

# 岩石材料の異方性降伏関数と材料パラメータの評価

草深守人<sup>1</sup>・武田 洋<sup>2</sup>・向上拡美<sup>3</sup>・舎川 徹<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 法政大学教授 工学部土木工学科 (〒184-0002 小金井市梶野町 3-7-2)

<sup>2</sup>正会員 工博 法政大学教授 工学部システム制御工学科 (〒184-0002 小金井市梶野町 3-7-2)

<sup>3</sup>正会員 工修 (株) 間組技術研究所 主任研究員 (〒305-0822 つくば市苅間字西向 515-1)

<sup>4</sup>正会員 東京電力(株) 工務部 土木担当 副部長 (〒100-0011 東京都千代田区内幸町 1-1-3)

本文は異方性を示す岩石材料の降伏関数について考察したもので、まずはじめに、等方性および異方性材料に対する既存の代表的な降伏関数の相互関係を整理し、岩石材料に適用する上での問題点を指摘した。さらに、複雑な異方性を示す岩石材料に対して、従来の基本的な降伏関数の自然な拡張として与えられる新たな静水圧依存型の異方性降伏関数を提案した。この降伏関数は、形式的には独立な応力成分に、異方性に応じた係数を乗じることによって異方性を表現したものであり、降伏曲面の大きさと偏差平面上の形状は共に静水圧応力に依存する。また、ごく一般的な一軸・三軸圧縮試験を用いて異方性降伏関数に含まれる材料パラメータを決定する方法が示された。最後に、異方性材料に対する試験結果と計算値の比較から、提案する降伏関数が従来の降伏関数に比較して、異方性の表現性に優れていることを示した。

*Key Words* : anisotropic yield function, plasticity, rock, material parameters, experiments

## 1. はじめに

ダムの基礎岩盤となる長大斜面の掘削や地下発電所空洞の掘削において、岩盤の強度異方性と変形異方性の力学的扱いが、対象とする岩盤構造物の設計や施工上の重要な技術的課題となりつつある<sup>1)</sup>。同様の技術的課題は、東京電力葛野川水力発電所の下部ダムである葛野川ダム建設地点においても注目され、多くの検討がなされてきた<sup>2),3)</sup>。本論文はその一部として、異方性を示す岩石材料の降伏関数について考察したものである。

岩盤の異方性の主要な要因は、方向性を持った節理や断層等の亀裂による巨視的な異方性と岩盤の基質部である岩石自身の異方性の二つに分けて考えることができる。有限要素法等を利用した岩盤構造物の安定解析の面からは、断層のように少数でかつ面的広がり大きな亀裂については不連続要素<sup>4),5)</sup>として陽なモデル化がなされ、節理等の無数に存在する中小規模の不連続面については損傷力学<sup>6),7)</sup>やクラックテンソル<sup>8)</sup>のような方向性を表現できる連続体力学の範疇で平均化した手法が可能である。

一方、岩盤基質部を構成する岩石材料の異方性については、異方性を表現できる降伏関数による連続体としての扱いが理論的展開や計算の煩雑さを避ける上で

現実的手段と考える。なお、本文は塑性論を基礎としていることから以後は主に「降伏関数」の名称を用いるが、材料パラメータを決定する際に材料試験値として初期降伏強度を用いる場合は降伏関数(ここでは、硬化または軟化までは扱わない)としての意味を持ち、破壊強度を用いる場合は破壊関数としての意味を持つことになる。

静水圧に依存しない材料の降伏関数は、等方性材料に対して von Mises の降伏関数が広く用いられており、異方性材料に対してはその拡張としての Hill の降伏関数がよく知られている。また、静水圧依存の降伏関数として広く用いられている代表的なものの一つとして等方性材料に対する Drucker-Prager の降伏関数があり、異方性材料に対しては Tsai-Wu や Pariseau の降伏関数が提案されている<sup>9),10)</sup>。本文では、まずこれらの降伏関数を系統的に整理することにより、異方性が問題となる岩石材料に対して静水圧依存の降伏関数を適用する場合の幾つかの問題点を明らかにする。さらに、その改善策の一つとして、新たな降伏関数について考察を加える。

一方、異方性材料に対する降伏関数には必然的に数多くの材料パラメータ(異方性降伏関数に現れる係数の多くが唯一定まる量として定義される定数でないことから、本文ではこれらの係数を材料パラメータと呼

ぶ)が含まれるが、こうしたパラメータを容易に決定できるか否かが実用上の重要な課題となる。しかしながら、既存の異方性降伏関数に含まれる材料パラメータの評価方法には、一軸引張り試験や純せん断試験など、試験技術や精度の上で多くの問題を抱えた特殊な材料試験を必要としていた。そこで、既存の異方性降伏関数と新たに本文で示す降伏関数の両者について、材料パラメータの力学的意味を再検討することにより、これらのパラメータをごく一般的な材料試験である一軸圧縮試験や三軸圧縮試験のみによって決定する評価手法を検討する。ただし、今後の材料試験技術の進歩に備えてこれらの試験方法以外の特殊な試験も活用可能とするため、ここで検討する評価手法は出来る限りあらゆる応力状態の試験値を利用出来るよう配慮する。

最後に、提案する異方性降伏関数が、材料パラメータの評価手法を含めて、実際の岩石材料の強度異方性をどの程度表現できるかを調べるために、試験結果と計算値を比較し、考察する。なお、本文は岩石材料を対象としていることから、以下では全て圧縮方向の応力を正として扱うこととする。

## 2. 従来の代表的な降伏関数

さまざまな材料の降伏や破壊を力学問題として扱うために、これまでに数多くの降伏関数が提案され利用されてきた<sup>11)</sup>。ここでは、従来の古典的な降伏関数から異方性材料に対する比較的新しい降伏関数について、新たな降伏関数を展開する上で重要となる代表的なもののみを取り上げ、それらの対応関係について整理しておくこととする。

### (1) 静水圧非依存の降伏関数

#### a) von Mises の降伏関数

等方性材料に対する von Mises の降伏関数は、一軸試験から得られる降伏応力  $\sigma_0$  と等価になるような相当応力  $\bar{\sigma}$  を用いて次式で表される<sup>12)</sup>。

$$\frac{1}{2} \{ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \}^{\frac{1}{2}} = \bar{\sigma} \quad (1)$$

なお、以下に述べる幾つかの降伏関数が von Mises の降伏関数の自然な拡張となっていることを示すために、式(1)の両辺を相当応力  $\bar{\sigma}$  で除して次式のように正規化しておく。

$$\frac{1}{2} \{ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \}^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (2)$$

ここで、係数  $\hat{\Gamma}$ 、 $\hat{\Theta}$  は式(1)の左辺を右辺の相当応力(材料定数の一つ)で除した結果としての係数であり、以後に示す他の降伏関数についても同様な正規化を行う。また、自然な拡張とは、拡張された降伏関数とその特別な場合として基本となる降伏関数を表現できることを意味する。

#### b) Hill の異方性降伏関数

静水圧に依存しない異方性材料に対する降伏関数として、Hill<sup>13)</sup>は、応力に関する完全二次形式から出発して直交異方性の条件を満足し、かつ応力の二次の項が静水圧に依存しないと仮定することにより、次式を与えている。

$$\left[ \frac{3}{2(F+G+H)} \{ F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{31}^2 \} \right]^{\frac{1}{2}} = \bar{\sigma} \quad (3)$$

ここで、 $F, G, H, L, M, N$  は異方性を表すパラメータであり、それぞれの相対的な比率のみが意味を持つ量である。ただし、 $\bar{\sigma}$  は上式の降伏関数に対して定義される相当応力であり、等方性の場合、Mises の相当応力に一致する。

式(3)を正規化して式(2)と同様に表現すると、次のように表される。

$$\left[ \hat{F}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \hat{G}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \hat{H}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \hat{L}\sigma_{12}^2 + \hat{M}\sigma_{23}^2 + \hat{N}\sigma_{31}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (4)$$

明らかに、式(4)はその特別な場合として、材料パラメータを  $\hat{F} = \hat{G} = \hat{H} = \hat{\Gamma}$ 、 $\hat{L} = \hat{M} = \hat{N} = \hat{\Theta}$  と置くことにより式(2)と一致させることができる。このことから、Hill の異方性降伏関数は von Mises の降伏関数の自然な拡張であると考えられる。

### (2) 静水圧依存の降伏関数

#### a) Drucker-Prager の降伏関数

静水圧依存の等方性材料に対する Drucker-Prager の降伏関数は、次のように与えられている。

$$\left[ \frac{1}{2} \{ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \} \right]^{\frac{1}{2}} - \alpha(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = k \quad (5)$$

ここで、 $\alpha$  と  $k$  は材料定数であり、通常の三軸圧縮試験結果を用いて決定される<sup>11), 14)</sup>。

式(5)は、式(2)と同様な正規化を行うことにより、

$$\left[ \hat{\Gamma} \{ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \} + \hat{\Theta}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right]^{\frac{1}{2}} - \hat{\Lambda}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 1 \quad (6)$$

のようにも表現することができ、その特別な場合として、 $\hat{\Lambda} = 0$  と置くことにより、von Mises の降伏関数式(2)と一致させることができる。

### b) Tsai-Wuの異方性降伏関数

Tsai-WuはHillの異方性降伏関数と同様な仮定に基づき、静水圧依存の異方性降伏関数を次式で与えた<sup>9)</sup>。

$$b_1(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + b_2(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + b_3(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + b_4\sigma_{12}^2 + b_5\sigma_{23}^2 + b_6\sigma_{31}^2 - (a_1\sigma_{11} + a_2\sigma_{22} + a_3\sigma_{33}) = k^2 \quad (7)$$

ここでも、上式を式(2)と同様に正規化することにより次式のような表現を与えておく。

$$\hat{b}_1(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \hat{b}_2(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \hat{b}_3(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \hat{b}_4\sigma_{12}^2 + \hat{b}_5\sigma_{23}^2 + \hat{b}_6\sigma_{31}^2 - (\hat{a}_1\sigma_{11} + \hat{a}_2\sigma_{22} + \hat{a}_3\sigma_{33}) = 1 \quad (8)$$

さらに、式(7)はマトリックス形式で次式のように表現することができる。

$$\{\sigma\}^T [\mathbf{B}] \{\sigma\} - \{\mathbf{A}\}^T \{\sigma\} = k^2 \quad (9)$$

ここで、応力の1次元配列  $\{\sigma\}$  は、応力テンソル  $\sigma_{ij}$  の対称性を考慮し、かつ独立な成分のみを次のように配列表示したものである。

