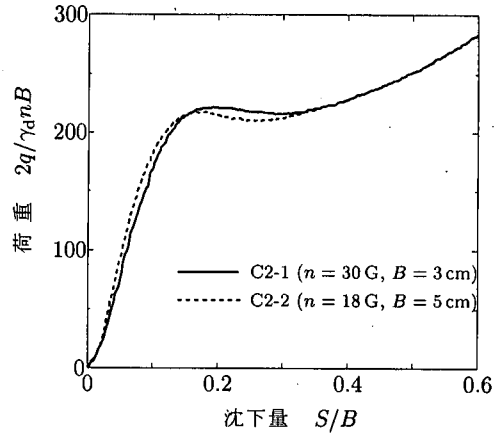


図-3 modeling-of-models 手法による相似則の成立

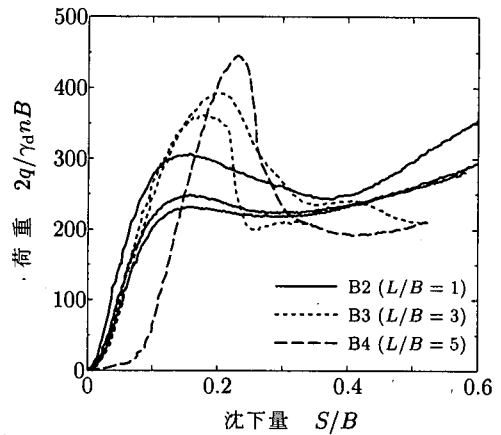


図-4 異なる形状比に対して得られた荷重-沈下量曲線 (換算基礎幅 $nB = 30 \text{ cm}$)

(3) 支持力問題における 3 次元効果

ここでは、原型換算の直径 $nD = 30 \text{ cm}$ の円形基礎を用いたケース B1、原型換算の基礎幅を $nB = 30 \text{ cm}$ に保ち、長方形模型基礎の形状比を $L/B = 1, 3, 5$ と変化させたケース B2, B3, B4、および $nB = 90 \text{ cm}$ に保ち、 $L/B = 1, 3$ と変化させたケース C2, C3 の実験結果を整理することにより、支持力問題における 3 次元効果について考える。

a) 荷重-沈下量曲線への影響

ケース B2, B3, B4 では、原型換算の基礎幅を $nB = 30 \text{ cm}$ に保ち、形状比をそれぞれ $L/B = 1, 3, 5$ と変化させた。これらの実験で得られた荷重-沈下量曲線を 図-4 に示す。ケース B4 の曲線の立ち上がりは、何らかの初期不整の影響が表れたものと考えられるが、ここでは初期補正は行わずに図に示した。いずれのケースにおいても、ピーク荷重発生後は沈下に伴い徐々に荷重は低下するが、更に沈下が進行すると荷重は数度の増減を繰り返しながら緩やかに増加していく。同図より、形状比 L/B の値が大きいくほど、ピーク時の荷重

