

岩石の力学特性と不連続面画像情報による 岩盤の変形強度特性評価

京谷孝史¹・寺田賢二郎²・欧陽立珠³

¹正会員 工博 東北大学 助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

²正会員 Ph.D. 東北大学 講師 大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (同 上)

³学生員 工修 東北大学 大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

岩盤の力学特性は、分布不連続面や多様な岩石で構成された複雑な構造に支配される。そのような構造は岩盤全体から見れば、その代表要素に含まれる微視的内部構造と位置づけられる。微視的内部構造を有する材料の巨視的平均変形強度特性は均質化法によって評価することができる。必要なデータは代表的内部構造を示す画像情報とそれを構成する岩石の力学特性だけである。この均質化操作によって岩盤は合理的に均質体に置き換えられ、岩盤構造物の安定性が巨視的な立場からの極限荷重解析によって評価される。本研究では、このような均質化法に基づき、岩盤の力学特性を多段階スケールからのアプローチによって評価する一連の解析手法を提案し、いくつかの例題を通してその有効性を検証している。

Key Words : *mechanical properties of rock mass, multi-scale approach, homogenization method, limit load analysis, digital image of crack distribution*

1. 序 論

岩盤の力学特性は不連続面や異種岩石が混在した複雑な構造に支配されている。それらの構造は、岩盤全体から見れば微視的なスケールで存在しており、岩盤をひとつの巨視的な材料と見なすときに、その代表要素に含まれる微視的内部構造と位置づけられる。岩盤の力学挙動予測の成否はそうした微視的内部構造の影響をいかに合理的に取り扱うかにかかっている。従来から提案されている岩盤の力学モデルは、岩盤が有する複雑な微視的内部構造の影響を取り扱うための様々な工夫・努力の成果品である。それらは大きく不連続体モデルと連続体モデルの2つに分類される。

不連続体モデル(例えば、参考文献1)-8)は、数値解析法が持つモデル化の柔軟性を利用して、例えば有限要素法におけるジョイント要素のように、数値解析モデル上において不連続面などの内部構造を具体的に表現して扱おうという試みである。これに対して連続体モデル(例えば、参考文献9)-12)は、不連続面などの内部構造の影響を何らかの論理に基づいて理想化し、連続体力学の枠組みに取り込むことを考えている。

しかしながら、いずれのモデルにおいても、岩盤の複雑な内部構造の取り扱いについては十分とは言えない。不連続体モデルでは、計算機の記憶容量などの制約から、例えば節理面のように、対象とする岩盤全体に比べて小さくかつ無数に存在するような構造を完全に表現することは諦めざるを得ない。一方、連続体モデルでは、むしろ不連続体モデルが不得意とするそれら分布不連続面などを対象として、その力学的影響を平均化してモデルに取り込むことを考えている。しかし、その際に提案者の洞察に基づいて、ある意味では恣意的な理想化・単純化が行われるのはやむを得ないことである。

これらの「不十分さ」は、ひとえに、解析モデルが対象とする岩盤のスケールと、そこに存在する微視的な内部構造のスケールの差が余りにも大きいことに由来している。解析モデルが背景とする力学の論理は、言うなれば、岩盤全体を対象とした巨視的スケールにおいて設定される座標軸を参照して組み立てられる。そして、その座標軸を参照したままで、オーダーが異なるスケールで存在する内部構造の影響を力学の論理に組み込もうとすれば、どうしても「何らかの理想化・単純化」あるいは「細部の割愛」という作業を行わざるを得ない。

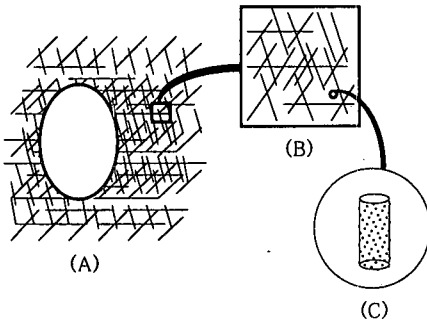


図-1 (A) 不連続性岩盤に掘削される空洞;
(B) 代表的岩盤要素; (C) 岩石供試体

微視的内部構造に支配された岩盤の力学挙動を取り扱うには、そうした従来のモデルのように、岩盤全体の力学モデルの中へ直接的に内部構造の影響を組み込もうとするのではなく、まず、岩盤全体から見れば微視的スケールで存在する内部構造に対して、しかるべき解析を行ってその平均的力学特性を評価し、それを対象岩盤の「要素」の特性として捉え、その後、所与の境界条件のもとでの岩盤の巨視的変形破壊挙動を予測評価するという、2段階スケールからのアプローチが有効であると考えられる。

本研究では、均質化法が有する多段階スケールの理論構造を応用して、岩盤の内部構造の正確な画像情報とそれを構成する岩石の力学特性をもとに、岩盤要素の変形強度特性を評価し、それを極限荷重解析に適用することによって、巨視的スケールにおいて岩盤構造物の安定解析までを行うという、2段階スケールで岩盤の力学挙動を取り扱う一連の方法を提案するものである。

本研究で用いる均質化法は、微分方程式に対する特異摂動法に基礎をおく数学的手法であり、仏のLionsを中心とした数学者グループによりその理論的骨子が確立されて以来¹³⁾⁻¹⁵⁾、特に複合材料の力学特性の評価等を主題として、米国ミシガン大学を中心に工学分野への適用研究が積極的に行われている解析理論である¹⁶⁾⁻¹⁹⁾。また、近年土木工学の分野にも積極的に適用され始めている²⁰⁾⁻²⁵⁾。

均質化法では、微視的内部周期構造を有する材料に対して、ユニットセルと呼ばれるその基本単位構造を解析することによって、材料全体の巨視的平均弾性係数が数学的に厳密に与えられる。したがって、岩盤で観察される不連続面分布など、代表的な内部構造を示す写真やスケッチなどの画像情報があれば、それを岩盤のユニットセルと捉えることにより、後はそれを構成する岩石コアの弾性係数を知るだけで、周期性の仮定のもとでの岩盤の巨視的な変形特性が推定できる。

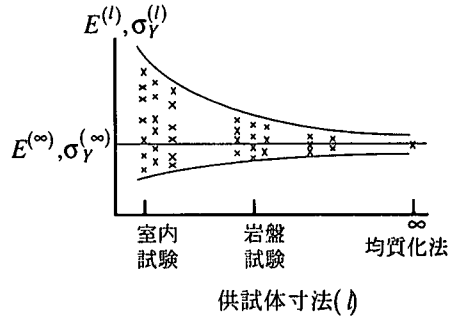


図-2 寸法効果と均質化法による推定値の関係

また、均質化法では巨視的平均応力からユニットセル内部の岩石材料に作用する微視的応力が求められる。本研究ではこのことを利用して、岩石材料の強度とユニットセルの画像情報を基に、材料の巨視的な破壊基準を推定する方法を提案している。さらに、こうして定めた岩盤の変形強度特性を極限荷重解析に応用すれば、巨視的岩盤構造物の極限荷重を合理的に推定することができる。

以下では、提案手法を順を追って説明するとともに、亀裂を配置した石膏供試体の一面せん断試験と、実際の岩盤で実施されたブロックせん断試験に提案手法を適用し、その妥当性を検討した結果を述べる。

2. 均質化法による岩盤の巨視的平均弾性係数と破壊基準の推定

(1) 均質化法によって評価される岩盤の変形強度特性の意味

図-1(A)は、無数の不連続面を含む岩盤に掘削される空洞を表している。このような空洞の設計において必要なのは、ひとつの工学材料として岩盤を扱うときの巨視的な変形強度特性であり、それは同図(B)のような岩盤の「代表要素」が発揮する変形強度特性である。そのような代表要素は、岩盤を特徴付ける分布不連続面や何種類かの岩石が混在する複雑な構造を有している。代表要素が含むその構造は、岩盤全体から見れば微視的な内部構造として位置づけられる。

このような内部構造によって特徴付けられる岩盤の変形強度特性は、当然のことながら岩石のそれとは異なる。室内試験において扱うことができる岩石供試体の寸法は、岩盤の代表要素よりもはるかに小さいからである(図-1(C))。

構造物の設計に際しては、岩盤の変形強度特性を知ることが目的として、平板載荷試験やブロックせん断試験などの岩盤試験が行われるのが普通である。

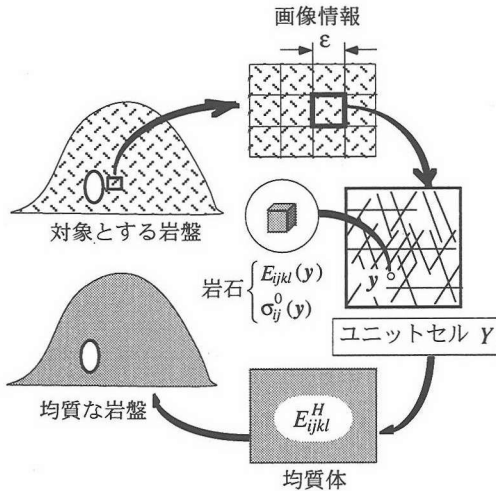


図-3 画像情報と岩石の力学特性による岩盤の均質化のプロセス

しかし、これらの試験における載荷面の大きさは1メートル以下のオーダーであり、岩盤の特性を十分に反映しているとは言い難く、得られた値についての「寸法効果」が常に問題となる。図-2には、そうした寸法効果を、代表寸法が l である供試体のヤング率 $E^{(l)}$ と一軸圧縮強度 $\sigma_Y^{(l)}$ を例に模式的に示す。数種類の岩石が混在したり不連続面が分布したりする岩盤では、供試体が無作為に採取されるとすれば、その寸法が小さいほどバラツキが大きくなる様子を表している。

これに対して、均質化法では、岩盤を特徴付ける微視的内部構造を有した代表要素を基本構造単位（ユニットセル）として、岩盤全体をそのユニットセルが無限に繰り返された一種の複合材料として扱う。そして、そのユニットセルを解析することによって、ユニットセルに代表される微視構造を無数に含む、あるいは同じことであるが、ユニットセルの大きさが材料全体の寸法に比べて無限小である時の極限値として岩盤の平均弾性係数と巨視的強度が評価される。こうして得られた変形強度特性は、寸法効果を説明した図-2において、供試体寸法を無限大とした時のヤング率 $E^{(\infty)}$ および一軸圧縮強度(A2) $\sigma_Y^{(\infty)}$ に相当し、有限の大きさの供試体が力学試験という境界条件の下で示す応答値とは異なり、境界条件に左右されない変形強度特性である。

この意味において、均質化法によって評価される変形強度特性は、無数の分布不連続面や異種岩石を含む複雑な内部構造を特徴とする岩盤の変形強度特性として設計に用いるのは極めて合理的であると考えられる。

岩盤について我々が得ることのできる情報は、

- 1) 岩盤を構成している岩石の変形強度特性 (図-1 (C))
- 2) 不連続面分布や異種岩石の混在の状況などの内部構造に関する幾何学的情報 (図-1 (B))

の2つである。岩石の変形強度特性は岩石供試体に対する室内試験によって特定できる。また、不連続面分布や岩石の混在の状況などの情報は、現位置岩盤露頭の写真やスケッチといった画像データの形で得られると考えて良い。

以下の節では、これら2つの情報だけを用いて、微視的内部構造に対する解析を通して、岩盤をひとつの巨視的な工学材料と見なす時に、その要素に付与されるべき平均弾性係数と破壊基準を定める方法について述べる。なお、均質化法に基づく式の具体的な誘導は補遺-Aに示している。

(2) 岩盤の巨視的平均弾性係数の評価

岩盤表面の観察から得られる画像情報をもとに、図-3に示すように、その岩盤における不連続面分布や岩石の混在の様子などの代表的な内部構造を表している領域を抜き出して岩盤の基本構造単位（ユニットセル）とする。