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\} \quad (10)$$

また、係数行列  $\{\mathbf{A}\}$  および  $\{\mathbf{B}\}$  は次式で与えられる。

$$\{\mathbf{A}\} = [a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0]^T \quad (11)$$

$$[\mathbf{B}] =$$

$$\begin{bmatrix} b_3 + b_1 & -b_1 & -b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & b_1 + b_2 & -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & -b_2 & b_2 + b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

これらの材料パラメータの決定には、一軸引張り試験や純せん断試験を必要としている<sup>9)</sup>。しかしながら、岩石材料のような脆性材料に対するこれらの試験はその精度の確保や試験技術面で多くの問題が残されている<sup>15),16)</sup>。さらに、静水圧項を含むため降伏曲面の同一子午線(静水圧軸を含む任意の平面と降伏曲面の交線の子午線と呼び、静水圧軸に直交する任意の平面と降伏曲面の交線を経線と呼ぶ<sup>11)</sup>)上で少なくとも二つ以上の異なる降伏強度(または破壊強度)を必要とする。このような試験は、試験を行うに当たって降伏曲面の任意の同一子午線を通る応力経路が事前に明らか

になっている場合に、三つの材料主軸方向の応力を独立に制御出来る完全三軸試験<sup>16)</sup>によって可能である。ただし、ここでの材料試験は降伏曲面を決定するために実施するものであることから、一般的にはこのような応力経路を事前に知る事が難しい。

### c) Pariseauの異方性降伏関数

式(7)は、静水圧項を無視することによってHillの異方性降伏関数を表すことができるが、等方性の場合にはDrucker-Pragerの降伏関数を表すことができない。そこで、式(5)と式(7)の比較から、次の関数形を考える。

$$[b_1(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + b_2(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + b_3(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + b_4\sigma_{12}^2 + b_5\sigma_{23}^2 + b_6\sigma_{31}^2]^{\frac{1}{2}} - (a_1\sigma_{11} + a_2\sigma_{22} + a_3\sigma_{33}) = k \quad (13)$$

上式は、Pariseau<sup>10)</sup>によって提案された静水圧依存の異方性降伏関数であり、正規化することによって次式のように表現される。

$$[\hat{b}_1(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \hat{b}_2(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \hat{b}_3(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \hat{b}_4\sigma_{12}^2 + \hat{b}_5\sigma_{23}^2 + \hat{b}_6\sigma_{31}^2]^{\frac{1}{2}} - (\hat{a}_1\sigma_{11} + \hat{a}_2\sigma_{22} + \hat{a}_3\sigma_{33}) = 1 \quad (14)$$

上式の特別な場合として、 $\hat{a}_i = 0$  とおき、他の全ての係数を式(4)の係数と一致させることにより、式(14)はHillの異方性降伏関数を表すことができる。同様に、等方性の場合には、von Mises および Drucker-Prager の降伏関数である式(2)あるいは式(6)に一致させることができる。このことは、HillやTsai-Wuの降伏関数と同様に、直交異方性の条件を満足し、かつ応力の二次の項が静水圧に依存しないことを仮定したことによる当然の結果である<sup>12)</sup>。

式(13)は、式(9)と同様な表現を用いて表すと、次のようになる。

$$\sqrt{\{\sigma\}^T [\mathbf{B}] \{\sigma\} - \{\mathbf{A}\}^T \{\sigma\}} = k \quad (15)$$

ここで、係数マトリックス  $\{\mathbf{A}\}$  および  $\{\mathbf{B}\}$  は形式的に式(11)、式(12)と同様である。なお、この形式の降伏関数に現れる材料パラメータの決定には、Tsai-Wuの降伏関数と同様な困難さを伴う。

## 3. Pariseauの降伏関数と材料パラメータ

異方性材料に対する降伏関数<sup>17)</sup>の代表的なものとして、静水圧に依存しない場合のHillの降伏関数と、静水圧に依存する場合のTsai-WuやPariseauの降伏関数を前節で整理した。ここでは、異方性材料の降伏曲

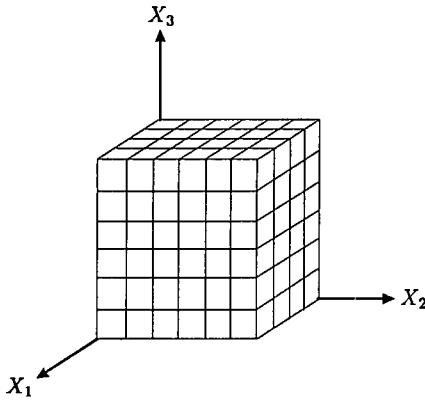


図-1 異方性材料の材料主軸

面を幾何学的に考察することによりこれらの降伏関数を再定式化し、その過程で材料パラメータの物理的意味を明らかにしつつより実用的な材料パラメータの評価方法を検討する。

まず、直交異方性材料の三つの材料主軸方向(図-1)に一致する一軸圧縮強度をそれぞれ  $\sigma_{1u}$ ,  $\sigma_{2u}$ ,  $\sigma_{3u}$  とし、主応力軸をこの材料主軸に一致させた図-2を考える。三つの一軸圧縮強度によって作られる  $\triangle ABC$  は、等方性材料の場合は静水圧軸  $\sigma_{mm}$  に直交する  $\pi$  平面内(本文では、静水圧軸に直交する全ての偏差応力平面を総称して  $\pi$  平面と呼ぶ)にあるが、異方性材料では一般的に静水圧軸に直交しない。そこで、今日一般的に利用されている一軸・三軸圧縮試験から得られる圧縮強度に対して、以下のような仮定を認めることとする。

任意の等しい拘束圧  $p$  に対する三軸圧縮試験から得られる三つの材料主軸方向の圧縮強度  $q_i$  :

$$\sigma_i = q_i, \quad \sigma_j = \sigma_k = p \quad (i \neq j \neq k: 1, 2, 3) \quad (16)$$

が、主応力軸と材料主軸を一致させた座標系内で作る平面を考える。このとき、異なる  $p$  の値に対して作られる全ての平面は互いに平行であると仮定する。

上記の仮定によれば任意の等しい拘束圧に対し、三つの材料主軸方向の圧縮強度が作る全ての三角形は、三軸圧縮試験の特別な場合である一軸圧縮試験から得られる  $\triangle ABC$  と互いに平行である。また、この三角形が作る平面は異方性の特別な場合としての等方性を考えると  $\pi$  平面と一致する。このことから、この平面は  $\pi$  平面が各材料主軸方向の異方性の割合に応じて傾いたものと解釈することもでき、以後このような平面を  $\tilde{\pi}$  平面と呼ぶこととする。

$\tilde{\pi}$  平面の単位法線ベクトル  $\tilde{n}(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \tilde{n}_3)$  は、 $\tilde{n}$  と3つ

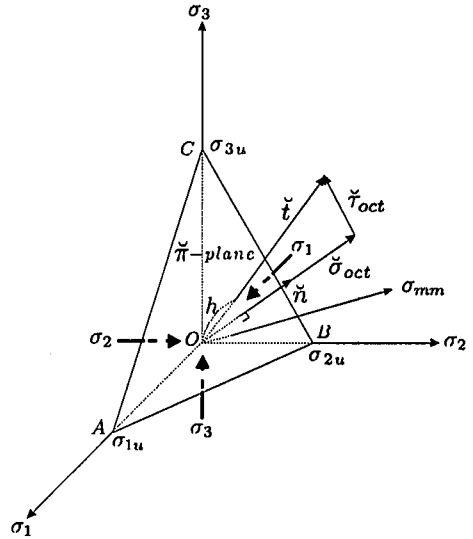


図-2 材料主軸方向の一軸圧縮強度と  $\tilde{\pi}$  平面

の主応力軸  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  とのなす角をそれぞれ  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  として次式で与えられる。

$$\tilde{n}_1 = \cos\theta_1, \quad \tilde{n}_2 = \cos\theta_2, \quad \tilde{n}_3 = \cos\theta_3 \quad (17)$$

また、原点から  $\tilde{\pi}$  平面までの距離  $h$  は材料主軸方向の一軸圧縮強度を用いて次式で表される。

$$h = \sigma_{1u}\tilde{n}_1 = \sigma_{2u}\tilde{n}_2 = \sigma_{3u}\tilde{n}_3 \quad (18)$$

さらに、四面体  $OABC$  の体積  $V$  は  $\triangle ABC$ ,  $\triangle OBC$ ,  $\triangle OCA$ ,  $\triangle OAB$  の面積をそれぞれ  $S, S_1, S_2, S_3$  とすると次式のように表せる。

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\sigma_{1u}S_1 = \frac{1}{3}\sigma_{2u}S_2 = \frac{1}{3}\sigma_{3u}S_3 \quad (19)$$

式(18)と式(19)から単位法線ベクトル  $\tilde{n}$  の各成分は次式で与えられる。

$$\tilde{n}_i = \frac{S_i}{S} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (20)$$

また、面積  $S$  は次式で与えられる。

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (21)$$

ここに、 $a, b, c, s$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$a = \overline{AB} = \sqrt{\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2}$$

$$b = \overline{BC} = \sqrt{\sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2}$$

$$c = \overline{CA} = \sqrt{\sigma_{3u}^2 + \sigma_{1u}^2}$$

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

さらに、図-2より面積  $S_i$  は次式で表される。

$$S_i = \frac{1}{2} \sigma_{ju} \sigma_{ku} \quad (i \neq j \neq k : 1, 2, 3) \quad (22)$$

式(22)を式(20)に代入することにより、次式の関係を得る。

$$\tilde{n}_i = \frac{1}{2S} \sigma_{ju} \sigma_{ku} \quad (i \neq j \neq k : 1, 2, 3) \quad (23)$$

次に、図-2に示すように、 $\pi$ 平面上での八面体せん断応力  $\check{\tau}_{oct}$  と八面体垂直応力  $\check{\sigma}_{oct}$  を、 $\pi$ 平面に作用する応力ベクトル  $\check{i}$  の  $\pi$ 平面に沿った方向とそれに直交する方向に分解した大きさとして定義する(応力テンソルの不変量として定義される正しい意味での八面体応力とは異なるが、 $\pi$ 平面上で類似した量としてこの名称を用いる)。

図-2の  $\triangle ABC$  に作用する応力ベクトル  $\check{i}$  の各成分  $\check{i}_i$  は、四面体  $OABC$  に作用する応力の釣合条件から次式で与えられる。

$$\check{i}_1 = \sigma_1 \tilde{n}_1, \quad \check{i}_2 = \sigma_2 \tilde{n}_2, \quad \check{i}_3 = \sigma_3 \tilde{n}_3 \quad (24)$$