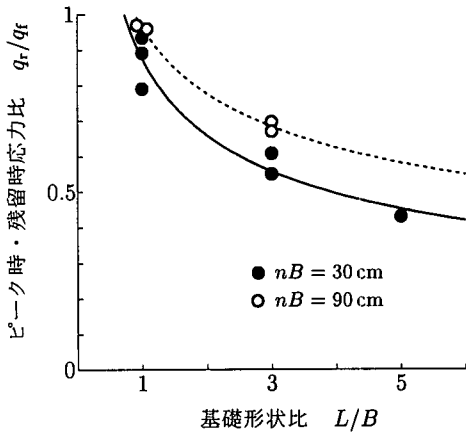


図-5 ピーク時・残留時応力比に対する基礎形状比 L/B の影響

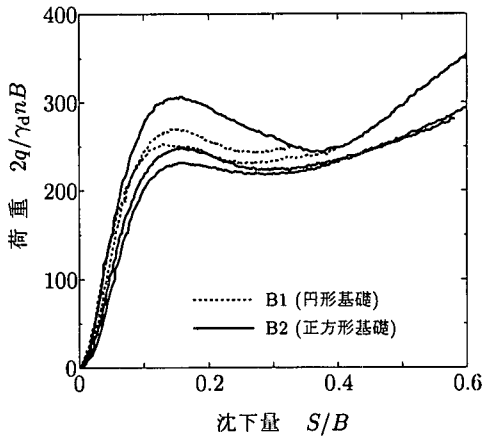


図-6 円形基礎と正方形基礎の荷重-沈下量曲線の比較

および沈下量は大きくなり、明瞭なピークを示すことが分かる。また、同一形状比では曲線は類似した傾向の挙動を示しているが、ピーク時応力は同一形状・同一幅の基礎を用いても多少の変動が見られる。この変動の要因としては、模型地盤作成時のばらつきや不均質さ、あるいはこれにより誘発される破壊モードの変動等が考えられる。しかし表-2 から分かるように、模型地盤の相対密度の変動は小さく、また、これとピーク時応力との間には有意な関係は認められない。従って、ピーク時応力の変動には、模型地盤の初期不整の影響が大きいと推察される。

図-5 は、ピーク時・残留時の応力比 q_r/q_f と形状比 L/B との関係プロットしたものである。同図より、 L/B の増加に伴い、応力比 q_r/q_f が減少すること、つまりピーク荷重後の残留強度の落ち込みが大きいことが分かる。

図-6 には、原型換算の直径が $nD = 30$ cm の円形基礎を用いたケース B1 と、換算基礎幅 $nB = 30$ cm の正方形基礎を用いたケース B2 で得られた荷重-沈

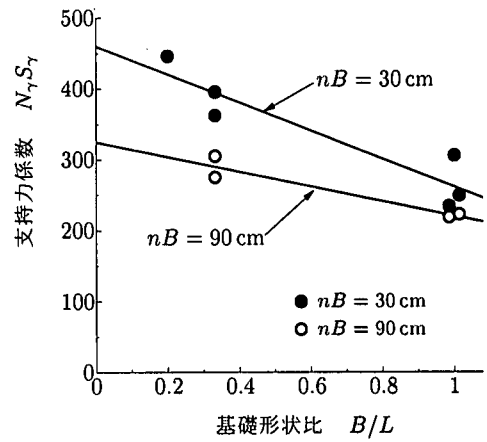


図-7 基礎形状比 B/L と支持力係数 $N_\gamma S_\gamma$ との関係

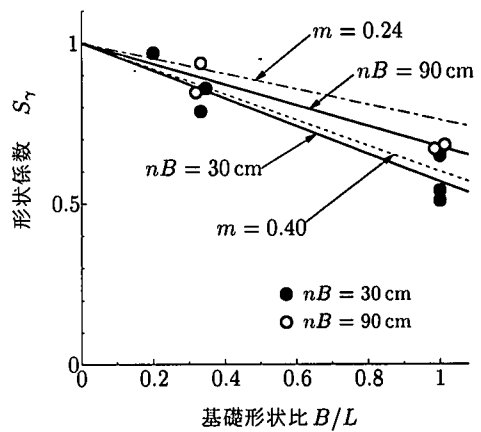
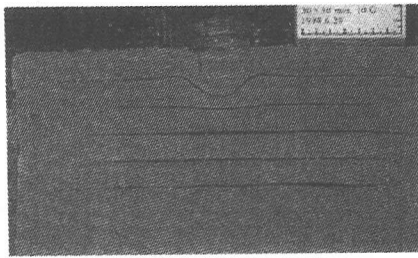


図-8 基礎形状比 B/L と形状係数 S_γ との関係

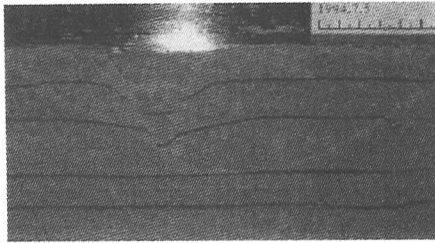
下量曲線を示す。円形基礎と正方形基礎の支持力を比較する際、(a) 基礎幅を一致させる方法と、(b) 載荷面積を一致させる方法が提案されているが、ここでは (a) を採用することとした。両者の荷重-沈下量曲線は類似した傾向を示している。しかし、わずかに辺長の異なる $L/B = 1.25$ の矩形基礎を用いた実験では、円形・正方形基礎の場合とは異なる傾向の曲線を示すことが報告されている¹⁵⁾。従って、正方形基礎の場合には近似的に、円形基礎のような軸対称問題としての扱いが可能と考えられるが、少しでも辺長の異なる矩形基礎の場合には、3次元問題として取り扱う必要がある。