このユニットセルの3次元領域を Y 、その内部の点を y とし、点 y に存在する岩石や弱層部分の弾性係数を $E_{ijkl}(y)$ と表す。そして、ユニットセルに関する以下の方程式を、未知ベクトル χ^{kl} が周期境界上で同じ値を取るようにして解く(周期境界条件)。

$$\int_Y E_{ijpq}(y) \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkl}(y) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY \quad (1)$$

$$\nabla v_i \in H^1(Y)$$

式(1)は自由指標 (k, l) の6通りの組み合わせに対応した6つの方程式を表している。左辺は、非均質な弾性体に関する仮想仕事式と同様であるが、右辺は異種材料の配置による弾性係数の空間的な分布の仕方に依存して定まる量であることが特徴である。

式(1)を解いた結果得られる6つのベクトル $\chi_p^{kl}(y)$ は、ユニットセルの特性変形関数と呼ばれ、ユニットセルに単位大きさの一樣な巨視的ひずみ（変位勾配 $\partial u_i^0 / \partial x_j$ ）を与えた時に、ユニットセル内に発生する周期的な変位分布を表す（補遺A式(A6)）。

特性変形関数 $\chi_p^{kl}(y)$ が得られると、岩盤の平均弾性係数 E_{ijkl}^H はユニットセルに関する次式のような積分で与えられる（補遺A式(A8)）。

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl}(y) - E_{ijpq}(y) \frac{\partial \chi_p^{kl}(y)}{\partial y_q} \right) dY \quad (2)$$

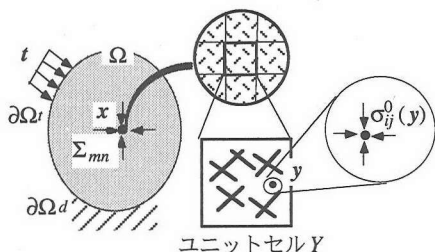


図-4 巨視的平均応力と微視的応力

式(2)の平均弾性係数 E_{ijkl}^H は、ユニットセルが示す基本構造の寸法を無限小としたときの極限值として得られるものである(補遺-A)。この意味で、 E_{ijkl}^H は供試体寸法を無限大としたときの弾性係数に相当する(図-2参照)。

平均弾性係数 E_{ijkl}^H を求めたことによって、図-3に示すように、岩盤は一つの均質体に置き換えられる。岩相や不連続面分布の様子が異なる領域が混在する場合には、それぞれの領域毎に代表的な構造をユニットセルとして抽出して、各領域毎に上述の計算を行って平均弾性係数を求めればよい。

(3) 岩盤の巨視的破壊基準の評価

求めるべき「岩盤の巨視的破壊基準」は、内部構造を含んだ岩盤に分布する巨視的平均応力 Σ_{ij} についての基準 $F(\Sigma_{ij})=0$ である。それは、通常の破壊基準のように応力の不変量の関数ではなく、内部構造の存在を反映するように空間座標に固定した形、すなわち Σ_{ij} の6成分をそのまま用いた関数として表現せざるを得ない。そのような岩盤の巨視的破壊基準は、仮に、対象とする岩盤から内部構造を十分に含む巨大な供試体を数多く採取して、様々な応力経路の強度試験を行うことができるならば決定できるであろう。しかし、それは現実には不可能である。

ところが、岩盤を構成する岩石の破壊基準が室内試験によって定められていて、そして、岩盤の内部構造がユニットセルとしてモデル化されてさえいれば、以下に述べるような均質化法を利用した数値実験によって、岩盤の巨視的破壊基準を決定することができる。

均質化法によれば、図-4に示すように、微視的周期構造を有する材料のある点の巨視的平均応力が Σ_{mn} であるとき、その点の近傍に存在するユニットセル内部に分布する微視的応力 $\sigma_{ij}^0(y)$ が次式で与えられる(補遺A式(A11))。

$$\sigma_{ij}^0(y) = \left[\left(E_{ijkl}(y) - E_{ijpq}(y) \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) (E^H)_{klmn}^{-1} \right] \Sigma_{mn} \quad (3)$$

これは、周期構造を有して無限に広がる材料が一樣応力場 Σ_{mn} に置かれたとき、周期構造を成すひとつひとつの基本構造において微視的応力 $\sigma_{ij}^0(y)$ が式(3)に従って分布するとも言え換えられる。このように、平均量から微視量を求める操作を均質化法では局所化解析と呼ぶ。

この微視的応力はそのユニットセル上での平均値が巨視的応力に一致するような応力場であり、次式が成立する(補遺A式(A12))。

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{ij}^0(y) dY = \Sigma_{ij} \quad (4)$$

岩盤を対象としたとき、以上のことは「岩盤内部のある点近傍に作用する巨視的平均応力が Σ_{mn} であるとき、そこに存在する微視的内部構造(ユニットセル)を構成する岩石材料に作用する応力が微視的応力 $\sigma_{ij}^0(y)$ である」、あるいは「微視的内部構造(ユニットセル)を無数に含んだ大きな岩塊が一樣応力場 Σ_{mn} に置かれたとき、各々のユニットセル内部の岩石材料には微視的応力 $\sigma_{ij}^0(y)$ が作用する」ということである(図-3参照)。

したがって、岩盤のある1点で発生する初期破壊に対する基準を次のように定義することは物理的に明解な意味を持つ(図-4参照)。

[定義]: 岩盤中の点 x の近傍にあるユニットセルの内部において、微視的応力 $\sigma_{ij}^0(y)$ がそこに存在する岩石材料の強度を超えるような点 y が現れれば、岩盤中の点 x において巨視的な破壊が始まる。

この定義のもとで、岩盤に対する巨視的破壊基準は、式(3)を利用した以下のような数値試験によって定めることができる。

まず、岩石の破壊基準は通常の岩石供試体を用いた室内試験によって、例えばDrucker-Pragerの基準

$$f(\sigma_{ij}^0) = \alpha \sigma_{kk}^0 + \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^0 s_{ij}^0} - K = 0 \quad (5)$$

のように定めておく。ここに、 s_{ij}^0 は微視的応力 σ_{ij}^0 の偏差成分を表す。また、 α と K は材料定数であり、Mohr-Coulombの破壊基準における粘着力 c および内部摩擦角 ϕ と次式で関係付けられる。

$$\alpha = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 \pm \sin \phi)}, \quad K = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 \pm \sin \phi)}$$

分母の複号は主応力空間の π 平面におけるMohr-Coulombの基準のいびつな六角形に対し、Drucker-Pragerの基準の円がその内側の3つの頂点を通るときプラス、外側の3つの頂点を通るとき(外接するとき)マイナスの符号を取る。

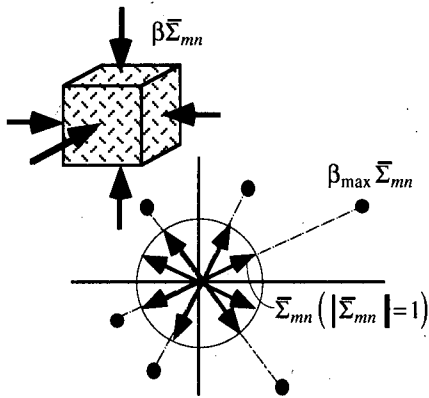


図-5 ユニットセルに対する数値強度試験

次に、平均応力 Σ_{ij} の6次元空間に単位球を考え、その球面上に均等に分布するように、十分な数の単位大きさの平均応力テンソル $\bar{\Sigma}_{mn}$ を準備する (図-5 参照)。

そうして、それらの単位応力 $\bar{\Sigma}_{mn}$ のそれぞれについて、その単位応力をユニットセルに一樣に作用させたときにユニットセル内部に発生する微視的応力 $\sigma_{ij}^0(\mathbf{y})$ を式(3)によって算定する。そして、その微視的応力がユニットセル内のいたるところで式(5)と与えられている岩石材料の破壊基準を超えないようにしつつ、単位応力 $\bar{\Sigma}_{mn}$ を何倍まで大きく出来るかという倍率係数の最大値 β_{max} を求める。式で示せば

$$\beta_{max} = \max \left\{ \beta > 0 \mid f(\beta \sigma_{ij}^0(\mathbf{y})) \leq 0, \forall \mathbf{y} \in Y \right\} \quad (6)$$

ここに、

$$\sigma_{ij}^0(\mathbf{y}) = \left[\left[E_{ijkl}(\mathbf{y}) - E_{ijpq}(\mathbf{y}) \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right] (E^H)_{klmn}^{-1} \right] \bar{\Sigma}_{mn}$$

である。すると平均応力 $\Sigma_{mn} = \beta_{max} \bar{\Sigma}_{mn}$ がその単位応力方向の巨視的破壊応力点を与えることになる (図-5)。

式(3)は Σ_{mn} から $\sigma_{ij}^0(\mathbf{y})$ への \mathbf{y} に関して連続な線形写像である。そして、式(6)の条件部分に見るように、その像は式(5)で与えられる岩石の破壊基準面で区切られる微視的応力空間内のある凸領域 (無限個の凸領域の交わり) に制限される。したがって、それを与える原像 Σ_{mn} は巨視的平均応力空間内のある凸領域に制限されることになり、最大倍率係数によって定められる限界応力 $\Sigma_{ij} = \beta_{max} \bar{\Sigma}_{ij}$ は、その凸領域の境界面上に存在する。

こうして、準備した全ての単位応力に対して同様の操作を行えば、得られた巨視的破壊応力点はその凸領域の境界面上に分布することになる。この凸領

域の境界面が岩盤の巨視的破壊基準を与える。したがって、得られた複数の巨視的破壊応力点を通る6次元曲面をしかるべき式で表現すれば「岩盤に対する巨視的破壊基準 $F(\Sigma_{ij})=0$ 」が定められることになる。

この巨視的破壊基準を式で表現するに際しては、座標変換等の扱いが便利な二次曲面

$$F(\{\Sigma\}) = \{\Sigma\}' [A] \{\Sigma\} + \{b\}' \{\Sigma\} - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\{\Sigma\} = \{\Sigma_x \ \Sigma_y \ \Sigma_z \ \Sigma_{yz} \ \Sigma_{zx} \ \Sigma_{xy}\}'$$

を用いることにする。係数マトリックス $[A]$ ならびにベクトル $\{b\}$ は最小二乗法によって定める。なお、応力が作用しない状態 $\{\Sigma\} = \{0\}$ では岩盤は破壊することはないので、曲面 $F(\{\Sigma\})=0$ は原点を通らない (原点は内部領域に含まれる)。したがって、式(7)のように定数項を1とした形に表現を定めておいても一般性は失わない。

以上の作業は、現実には不可能な「岩盤の代表要素を無数に含んだ巨大な供試体をたくさん準備し、何通りもの応力経路で強度試験を行って破壊基準を定めた」ことに相当する。こうして、得られた破壊基準は寸法効果を説明する図-2における $\sigma_y^{(\infty)}$ に対応するものである。

(4) 画像情報を利用した微視的内部構造の有限要素法解析

前節までに述べた均質化法による岩盤の変形強度特性の評価は、有限要素法による数値解析によって実現される。その際、本研究では、岩盤の内部構造をできるだけ正確に表現するために、著者の一人が既に開発している手法⁷⁾を応用して、岩盤の内部構造を表す写真あるいはスケッチ等の画像情報から、デジタル画像の1画素を1立方体要素とするユニットセルの3次元有限要素モデルを作成している。以下にその数値解析の手順を述べる。

a) 画像情報を利用したユニットセル有限要素モデルの作成

既に、2-(2)節の図-3で説明したように、現位置岩盤の露頭において撮影された写真やスケッチ等を用いて、その岩盤の代表的内部構造を表すと考えられる不連続面分布や異種岩石の混在を示す領域を決定して岩盤のユニットセルとする。また同時に、対象とした領域を構成している岩石のコアサンプルを採取し、室内三軸試験によって岩石の弾性定数および破壊基準を決定しておく。