したがって、八面体垂直応力  $\check{\sigma}_{oct}$  は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \check{\sigma}_{oct} &= \check{i}_1 \tilde{n}_1 + \check{i}_2 \tilde{n}_2 + \check{i}_3 \tilde{n}_3 \\ &= \tilde{n}_1^2 \sigma_1 + \tilde{n}_2^2 \sigma_2 + \tilde{n}_3^2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (25)$$

同様に、八面体せん断応力  $\check{\tau}_{oct}$  は、式(24)と式(25)を用いて次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \check{\tau}_{oct}^2 &= \check{\tau}^2 - \check{\sigma}_{oct}^2 \\ &= \sigma_1^2 \tilde{n}_1^2 (1 - \tilde{n}_1^2) + \sigma_2^2 \tilde{n}_2^2 (1 - \tilde{n}_2^2) + \sigma_3^2 \tilde{n}_3^2 (1 - \tilde{n}_3^2) \\ &\quad - 2(\sigma_1 \sigma_2 \tilde{n}_1^2 \tilde{n}_2^2 + \sigma_2 \sigma_3 \tilde{n}_2^2 \tilde{n}_3^2 + \sigma_3 \sigma_1 \tilde{n}_3^2 \tilde{n}_1^2) \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、

$$1 - \tilde{n}_i^2 = \tilde{n}_j^2 + \tilde{n}_k^2 \quad (i \neq j \neq k : 1, 2, 3) \quad (27)$$

の関係を考慮することにより、式(26)は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \check{\tau}_{oct}^2 &= \tilde{n}_1^2 \tilde{n}_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \tilde{n}_2^2 \tilde{n}_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \\ &\quad + \tilde{n}_3^2 \tilde{n}_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

式(25)と式(28)は、それぞれ降伏曲面の子午線( $\pi$ 平面の広がり)と経線( $\pi$ 平面の形状)を表すことから、異方性材料の降伏関数  $\check{f}$  を、主応力状態に対して次のように表現する。

$$\begin{aligned} \check{f} &= \tilde{n}_1^2 \tilde{n}_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \tilde{n}_2^2 \tilde{n}_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \\ &\quad + \tilde{n}_3^2 \tilde{n}_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \\ &\quad - (\alpha_1 \tilde{n}_1^2 \sigma_1 + \alpha_2 \tilde{n}_2^2 \sigma_2 + \alpha_3 \tilde{n}_3^2 \sigma_3) - \kappa = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

あるいは、

$$\begin{aligned} \check{f} &= [\tilde{n}_1^2 \tilde{n}_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \tilde{n}_2^2 \tilde{n}_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \\ &\quad + \tilde{n}_3^2 \tilde{n}_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - (\alpha_1 \tilde{n}_1^2 \sigma_1 + \alpha_2 \tilde{n}_2^2 \sigma_2 + \alpha_3 \tilde{n}_3^2 \sigma_3) - \kappa = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、上式の各係数を次式のように置き換える。

$$\begin{aligned} \tilde{n}_1^2 \tilde{n}_2^2 &= b_1, \quad \tilde{n}_2^2 \tilde{n}_3^2 = b_2, \quad \tilde{n}_3^2 \tilde{n}_1^2 = b_3 \\ \alpha_1 \tilde{n}_1^2 &= a_1, \quad \alpha_2 \tilde{n}_2^2 = a_2, \quad \alpha_3 \tilde{n}_3^2 = a_3 \end{aligned} \quad (31)$$

上式の係数を用いた主応力状態で表現した式(29)または式(30)は、せん断応力成分も加えた一般応力状態で書き換えることにより、異方性材料の降伏関数が次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} \check{f} &= b_1 (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + b_2 (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 \\ &\quad + b_3 (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \\ &\quad + b_4 (\sigma_{12})^2 + b_5 (\sigma_{23})^2 + b_6 (\sigma_{31})^2 \\ &\quad - (a_1 \sigma_{11} + a_2 \sigma_{22} + a_3 \sigma_{33}) - \kappa^2 = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \check{f} &= [b_1 (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + b_2 (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 \\ &\quad + b_3 (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \\ &\quad + b_4 (\sigma_{12})^2 + b_5 (\sigma_{23})^2 + b_6 (\sigma_{31})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - (a_1 \sigma_{11} + a_2 \sigma_{22} + a_3 \sigma_{33}) - \kappa = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

ここで、 $b_4 \sim b_6$  はせん断応力成分に対して新たに導入された材料パラメータである。明らかに、式(32)は式(7)の Tsai-Wu の降伏関数に一致し、式(33)は式(13)の Pariseau の降伏関数に一致している。

上記の議論から、Tsai-Wu や Pariseau の降伏関数に含まれる材料パラメータの内、 $b_1 \sim b_3$ 、 $a_1 \sim a_3$  は力学的には式(31)に示したように  $\pi$ 平面を規定する法線ベクトルの方向余弦によって決まるパラメータであり、これらは一軸圧縮試験結果を用いて以下のように決定することができる。

材料パラメータ  $b_1 \sim b_3$  は、三つの材料主軸方向に対する一軸圧縮強度  $\sigma_{iu}$  を用いて、式(23)から計算される  $\tilde{n}_i$  を式(31)に代入することにより決定される。

材料パラメータ  $a_1 \sim a_3$  は、やはり一軸圧縮強度と式(31)を用いて式(32)と式(33)からそれぞれ次式のように表される。

Tsai-Wu の降伏関数に対して、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sigma_{1u}^2 \tilde{n}_1^2 (\tilde{n}_2^2 + \tilde{n}_3^2) - k^2}{\sigma_{1u}} \\ a_2 &= \frac{\sigma_{2u}^2 \tilde{n}_2^2 (\tilde{n}_3^2 + \tilde{n}_1^2) - k^2}{\sigma_{2u}} \\ a_3 &= \frac{\sigma_{3u}^2 \tilde{n}_3^2 (\tilde{n}_1^2 + \tilde{n}_2^2) - k^2}{\sigma_{3u}} \end{aligned} \quad (34)$$

Pariseauの降伏関数に対して、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sigma_{1u} \tilde{n}_1 \sqrt{\tilde{n}_2^2 + \tilde{n}_3^2} - k}{\sigma_{1u}} \\ a_2 &= \frac{\sigma_{2u} \tilde{n}_2 \sqrt{\tilde{n}_3^2 + \tilde{n}_1^2} - k}{\sigma_{2u}} \\ a_3 &= \frac{\sigma_{3u} \tilde{n}_3 \sqrt{\tilde{n}_1^2 + \tilde{n}_2^2} - k}{\sigma_{3u}} \end{aligned} \quad (35)$$

一方、すでに材料パラメータ  $b_1 \sim b_3$  は決定されていることから、上式を用いて式(32)または式(33)中の  $a_1 \sim a_3$  を消去することにより、これらの降伏関数に含まれる未定材料パラメータは、主応力状態に対して  $\kappa$  のみとなる。したがって、三つの材料主軸方向の三軸圧縮試験結果が少なくとも一組以上あれば  $\kappa$  を決定できる。ただし、材料パラメータ  $\kappa$  は三つの材料主軸に対してそれぞれ計算されるため、これら三つの値が工学的に許容できる程度に近い値である場合に限り、これらの降伏関数は適用範囲内であると判断する。もし、その差が無視できないほどに大きい場合には、与えられた材料はこの種の降伏関数の適用限界外であると判断しなければならない。

材料パラメータ  $b_4 \sim b_6$  は、任意の二つの材料主軸によって構成される平面内で、一つの材料主軸に対して45度傾いた方向での一軸試験から得られる三つの圧縮強度を用いて決定することが出来る。なお、その誘導過程の詳細は、後に述べられる手順と全く同様であることからここでは省略し、結果のみを示す。

Tsai-Wu 型の降伏関数である式(32)に対しては、

$$\begin{aligned} b_4 &= \frac{\sigma'_{(1-2)}(a_1 + a_2) + 2\kappa^2}{\sigma_{(1-2)}'^2} - (b_2 + b_3) \\ b_5 &= \frac{\sigma'_{(2-3)}(a_2 + a_3) + 2\kappa^2}{\sigma_{(2-3)}'^2} - (b_3 + b_1) \\ b_6 &= \frac{\sigma'_{(3-1)}(a_3 + a_1) + 2\kappa^2}{\sigma_{(3-1)}'^2} - (b_1 + b_2) \end{aligned} \quad (36)$$

Pariseau 型の降伏関数である式(33)に対しては、

$$\begin{aligned} b_4 &= \left[ \frac{\sigma'_{(1-2)}(a_1 + a_2) + 2\kappa}{\sigma_{(1-2)}'} \right]^2 - (b_2 + b_3) \\ b_5 &= \left[ \frac{\sigma'_{(2-3)}(a_2 + a_3) + 2\kappa}{\sigma_{(2-3)}'} \right]^2 - (b_3 + b_1) \\ b_6 &= \left[ \frac{\sigma'_{(3-1)}(a_3 + a_1) + 2\kappa}{\sigma_{(3-1)}'} \right]^2 - (b_1 + b_2) \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、 $\sigma'_{(i-j)}$  は、任意の二つの材料主軸  $i, j$  によって作られる平面内で、これらの軸から45度傾いた方向の一軸圧縮強度である。

これまでに述べた材料パラメータの評価手法は、材料主軸方向と材料主軸に対して45度傾いた方向での材料試験結果のみを利用しており、それ以外の任意の方向に対する試験結果を利用していない。このことは、これらの材料試験結果が十分な精度を有する場合のみ適用可能であることを意味する。しかしながら、材料試験データには多くのバラツキが含まれていることを前提とすべきであり、材料主軸に対してさまざまな方向で実施される試験結果を有効に利用し、評価される材料定数の誤差をできる限り小さくすることを考えるほうが現実的である。このことから実際には、上記の方法によって計算される値を初期値として与え、後に述べるような全ての試験データを利用した最適化手法により材料パラメータを同定するほうが現実的と考える。