b) 支持力係数への影響

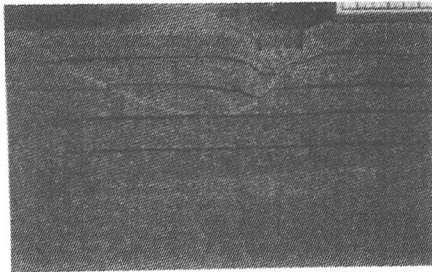
De Beer¹⁶⁾によると、支持力係数 $N_\gamma S_\gamma$ は B/L に比例して減少する。そこで、 $nB = 30$ cm のケース B2, B3, B4、および $nB = 90$ cm のケース C2, C3 について、 B/L と $N_\gamma S_\gamma$ との関係プロットしたものを図-7 に示す。同図より、支持力係数 $N_\gamma S_\gamma$ は B/L に比例して減少し、またそれぞれの回帰直線の傾きは換算基



(a) ケース B2-3 ($L/B = 1$)



(b) ケース B3-2 ($L/B = 3$)

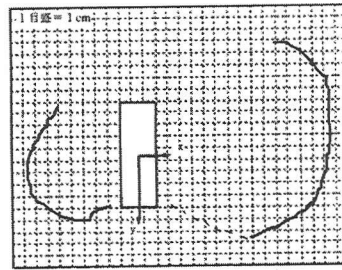


(c) ケース B4 ($L/B = 5$)

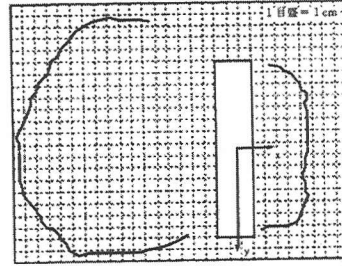
写真-1 鉛直中央断面付近の破壊状況 ($nB = 30$ cm)

礎幅 nB により異なることが分かる。

本論文での実験では 2 次元帯基礎の実験は行っていないが、回帰直線から外挿して $B/L = 0$ ($L \rightarrow \infty$) の時の縦軸の切片値を帯基礎の支持力係数 N_γ と見なすことにすると、 $nB = 30$ cm の場合 $N_\gamma = 460$ 、 $nB = 90$ cm の場合 $N_\gamma = 325$ である。図-8 は B/L と形状係数 S_γ との関係を示したもので、 $S_\gamma = 1 - m(B/L)$ と表せるものと仮定すると、 $nB = 30$ cm の場合 $m = 0.43$ 、 $nB = 90$ cm の場合 $m = 0.32$ となっており、これらの m の値はいずれも、道路橋示方書に記されている値 $m = 0.40$ と近い値となっている。また、岡村ら¹⁷⁾ は、遠心力場における豊浦砂を用いた円形基礎の支持力実験から、換算基礎幅 nB の増加に伴い m が減少し、 $m = 0.24$ に漸近すると報告している。ここでは、 B/L と支持力係数 $N_\gamma S_\gamma$ との比例関係を仮定し、回帰



(a) ケース B3-2 ($L/B = 3$)



(b) ケース B4 ($L/B = 5$)

図-9 地表面におけるせん断面の形状 ($nB = 30$ cm)

直線から求めた m の値を評価した。データ数は少ないが、 m の値は既往の報告とよく一致しており、実験結果の妥当性を検証する上では十分と考えられる。以上の結果より、換算基礎幅 nB によって減少率 m が異なっており、基礎形状あるいは基礎形状比 L/B によって形状係数 S_γ を与える現行の方法に加え、基礎幅 B の影響も考慮に入れる必要があることが分かる。

c) 破壊モード

ケース B2-3, B3-2, B4 の鉛直中央断面の様子を、写真-1 (a), (b), (c) にそれぞれ示す。また、ケース B3-2, B4 の地表面において観察されたせん断面のスケッチを、図-9 (a), (b) にそれぞれ示す。 $L/B = 1$ のケース B2-3 では、明瞭なせん断面は見られず、基礎周辺の地盤が多少隆起する程度であった。これに対し $L/B = 3, 5$ のケース B3-2, B4 では、断面および模型地盤表面に明瞭なせん断面が観察され、また、 L/B の値が大きいくほど、発生したすべり土塊は深さ方向、平面方向ともに大きくなっている。このように、2 次元帯基礎あるいは正方形基礎と対比した場合の、長方形基礎の基礎幅 B による 3 次元効果は、基礎長さ L 方向に垂直な断面におけるすべり面の発生の仕方に最も顕著に表れており、基礎短辺側では前者ほど特徴的な現象は観察されなかった。