次に、図-6に示すように、採取した画像をスキャナーで読み取り、コンピューター・ディスプレイ上

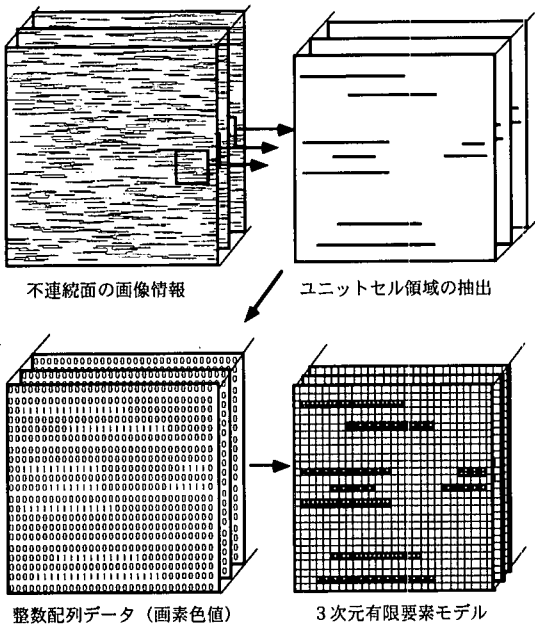


図-6 画像情報を利用したユニットセルの有限要素モデルの作成

で基本構造単位(ユニットセル)を表す領域を指定して、画素の色値を表す整数値配列データに変換する。本研究では0から255の間の整数値として表している。得られた整数値配列に対し、一つの数値に一つの3次元立方体有限要素が対応するように要素分割を割り当てる。この要素分割はコンピュータ内部で自動的に行われる。このモデル化作業においては、もしユニットセルの奥行き方向の構造が推定できるような画像データが準備できれば、それらを補間することによってユニットセルの3次元的な構造を表現する有限要素モデルが作成できる(図-6参照)。そのような画像データが入手出来なければ、1つの画像データから得られる構造が奥行き方向にも続くと仮定した擬3次元モデルになる。

なお本研究では、不連続面についてはZienkiewiczのジョイント要素³⁾に習い、画像に現れた黒い線をそのまま薄い弱層としてモデル化している。

b) 有限要素法による均質化および局所化解析

こうして作成した岩盤のユニットセル有限要素モデルに対して、まず、式(1)を解いて特性変形関数 $\chi_p^k(\mathbf{y})$ を求める。式(1)を有限要素法によって離散化すると

$$[K][\chi] = [P] \quad (8)$$

なる節点方程式を得る。ここに、

$$[K] = \sum_i^N \int_{Y_i} [B]^t [E][B] dY_i \quad (9)$$

$$[P] = \sum_i^N \int_{Y_i} [B]^t [E] dY_i \quad (10)$$

であり、 N はモデルの全要素数、 Y_i は i 番目の要素の体積を表す。また、 $[B]$ は良く知られた変位ひずみ関係行列、 $[E]$ は要素内の材料の応力ひずみ関係を与える弾性係数行列である。式(9)、(10)における総和記号は、各要素毎に積分を実行して得られる行列を、節点の自由度番号を参照しながら重ね合わせて全体行列を構成することを表している。したがって、式(9)の係数行列 $[K]$ は通常の弾性問題の有限要素解析に現れる剛性行列と同じである。また、式(10)の $[P]$ は(全自由度数 $\times 6$)行列となる。

式(8)を周期境界条件のもとで解けば、離散化された特性変形関数の節点値 $[\chi]$ が得られる。 $[\chi]$ は(全自由度数 $\times 6$)行列であり、各列ベクトルが6つの独立なベクトル χ_p^k の節点値を表すことになる。

こうして特性変形関数 $[\chi]$ を得た後、均質化弾性係数行列 $[E^H]$ は、同じユニットセル有限要素モデルについて、式(2)を離散化した式

$$[E^H] = \frac{1}{|Y|} \sum_i^N \int_{Y_i} ([E] - [E][B][\chi^{(i)}]) dY_i \quad (11)$$

を計算することによって得られる。ここに、 $|Y|$ はユニットセルモデルの全体積、また、 $[\chi^{(i)}]$ は先に求めた $[\chi]$ から i 番目の要素に対応する節点値を抜き出して構成した(要素の自由度数 $\times 6$)行列である。式(11)の各要素についての積分の結果は 6×6 行列になる。式(11)での総和記号は式(9)、(10)とは異なり、各要素について得られる 6×6 行列を全て足し合わせることを表していることに注意する。

式(3)に与えられているユニットセル内の微視的応力 σ_{ij}^0 は、所与の単位大きさの巨視的平均応力 $[\Sigma]$ に対して、各要素毎の $[\chi^{(i)}]$ と式(11)で得られた $[E^H]$ の逆行列を用いて、各要素内において一定の応力ベクトルとして次式で算定される。

$$\{\sigma^0\} = \left[([E] - [E][B][\chi^{(i)}]) [E^H]^{-1} \right] [\Sigma] \quad (12)$$

さらに、この単位大きさの巨視的平均応力 $[\Sigma]$ に対して、式(6)にいう最大倍率係数 β_{\max} は、全ての要素について求めた $\{\sigma^0\}$ を岩石の破壊基準式(5)に照らした値 $f(\{\sigma^0\})$ の最大値を探し、それを f_{\max} として

$$\beta_{\max} = \frac{K}{f_{\max} + K} \quad (13)$$

で与えられる。ここに、 K は式(5)に与えられた岩石の破壊基準における材料定数である。

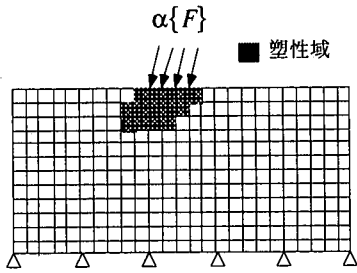


図-7 弾完全塑性体の有限要素モデル

なお、本研究では巨視的平均応力 $\{\Sigma\}$ を6次元単位球上に均等に分布するように728通り準備し、得られた728個の破壊応力点を用いて式(7)の破壊基準面を定めている。

6次元単位球上のベクトルの作り方は次のようである。まず、互いに逆向きの一対の6次元単位ベクトルを準備する。このベクトルは6次元空間の中に1つの1次元部分空間を構成する。その一対の単位ベクトルに対し、それと直交する一対の互いに逆向きの単位ベクトルを新たに加えて、部分空間の次元を2次元にするとともに、新たに加えたベクトルと既存のベクトルの組み合わせ毎にベクトル和を取って長さを1に正規化する。こうして、2次元部分空間に含まれ、かつ6次元単位球面上にある8つの単位ベクトルが生成される。6次元にまで部分空間を広げながら順次この操作を行うと、6次元単位球上に分布する728通りの単位ベクトルが得られる。

3. 岩盤構造物に対する極限荷重解析への応用

(1) 弾完全塑性体に対する極限荷重解析

弾完全塑性体に対して比例荷重を行う際の極限荷重を求める問題は、図-7に示すような有限要素モデルを対象に考えれば、以下のように線形計画問題に帰着する^{26),27)}。

図-7に見るように、荷重の増加に伴って物体の一部分が塑性化した状態では、物体内の応力は外荷重とつり合う弾性応力とそれ自体がつり合う残留応力の和となり、つり合い式は

$$\begin{cases} \{\bar{\sigma}\} = \alpha\{\bar{\sigma}^e\} + \{\bar{\sigma}^r\} \\ [\bar{B}]^T \{\bar{\sigma}^e\} = \{\bar{F}\} \\ [\bar{B}]^T \{\bar{\sigma}^r\} = \{0\} \end{cases} \quad (14)$$

と表される。ここに、 $\{\bar{\sigma}^e\}$ は弾性応力成分、 $\{\bar{\sigma}^r\}$ は残留応力成分であり、それぞれ全要素のすべての

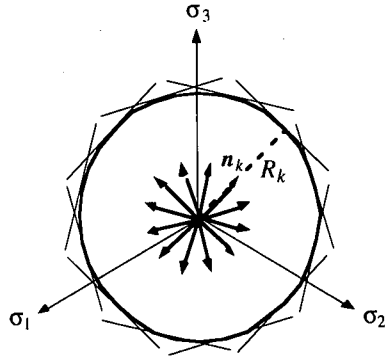


図-8 降伏曲面とその接平面

成分を並べた全体ベクトルである。また、 $\{\bar{F}\}$ は単位荷重に対応する節点荷重ベクトル、 α は荷重係数である。 $[\bar{B}]^T$ は、 i -番目の要素内での応力ベクトル $\{\sigma^{(i)}\}$ を一定としてつり合い式から

$$\begin{aligned} \{\bar{F}\} &= \left[\sum_i^N \left(\int_{V_i} [B]^T dV_i \right) \{\sigma^{(i)}\} \right] = [\bar{B}]^T \{\bar{\sigma}\} \\ [\bar{B}]^T &= \left[\sum_i^N \int_{V_i} [B]^T dV_i \right] \end{aligned} \quad (15)$$

のように構成される系全体のつり合いを表す行列である。式(15)の総和記号は、各要素毎に得られる行列を節点の自由度番号を参照しながら重ね合わせることを表している。

このように、有限要素法によってつり合い式を離散的に表す一方で、図-8に示すように、降伏曲面内部の凸領域 $f(\sigma_{ij}) \leq 0$ を有限個の接平面で覆って凸多面体 (凸多面錐)

$$[N]^T \{\sigma\} \leq \{R\} \quad (16)$$

に置き換える。ここに $[N]$ と $\{R\}$ は、 n_k を k 番目の接平面の外向き単位法線ベクトル、 R_k を原点からその接平面への距離として、それぞれ以下のように与えられる行列とベクトルである。

$$\begin{aligned} [N] &= [n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_k \quad \cdots \quad n_m] \\ \{R\} &= \{R_1 \quad R_2 \quad \cdots \quad R_k \quad \cdots \quad R_m\}^T \end{aligned} \quad (17)$$

さて、下界定理によれば、外荷重に対してつり合い式を満足する静的可容応力場が、物体内の至るところで降伏条件を破らないならば、その物体は破壊 (塑性崩壊) しないことが保証される。すなわち、つり合い式(14)を満足する全応力ベクトル $\{\bar{\sigma}\}$ の各成分が、全ての要素において式(16)を満足する限り物体は破壊 (塑性崩壊) しない。したがって、この比例荷重における極限荷重を求める問題は、与え

られた節点単位荷重ベクトルを $\{\bar{F}\}$ とし、 $\{\bar{F}\}$ に対するつり合い式

$$[\bar{B}]^T \{\bar{\sigma}^e\} = \{\bar{F}\} \quad (18)$$

満たす弾性応力ベクトルを $\{\bar{\sigma}^e\}$ としたときに、荷重係数 α および残留応力 $\{\bar{\sigma}^r\}$ を変数として、残留応力の自己つり合い式と線形不等式で表された降伏条件を制約条件として、 α の最大化を図る線形計画問題として以下のように定式化される。

$$\begin{cases} \text{maximize } \alpha \\ \text{subject to} \\ \left[\begin{array}{l} [\bar{N}]^T (\alpha \{\bar{\sigma}^e\} + \{\bar{\sigma}^r\}) \leq \{\bar{R}\} \\ [\bar{B}]^T \{\bar{\sigma}^r\} = \{0\} \end{array} \right. \end{cases} \quad (19)$$

ここに、 $[\bar{N}]$ および $\{\bar{R}\}$ は、式(15)の $[N]$ と $\{R\}$ を全体系に適合するように並べた行列およびベクトルを表す。

極限荷重解析の有用性は、上に述べたような理論構造の帰結として、単位荷重に対する弾性応力分布と降伏条件さえ定まれば、所与の境界条件のもとでの極限荷重が線形計画問題を通して求められるということにある。

この枠組みを利用すれば、対象とする材料が弾完全塑性体でなくとも、例えば図-9に示すように、降伏条件を破壊の開始点(初期降伏)を押さえるように設定すれば、材料を図のような弾完全塑性体として理想化したときの構造物の極限荷重が得られることになる。そうして得られた極限荷重は、背景とする上述のような理論構造、および前提とした図-9のような仮定の明確さ故に、構造物の設計等においては十分に有用な情報である。