#### 4. 応力空間基底補正型の異方性降伏関数

直交異方性材料に対する Tsai-Wu や Pariseau の降伏関数は、静水圧応力に依存して降伏曲面が拡大・縮小するものの、静水圧軸に直交する断面形状は静水圧非依存であり、互いに直交する三つの材料主軸に対する異方性の割合が静水圧応力の大きさに無関係である。しかしながら、異方性材料の降伏関数としてより一般性を持たせるためには、降伏曲面の形状も静水圧応力に依存する関数を考える必要がある。実際に、岩石材料の異方性は静水圧応力の増加に伴って変化する傾向を示すことが知られている<sup>18),19),20)</sup>。本章では、異方性の割合が静水圧応力に依存する直交異方性材料の降伏関数について考察する。

##### (1) 降伏関数のより一般的な表現

まず最初に、直行異方性材料に対する新たな降伏関数を考えるに先立って、より一般化された降伏関数の基本形を応力の二次形式で表すことができるものとして、式(15)と同様な表現を用いて下式のように書くこととする。

$$\sqrt{\{\sigma\}^T \mathbf{B} \{\sigma\}} - \{\mathbf{A}\}^T \{\sigma\} = k \quad (38)$$

ここで、上式の各係数マトリックスは次のとおりである。

$$\{\mathbf{A}\} = [a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0]^T \quad (39)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & 2c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & 2c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (40)$$

式(38)は、応力の二次形式で表される直交異方性材料の降伏関数の一般形であり、左辺第一項を静水圧成分と偏差成分に分解すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & 2[c_{11}s_{11}^2 + c_{22}s_{22}^2 + c_{33}s_{33}^2 \\ & \quad + c_{12}s_{11}s_{22} + c_{23}s_{22}s_{33} + c_{13}s_{33}s_{11}] \\ & + 2p^2[c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{12} + c_{23} + c_{13}] \\ & + 2p[(2c_{11} + c_{12} + c_{13})s_{11} + (2c_{22} + c_{12} + c_{23})s_{22} \\ & \quad + (2c_{33} + c_{23} + c_{13})s_{33}] \\ & + c_{44}\sigma_{12}^2 + c_{55}\sigma_{23}^2 + c_{66}\sigma_{13}^2 \quad (41) \end{aligned}$$

ここで、 $p$ と $s_{ij}$ はそれぞれ応力 $\sigma_{ij}$ の第一不変量(静水圧成分)と偏差応力を表し、次式で定義される。

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (42)$$

ただし、 $\delta_{ij}$ はクロネッカデルタを表し、添字には総和規約が適用されている。

一般式の特別な場合として、式(38)の第一項が異方性に対して静水圧成分に依存しないようにするためには、式(41)の静水圧 $p$ に関する全ての係数項をゼロと置けばよい<sup>12)</sup>。このような操作は、等方性材料に対しては von Mises とその拡張である Drucker-Prager の降伏関数に帰着し、異方性材料に対しては Hill の降伏関数とその拡張としての Pariseau の降伏関数あるいは Tsai-Wu の降伏関数を与える。

## (2) 応力空間基底補正型降伏関数

式(41)から明らかなように、式(38)の左辺第一項には静水圧成分を含んでいる。ここでは式(38)の特別な場合として、異方性から等方性まで統一的に表現でき、かつ $\pi$ 平面の形状が、異方性に対しては静水圧成分に依存するものの等方性に対しては依存しないような降伏関数を考えることとする。

式(41)の静水圧項を参照して係数 $c_{ij}$ を次式のように置き換える。

$$\begin{aligned} c_{11} &= b_1^2, & c_{22} &= b_2^2, & c_{33} &= b_3^2 \\ c_{12} &= -b_1b_2, & c_{23} &= -b_2b_3, & c_{13} &= -b_3b_1 \\ c_{44} &= b_4^2, & c_{55} &= b_5^2, & c_{66} &= b_6^2 \end{aligned} \quad (43)$$

明らかに、式(41)は $b_1 = b_2 = b_3$ ,  $b_4 = b_5 = b_6$ と置くことにより静水圧非依存でかつ等方性を示すこと

になり、 $b_1, b_2, b_3$ のいずれか一つ以上が等しくない場合は静水圧依存の異方性を示すこととなる。

次に、式(39)の係数マトリックス $\{\mathbf{A}\}$ を、任意の正の定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を用いて、

$$\{\mathbf{A}\} = [\alpha_1b_1, \alpha_2b_2, \alpha_3b_3, 0, 0, 0]^T \quad (44)$$

のように置き換え、かつ $[\mathbf{B}]$ を式(43)を用いて次式のように書き換える。

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2b_1^2 & -b_1b_2 & -b_1b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2b_1 & 2b_2^2 & -b_2b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3b_1 & -b_3b_2 & 2b_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6^2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

このとき、式(38)で表される異方性降伏関数の一般形は、その特別な場合として次式のような表現を与える。

$$\begin{aligned} & [(b_1\sigma_{11} - b_2\sigma_{22})^2 + (b_2\sigma_{22} - b_3\sigma_{33})^2 \\ & \quad + (b_3\sigma_{33} - b_1\sigma_{11})^2 + b_4^2\sigma_{12}^2 + b_5^2\sigma_{23}^2 + b_6^2\sigma_{31}^2]^{\frac{1}{2}} \\ & - (\alpha_1b_1\sigma_{11} + \alpha_2b_2\sigma_{22} + \alpha_3b_3\sigma_{33}) = k \quad (46) \end{aligned}$$

また、上式は正規化することにより次式のように表現することもできる。

$$\begin{aligned} & [(\hat{b}_1\sigma_{11} - \hat{b}_2\sigma_{22})^2 + (\hat{b}_2\sigma_{22} - \hat{b}_3\sigma_{33})^2 \\ & \quad + (\hat{b}_3\sigma_{33} - \hat{b}_1\sigma_{11})^2 + \hat{b}_4^2\sigma_{12}^2 + \hat{b}_5^2\sigma_{23}^2 + \hat{b}_6^2\sigma_{31}^2]^{\frac{1}{2}} \\ & - (\alpha_1\hat{b}_1\sigma_{11} + \alpha_2\hat{b}_2\sigma_{22} + \alpha_3\hat{b}_3\sigma_{33}) = 1 \quad (47) \end{aligned}$$

式(46)または式(47)の降伏関数は、異方性の表現が応力空間内に固定した直交座標系の基底ベクトルを補正したものとみることから、これらの降伏関数を応力空間基底補正型降伏関数と呼ぶこととする。明らかにこの降伏関数は、その特別な場合として等方性に対する von Mises と Drucker-Prager の降伏関数を含んでいるが、各材料主軸方向の異方性の割合が静水圧に依存しないとする Hill や Pariseau の降伏関数とは異なる。このことを具体的に示すために、これらの降伏関数の幾何学形状を示した図-3~図-6を用いて若干の考察を行う。ただし、図-3および図-5は数値計算結果をグラフィックス表示<sup>21)</sup>したものであることからやや滑らかなさに欠けるが、実際には図-4および図-6に示すように滑らかな曲面である。

図-3は、主応力軸を材料主軸方向に選んだ場合の主応力空間において、式(14)の Pariseau の異方性降伏関数の形状を等方性材料に対する Drucker-Prager の降伏関数と比較したものである。Drucker-Prager の降伏曲面に対して、Pariseau の降伏曲面は静水圧軸 $\sigma_{mm}$ に対して偏心しており異方性を示していることが分かる。

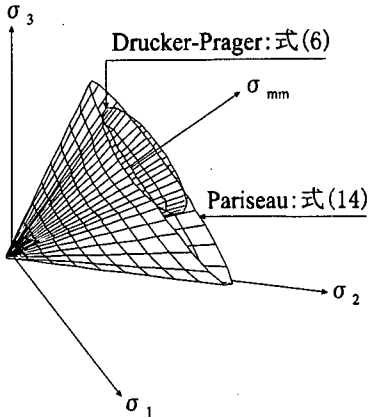


図-3 主応力空間での Pariseau の降伏曲面  
 $(\eta = \sigma_{2u}/\sigma_{1u} = 2.0, \sigma_{1u} = \sigma_{3u})$

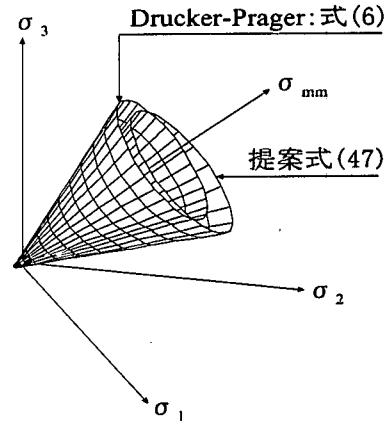


図-5 主応力空間での応力基底補正型降伏関数  
 $(\eta = \sigma_{2u}/\sigma_{1u} = 2.0, \sigma_{1u} = \sigma_{3u})$

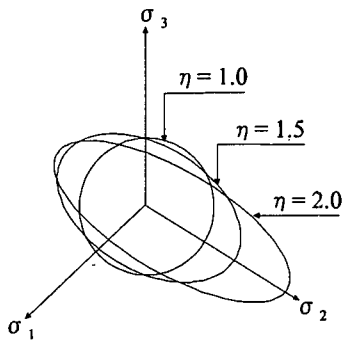


図-4 π 平面で表示した Pariseau の降伏関数  
 $(\eta = \sigma_{2u}/\sigma_{1u} = 1.0, 1.5, 2.0, \sigma_{1u} = \sigma_{3u})$

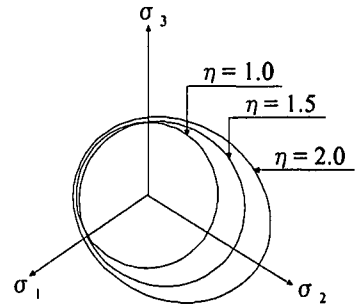


図-6 π 平面で表示した応力基底補正型降伏関数  
 $(\eta = \sigma_{2u}/\sigma_{1u} = 1.0, 1.5, 2.0, \sigma_{1u} = \sigma_{3u})$

図-4は、材料の第一主軸と第二主軸方向の一軸圧縮強度の比  $\eta = \sigma_{2u}/\sigma_{1u}$  (第一、第三主軸の一軸圧縮強度は等しいとした) を  $\eta = 1.0$  (等方性) ~ 2.0 (異方性) まで変化させた場合の Pariseau の降伏曲面を  $\pi$  平面で表示したものである。同図より、材料主軸方向の圧縮強度の差が大きくなるに従って降伏曲面が大きく歪み、異方性を示す。しかし、第二主軸に対する引張りまたは圧縮伸長強度 (図中の  $\sigma_2$  軸上の負方向) がかなり大きくなる傾向にある。