このように形状比 L/B によって異なる 2 つの破壊モードが観察されているが、形状比による 3 次元効果の

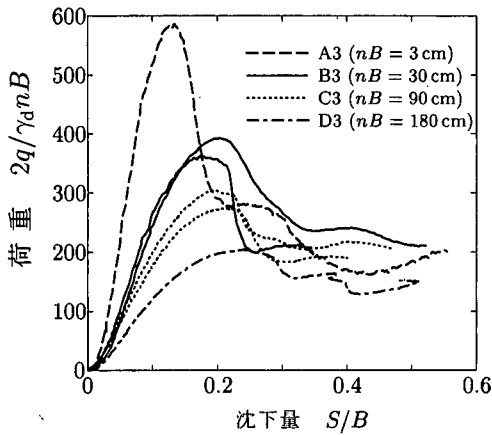


図-10 異なる基礎幅に対して得られた荷重-沈下量曲線 (形状比 $L/B = 3$)

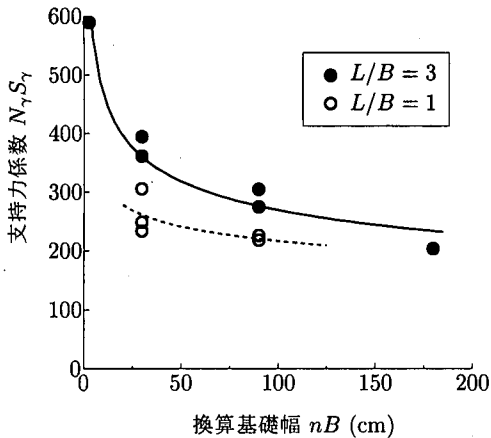
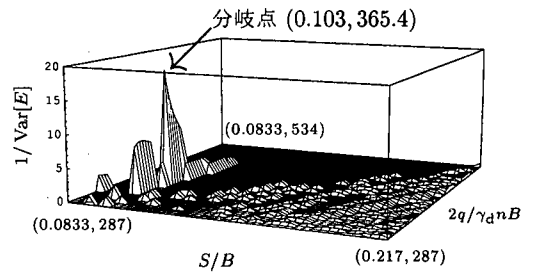


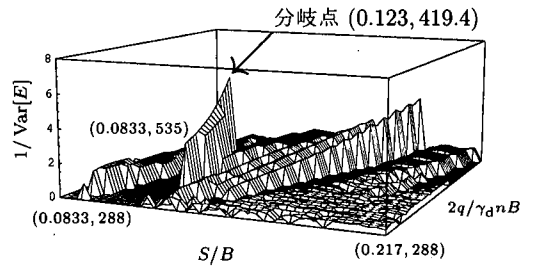
図-11 換算基礎幅 nB と支持力係数 $N_\gamma S_\gamma$ との関係

要因と、基礎周辺地盤の破壊プロセスは次のように推察される。 L/B が小さい場合は、基礎直下の地盤は基礎による各方向の変位の拘束が小さいために、基礎近くの地盤の局所的な破壊に始まり、荷重の増加に伴い、次第に周辺の地盤へと進行的に破壊領域が拡大していくものと考えられる。これに対し、 L/B が大きい場合は、基礎直下の地盤は基礎により L 方向の変位が拘束されているため、 B 方向または鉛直方向にのみ変位を生じやすく、基礎周辺ですべり面が形成したことにより、すべり土塊が一体となってせん断破壊を引き起こしているものと考えられる。

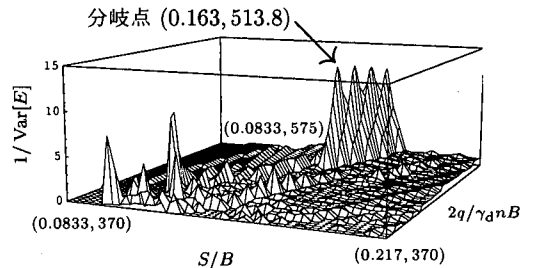
また、本実験では正方形基礎の場合には明瞭なせん断面は見られなかったが、円形・正方形基礎 ($L/B = 1$) の場合と、 $L/B = 1.25$ あるいはそれ以上辺長が異なる長方形基礎の場合とでは、基礎短辺側でのすべり面の発生の仕方が異なるとの報告¹⁵⁾もあり、先に述べた軸対称性が破壊モードに影響していることも考えられる。



(a) ケース B1-1 (円形基礎)