(2) 均質化法との組み合わせによる岩盤への適用

岩盤の破壊は厳密には脆性的逐次破壊である。しかし、岩盤については、常に内部構造についての限られた情報と岩石の力学特性しか得られないことを考えると、そうした複雑な現象を扱う精緻な解析を行ったとしても、必ずしも満足のいく結果が得られるとは限らない。

岩盤構造物の設計においてまず必要なのは、構造物の安定性を検討するのに必要な信頼度の高い荷重限界値である。したがって、塑性体ではない岩盤についても前節で述べた極限荷重解析を適用して、まずは構造物の安定性の指標としての極限荷重を求めることは工学的に十分な意義があると考えられる。そうすると、この問題は、極限荷重解析によって合理的

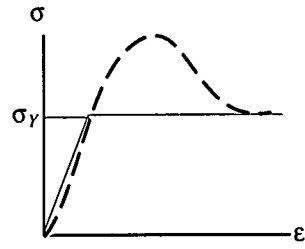


図-9 弾完全塑性体としての理想化

な荷重限界値を得るために、いかに前提条件が明確でかつ合理的な弾性応力分布と破壊基準を準備できるかということに懸かってくる。

岩盤の巨視的平均弾性係数ならびに破壊基準は、2節で述べたように均質化理論を応用して決定できる。そして、得られた平均弾性係数を用いて、所与の変位境界条件のもとで単位荷重を与えてつり合い式を解けば、岩盤の内部構造の影響を反映したしかるべき平均弾性応力分布 $\{\bar{\Sigma}^e\}$ が得られる。これと、同じく均質化法によって定められた岩盤の巨視的破壊基準 $F(\{\Sigma\}) = 0$ を併せて式(18)に用いれば、岩盤構造物の極限荷重が線形計画法を通して評価できることになる。すなわち、以下のような手順で均質化解析と極限荷重解析を連結すればよい。

- i) 2節に述べた均質化法に基づく解析により、岩盤の平均弾性係数 $[E^H]$ と巨視的破壊基準 $F(\{\Sigma\})$ を定める。
- ii) 対象岩盤の弾性係数を $[E^H]$ として、所与の荷重系の単位荷重 $\{\bar{F}\}$ を与えて線形弾性問題を解いて単位荷重に対する弾性応力分布 $\{\bar{\Sigma}^e\}$ を求める。
- iii) 巨視的破壊基準 $F(\{\Sigma\})$ について、いくつかの接平面を求め、式(19)に用いる行列 $[\bar{N}]$ とベクトル $\{\bar{R}\}$ を準備する。
- iv) 弾性応力分布 $\{\bar{\Sigma}^e\}$ と行列 $[\bar{N}]$ およびベクトル $\{\bar{R}\}$ を用いて、式(19)の線形計画問題を解いて極限荷重係数を求める。

なお、本研究では極限荷重解析では二次元問題を扱っている。したがって、上記の手順 iii) では、6次元二次曲面 $F(\{\Sigma\})$ を平面ひずみあるいは平面応力の条件のもとで3次元応力空間 $(\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_{xy})$ の二次曲面に変換して、曲面の形に応じて36, 24ないしは12の接平面を用いて凸多面体(凸多面錐)に置き換えている。二次曲面 $F(\{\Sigma\})$ の近似には数値的誤差が伴うので、この作業には幾分の注意を要する。詳細は補遺Bに述べている。

塑性論を基礎にして構造物の破壊荷重（崩壊荷重）を求める方法としては、この他、上界定理に基づいた剛塑性的な取り扱いも考えられる。その場合には、上に得られた巨視的破壊基準だけを用い、関連流れ則を仮定して塑性ひずみ速度を与えることになるが、その際には、内部構造の影響は巨視的破壊基準を通してのみ解析に反映されることになる。一方、均質化弾性係数と巨視的破壊基準を用いる極限荷重解析では、内部構造の影響が単位荷重に対する弾性応力分布と巨視的破壊基準の両方を通して解析に反映される。どちらがより良い結果を与えるかは検討の余地があるが、数学的に厳密に与えられる均質化弾性係数に信をおいているがために、それを直接用いることになる極限荷重解析を本提案法では選んでいる。

4. 不連続面を有する石膏供試体の一面せん断試験と岩盤ブロックせん断試験の数値解析

微視的な視点から内部構造を取り扱って境界条件に依存しない平均弾性係数と強度を評価し、それらを用いて、対象とする構造体が所与の境界条件下で発揮する破壊強度評価を巨視的な視点から行うという、2段階スケールからのアプローチの有効性を検証するために、規則的な不連続面を有する石膏供試体の一面せん断試験ならびに実際の岩盤で実施されたブロックせん断試験の解析を実施して試験結果との比較検討を行った。

(1) 不連続面を有する石膏供試体の一面せん断試験の数値解析

a) 石膏供試体の一面せん断試験

川本ら²⁸⁾は、石膏モルタルを用いて不連続面を規則的に配置した供試体（15×15×4cm）を作成し、図-10に示すような一面せん断試験を実施して、不連続面の角度 θ および拘束荷重 P_n の違いによるせん断破壊荷重 P_t の変化を調べている。供試体に配置されている不連続面は、石膏モルタルが固まらないうちに幅9mm、厚さ0.2mmの薄い鉄片を差し込むことによって形成された開口不連続面である。また、石膏モルタルの材料定数は、円柱供試体に対する3軸圧縮試験から表-1のように求められている。

試験結果は後述の解析結果と併せて図-14に示している。拘束荷重の違いにより程度の差はあるが、不連続面群がせん断荷重に対して差し目となる-22.5度から-45度付近において急激に強度が大きくなる様子が現れている。この結果は、規則的な不連続面という内部構造を持った物体が、一面せん断という特

表-1 石膏モルタルの材料定数

一軸圧縮強度 σ_c	218.8 kgf/cm ²	(21.44 MPa)
引張り強度 σ_t	15.8 kgf/cm ²	(1.55 MPa)
粘着力 c	33.3 kgf/cm ²	(3.26 MPa)
内部摩擦角 ϕ	56.3 度	
ヤング率 E	37,300 kgf/cm ²	(3,650 MPa)
ポアソン比 ν	0.16	

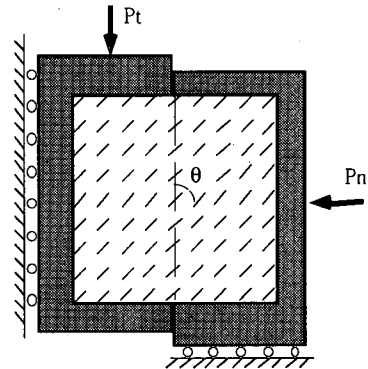


図-10 不連続面を配置した石膏モルタル供試体の一面せん断試験²⁸⁾

殊な境界条件のもとでいかなる破壊強度を具現するかを表しており、内部構造を有する物体が示す力学挙動の典型といえる。なお、試験結果としては供試体のせん断強度のみが報告されているので、ここでは提案法によって予測されるせん断強度のみを比較する。

b) 石膏供試体の巨視的平均弾性係数と破壊基準の評価

3-(2)節で述べた手順 i) に従って石膏供試体の平均弾性係数と破壊基準を決定する。

まず、図-10に示されている供試体のユニットセルを図-11のように抜き出し、この画像情報を利用してユニットセルの有限要素モデルを作成した。作成したモデルは縦横に約100個ずつ、奥行き方向に1個分の合計約1万要素の3次元立方体要素から構成されている。この供試体の場合、不連続面は紙面奥行き方向に連続しており、解析においては周期境界条件を与えることから、奥行き方向は要素1層分で十分なことは確認している。また、不連続面は要素1個分の厚みを持つ薄い弱層としてモデル化している。

石膏モルタル基質部には表-1を参照し、等方弾性体として以下のような弾性係数を与えた。

$$[E] = \begin{bmatrix} 3.972 & 0.757 & 0.757 & 0 & 0 & 0 \\ & 3.972 & 0.757 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3.972 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1.607 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & 1.607 & 0 \\ & & & & & 1.607 \end{bmatrix}$$

(単位: $\times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$ ($\times 980 \text{ MPa}$)) (20)

また、開口不連続面は、数値解析の安定性を保ちながらもその剛性が数値計算上はほとんど影響を与えないように、ヤング率が $E=1.0 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比が $\nu=0.0$ の柔らかい等方弾性弾性体とした。これらの弾性係数を図-11に示すユニットセル有限要素モデル（不連続面が水平に配置された $\theta=0^\circ$ の場合に対応）の各要素に材料特性として与え、2-(3)節の式(8)~(11)にしたがって均質化弾性係数を計算した。

得られた弾性係数マトリックスを式(21)に示す。基質部の石膏材料の弾性係数と比較すると、図-11に見るような不連続面の配置により、垂直方向の弾性係数およびせん断弾性係数ともに下線で示した x_2 -方向に関係した成分の値が小さくなっており、不連続面の配置を反映した直交異方性の弾性係数が得られている。

$$[E^H] = \begin{bmatrix} 3.824 & \underline{0.377} & 0.672 & 0 & 0 & 0 \\ & \underline{1.817} & \underline{0.351} & 0 & 0 & 0 \\ & & 3.822 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \underline{1.065} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & 1.575 & 0 \\ & & & & & \underline{1.148} \end{bmatrix}$$

(単位: $\times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$ ($\times 980 \text{ MPa}$)) (21)

次に、ユニットセルを構成する基質部モルタルの破壊条件として、表-1にある粘着力 c と内部摩擦角 ϕ が与える Mohr-Coulomb の破壊基準に外接するような Drucker-Prager の基準を式(5)に従って

$$f(\sigma_{ij}^0) = \alpha \sigma_{kk}^0 + \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^0 s_{ij}^0} - K = 0$$

$$\alpha = 1.329 \quad (22)$$

$$K = 29.52 \text{ kgf/cm}^2 (2.89 \text{ MPa})$$

と定めておき、同じユニットセル有限要素モデルに対して、2節に述べたように、728通りの応力経路において巨視的破壊応力を定める数値試験を実施して、式(7)に与えられる巨視的破壊基準

$$F(\{\Sigma\}) = \{\Sigma\}^T [A] \{\Sigma\} + \{b\}^T \{\Sigma\} - 1 = 0$$

$$\{\Sigma\} = \{\Sigma_x \quad \Sigma_y \quad \Sigma_z \quad \Sigma_{yz} \quad \Sigma_{zx} \quad \Sigma_{xy}\}^T$$

を定めた。得られた係数マトリックスおよびベクト

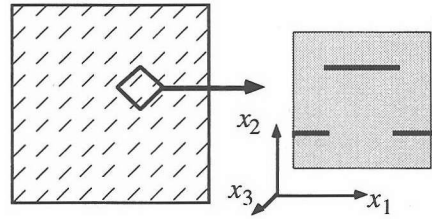


図-11 石膏供試体のユニットセル

ルは以下のものである。

$$[A] = \begin{bmatrix} 6.559 & -0.144 & -2.869 & 0 & 0 & 0 \\ & 0.273 & 4.616 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1.077 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 4.057 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 0.191 & 0 \\ & & & & & 0.605 \end{bmatrix}$$

(単位: $\times 10^4 \text{ kgf}^2 \cdot \text{cm}^4$ ($\times 0.0104 \text{ MPa}^2$))

$$\{b\} = \{2.379 \quad 0.391 \quad 1.735 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

(単位: $\times 10^2 \text{ kgf}^1 \cdot \text{cm}^2$ ($\times 0.10 \text{ MPa}^1$))