図-5は式(47)の応力空間基底補正型降伏関数を図-3と同様にして表示したものである。この降伏曲面も静水圧軸に対して偏心しており、異方性を表現していることが分かる。図-6は、Pariseau の降伏関数と比較するために、図-4と全く同様に材料の第一主軸と第二主軸方向の一軸圧縮強度の比を  $\eta = 1.0$  (等方性) ~ 2.0 (異方性) まで変化させ、 $\pi$  平面で表示したものである。

応力空間の基底を補正した降伏関数も、材料主軸に関する圧縮強度の差が大きくなるに従って降伏曲面に歪みを生じ、異方性を示す。しかしながら、異方性の割合が大きくなっても Pariseau の降伏関数のように引張りまたは圧縮伸長方向の強度が極端に増加するようなことはない。

### (3) 材料パラメータの評価手法と試験

応力空間基底補正型降伏関数に含まれている材料パラメータの力学的意味は、すでに述べたように材料主軸方向の異方性の割合を表現したものと見なせる。このため、これらの材料パラメータもまた、これまでに述べてきた他の異方性降伏関数と同様にその比率のみが意味を持ち、その大きさそのものに意味を持たない量である。したがって、式(46)等に含まれる材料パラメータ  $b_i, \alpha_i, \kappa$  は唯一定まる量として決めうるもの



ではなく、それぞれの比のみが意味を持つ無数の組として存在する。このため、これらのパラメータの評価式を陽な形で定式化することはできない。この問題を解決する一つの手段として、ここでは以下に述べる手順に従って一組の初期値を決定し、この初期値の周辺に存在する材料パラメータの組を制約条件付きの非線形最適化法を用いて推定することとする。この方法によれば、通常の一軸・三軸圧縮試験結果のみで材料パラメータを同定出来るばかりでなく、十分精度の高い完全三軸試験や一軸引張り試験等が可能であればこれらの試験値の利用も可能である。

非線形最適化法を用いて材料パラメータを推定するに先だて、これらの初期値を設定するため、材料の主軸に一致した応力成分を次式で補正する。

$$\bar{\sigma}_{11} = b_1 \sigma_{11} : \bar{\sigma}_{22} = b_2 \sigma_{22} : \bar{\sigma}_{33} = b_3 \sigma_{33} \quad (48)$$

ここで、 $\bar{\sigma}_{ij}$  は基底補正後の応力を表す。

実応力空間での材料の各主軸方向の一軸圧縮強度をそれぞれ  $\sigma_{1u}$ ,  $\sigma_{2u}$ ,  $\sigma_{3u}$  とし、これらは基底補正された応力空間で互いに等しい一軸圧縮強度  $\bar{\sigma}_u$  として次式で表されるものと仮定する。

$$\bar{\sigma}_u = b_1 \sigma_{1u} = b_2 \sigma_{2u} = b_3 \sigma_{3u} \quad (49)$$

さらに、式(49)で表される一軸圧縮強度  $\bar{\sigma}_u$  を、実応力空間でみた三つの材料主軸方向の一軸圧縮強度の平均値に近い値として次式で定義するものとする。

$$\bar{\sigma}_u = \frac{\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}}{3} \quad (50)$$

式(49)と式(50)から応力軸の基底補正係数の初期値は次式で表される。

$$b_i = \frac{\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}}{3\sigma_{iu}} \quad (i: 1, 2, 3) \quad (51)$$

さらに、基底補正された応力空間で材料が等方的であると仮定する(実際には式(46)または式(47)の第一項および第二項が静水圧依存であることから等方的ではない)ことにより、Drucker-Pragerの降伏関数と同様な次式の表現を仮定する。

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3)^2 + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1)^2]} - \bar{\alpha}(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3) = \bar{k} \quad (52)$$

上式の  $\bar{\alpha}$  および  $\bar{k}$  は、Drucker-Pragerの降伏関数と同様な手順に従って、三つの材料主軸方向に対する三軸圧縮試験から得られる強度と拘束圧を用いて決定できる。ただし、ここで利用する試験値としての拘束圧と圧縮強度は式(48)と式(51)に従って変換した後、形式的に式(52)で表される降伏関数を用いる必要がある。

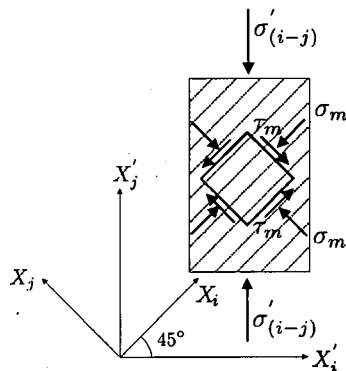


図-7 材料主軸と45度の傾きをなす一軸圧縮試験

また、式(46)の  $\alpha_i$  は互いに独立な係数であることから、三つの材料主軸に対する試験結果から評価されるこれらの値は各々異なる結果を与える。このため、 $\alpha_i$  および  $\kappa$  の初期値として、例えばそれぞれの材料主軸毎に評価された  $\bar{\alpha}$  および  $\bar{k}$  の平均値を利用することになる。

せん断応力成分に関する材料パラメータ ( $b_4 \sim b_6$ ) は、純せん断試験が可能であれば試験結果から直接決定可能であるが、以下では一軸圧縮試験結果からこれらの係数の初期値を設定する方法を検討する。

図-7に示すような直交する三つの材料主軸の任意の二つの軸で作られる  $(i-j)$  平面内で、これらの主軸に対して45度方向の一軸圧縮強度が与えられている場合を考える。このとき、材料主軸に直交する面は最大せん断応力面であり、この面に作用する応力  $\sigma_m$ ,  $\tau_m$  は次式で与えられる。

$$\sigma_m = \tau_m = \frac{1}{2} \sigma'_{(i-j)} \quad (i \neq j: 1, 2, 3) \quad (53)$$

ここで、 $\sigma'_{(i-j)}$  は材料の主軸から45度傾いた方向の一軸圧縮強度を表す。材料主軸で見た応力は、上式で与えられる最大せん断応力面の応力に一致することから、次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_m & \quad \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{12} = \tau_m & \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

この応力状態は降伏条件式(46)を満足していなければならない。したがって、式(54)と式(53)を式(46)に代入することによって、材料パラメータ ( $b_4 \sim b_6$ ) が次式で与えられる。

$$b_4 = \left[ \left( \frac{2k}{\sigma'_{(1-2)}} + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \right)^2 - 2(b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$b_5 = \left[ \left( \frac{2k}{\sigma_{(2-3)}} + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 \right)^2 - 2(b_2^2 + b_3^2 - b_2 b_3) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (55)$$

$$b_6 = \left[ \left( \frac{2k}{\sigma_{(3-1)}} + \alpha_3 b_3 + \alpha_1 b_1 \right)^2 - 2(b_3^2 + b_1^2 - b_3 b_1) \right]^{\frac{1}{2}}$$

上式の特別な場合として、材料主軸空間内の任意の一つの平面内で等方性を有し、他の二つの面内での異方性が対称である場合を考えることとする。等方性を示す材料の主軸面を(2-3)面を選び、互いに対称な異方性を示す面を(1-2)面と(3-1)面とすると、式(46)の材料パラメータの間には次式の関係が成り立つ。

$$\alpha_2 = \alpha_3 \quad b_2 = b_3 \quad b_4 = b_6 \quad (56)$$

また、このとき  $b_5$  は(2-3)面内で等方性であることから、一軸圧縮試験の方向に無関係であることが分かる。岩石材料におけるこのような条件は、成層状態で堆積した堆積岩などでよくみられる。

以上のようにして得られた材料パラメータを初期値として、下式の目的関数  $F$  を最小にする制約条件付き最小二乗問題を解くことにより全ての材料パラメータ ( $\alpha_i$ ,  $b_i$  に  $k$  を含めて 10 個) を決定する。

$$F = \sum_{i=1}^n (F_i)^2 \quad (57)$$

ただし、 $F_i$  は次式で計算されるものとする。

$$F_i = \sqrt{\{\sigma\}^T [\mathbf{T}]^T [\mathbf{B}] [\mathbf{T}] \{\sigma\} - \{\mathbf{A}\}^T [\mathbf{T}] \{\sigma\} - k} \quad (58)$$

ここで、 $n$  は材料試験値の総数 (一組の応力  $\{\sigma\}$  を試験値とした総組数) であり、 $[\mathbf{T}]$  は応力に関する座標変換マトリックスを表し、一軸および三軸圧縮試験の載荷軸が材料主軸となす方向によって定まる。ただし、ここでの座標変換マトリックス  $[\mathbf{T}]$  は、応力テンソルに関するものではなく、応力の独立な成分のみを一次元配列表示した  $\{\sigma\}$  に対する変換<sup>22)</sup>を意味することに注意する必要がある。また、ここで用いる試験データは、材料パラメータの初期値の設定で述べたような材料主軸方向に対する試験結果である必要はなく、主軸方向を含む任意の方向の試験結果を使用してよい。この場合は、せん断応力に関する材料パラメータが含まれることから、式(55)の関係を用いてこれらのパラメータを目的関数から消去することにより、推定すべき未知数の数を減らすことも考えられる。ただし、このような未知数の消去は、材料主軸に対して45度方向で実施される一軸圧縮試験結果の精度が、推定される材料パラメータの精度に直接影響するという問題を生じることから、出来る限り避けるほうが無難である。

式(57)の最小化問題に対する制約条件は、降伏関数の物理的意味、あるいは特別な応力状態としての一軸や純せん断状態を考えることにより与えられる。まず、式(46)において、材料主軸に一致した主応力状態を考えると、静水圧依存型の他の降伏関数と同様に、材料の降伏は主応力差の大小によって表現されている。したがって、材料パラメータ  $b_1 \sim b_3$  は、降伏関数の物理的意味から負の値を取ることは考えられず、次式の制約条件を必要とする。

$$b_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (59)$$

またこのとき、材料主軸に一致する一軸応力状態に対して、式(46)から次式の間を得る。

$$(\sqrt{2} - \alpha_i) b_i = \frac{k}{\sigma_{iu}} > 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (60)$$

上式と式(59)から、材料パラメータ  $\alpha_1 \sim \alpha_3$  の制約条件が次式で与えられる。

$$0 < \alpha_i < \sqrt{2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (61)$$