(b) ケース B2-3 ($L/B = 1$)



(c) ケース B3-1 ($L/B = 3$)

図-12 分岐点探索結果

表-3 分岐点の位置と分岐方程式のパラメータ

Cases	(u_c^0, P_c^0)	p	$q\epsilon$	E
B1-1	(0.103, 368.7)	628.1	15.84	3,591
B1-2			20.26	
B2-1	(0.121, 430.5)	685.9	20.45	3,611
B2-2			41.85	
B2-3			35.84	
B3-1	(0.163, 512.1)	1,162	19.41	3,128
B3-2			14.83	

(4) 支持力問題における基礎幅の寸法効果

第(3)節で前述したように、支持力係数は、基礎形状比 L/B のみならず、基礎幅 B による寸法効果の影響も受ける。従ってここでは、基礎形状比を $L/B = 3$ に保ち、換算基礎幅を $nB = 3, 30, 90, 180$ cm と変化する

せたケース A3, B3, C3, D3, および $L/B = 1$ に保ち, $nB = 30, 90 \text{ cm}$ と変化させたケース B2, C2 の実験結果を整理することにより, 支持力問題における基礎幅 B の寸法効果について考える。

a) 荷重-沈下量曲線への影響

ケース A3, B3, C3, D3 では, 基礎形状比を $L/B = 3$ に保ち, 換算基礎幅をそれぞれ $nB = 3, 30, 90, 180 \text{ cm}$ と変化させた。これらの実験で得られた荷重-沈下量曲線を 図-10 に示す。同図より, 換算基礎幅 nB が大きいほど, ピーク荷重は小さくならんと共に, ピーク時の沈下量は大きくなる。また, 荷重-沈下量曲線のピークは次第に不明瞭となることが分かる。

b) 支持力係数への影響

形状比 $L/B = 3$ のケース A3, B3, C3, D3, および $L/B = 1$ のケース B2, C2 について, 換算基礎幅 nB と支持力係数 N, S, γ との関係を 図-11 に示す。同図より, $L/B = 1, 3$ のいずれの場合も, 換算基礎幅 nB が大きいほど, 支持力係数の値は減少することが分かる。

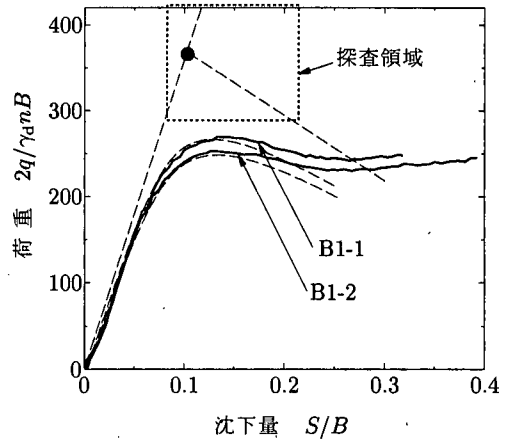
4. 分岐理論に基づく結果の解釈

第2章で述べた漸近的分岐理論・分岐点探索法を, 遠心載荷実験により得られた荷重-沈下量曲線に適用することにより, 基礎形状・形状比が極限支持力に与える影響, および三次元破壊形状との関連について, 分岐理論の見地から考察する。ここでは, 模型地盤の破壊モードと基礎形状・形状比との相互の影響について考察することをねらいとし, 前述の各ケースのうち, ケース B1, B2, B3 について着目することとする。

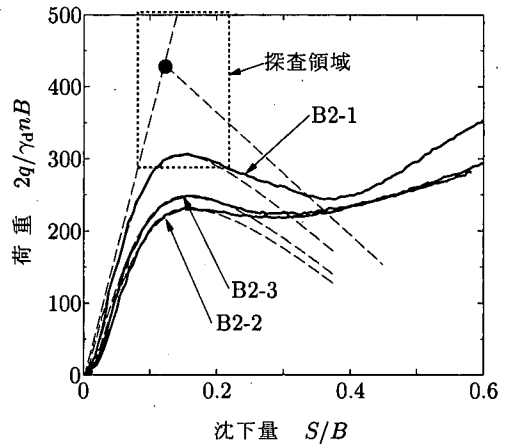
(1) 分岐点探索法の適用

異なる基礎形状・形状比のケース B1-1, B2-3, B3-1 で得られた荷重-沈下量曲線に対して, 第2章で述べた分岐点探索法を適用し, 更に, 分岐方程式(14)により実験曲線のシミュレーションを行う。