さらに、平面応力条件のもとで6次元応力空間から3次元応力空間への変換を行って、極限支持力解析に用いる3次元二次曲面

$$\hat{F}(\{\Sigma\}_3) = \{\Sigma\}_3^T [\hat{A}] \{\Sigma\}_3 + \{\hat{b}\}^T \{\Sigma\}_3 - 1 = 0 \quad (24)$$

$$\{\Sigma\}_3 = \{\Sigma_x \quad \Sigma_y \quad \Sigma_{xy}\}^T$$

を定めるところ、その係数マトリックスおよびベクトルは以下のように得られた。

$$[\hat{A}] = \begin{bmatrix} 0.66 & -1.44 & 0 \\ & 2.73 & 0 \\ \text{sym} & & 6.05 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad (25)$$

$$\{\hat{b}\} = \{2.379 \quad 0.391 \quad 0\}^T \times 10^{-2}$$

このマトリックス $[\hat{A}]$ の固有値は

$$\lambda_1 = 6.049 \times 10^{-3}, \quad \lambda_2 = 3.469 \times 10^{-3}, \quad \lambda_3 = -8.341 \times 10^{-5} \quad (26-1)$$

であり、対応する固有ベクトルは

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1 = (0 \quad 0 \quad 1)^T \\ \mathbf{m}_2 = (\cos 63^\circ \quad -\cos 26^\circ \quad 0)^T \\ \mathbf{m}_3 = (-\cos 26^\circ \quad -\cos 63^\circ \quad 0)^T \end{cases} \quad (26-2)$$

また、固有方向を参照したベクトル $\{\hat{b}'\}$ は

$$\{\hat{b}'\} = \{0 \quad 0.737 \quad -2.295\}^T \times 10^{-2} \quad (27)$$

である。

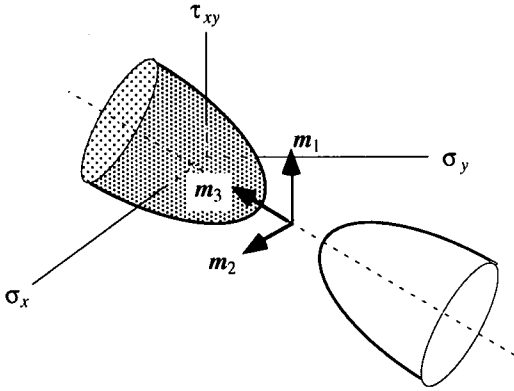


図-12 二葉双曲面の一方の凸曲面で表された破壊基準面の概念図

この曲面は第3固有ベクトル m_3 の方向を中心軸とする二葉双曲面である(補遺B参照)。その対称中心点の座標は

$$\begin{pmatrix} \Sigma_x & \Sigma_y & \Sigma_{xy} \end{pmatrix} = (122.0 \quad 63.71 \quad 0), \quad (28)$$

(単位: kgf/cm² (x 0.098 MPa))

であり、二つの曲面の頂点の座標は、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \Sigma_x & \Sigma_y & \Sigma_{xy} \end{pmatrix} = (48.06 \quad 25.83 \quad 0) \\ \begin{pmatrix} \Sigma_x & \Sigma_y & \Sigma_{xy} \end{pmatrix} = (196.0 \quad 101.6 \quad 0) \end{cases} \quad (29-1,2)$$

(単位: kgf/cm² (x 0.098 MPa))

なので、式(24)の二次曲面によって近似した結果、図-12に示すように破壊基準面はこの二葉双曲面のうちの片方、すなわち式(29-1)に与えられる点を頂点にして圧縮方向に広がる一方の凸曲面によって表現されていることが判る。

不連続面の角度を変化させた場合の弾性係数マトリックスおよび巨視的破壊基準は、 $\theta = 0^\circ$ の場合について得られた式(21)の $[E^H]$ および式(25)の $[\hat{A}]$ と $[\hat{b}]$ に、不連続面角度に対応した座標変換を施すことによって得られる。

c) 一面せん断試験に対する極限荷重解析

こうして得られた巨視的弾性係数と破壊基準を用いて、二次元平面応力条件のもとで一面せん断試験の極限荷重解析を行い、せん断破壊荷重を求めて試験値と比較する。なお、極限荷重解析では比例載荷問題しか扱えない。また、実際のせん断試験では、剛な鋼製枠を介してある意味で変位を拘束しながら荷重が加えられており、厳密に境界条件を与えることは極めて難しい。したがって、側方荷重 P_n を以下に述べるように、供試体のせん断時における初期応力として扱うことにした。

まず、3-(2)節で述べた手順ii)に従って、単位荷重系に対する弾性応力分布を求める作業を行う。

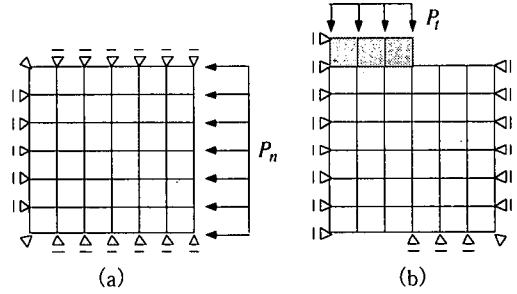


図-13 極限荷重解析用有限要素モデル

式(21)に得られた均質化弾性係数を二次元平面応力条件のもとで変換し、さらに不連続面の方向に合わせて座標回転を施す。その弾性係数を用いて、まず図-13(a)に示す有限要素モデルを用いて所定の垂直荷重 P_n に対する応力分布を求め、初期応力分布 $\{\tilde{\Sigma}^0\}$ とする。そして、同じ弾性係数を用いて、図-13(b)に示すような上部に鋼の弾性係数を持つ要素を乗せた有限要素モデルを用いて、単位せん断荷重 P_t に対する弾性応力分布 $\{\tilde{\Sigma}^e\}$ を求める。

なお、図-13に示した有限要素モデルは、既に均質化法によって置き換えられてしまった等価均質体の弾性問題を解くための有限要素モデルであり、均質化解析の際に考えたユニットセルの幾何形状とは全く無関係に要素分割を行えばよいことに注意する。

こうして極限荷重解析に必要な応力分布 $\{\tilde{\Sigma}^e\}$ と $\{\tilde{\Sigma}^0\}$ を求めた後、手順iii)に従って、式(24)の3次元二次曲面を不連続面の方向に合わせて座標回転した破壊基準を凸多面体(錐)に置き換え、手順iv)に従って極限支持力解析を行ってせん断荷重係数を求めた。ただし、今の場合、初期応力が存在するので解くべき線形計画問題は次式となる。

$$\begin{cases} \text{maximize } \alpha \\ \text{subject to} \\ \begin{bmatrix} \tilde{N} \end{bmatrix}' (\alpha \{\tilde{\Sigma}^e\} + \{\tilde{\Sigma}^0\} + \{\tilde{\Sigma}^r\}) \leq \{\tilde{R}\} \\ \begin{bmatrix} \tilde{B} \end{bmatrix}' \{\tilde{\Sigma}^r\} = \{0\} \end{cases} \quad (30)$$

d) 結果とその考察

図-15に解析結果を示す。解析による予測値は異方的な強度分布の特徴をよく表現している。しかし、それは傾いた半楕円形を呈しており、図-14の試験結果に見られるように、不連続面の角度が-22.5度から-45度付近で急激に突出するような形ではない。これは、巨視的破壊基準を二次曲面のような滑らかな関数で表現していることによる。

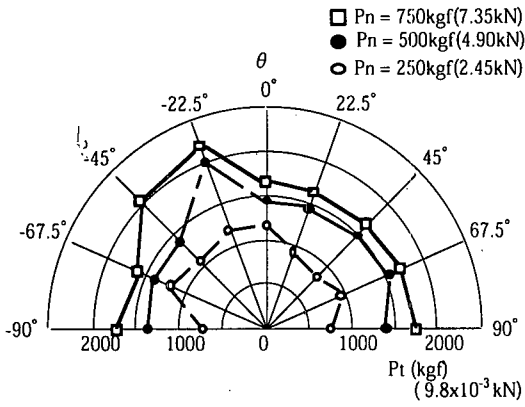


図-14 不連続面の角度によるせん断破壊荷重の変化 (試験結果)

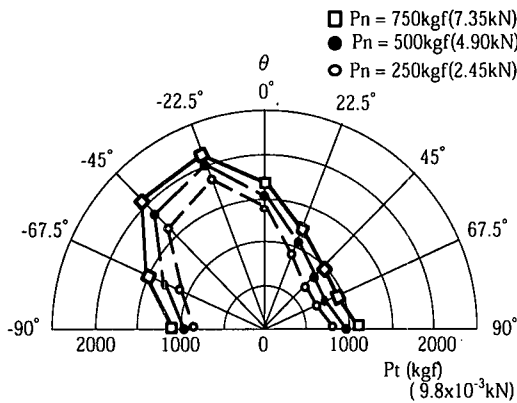


図-15 不連続面の角度によるせん断破壊荷重の変化 (解析結果)

また、計算値は試験値に比べて、側方拘束荷重の影響が大きくは現れておらず、全体的にも低い値を予測している。これは、試験値はピーク強度を示した結果であるのに対し、解析では初期的な破壊を前提として定めた破壊基準を用いていること、および不連続面を薄い弱層としてモデル化しているため、拘束荷重による不連続面の閉合が表現されないことによると考えられる。

以上のように、解析による予測値は実験値とずれが見られる。しかし、分布不連続面を含む物体に対し、その構成材料の変形強度特性と不連続面分布の幾何学的配置を表す情報だけから、不連続面による異方的な強度特性を良く表現しながら、初期的な破壊に対応する安全側の強度を予測していると言うことはできる。また、そうした予測値の特徴が由来するところの理由も上述のように極めて明確であることから、本手法は、構造物の事前設計において十分に価値のある情報を提供し得ると確信する。

(2) 岩盤ブロックせん断試験の数値解析

次に、実際の岩盤で行われたブロックせん断試験の解析を行い、実測結果との比較を通して本手法の実岩盤への適用性を検討する。

a) ユニットセルの有限要素モデルの作成

対象とする岩盤では、調査横抗が設けられ、同種の岩層に属する相隣り合う地点で等変位平板載荷試験とブロックせん断試験が行われている。そして、平板載荷試験が行われた地点では岩盤表面の亀裂がスケッチされている。そのスケッチを画像として取り込み、作画ソフトを利用して亀裂と思われる部分を細線でなぞって図-16に示すように縦横それぞれ約130ずつの画素で表されたユニットセルの画像データを準備した。この画像情報をもとに、各画素に3次元立方体有限要素を1つずつ対応させてユニットセルの有限要素モデルを作成した。ただし、このモデルでは、画像情報が岩盤表面のスケッチ1枚だけなので、亀裂は紙面奥行き方向にそのままの配置で連続して存在する擬3次元モデルとなっている。

b) 均質化弾性係数と巨視的破壊基準の決定

現位置で採取された岩石コアの三軸圧縮試験から、岩石の変形・強度特性は表-2のように得られている。岩石はこれらの特性値を持つ等方弾性体であるとした。また、亀裂部分については4.1節と同様に、ヤング率が $1.0 \text{ kgf/cm}^2 (98 \text{ kPa})$ 、ポアソン比が0の極めて柔らかい等方弾性体の薄層としてモデル化した。

基質部要素に入力した岩石の弾性係数は以下のようである。

$$[E_r] = \begin{bmatrix} 2.689 & 0.367 & 0.367 & 0 & 0 & 0 \\ & 2.689 & 0.367 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2.689 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1.161 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & 1.161 & 0 \\ & & & & & 1.161 \end{bmatrix}$$

(単位: $\times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 (\times 9.80 \text{ GPa})$)

これらの弾性係数をユニットセル有限要素モデルの対応する要素材料特性として与え、均質化法によって均質化弾性係数を計算した。得られた弾性係数マトリックスを以下に示す。

$$[E^H] = \begin{bmatrix} 1.687 & 0.239 & 0.231 & 0 & 0 & 0.017 \\ & 1.475 & 0.206 & 0 & 0 & 0.024 \\ & & 2.447 & 0 & 0 & 0.005 \\ & & & 0.791 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & 0.858 & 0 \\ & & & & & 0.699 \end{bmatrix}$$