一方、材料パラメータ  $b_4 \sim b_6$  に対する制約条件は、式(46)に対する純せん断応力状態を考えることにより次式で与えられる。

$$b_i > 0 \quad (i = 4, 5, 6) \quad (62)$$

なお、実際の計算では、制約条件を簡単にすること、および推定する未知数の一つである  $k$  を消去するために、正規化した降伏関数式(47)に対する次式の目的関数を用いることとした。

$$F = \sum_{i=1}^n (\hat{F}_i)^2 \quad (63)$$

$$\hat{F}_i = \sqrt{\{\sigma\}^T [\mathbf{T}]^T [\hat{\mathbf{B}}] [\mathbf{T}] \{\sigma\} - \{\hat{\mathbf{A}}\}^T [\mathbf{T}] \{\sigma\} - 1} \quad (64)$$

## 5. 試験値と計算値の比較および考察

本章では、提案する応力空間基底補正型降伏関数が材料パラメータの評価手法を含めて実際の岩石材料の強度異方性をどの程度表現できるかを調べるために、軸対称応力条件下での一軸および三軸圧縮試験結果と計算値の比較から考察を加える。なお、以下に示す試験値は、いずれも材料主軸に対する傾き  $\theta$  の間隔が粗く、最小強度を示す方向角  $\theta_{\min}$  を正確に決められない。そこで、以後これらの値を示すときには「付近」あるいは範囲を表す「 $\sim$ 」を用いる。また、計算値のように値を確定できる場合は「 $=$ 」あるいは変化を表す「 $\rightarrow$ 」を用いる。

式(47)の材料パラメータの評価結果:  $10^{-2}$

$$\hat{b}_1 = 2.062 \quad \hat{b}_2 = 1.851 \quad \hat{b}_3 = 2.062$$

$$\hat{b}_4 = 6.582 \quad \hat{b}_5 = 6.582 \quad \hat{b}_6 = 5.038$$

$$\hat{a}_1 = 0.930 \quad \hat{a}_2 = 0.524 \quad \hat{a}_3 = 0.930$$

式(14)の材料パラメータの評価結果:  $10^{-3}$

$$\hat{b}_1 = 0.308 \quad \hat{b}_2 = 0.308 \quad \hat{b}_3 = 0.570$$

$$\hat{b}_4 = 4.102 \quad \hat{b}_5 = 4.102 \quad \hat{b}_6 = 2.873$$

$$\hat{a}_1 = 9.286 \quad \hat{a}_2 = 5.036 \quad \hat{a}_3 = 9.286$$

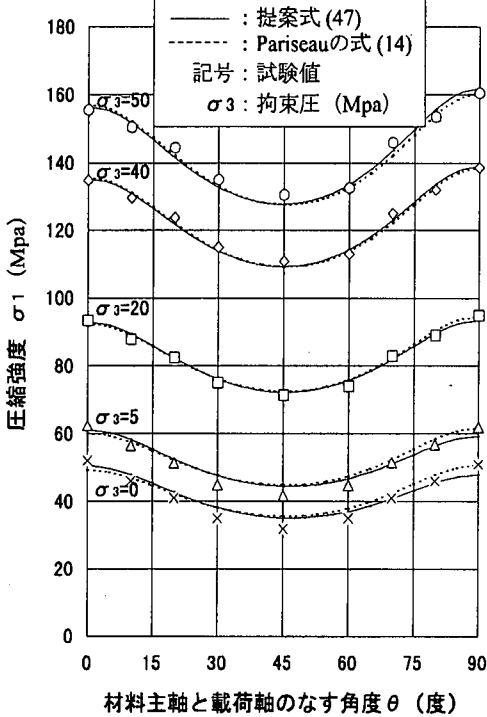


図-8 Tournemire Shale の試験値<sup>23)</sup>と計算値

図-8～図-10は、 $\pi$ 平面で見た降伏関数の形状が静水圧応力にほとんど依存しない岩石材料の試験値と計算値の比較例を示したものであり、図中には、応力空間補正型降伏関数とPariscauの降伏関数による計算値を示した。

図-8は、Niandouが実施したTournemire shaleの試験値<sup>23)</sup>と計算値の比較を示したものであり、両降伏関数による計算値に大差はなく、いずれも試験値とよく一致している。また、材料の第一主軸( $\theta = 0$ 度)と第二主軸( $\theta = 90$ 度)方向の強度比 $\eta = \sigma_2/\sigma_1$ および最小強度を与える方向 $\theta_{\min}$ は、試験値と計算値の両者でほぼ $\eta = 1.0$ 、 $\theta_{\min} = 46$ 度付近にあり、拘束圧に対してほぼ一定である。このことから、この頁岩の $\pi$ 平面の形状は静水圧応力非依存に近く、このことが提案する降伏関数とPariscauによる計算値がほとんど一致する理由と考えられる。

式(47)の材料パラメータの評価結果:  $10^{-2}$

$$\hat{b}_1 = 0.736 \quad \hat{b}_2 = 0.731 \quad \hat{b}_3 = 0.747$$

$$\hat{b}_4 = 2.358 \quad \hat{b}_5 = 2.381 \quad \hat{b}_6 = 1.749$$

$$\hat{a}_1 = 0.262 \quad \hat{a}_2 = 0.238 \quad \hat{a}_3 = 0.294$$

式(14)の材料パラメータの評価結果:  $10^{-3}$

$$\hat{b}_1 = 0.112 \quad \hat{b}_2 = 0.058 \quad \hat{b}_3 = 0.000$$

$$\hat{b}_4 = 0.762 \quad \hat{b}_5 = 0.553 \quad \hat{b}_6 = 0.147$$

$$\hat{a}_1 = 2.843 \quad \hat{a}_2 = 5.098 \quad \hat{a}_3 = 0.000$$

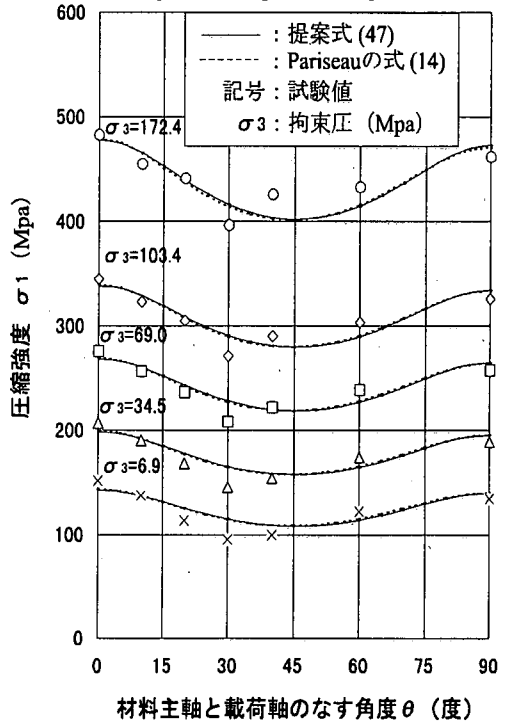


図-9 Green River Shale-2 の試験値<sup>19)</sup>と計算値

図-9は、Mclamoreら<sup>19)</sup>によるGreen River shale-2の試験結果と比較したものであり、やはり両降伏関数による計算値と試験値は比較的よく一致している。また、強度比の変化は $\eta = 0.9 \rightarrow 1.0$ 程度と僅かであり、試験値と計算値の両者でほとんど一致している。さらに、最小強度を示す方向角 $\theta_{\min}$ は一定であるが、試験値で $\theta_{\min} = 30 \sim 45$ 度、計算値で $\theta_{\min} = 45$ 度であり、拘束圧の影響は受けないものあまりよい一致を示さなかった。しかし、この頁岩についても $\pi$ 平面の形状は静水圧応力非依存に近く、両降伏関数による計算値がほとんど一致する結果となった。

図-10は、Attewellら<sup>24)</sup>によるPenrhyn slateの試験値と計算値を比較したものであり、計算値は試験値と比較的よく一致しているが、降伏関数によって多少の違いを生じている。この粘板岩の強度比と最小強度を示す方向角およびその変化は、先の二つの頁岩の例と

式(47)の材料パラメータの評価結果:  $10^{-2}$

$$\hat{b}_1 = 0.624 \quad \hat{b}_2 = 1.171 \quad \hat{b}_3 = 0.624$$

$$\hat{b}_4 = 3.664 \quad \hat{b}_5 = 3.664 \quad \hat{b}_6 = 1.520$$

$$\hat{a}_1 = 0.268 \quad \hat{a}_2 = 1.224 \quad \hat{a}_3 = 0.268$$

式(14)の材料パラメータの評価結果:  $10^{-3}$

$$\hat{b}_1 = 0.094 \quad \hat{b}_2 = 0.094 \quad \hat{b}_3 = 0.000$$

$$\hat{b}_4 = 1.361 \quad \hat{b}_5 = 1.361 \quad \hat{b}_6 = 0.181$$

$$\hat{a}_1 = 4.088 \quad \hat{a}_2 = 8.549 \quad \hat{a}_3 = 4.088$$

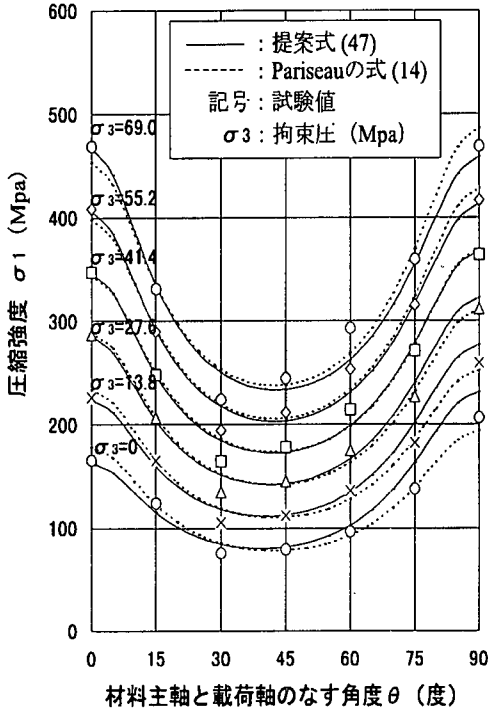


図-10 Penrhyn Slate の試験値<sup>24)</sup>と計算値

異なり、試験値で  $\eta = 1.3 \rightarrow 1.0$ ,  $\theta_{\sigma_{min}} = 30 \sim 45$  度程度と判断されるが、提案する降伏関数による計算値では  $\eta = 1.4 \rightarrow 1.0$ ,  $\theta_{\sigma_{min}} = 38 \rightarrow 43$  度であり、拘束圧の増加に伴って変化している。このことから、降伏関数の  $\pi$  平面形状は静水圧応力の影響を考慮する必要があるものと判断される。一方、Parisau の降伏関数による計算値では、拘束圧に無関係に  $\eta = 1.1$ ,  $\theta_{\sigma_{min}} = 43$  度の一定値を示し、静水圧応力による異方性の変化を表現できない。