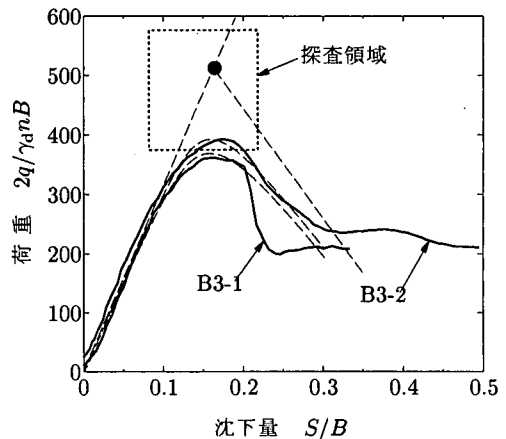
分岐点探索の際, パラメータ $\{E_i | i = 1, 2, \dots\}$ の分散が極小となる点を分岐点と評価する。探索領域は, 図-13 (a), (b), (c) に太点線で示す矩形領域とした。各探索領域で得られたパラメータ E の分散の逆数 $1/\text{Var}[E]$ の分布を, 図-12 (a), (b), (c) に示す。探索により得られた分岐点の位置と, 各パラメータの値を表-3 に示す。さらに, これらの値を用いて, 分岐方程式(14)により実験曲線を近似したものを 図-13 (a), (b), (c) に示す。図中の実線は実験曲線を, 破線は分岐方程式(14)による近似曲線および完全系 ($\epsilon = 0$) の主経路と分岐経路をそれぞれ示す。いずれも, 極限支持力付近の挙動を精度良く近似できている。ここで完全系的主経路は, 直線的に荷重が増加する領域, つまり初期地盤反力の挙動に対応しているが, 本問題では, 主経路上



(a) ケース B1 (円形基礎)



(b) ケース B2 ($L/B = 1$)



(c) ケース B3 ($L/B = 3$)

図-13 分岐方程式による実験曲線の近似

で必ずしも一様変形ではないことには注意を要する³。

また、残留強度付近のように分岐点から離れるにつれて近似の精度が落ちているのは、分岐方程式が漸近近似により導出されたものであるために、分岐点の近傍、かつ初期不整が微小であるときに精度良い近似を与えるという性質の現れであるだけでなく、この変形段階では既に模型地盤の変形挙動が別の分岐モードに遷移していることを示唆するものである。従って、1個の分岐点が、初期状態から残留時までの始終の挙動を支配しているのではなく、多段階の分岐の繰り返しを経て漸次的に幾何形状、対称性を遷移しつつ、最終的な破壊に至るものと認識すべきである。つまり、図-13に示した近似は、ピーク荷重に対して最も支配的な分岐点に基づいて、ピーク付近の実験曲線の様子と、初期不整によるケース毎の変動を再現したものである。

前掲の写真-1 (a), (b), (c) に示したように、形状比 L/B によってケース B2, B3, B4 ごとに異なる破壊モードが発現している。また、図-4 に示した荷重-沈下量曲線の様子については、破壊モードと同様に、形状比ごとに異なる傾向の挙動を示している。さらに、同一の形状比では類似した傾向の挙動を示しているものの、ピーク時応力などには多少の変動が見られる。これらの結果より、模型地盤の破壊挙動には以下の2つの要因が関与しているものと考えられる。1つめの要因は、形状比による破壊モードの違いをもたらすモードスイッチング現象である。こうした分岐モードの変動は、初期不整が持つモードに誘発されるかたちで生じたり、境界条件の影響によって生じたりするものと考えられるが、詳細な議論は今後の課題である。また、もう1つの要因は、同一形状比・破壊モードにおいても強度変動をもたらす初期不整の変動である。初期不整が材料・構造系の強度に及ぼす影響に関する確率論的な議論は、文献⁷⁾でなされている。これら2つの要因による荷重-沈下量曲線の変動の様子は、図-14のような模式図で表すことができる。

図-13 (a), (b), (c) に示すように、分岐点探索法によって求められた分岐点はケース B1, B2, B3 ごとに位置が異なり、基礎形状・形状比によって異なる破壊モードが発現しているのは、分岐モードが異なるためであることを裏付けている。ただし、破壊モードの考察でも述べたことと関連して、円形基礎のケース B1 と正方形基礎のケース B2 では、分岐点は比較的近い位置に求められている。また、同一モードにおける強度変動については、式(14)中の初期不整パラメータ qe を式(16)に基づき変化させることにより、ピーク付近の様子を良く近似できている。