(単位: $\times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 (\times 9.80 \text{ GPa})$)

表-2 岩石の変形強度特性

一軸圧縮強度 σ_c	909 kgf/cm ² (89.1 MPa)
粘着力 c	188.3 kgf/cm ² (18.45 MPa)
内部摩擦角 ϕ	45 度
ヤング率 E	2.6×10^5 kgf/cm ² (25.5 GPa)
ポアソン比 ν	0.12

基質部の岩石の弾性係数と比較すると、図-16に見るような不連続面の配置により、水平 x -方向、垂直 y -方向に関係した成分の値が小さくなっており、さらに式(21)の水平方向の不連続面のみが並ぶ石膏供試体の場合とは異なり、直交異方性体でなくなっているのが興味深い。

この地点で行われた平板載荷試験によって得られた変形係数は 0.08×10^5 kgf/cm² ($\times 9.80$ GPa)、割線弾性係数は 0.12×10^5 kgf/cm² ($\times 9.80$ GPa)、および接線弾性係数は 0.15×10^5 kgf/cm² ($\times 9.80$ GPa) であったと報告されている。これに対して、上に得られた均質化弾性係数の y -方向垂直成分の値は 1.475×10^5 kgf/cm² ($\times 9.80$ GPa) であり、解析値は実測値の10倍以上となっている。このような実測値との乖離は、床面に平行な亀裂が解析モデルには考慮されていないことによると思われる。しかし、平板載荷試験から得られた変形係数をそのまま用いて岩盤空洞などの変形解析を行うと、実測値よりはかなり大きめの変形を予測する場合はしばしば起こることを考えると、本解析による評価値は全く見当はずれとは言いきれない。

次に、式(22)に従って、基質部岩石の破壊条件を、表-2に示した粘着力と内部摩擦角が与えるMohr-Coulombの破壊基準に外接するDrucker-Pragerの基準として与え、ユニットセル有限要素モデルに対して、前節と同様の数値試験を実施して岩盤の巨視的破壊基準を定めた。平面ひずみ条件のもとで3次元応力空間での破壊基準面を定めたところ、二次曲面の係数マトリックスおよびベクトルは以下のように得られた。

$$\hat{F}(\{\Sigma\}_3) = \{\Sigma\}_3^T [\hat{A}] \{\Sigma\}_3 + \{\hat{b}\}^T \{\Sigma\}_3 - 1 = 0$$

$$[\hat{A}] = \begin{bmatrix} 3.101 \times 10^{-4} & -1.635 \times 10^{-4} & -5.752 \times 10^{-5} \\ & 3.869 \times 10^{-4} & -2.711 \times 10^{-4} \\ sym & & 2.385 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\{\hat{b}\} = \{1.604 \times 10^{-2} \quad 2.383 \times 10^{-2} \quad 1.039 \times 10^{-2}\} \quad (31)$$

このマトリックス $[A]$ の固有値と固有ベクトルは

$$\lambda_1 = 2.421 \times 10^{-3}$$

$$m_1 = (\cos 89^\circ \quad \cos 82^\circ \quad \cos 7.5^\circ)^T \quad (32-1)$$

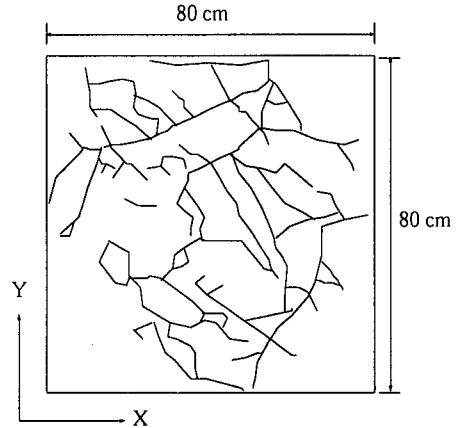


図-16 岩盤のユニットセルの画像データ

$$\lambda_2 = 0.501 \times 10^{-3} \quad (32-2)$$

$$m_2 = (-\cos 48^\circ \quad \cos 42^\circ \quad \cos 85^\circ)^T$$

$$\lambda_3 = 0.159 \times 10^{-3} \quad (32-3)$$

$$m_3 = (-\cos 42^\circ \quad -\cos 49^\circ \quad -\cos 84^\circ)^T$$

であり、また、固有方向を参照したベクトル $\{b'\}$ は $\{b'\} = \{-6.91 \times 10^{-3} \quad 7.993 \times 10^{-3} \quad -2.866 \times 10^{-2}\}$ となる。

この曲面は静水圧軸に近い m_3 方向に長軸を持つ細長い楕円体であり、その中心点の座標は

$$(\Sigma_x \quad \Sigma_y \quad \Sigma_{xy}) = (-62.0 \quad -64.7 \quad -11.0)$$

長軸上の交点の座標は、それぞれ

$$(\Sigma_x \quad \Sigma_y \quad \Sigma_{xy}) = (-152.4 \quad -143.9 \quad -23.02)$$

$$(\Sigma_x \quad \Sigma_y \quad \Sigma_{xy}) = (28.4 \quad 14.5 \quad 0.96)$$

である。破壊基準面が楕円体になるのは、図-16に見る亀裂をすべて開口亀裂として弱い薄層として扱っているため、それらの閉合が考慮されていないことによる。

c) 岩盤ブロックせん断試験の極限荷重解析

亀裂分布については2次元的情報しか得られていないので、図-17に示すように

ケース1) 亀裂面が紙面に垂直な方向に連続している岩盤モデル (Y-面載荷)

ケース2) 亀裂面が鉛直方向に連続している岩盤モデル (Z-面載荷)

の二つのケースを想定した解析を行った。

用いた有限要素モデルを図-18に示す。岩盤の上に長方形のコンクリートブロックを乗せている。岩

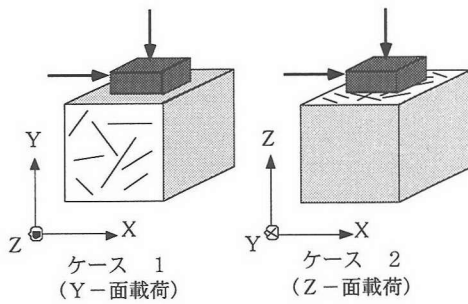


図-17 解析のケース

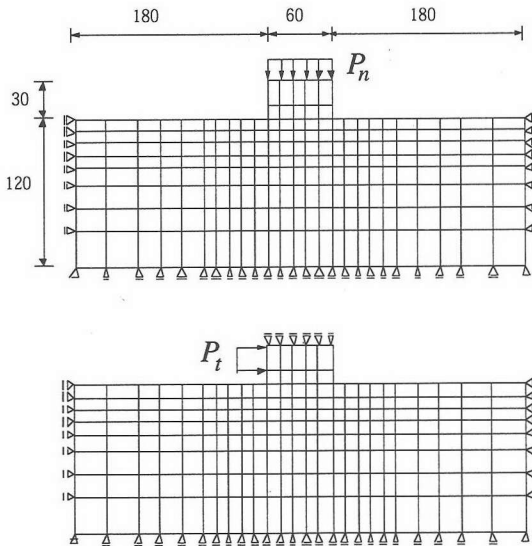


図-18 岩盤ブロックせん断試験の有限要素モデル

盤の弾性係数は、上に得られた均質化弾性係数をそれぞれのケースに対応するように座標変換を施して与えている。

解析は石膏供試体のせん断試験と同様、以下のような手順で行った。

まず、コンクリートブロックによる荷重面での平均鉛直応力が10, 20, 30, 40 kgf/cm^2 ($\times 0.98\text{MPa}$) になるような鉛直荷重 P_n を加えて、それぞれの応力分布を求め初期応力 $\{\tilde{\Sigma}^0\}$ とする。

次に、同じ有限要素モデルを用いて、荷重面上の平均せん断応力が1 kgf/cm^2 (0.98MPa) になるような単位水平力 P_t を加えて弾性応力分布 $\{\tilde{\Sigma}^e\}$ を求める。

こうして得られる応力 $\{\tilde{\Sigma}^0\}$ 、 $\{\tilde{\Sigma}^e\}$ と式(31)に得られた破壊基準を用いて式(30)の形の線形計画問題を解いて最大せん断荷重を求めた。

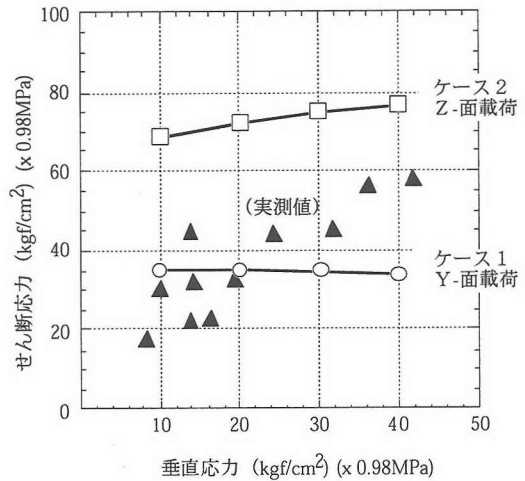


図-19 岩盤せん断試験の実測値と解析値の比較

計算値と実測値を図-19に示す。図中、実線は計算値、プロットが実測値である。

亀裂が水平方向に連続している（紙面に垂直に連続している）としたケース1)での結果が実測値よりも低めのせん断強度を、亀裂が鉛直方向に連続しているとしたケース2)が実測値よりも高めのせん断強度を与えており、実測値はその間に挟まれるような形となった。実際の亀裂面はせん断面に対して斜めに入って分布しているとすれば、実測値が亀裂面が鉛直に入っているとしたケース2)よりは低く、亀裂面がすべて水平に入っているとしたケース1)よりやや高めという結果は極めて妥当であると考えられる。

ケース1)のY-面荷重では実測値に見られるような垂直応力の増加に伴うせん断強度の増加はうまく表現されておらず、むしろ低下の傾向を示している。これは、亀裂を開口亀裂として扱っていて垂直荷重の増加に伴う閉合が考慮されないためである。しかし、低垂直応力下でのせん断強度は実測値と比較して妥当な値を与えていると言える。

解析に用いたデータは室内試験によって得られた岩石の強度と亀裂分布スケッチだけである。ユニットセルのモデルが3次元的に完全に岩盤を表現したものではないことを考えれば、これだけの情報から図-19に見られる程度の精度で岩盤試験の結果が予測できたということは、本手法の実岩盤への適用性を十分に示している。また、岩盤試験が岩盤の強度を直接的に表すものではなく、限られたスケールでの特殊な境界条件を与えた時の実現値であることを考えると、本手法との併用により、岩盤試験の結果はより有効に生かすことができると考える。

5. 結論

本研究では、均質化法を応用して、微視、巨視の2段階スケールで岩盤にアプローチすることにより、岩盤の内部構造を構成する母岩材料の変形強度特性と不連続面配置をもとに岩盤の巨視的変形強度特性を合理的に推定する方法を示した。得られる巨視的破壊基準面は凸性が保持されて二次曲面によって合理的に近似され、極限荷重解析と組み合わせることによって、無数の亀裂を含む岩盤構造物の巨視的破壊強度が推定できることを示した。

検証例題として、規則的に亀裂を配置した石膏モルタル供試体の一面せん断試験と岩盤ブロックせん断試験の解析を行い、亀裂を含む物体の巨視的な強度は、所与の境界条件の下で現れる巨視的な破壊現象の開始点という意味において、本手法によって十分に推定し得ることを示した。その際、均質化法によって推定した巨視的強度特性は、二次曲面を用いるために表現できる強度の異方性には限界があり得ること、及び安全側の強度を評価することの二つの特徴が明らかとなった。

ある岩盤において、母岩材料の変形強度特性と不連続面分布が与えられたとき、それらの情報から岩盤構造物の設計に用いるべき巨視的変形強度特性を推定する際に本研究で提案した方法は有力な手段を与えるものである。