図-11～図-14は、 $\pi$  平面で見た降伏関数の形状が静水圧応力に依存して変化する岩石材料の試験値と計算値の比較例である。ただし、Parisau の降伏関数については計算値を示してない。これは、これらの試験データに対する降伏関数の  $\pi$  平面形状が静水圧応力に強く依存することから、Parisau の降伏関数に含まれる材料パラメータを決定できなかったためである。

式(47)の材料パラメータの評価結果:  $10^{-1}$

$$\hat{b}_1 = 2.098 \quad \hat{b}_2 = 1.457 \quad \hat{b}_3 = 2.098$$

$$\hat{b}_4 = 6.418 \quad \hat{b}_5 = 6.418 \quad \hat{b}_6 = 5.081$$

$$\hat{a}_1 = 1.756 \quad \hat{a}_2 = 1.005 \quad \hat{a}_3 = 1.756$$

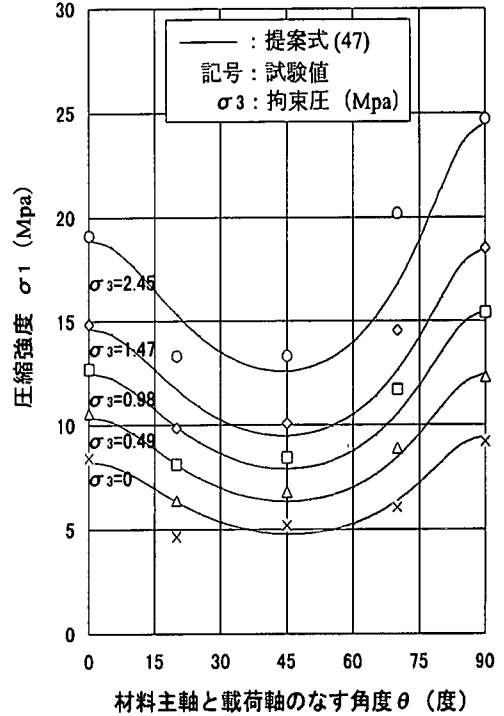


図-11 異方性セメントモルタルの試験値と計算値

換言すれば、Parisau の降伏関数による異方性の表現は、図-10 に示した程度の異方性までが限界であるように思われる。

図-11 は、著者らが行った異方性セメントモルタル供試体の試験値と計算値の比較を示したものである。

供試体は、モルタルを層厚 5 mm 間隔で打設したブロックから所定方向(打設面直交方向に対する傾き)でコア抜き・整形したものを使用した。なお、供試体に異方性を持たせるために、すべてのモルタル打設境界に不連続材(千鳥状に  $\phi = 8$  mm の円孔を開けた紙)を挟んでいる。

この異方性セメントモルタル供試体の例では、拘束圧による強度比の変化は、試験値と計算値の両者で一致しており、 $\eta = 1.1 \rightarrow 1.3$  である。また、最小強度を示す方向角の試験値は  $\theta_{\sigma_{min}} = 20 \sim 45$  度の範囲内で若干移動する傾向にあるが、提案する降伏関数による計算値では、拘束圧に無関係に  $\theta_{\sigma_{min}} = 45$  度の一定値を示した。このため、 $\theta = 20$  度での試験値と計算値に有意な誤差を生じている。

式(47)の材料パラメータの評価結果:  $10^{-2}$

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= 0.360 & \hat{b}_2 &= 0.484 & \hat{b}_3 &= 0.360 \\ \hat{b}_4 &= 1.916 & \hat{b}_5 &= 1.916 & \hat{b}_6 &= 0.871 \\ \hat{a}_1 &= 0.123 & \hat{a}_2 &= 0.336 & \hat{a}_3 &= 0.123 \end{aligned}$$

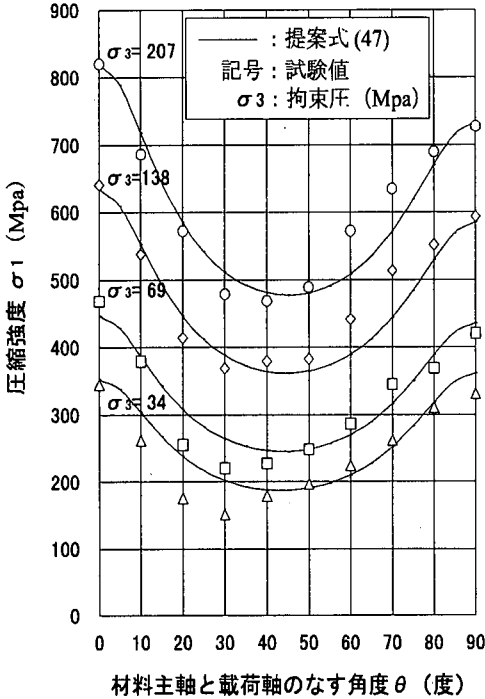


図-12 Austin slate の試験値<sup>19)</sup>と計算値

図-12は、Mclamoreら<sup>19)</sup>による Austin slate の試験値と計算値の比較を示したものである。この岩石材料は、図-11の例とは逆に、拘束圧による強度比の変化は試験値と計算値の両者で  $\eta = 1.0 \rightarrow 0.9$  程度と小さく、拘束圧による最小強度を示す方向角の変化は、試験値で  $\theta_{\min} = 30 \sim 40$  度の範囲に位置し、計算値で  $\theta_{\min} = 40 \rightarrow 44$  度の移動がみられる。

図-13は、Donath<sup>25)</sup>による Martinsburg slate の試験値と計算値を示したものである。前二例は、強度比  $\eta$  と最小強度を与える方向角  $\theta_{\min}$  のいずれか一方が拘束圧の影響を受けないか、あるいは小さい材料に対する比較を行ったものであるが、図-13は、 $\eta$  と  $\theta_{\min}$  の両者が拘束圧によって大きく変化する材料に対する比較例を示している。この材料の強度比は、試験値で  $\eta = 1.6 \rightarrow 1.1$ 、計算値で  $\eta = 1.8 \rightarrow 1.1$  と拘束圧により大きく影響を受ける。同時に、最小強度を示す方向角も拘束圧によって試験値で  $\theta_{\min} = 30 \sim 45$  度の範囲で移動する傾向がみられ、計算値では拘束圧の増加に伴って、 $\theta_{\min} = 38 \rightarrow 43$  度の移動がみられる。これは、 $\pi$  平面で表した降伏関数の形状が静水圧応力に

式(47)の材料パラメータの評価結果:  $10^{-2}$

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= 0.748 & \hat{b}_2 &= 1.502 & \hat{b}_3 &= 0.748 \\ \hat{b}_4 &= 5.580 & \hat{b}_5 &= 5.580 & \hat{b}_6 &= 1.765 \\ \hat{a}_1 &= 0.239 & \hat{a}_2 &= 1.692 & \hat{a}_3 &= 0.239 \end{aligned}$$

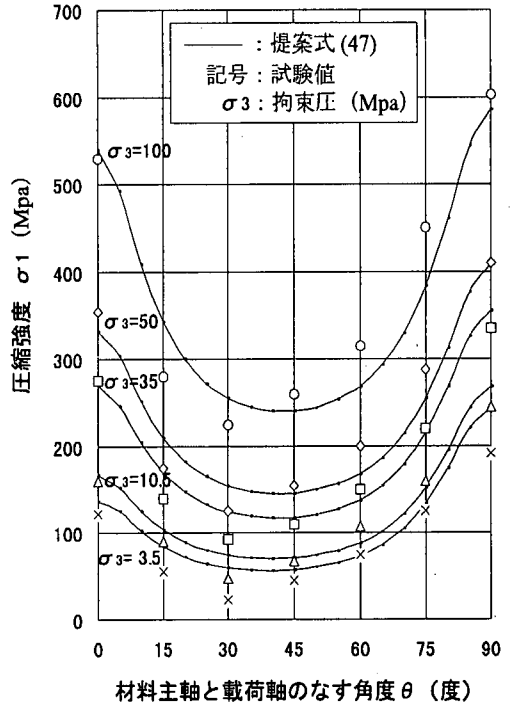


図-13 Martinsburg slate の試験値<sup>25)</sup>と計算値

強く依存する一つの現れであると判断される。

図-14は、Horinoら<sup>26)</sup>による Fractured sandstone の試験値と計算値の比較であり、この材料は極めて異方性が強く、試験値と計算値の差が大きい事例として示した。拘束圧の増加に伴う強度比の変化は試験値で  $\eta = 1.3 \rightarrow 1.0$ 、計算値で  $\eta = 1.6 \rightarrow 1.0$  である。また、最小強度を示す方向角は拘束圧の変化に対して、試験値で  $\theta_{\min} = 20 \sim 45$  度の範囲で移動する傾向がみられ、計算値では  $\theta_{\min} = 30 \rightarrow 39$  度の移動を示した。これはいずれも図-13で取り上げた粘板岩と同程度の変化であるが、図から分かるように、他の例に比べて最小強度を与える方向角がかなり低角度で、かつこの付近での強度変化がV字型に急変している。

Ramamurthy<sup>18)</sup>は岩石材料の強度異方性を以下のように三つのタイプに分類している。

- Uタイプの異方性:  $\theta = 90$  度で最大圧縮強度を、 $\theta = 30$  度付近で最小圧縮強度を示し、圧縮強度と載荷軸角度によって描かれる強度異方性曲線が滑らかなU字形を形成する。