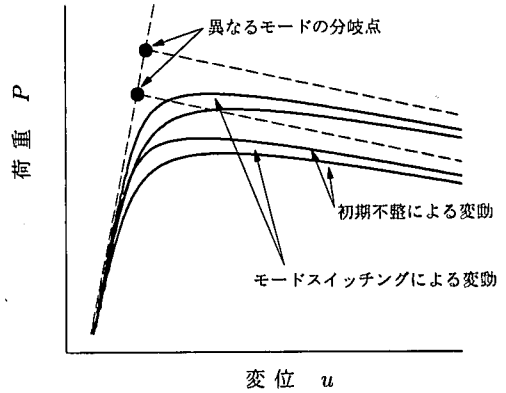


図-14 2つの要因による強度変動の模式図

5. 結論

本研究では、密な砂地盤における基礎の遠心模型実験を行い、支持力問題における3次元効果、つまり極限支持力、破壊モードに対する基礎寸法、形状の影響を調べた。遠心模型実験では、モデル化の妥当性を検証するため、異なる遠心加速度において原型換算の基礎幅を一致させた実験を行ったところ、各々の荷重-沈下量曲線および支持力係数の値は良く一致し、相比例の成立を確認できた。

実験により得られた荷重-沈下量曲線、支持力係数、破壊モードの観察結果から、支持力問題における3次元効果に関して以下のことが分かった。Terzaghi 公式において3次元効果を表す形状係数 S_γ と基礎形状比 B/L 、換算基礎幅 nB との関係を調べたところ、形状係数は、基礎形状比、換算基礎幅のいずれからも影響を受けることが分かった。従って、Terzaghi 公式で3次元効果を十分に考慮に入れるためには、現行のように基礎形状(円形、正方形、長方形)、形状比 L/B によって形状係数を与える方法に加え、基礎幅 B の影響も考慮に入れる必要があると考えられる。また、模型地盤は基礎形状比 L/B によって異なる破壊モードを呈することが分かった。 $L/B = 1$ の場合には、明確なせん断面は見られず、基礎周辺の地盤が局所せん断破壊を生じるのに対し、 L/B が大きい場合には、すべり面の形成によりすべり土塊が一体となって全般せん断破壊を生じる。

また、荷重-沈下量曲線に対して分岐点の探索、および分岐方程式によるシミュレーションを行い、支持力問題における3次元効果について、分岐理論の見地から考察を行った。分岐点探索の結果から、異なる分岐モードにより破壊モードの変動もたらされていることを確認できた。さらに、同一モードにおける強度変動についても、分岐方程式中の初期不整パラメータを変化させることにより、ピーク付近の変動の様子を

³ 主経路上の分岐とは、一般にはある種の対称性を喪失する現象である。主経路上の変形が一様変形である必要はなく、例えば左右上下対称性など、分岐後よりも高い対称性を持っていればよい。

良く近似できた。

ここで用いた分岐理論は、弾性分岐に基づくものである。例えば、岩は要素試験等のミクロなサイズレベルでは脆性が卓越するが、マクロ的なスケールでは弾性(分岐)挙動を示す。ここで取り扱った基礎の支持力問題は、弾性分岐と塑性現象とが入り交じった現象であり、弾性分岐がきっかけとなって、すべり面発生や塑性化を引き起こしているものと思われる。要素試験から現場レベルの挙動を予測しようとする現行の地盤工学では、このようなサイズによる挙動の変化の影響も考慮に入れることが不可欠であると考えられる。

実験で認められた強度や破壊モードの変動は、分岐理論によれば、初期不整の変動と、それに誘発されるかたちで生じる分岐モードの変動、という2つの要因によるものと解釈される。本論文で扱ったような基礎の支持力問題は、三軸圧縮試験などの要素試験と比較して境界の影響がより強く作用すると思われるが、こうした問題に対して、漸近的分岐理論の手法を適用した例は見られなかった。本論文では、既存的分岐理論の手法を用いつつ、3次元破壊性状について考察した。しかしこのような問題では、初期不整の影響の他にも、境界の影響により分岐モードの変動が誘発されることも考えられ、この要因の考慮については今後の課題である。