また、本手法によって評価される岩盤構造物の破壊強度は、破壊の開始につながる荷重強度を与えるという意味において、安全側の値を予測するものであり、岩盤構造物の設計に十分役立つものと考えられる。

謝辞：本研究を遂行するにあたり、長岡技術科学大学大塚悟助教授には、極限荷重解析について懇切丁寧な御指導を頂いた。均質化法を岩盤の強度評価に結びつけるアイデアは、名古屋大学での大塚先生との歓談の中でもたらされた。また、応用地質(株)佐野理(旧姓徳永)、長田隆信ならびに(株)間組玉城喜章の三氏にはそれぞれの修士研究を通して多大なるご助力を頂いた。さらに、本論文をまとめるにあたり愛知工業大学川本眺万教授、東北大学大学院岸野佑次教授には熱心に討議をして頂いた。ここに記してこれらの方々への謝意を表するものである。

補遺-A 均質化法の概要

ここで用いる均質化法は、微分方程式の近似解法である特異摂動法における2変数展開法を応用して、周期的微視構造を有する材料の平均物性を求める手法である^{13),16)}。

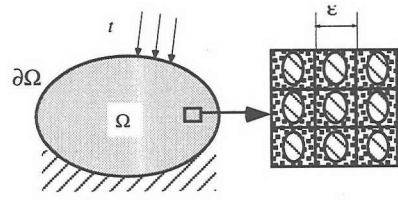


図-A1 周期的微視構造を有する材料

図-A1に示すような微視的周期構造を有する材料について、微視的単位構造(以下ユニットセルと呼ぶ)のスケールを ε とすれば、この材料に対するつり合いは仮想仕事式形で

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial v_j^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx \quad (A1)$$

$$= \int_{\partial\Omega} t_i v_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}) dx + \int_{\Omega} f_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}) v_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}) dx \quad \forall v_i^{\varepsilon}(\mathbf{x})$$

と表される。式中、 t_i は境界に与えられた表面荷重ベクトルを表し、弾性係数 $E_{ijkl}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 、物体力 $f_i^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ および変位 $u_i^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ は ε のスケールで急激に変化する関数であることを表す。これらの関数は $y_i = \frac{x_i}{\varepsilon}$ なる微視的スケール変数を導入して、 y_i に関してユニットセルの代表長の周期性(Y-periodicであるという)を有する2変数関数として次のように表される。

$$E_{ijkl}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad f_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$u^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (A2)$$

$$= u^0(\mathbf{x}) + \varepsilon u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots$$

ここで、式(A1)の解である変位を ε についての漸近展開形で表わしていることに注意する(2変数展開法)。2変数表示された関数の微分が

$$\frac{\partial u_i^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j}$$

となることに注意して式(A1)を展開し、極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ を取ると、平均変位 u^0 と微視的構造の影響を表す第1項 u^1 に関する次の2つの式を得る。

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial v_j^1}{\partial y_j} dy \right] dx \quad (A3)$$

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial y_j} v_j^1 dy \right] \frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} dx \quad \forall v_i^1$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) dy \right] \frac{\partial v_j^0}{\partial x_j} dx \quad (A4)$$

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dy \right] v_i^0 dx + \int_{\partial\Omega} t_i v_i^0 dx \quad \forall v_i^0$$

ここに、 $|Y|$ はユニットセルの体積である。そして、式(A3)が成立するための条件から、 $E_{ijkl}(x, y)$ が Y -periodicあることを考慮して次式を得る。

$$\int_Y E_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy = \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \quad (A5)$$

式(A5)は右辺の指標 (k, l) の6通りの組み合わせに応じて Y -periodicな6つのベクトル関数 χ^{kl} を解に持つ^{13), 16)}。この χ^{kl} を用いると式(A3)の一般解 u^1 が

$$u_i^1(x, y) = -\chi_i^{kl}(x, y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \tilde{u}_i^1(x) \quad (A6)$$

で与えられることが容易に確かめられる。ここに $\tilde{u}_i^1(x)$ は任意関数である。 χ^{kl} はユニットセルに巨視的な一定の単位ひずみ(変位勾配)を与えた時に生じる変位の微視的な乱れを表し、ユニットセルの特性変形関数(characteristic deformation)と呼ばれる。

こうして得られた u^1 の一般解を式(A4)に代入すると平均変位 u^0 が満たすべき式として

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} dx \quad (A7)$$

$$= \int_{\Omega} f_i^H v_i^0 dx + \int_{\partial\Omega} t_i v_i^0 dx \quad \forall v_i^0$$

を得る。ここに

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl} - E_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) dy \quad (A8)$$

$$f_i^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dy$$

とおいている。式(A7)式は式(A1)と同じ境界値問題の式であるが、式(A8)による平均弾性係数 E_{ijkl}^H および平均物体力 f_i^H を用いることにより平均変位 u^0 が解として与えられることを表している。すなわち E_{ijkl}^H および f_i^H が、均質化弾性係数および均質化体積力と呼ばれるべき平均物性値である。

式(A7)を解いて平均変位 u^0 が得られると、変位の近似解が

$$\begin{aligned} u_i^{\varepsilon}(x) &= u_i^0(x) + \varepsilon u_i^1(x, y) + O(\varepsilon^2) \\ &= u_i^0(x) - \varepsilon \chi_i^{kl}(x, y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (A9)$$

と表される。また、これからひずみと応力が

$$\begin{aligned} e_{ij}^{\varepsilon}(x, y) &= e_{ij}^0(x, y) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{\partial \chi_i^{pq}}{\partial y_j} \right) + \left(\delta_{jp} \delta_{iq} - \frac{\partial \chi_j^{pq}}{\partial y_i} \right) \right] \frac{\partial u_p^0}{\partial x_q} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (A10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\varepsilon}(x, y) &= \sigma_{ij}^0(x, y) + O(\varepsilon) \\ &= E_{ijpq}(x, y) \left(\delta_{kp} \delta_{lq} - \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (A11)$$

で与えられる。

式(A11)の右辺第1項のユニットセルでの平均値をとると、

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{ij}^0(x, y) dY = E_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} = \Sigma_{ij} \quad (A12)$$

が成立する。すなわち、 $\sigma_{ij}^0(x, y)$ はそのユニットセル上での平均値が平均応力を与えるような微視的応力であることが判る。

補遺-B 3次元応力空間(平面問題)での破壊基準とその接平面による近似

(1) 6次元二次曲面から3次元二次曲面への変換
6次元の二次曲面を

$$f(\{\sigma\}) = \{\sigma\}' [A] \{\sigma\} + \{b\}' \{\sigma\} - 1 = 0 \quad (B1)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}\}'$$

それから作られる3次元の二次曲面を

$$\hat{f}(\{\sigma\}_3) = \{\sigma\}'_3 [\hat{A}] \{\sigma\}_3 + \{\hat{b}\}' \{\sigma\}_3 - 1 = 0 \quad (B2)$$

$$\{\sigma\}_3 = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}'$$

とおく。

平面問題の応力 $\{\sigma\}_3$ と3次元応力 $\{\sigma\}$ の関係は、

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ [G] \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \{\sigma\}_3 = [T] \{\sigma\}_3 \quad (B3)$$

と表される。ここに、 $[G]$ は (3×3) 行列であり、平面応力条件では $[G] = [0]$ 、平面ひずみ条件では、弾性係数行列を $[E]$ として

$$\begin{aligned} [G] &= [E^2] [E^1]^{-1} \\ [E^1] &\equiv \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{14} \\ & E_{22} & E_{24} \\ \cdot & \cdot & E_{33} \end{bmatrix}, [E^2] \equiv \begin{bmatrix} E_{13} & E_{23} & E_{34} \\ E_{15} & E_{25} & E_{45} \\ E_{16} & E_{26} & E_{46} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (B4)$$

とすればよい。

したがって、式(B3)の関係を代入すれば、式(B1)から式(B2)への変換は、

$$[\hat{A}] = [T]' [A] [T], \quad \{\hat{b}\}' = \{b\}' [T] \quad (B5)$$

によって与えられることは容易に判る。

(2) 3次元二次曲面の分類と修正

2-(3)節に述べたように、破壊基準面は理論上は必ず凸曲面になる。実際、 $f(\{\sigma\})$ を最小二乗法で定めてから3次元応力空間に変換した $\hat{f}(\{\sigma\}_3)$ は、二葉双曲面の片方の凸曲面、楕円体あるいは楕円放物面といった凸曲面になる。その出現の確率もこの順で、二葉双曲面が圧倒的に多く、場合によっては楕円体が現れ、楕円放物面が出現することはほとんどない。何故ならば、固有値が数値計算の結果ゼロになることは滅多になく、物理的には楕円放物面で近似されるのが望ましいデータも大抵の場合は二葉双曲面の片方の凸曲面によって近似されてしまうからである。ところが、特殊なケースとして、岩盤は一枚岩で出来ていて岩盤の強度は岩石のそれであるとして、Drucker-Prager型の破壊基準そのものを近似すると、一様双曲面（凸曲面ではない）を与えるような $\hat{f}(\{\sigma\}_3)$ が定まってしまうことがある。

このように、数値的誤差を伴う近似によって破壊基準 $\hat{f}(\{\sigma\}_3)$ が得られるので、次に述べるようにして二次曲面の形を慎重に定めてから、接平面で覆った凸錐に置き換える必要がある。

式(B2)の係数行列 $[A]$ の固有値解析を行って固有方向に座標変換すると次式を得る。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \quad (\text{B6})$$

ここで、変換後の応力成分を $x_1 \sim x_3$ で表している。さらに、

$$\{y\} = \{x\} - \{x'\}, \quad \{x'\} = \begin{pmatrix} -b_1/2\lambda_1 \\ -b_2/2\lambda_2 \\ -b_3/2\lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B7})$$

と平行移動して以下の標準形を得る。

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = c$$

$$c = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} + \frac{b_3^2}{\lambda_3} \right) \quad (\text{B8})$$

以下、この標準形をもとにして固有値の符号に応じて二次曲面の分類と修正を行う。

a) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ の場合

方程式は標準形(B8)となる。固有値はすべて正なのでこれは楕円体である。しかし、第3固有値 λ_3 の絶対値が他の固有値に比べて小さい場合、これをそのまま楕円体として受け入れるか、それとも λ_3 をゼロと見なして楕円放物面に修正するかの判定が必要となる。このため、標準形(B8)を次のように書き換

える。

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right) - \lambda_3 x_3^2 - b_3 x_3 \quad (\text{B9})$$

式(B9)の左辺は楕円であり、右辺は x_3 方向に変化するその大きさを定めている。今、 x_3 方向で見た近似区間が $[0, \bar{x}_3]$ であったとすると、

$$\left| \frac{\lambda_3 \bar{x}_3^2}{b_3 \bar{x}_3} \right| = \left| \frac{\lambda_3 \bar{x}_3}{b_3} \right| < \varepsilon \quad (\text{B10})$$

ならば、左辺の楕円の大きさの変化に対する λ_3 の寄与はこの近似区間において小さいと考えて良い。したがって、小さな絶対値である第3固有値を $\lambda_3 = 0$ と見なすことができる。したがって、曲面は楕円放物面

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right) - b_3 x_3 \quad (\text{B11})$$

となり、基質部岩石の破壊基準面がDrucker-Prager型の円錐面で与えられていることを考えれば、破壊基準面としては合理的と言える曲面を得ることができる。ちなみに、本研究では $\varepsilon = 1/1000$ とした。条件(B10)が満たされない時はそのまま楕円体としての近似を受け入れることになる。

b) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ の場合

標準形を以下のように書き換える。

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 - |\lambda_3| y_3^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} - \frac{b_3^2}{|\lambda_3|} \right) \quad (\text{B12})$$

この場合 $\lambda_2 > 0 > \lambda_3$ なので、 λ_2 と λ_3 について式(B10)と同様の判定を行う。

まず、

$$\left| \frac{\lambda_3 \bar{x}_3^2}{b_3 \bar{x}_3} \right| = \left| \frac{\lambda_3 \bar{x}_3}{b_3} \right| < \varepsilon \quad (\text{B13})$$