式(47)の材料パラメータの評価結果:  $10^{-2}$

$$\hat{b}_1 = 0.677 \quad \hat{b}_2 = 2.782 \quad \hat{b}_3 = 0.677$$

$$\hat{b}_4 = 4.416 \quad \hat{b}_5 = 4.416 \quad \hat{b}_6 = 1.603$$

$$\hat{a}_1 = 0.258 \quad \hat{a}_2 = 0.355 \quad \hat{a}_3 = 0.258$$

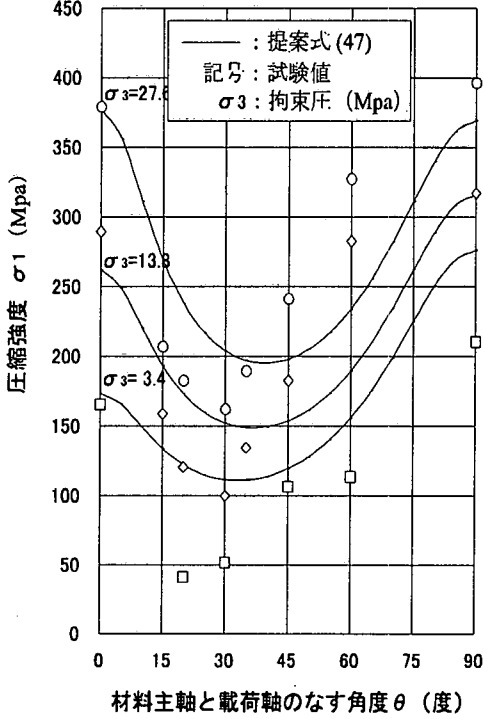


図-14 Fractured Sandstone の試験値<sup>26)</sup>と計算値

- ショルダータイプの異方性:  $\theta = 0$ 度で最大圧縮強度を,  $\theta = 15 \sim 30$ 度の範囲で最小圧縮強度を示す滑らかなショルダー形強度異方性曲線を形成する。
- うねりタイプの異方性:  $\theta = 90$ 度で最大圧縮強度を,  $\theta = 30$ 度付近で最小圧縮強度を示し, 複数の弱面によって強度異方性曲線は波打つ。

しかしながら, 今回の計算例で取り上げた試験結果を明確に上記の分類に当てはめることはできない。このため, ここでは次のような分類を試みることにした。ただし, 方向の異なる複数の弱面に起因するうねりタイプは除く。

- 対称型異方性:  $\theta = 45$ 度付近で最小圧縮強度を示し, その左右で強度異方性曲線が対称形である。
- 非対称型異方性: 強度異方性曲線が非対称形のバスタブ曲線を示し, 材料主軸方向の圧縮強度が異なる。

- V字型異方性: 強度異方性曲線が非対称形のV字曲線を示し, 材料主軸方向の圧縮強度が異なる。

図-8, 図-9 は対称形異方性に属し, この種の材料に対しては, 応力空間基底補正型降伏関数と Pariseau 型の降伏関数のいずれも適用範囲にある。図-10 は対称型と非対称型の中間に位置し, Pariseau 型の降伏関数の適用限界である。図-11 ~ 図-13 は非対称型異方性に分類され, 応力空間基底補正型降伏関数は適用可能であるが, Pariseau 型の降伏関数は適用外と思われる。図-14 はV字型異方性に近く, 応力空間基底補正型降伏関数によっても精度的に問題が残る。

## 6. あとがき

本文では, まず等方性材料と異方性材料に対してこれまでに提案されている幾つかの代表的な降伏関数の相互関係を系統的に整理した後, 異方性が問題となる岩石材料にこれらの降伏関数を適用する場合の問題点を指摘した。

特に, Pariseau の降伏関数に含まれる材料パラメータを決定するための試験には, 一軸引張り試験や純せん断試験などを必要としていた。岩石のような材料に対するこれらの試験は, 精度的にも試験技術的にも多くの困難を伴い, 実用的観点から問題を残している。このため, 降伏曲面の幾何学的考察から Pariseau の降伏関数の再定式化を試みることにより, この降伏関数に含まれている材料パラメータの力学的意味を明らかにし, 同時により実用的な材料パラメータの評価方法を示した。

また, Pariseau の降伏関数は, 応力の二次の項が静水圧応力に依存しないことから, 降伏曲面の  $\pi$  平面の形状が静水圧応力に依存するような材料に対しては適用できないという問題が残されていた。このため, このような異方性材料に利用できる新たな降伏関数について考察し, 従来の基本的な降伏関数の自然な拡張として与えられる静水圧依存型の異方性降伏関数を提案した。この降伏関数は, 形式的には応力空間の基底, すなわち応力テンソルの独立成分に異方性に応じた係数を乗じることによって異方性を表現したものであり, 降伏曲面の大きさと  $\pi$  平面の形状は, 共に静水圧応力に依存する。なお, この降伏関数に含まれる材料パラメータについても, ごく一般的に利用されている一軸圧縮試験と三軸圧縮試験から評価できる方法を示した。さらに, 一軸および三軸圧縮試験結果と計算値の比較から, 新たに提案した降伏関数による異方性の表現性について考察を加えた。その結果, 提案する降伏関数

は、従来の降伏関数比べて、岩石材料に対する異方性の表現性に優れていることを示唆した。

謝辞：本研究を進めるに当たり、法政大学大学院工学研究科の谷岡昭寛君（現在：前田建設工業）、高橋寛君（現在：大林組）および兼重剛君に数値計算や図面作成等の協力を頂いた。また、試験方法の検討・実施およびデータ解析は、法政大学工学部土木工学科の金山盟君（現在：竹中土木）と金田大祐君（現在：興和コンサルタンツ）によるところが多い。

さらに、間組技術研究所および東京電力葛野川水力建設所の関係各位からは多くの示唆に富んだご意見を頂いたことを記して、深く感謝の意を表す。

#### 参考文献

- 1) Kwaśniewski, M.A. : Mechanical Behavior of Anisotropic Rocks, Comprehensive Rock Engineering, Vol.1, Pergamon Press, Oxford, pp.285-312, 1993.
- 2) 舍川 徹, 右近裕之, 赤松英樹 : 葛野川発電所葛野川ダムの設計と施工, 電力土木, No.262, pp.45-52, 1996.
- 3) 舍川 徹 : 葛野川発電所葛野川ダムの設計と施工計画について, ダム日本, No.618, pp.21-43, 1996.
- 4) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦 : 有限要素法ハンドブック (1基礎編) : 培風館, pp.421-427, 1988.
- 5) Gen-Hua Shi : Manifold Method, Discontinuous Deformation Analysis (DDA) and Simulations of Discontinuous Media, Tsi Press, pp.52-204, 1996.
- 6) 京谷孝史, 大橋敏行, 川本眺万 : 損傷力学理論による節理性岩盤内地下空洞の掘削解析, 材料, 第35巻, 第392号, pp.472-477, 1986.
- 7) 西村毅, 草深守人, 大橋敏行, 西川力 : 水力発電所地下空洞の掘削に伴う岩盤亀裂調査とその定量化, 土木学会論文集, 第418号/3-13, pp.45-53, 1990.
- 8) 小田匡寛, 鈴木健一郎 : クラックテンソルによる不連続性岩盤のモデル化に関する研究, 第15回岩盤力学シンポジウム, pp.96-100, 1983.
- 9) Ralston, T.D. : Yield and Plastic Deformation in Ice Crushing Failure, (Preprint), ICSI/AIDJEX Sympo. on Sea Ice-Processes and Models, Seattle, 1977.
- 10) Pariseau, W.C. : Plasticity Theory for Anisotropic Rocks and Solids, Proceedings of the Tenth Sympo. of Rock Mechanics, Chapter-10, University of Texas, Austin, 1968.
- 11) Chen, W.F. and Saleeb : Constitutive Equations for Engineering Materials, Vol.1 and Vol.2, Elsevier, 1994.
- 12) 山田嘉昭 : 塑性力学, 日刊工業新聞社, pp.44-95, 1968.
- 13) Hill, R. : The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press, Oxford, Chapter 1, 1950.
- 14) Crisfield, M.A. : Non-linear Finite Element Analysis of Solid and Structures, Vol.2, Advanced Topic, John Wiley and Sons, pp.99-107, 1997.
- 15) 土質工学会編 : 岩の工学的性質と設計・施工への応用, 土質工学会, pp.121-125, 1985.
- 16) Desai, C.S. and Siriwardane, H.J. : Constitutive Laws for Engineering Materials, Prentice-Hall, pp.53-81, 1984.
- 17) Karr, D.G., Law, F.P., Fatt, M.H. and Cox, G.F.N. : Asymptotic and Quadratic Failure Criteria for Anisotropic Materials, Int. J. of Plasticity, Vol.5, pp. 303-336, 1989.
- 18) Ramamurthy, T. : Strength and Modulus Responses of Anisotropic Rocks, Comprehensive Rock Engng., Vol.1, Fundamentals, Pergamon Press, Oxford, pp.313-329, 1993.
- 19) McIlmore, R. and Gray, K.E. : The Mechanical Behavior of Anisotropic Sedimentary Rocks, Trans. of the Amer. Soc. Mech. Engrs., Feb., pp.62-76, 1967.
- 20) Nova, R. : The Failure of Transversely Isotropic Rocks in Triaxial Compression, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr., Vol.17, Pergamon Press, pp. 325-332, 1980.
- 21) Wolfram, S. : The Mathematica Book, Third Edition, Wolfram, Research Inc., pp.104-171, 1998.  
(日本語訳 : 由里洋, (株) トッパン)
- 22) 武田 洋, 草深守人 : 異方性構成方程式の座標変換に関する統一的展開, 第3回 日本計算工学会講演会論文集, 1998.
- 23) Cristescu, N.D. and Hunsche, U. : Time Effects in Rock Mechanics, John Wiley & Sons, p.178, 1988.
- 24) Attewell, P.B. and Sandford, M.R. : Intrinsic Shear Strength of a Brittle Anisotropic Rock-1, Experimental and Mechanical Interpretation, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstract, Vol. 11, Pergamon Press, pp.423-430, 1974.
- 25) Donath, F.A. : Strength Variation and Deformational Behavior in Anisotropic Rock, State of Stress in the Earth's Crust, W.R. Judd, ed., Elsevier, pp.281-297, 1964.
- 26) Horino, F.G. and Ellickson, M.L. : A Method of Estimating Strength of Rock Containing Planes of Weakness, U.S. Bureau of Mines Report of Investigations, 1970.

(1998.8.12 受付)

# ANISOTROPIC YIELD FUNCTION FOR ROCKS AND EVALUATION OF MATERIAL PARAMETERS

Morito KUSABUKA, Hiroshi TAKEDA, Hiromi KOJO and Toru TONEGAWA

An anisotropic yield function for rock materials, which is embedded in the stress space with scaled base frames, is proposed for a hydrostatic stress dependent yield criterion. It is shown that a number of classical yield functions are derived from the proposed yield function as special cases.

An evaluation method for the material parameters included in the proposed yield function is shown by using a nonlinear optimization programming method. Their material parameters can be evaluated only by uniaxial compression tests and conventional triaxial compression tests, and do not require any difficult tests as simple shear tests or uniaxial tension tests for their evaluation.

And then, by the comparisons between the theoretical and experimental results on a number of rock materials, the proposed yield function is proved its effectiveness and good expression on various anisotropic characteristics of rocks.