本論文で用いた分岐理論は、漸近近似により導出されたものであることから、分岐点近傍で厳密な近似を与え、そこから離れるにつれて精度が低下するという性質を持つ。従って、本理論に基づく手法をより実務的な問題に適用するには、力学モデルの境界値問題の分岐解析結果とつきあわせて誤差評価を行う必要があり、これは著者らの今後の課題である。そうした上で、多段階の分岐の繰り返しによる進行性破壊の問題などに対しても、本理論の適用可能性が検証されよう。

地盤材料をはじめ、弾塑性材料の破壊挙動の解明には、変形の局所化、せん断帯の発生といった進行性破壊の考慮が必要である。こうした問題は、多段階の分岐(分岐の繰り返し)によって分岐モードが遷移していく現象として扱うことが不可欠であり、また、破壊力学的なアプローチも有用と考えられる。各種力学挙動に対して、分岐と破壊という複眼的な視点を導入した研究の発展が望まれる。

謝辞：本研究は第1著者(山川 優樹)の平成10年度科学研究費補助金(特別研究員奨励費)の一部を用いて行った。

参考文献

- 1) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 2) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975.

- 3) Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and Foundations*, Vol. 35, No. 1, pp. 83-100, 1995.
- 4) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol. 29, No. 3, pp. 41-53, 1989.
- 5) 小林 一三: 地盤材料の力学的安定性と破壊現象, 金沢大学博士論文, 1998.
- 6) Ikeda, K. and Goto, S.: Imperfection sensitivity for size effect of granular materials, *Soils and Foundations*, Vol. 33, pp. 157-170, 1993.
- 7) Ikeda, K., Chida, T. and Yanagisawa, E.: Imperfection sensitive strength variation of soil specimens, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 45, No. 2, pp. 293-315, 1997.
- 8) Ikeda, K., Murota, K., Yamakawa, Y. and Yanagisawa, E.: Mode switching and recursive bifurcation in granular materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 45, No. 11/12, pp. 1929-1953, 1997.
- 9) 西村 右敏, 三浦 均也, 岩澤 正之, 土岐 祥介: 傾斜軟岩模型地盤上の基礎の支持力特性, 第31回地盤工学研究発表会講演集, pp. 1563-1564, 1996.
- 10) 岡村 未対, 三原 淳慎, 竹村 次朗, 桑野 二郎: 偏心荷重を受ける砂地盤上の矩形基礎の支持力実験, 第31回地盤工学研究発表会講演集, pp. 1569-1570, 1996.
- 11) 小林 俊一, 小泉 智之: 繰返し偏心荷重を受けるウィングラー地盤上基礎の支持力に関するシェイクダウン解析, 第33回地盤工学研究発表会講演集, pp. 1365-1366, 1998.
- 12) Thompson, J. M. T. and Hunt, G. W.: *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley and Sons, London, 1973.
- 13) 山川 優樹, 池田 清宏, 柳澤 栄司, 米原 久人: 分岐点探索法と材料・構造系への適用, 構造工学論文集, Vol. 43A, pp. 423-430, 1997.
- 14) 例えば, 地盤工学における模型実験入門, 土質工学会, pp. 74-77, 1994.
- 15) 林 貞夫: 砂地盤上の長方形基礎の支持力と破壊に関する模型実験, 第33回地盤工学研究発表会講演集, pp. 1357-1358, 1998.
- 16) De Beer, E.: Experimental determination of the shape factors and the bearing capacity factors of sand, *Geotechnique*, Vol. 20, No. 4, pp. 387-411, 1970.
- 17) 岡村 未対, 木村 孟, 斎藤 邦夫, 竹村 次朗: 砂地盤上の円形基礎の支持力および破壊形状, 第23回土質工学研究発表会講演集, pp. 1293-1294, 1988.

(1998. 9. 11 受付)

BIFURCATION PHENOMENA UNDERLYING THE BEARING CAPACITY OF RECTANGULAR FOOTINGS ON DENSE SAND

Yuuki YAMAKAWA, Kiyohiro IKEDA, Kayoko TAKAHASHI, Yuichi HIGUCHI
and Koji KAWASAKI

In the practical problem of the geotechnical engineering, such as the bearing behavior of footings, formulae based on the critical state analysis have been generally used, because of the easiness and reliability. However, for the sake of more rational estimates, it has become extensively recognized that bifurcation need to be taken into account. This paper investigates not only three-dimensional effects but the bifurcation phenomena in the bearing behavior of rectangular footings. The asymptotic bifurcation theory is applied to a load versus displacement curve from an experiment, and the bifurcation behavior associated with the variations of strength and failure modes is revealed.