ならば $\lambda_3 = 0$ 、そうでなければそのまま $\lambda_3 < 0$ とする。さらに、

$$\left| \frac{\lambda_2 \bar{x}_2^2}{b_2 \bar{x}_2} \right| = \left| \frac{\lambda_2 \bar{x}_2}{b_2} \right| < \varepsilon \quad (\text{B14})$$

ならば $\lambda_2 = 0$ 、そうでなければ $\lambda_2 > 0$ とする。

この結果、曲面は以下のように判定される。

($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$ のとき) :

この時、標準形は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right) - b_3 x_3 \quad (B15)$$

となる。この曲面は楕円放物面である。放物面の開始点は

$$x_3 = \frac{1}{b_3} + \frac{1}{4b_3} \left(\frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right) \quad (B16)$$

であり、 $b_3 > 0$ 時には $x_3 < 0$ に、 $b_3 < 0$ 時には $x_3 > 0$ の方向に開いている。

($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$ のとき) :
標準形は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = c + |\lambda_3| y_3^2 \quad (B17)$$

と表される。この曲面は

$$c = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} + \frac{b_3^2}{\lambda_3} \right) \quad (B18)$$

の符号によって形が異なり、 $c > 0$ ならば一葉双曲面、 $c < 0$ ならば二葉双曲面となる。

二葉双曲面は2つの凸曲面からなっており、原点を含む一方を採用することになる。

一葉双曲面は凸ではないので破壊基準面としては相応しくないが、数値的な近似の結果この曲面になることはあり得るので注意を要する。

($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ のとき) :
標準形は

$$\lambda_1 x_1^2 = 1 - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3 \quad (B19)$$

これは平行な二平面をあらわしており、破壊条件としては不適切である。

($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$ のとき) :
標準形は

$$\lambda_1 y_1^2 + |\lambda_3| y_3^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_3^2}{|\lambda_3|} \right) - b_2 x_2 \quad (B20)$$

この方程式は双曲放物面で凸ではない。破壊条件の物理的意味とは矛盾する不適切な形である。しかし、実際のモデル化に際して、式(B19)、(B20)のケースが現れたことは著者らは今のところ経験していない。

(3) 接平面による破壊基準面の区分近似

極限荷重解析では、滑らかな二次曲面を有限個の接平面で覆って凸多面体に置き換える必要がある。本研究では、上述のような曲面の分類に従って、以下のように12ないし24の接平面で覆った凸錐に置き換えている。必要な接平面の単位ベクトルとその原点からの距離は曲面の標準形をもとに以下のようにして決定している。

まず曲面の形に応じて、以下のように接点を配置する。

(楕円体) :

長軸と垂直な平面を

i) 楕円中心点

ii) 楕円中心点と長軸両端点の二分点

の2カ所に考え、それぞれの平面と曲面との交線(楕円)上に均等に12個ずつの接点を配置して、合計36の接平面を作成する。

(楕円放物面と二葉双曲面) :

長軸と垂直な平面を、

i) 原点

ii) 長軸に沿って材料の一軸圧縮強度の $\sqrt{1/3}$ の距離だけ原点から離れた点

の2カ所に考え、それぞれの平面と曲面との交線(楕円)上に均等に12個ずつの接点を配置して、合計24の接平面を作成する。

(一葉双曲面) :

長軸と垂直な平面を、長軸に沿って材料の一軸圧縮強度の $\sqrt{1/3}$ の距離だけ原点から離れた点に考え、その平面と曲面との交線(楕円)上に均等に12個の接点を配置して接平面を作成する。

これらの接点の座標は以下のようにして定められる。

(楕円体、一葉双曲面、二葉双曲面) :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = c - \lambda_3 \left(x_3 + b_3 / 2\lambda_3 \right)^2 = R^2 \quad (B21)$$

$$c = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} + \frac{b_3^2}{\lambda_3} \right)$$

とおいて、上に定めた座標値を x_3 に代入して R^2 を決める。次に、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (B22)$$

とおく。 θ は今の場合の12分割に応じて $\pi/6$ 刻みとすればよい。これを式(B21)に代入して k を求めると、

$$k = \sqrt{\frac{c - \lambda_3 \left(x_3 + b_3 / 2\lambda_3 \right)^2}{\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta}} \quad (B23)$$

を得る。したがって、固有方向を参照した接点の位置が次のように決定できる。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos \theta - b_1 / 2\lambda_1 \\ k \sin \theta - b_2 / 2\lambda_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (B24)$$

この点での接平面の外向き単位法線ベクトル \mathbf{g} は、勾配ベクトルを用いて

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 k \cos \theta \\ 2\lambda_2 k \sin \theta \\ 2\lambda_3 x_3 + b_3 \end{pmatrix}, \quad g = \frac{\partial f / \partial x}{\|\partial f / \partial x\|} \quad (B25)$$

であり、座標原点からこの接平面への距離は

$$K = x \cdot g \quad (B26)$$

で与えられる。

(楕円放物面) :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = c - b_3 x_3 = R^2$$

$$c = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right) \quad (B27)$$

とにおいて、上に定めた座標値を x_3 に代入して R^2 を決める。式(B22)と同様にして k を求めると、

$$k = \sqrt{\frac{c - b_3 x_3}{\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta}} \quad (B28)$$

となる。この k を用いれば、固有方向を参照した接点の位置は式(B24)と同じ形で与えられる。この点での接平面の外向き単位法線ベクトル g は、勾配ベクトルを用いて

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 k \cos \theta \\ 2\lambda_2 k \sin \theta \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad g = \frac{\partial f / \partial x}{\|\partial f / \partial x\|} \quad (B30)$$

である。原点からの距離は式(B26)で与えられる。

参考文献

- 1) Goodman, R. E., Taylor, R. L. and Brekke, T. L. : A model for the mechanics of jointed rocks, *J. Soil Mechs. and Found. Eng. Div., ASCE*, Vol. 94, No. S M3, 637-659, 1968.
- 2) Ghaboussi, J., Wilson, E. L. and Isenberg, J. : Finite element for rock joints and interfaces, *J. Soil Mechs. and Found. Eng. Div., ASCE*, Vol. 99, No. SM10, 833-848, 1973.
- 3) Zienkiewicz, O. C., Best, B., Dullage, C. and Stagg, K. G. : Analysis of nonlinear problem in rock mechanics with particular reference to jointed rock systems, Proc. 2nd Int. Congress on Rock Mechanics, Vol. 3, 501-509, 1970.
- 4) Heuze, F. E. and Barbour, T. G. : New models for rock joints and interfaces, *J. Geotec. Engrg. Div., ASCE*, 108, GT5, 757-776, 1982.
- 5) Desai, C. S., Zaman, M. M., Lightner, J. G. and Siriwardane, H. J. : Thin-layer element for interfaces and joints, *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 8, 19-43, 1984.
- 6) Cundall, P. A. : Formulation of three-dimensional distinct element model Part 1 and Part 2, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 25, (3), 107-125, 1988.

- 7) Belytschoko, T. B., Plesha, M. and Dowding, C. H. : A computer method for stability analysis of caverns in jointed rock, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 8, 473-492, 1984.
- 8) Shi, G. H., Goodman, R. E. and Tinucci, J. P. : Application of block theory to simulated joint trace maps, Proc. Int. Symp. Fundamentals of Rock Joints, Centek Pub., 205-245, 1987.
- 9) Oda, M., Suzuki, K. and Maeshibu T. : Elastic compliance for rock-like materials with cracks, *Soils and Foundations*, 24, 27-40, 1984.
- 10) Kawamoto, T., Ichikawa, Y. and Kyoya, T. : Deformation and fracturing behaviour of discontinuous rock mass and damage mechanics theory, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 12, 1-30, 1988.
- 11) Cai, M. and Horii, H. : A constitutive model of highly jointed rock masses, *Mechanics of Materials*, 13, 217-246, 1992.
- 12) 吉田秀典, 堀井秀之 : マイクロメカニクスに基づく岩盤の連続体モデルと大規模空洞掘削の解析, 土木学会論文集, No.535/III-34, 23-41, 1996.
- 13) Sanchez-Palencia, E. : Non-homogeneous media and vibration theory, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- 14) Lions, J. L. : Some methods in the mathematical analysis of systems and their control, Science Press, Beijing, China, 1978.
- 15) Benssousan, A., Lions, J. L. and Papanicolaou, G. : Asymptotic analysis for periodic structures, North Holland, Amsterdam, 1978.
- 16) Guedes, J. M. and Kikuchi, N. : Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engrg.*, 83, 143-198, 1991.
- 17) 寺田賢二郎, 菊池昇 : 複合材の均質化解析のためのデジタル・イメージを利用した微視構造モデリング手法, 日本機械学会論文集, A-61, 170-177, 1995.
- 18) Terada, K. and Kikuchi, N. : Nonlinear homogenization method for practical applications, Computational Methods in Micromechanics, S. Ghosh and M. Ostoja-Starzewski eds., AMSE AMD 212, 1-16, 1995.
- 19) 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊池昇 : 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析 (第1報, 定式化), 日本機械学会論文集, A-61, 2199-, 1995.
- 20) Kyoya, T. and Kawamoto, T. : Quantitative evaluation of effect of pattern bolting by the homogenization method, Proc. Int. Symp. Assessment and Prevention of Failure Phenomena in Rock Engineering, Istanbul, Balkema Pub., 641-646, 1993.
- 21) Kyoya, T., Terada, K., Kishino, Y. and Kawamoto, T. :

- Stability analysis of rock mass structures based on a homogenization method, Procs. 9th Int. Conf. Computer Methods and Advances in Geomechanics, Wuhan, Balkema Pub., 1, 337-342, 1997.
- 22) 京谷孝史, 渡嘉敷直彦, 岸野佑次: 均質化法と極限支持力解析法の組み合わせによる岩盤構造物の破壊強度評価法の提案, 構造工学論文集, 43A, 477-484, 1997.
- 23) Kyoya, T., Terada K. and Kishino, Y. : Limit load analysis of rock mass structures combined with a homogenization method, Proc. IS-Nagoya 97, Deformation and Progressive Failure in Geomechanics, Pergamon, 407-412, 1997.
- 24) 京谷孝史, 寺田賢二郎, 岸野佑次: 均質化法による亀裂性岩盤の変形強度特性評価と極限支持力解析, 第42回地盤工学シンポジウム論文集, 87-92, 1998.
- 25) 寺田賢二郎, 伊東孝, 菊池昇: 固体-液体混合体に対する均質化法の工学的考察, 土木学会論文集, No. 591/I-43, 85-97, 1998.
- 26) Maier, G. : Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws: a finite element, linear programming approach, Meccanica IV:3 250-260, 1969.
- 27) Cohn, M. Z. and Maier, G. (eds) : Engineering plasticity by mathematical programming, Proc. NATO Advanced Study Institute, Pergamon Press, 94-134, 1977.
- 28) 川本眺万, 吉田英生 : 節理体および積層体の巨視的なせん断破壊性状について, 材料, 17(181), 42-49, 1968.

(1998.7.2 受付)

EVALUATION OF DEFORMABILITY AND STRENGTH OF ROCK MASS USING PROPERTIES OF INTACT ROCKS AND DIGITAL IMAGE OF CRACK DISTRIBUTION

Takashi KYOYA, Kenjiro TERADA and Lizhu OYANG

Mechanical properties of rock mass are strongly governed by the microscopic structure that consists of distributed cracks and various rock materials. In order to evaluate the deformability and the strength of such a rock mass, the numerical scheme of multi-scale which is based on both the homogenization method and the limit load analysis is proposed. The data needed are only the mechanical properties of intact rocks and the digital image of crack distribution, which are easily obtained from laboratory tests and survey in site. The deformability and strength of representative element of rock mass are reasonably evaluated from the homogenization analyses. And then the limit load of a rock mass structure is also successfully evaluated by the limit load analysis.