

Hill の安定条件の粒状体への適用性について

岸野 佑次¹・武 建勳²

¹正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

²学生会員 工修 東北大学大学院博士後期課程 工学研究科土木工学専攻

本文においては、まず、Hill の安定条件の検討を行うために用いた粒状要素法による応力制御要素試験プログラムのアルゴリズムについて示した。つぎに、Hill の安定条件の理論的背景を明らかにするために、動的仮想仕事の原理に基づく安定条件式の誘導とその考察を行った。粒状体への適用性の具体的な検討は、側圧一定せん断載荷シミュレーションで得られた2種の中途データを対象とする詳細な応力プローブ試験シミュレーション結果に基づいて行い、塑性論における流動則とは微妙なずれが生じること、ならびに安定硬化段階では、このずれのために Hill の安定条件が満たされることを見出した。さらに、粒状体の安定性を詳細に論じるためには、構成則に増分非線形性を取り入れる必要性もあることなどを考察した。

Key Words : granular materials, Hill's condition of stability, granular element method, stress-probe simulation, incremental non-linearity

1. まえがき

近年、粒状体の力学的安定性の問題について種々の議論がなされている。とくに、応力ひずみ関係におけるピーク以前の硬化過程において Hill の安定条件^{1),2)}が満たされるかどうか、また、満たされないとすれば実際に不安定現象が生じるかどうか大きな問題となっている。Lade³⁾は砂の応力制御三軸排水試験結果を示し、塑性挙動は非関連流動則に従うと認められ、Hill の安定条件に反した結果が観察されたにも拘わらず、不安定現象は認められなかったと述べた。一方、Drucker⁴⁾は非関連流動則が成立するとすれば必ず不安定になることを数値解析例によって示すとともに、塑性挙動の実際が明らかでないとなれば、敢えて非関連流動則を用いる必要はないのではないかと述べた。このような議論に実証的な方法で決着をつけるためには、より詳細かつ精密な地盤材料の実験を実施する必要があるであろう。

一方、粒状体の非弾性挙動を知るための一つの有力なアプローチとして、離散的粒状体モデルによるシミュレーション解析が行われている。Bardet⁵⁾は Cundall⁶⁾の提案した個別要素法を用いて応力プローブ試験シミュレーションを実施し、粒状体モデルの塑性挙動を通常非関連流動則により説明できないという証拠は見出し得なかったとの結論を得た。しかし Bardet のシミュレーション解析においては、応力制御プローブが所期の設定通りに行われておらず、

例えば、弾塑性応答に基づいて安定性の詳細な検討を行うことなどは困難であると考えられる。Bardet が精度良く要素試験を行えなかった理由は、個別要素法の応力制御アルゴリズムに起因すると思われる。

個別要素法と同様の離散的解析手法として、著者の一人は粒状要素法⁷⁾を提案した。この方法は主として粒状体の静的な性質を精度良く調べることを目的として開発されたものであり、種々の応用が試みられている。とくに、応力プローブ試験への応用例としては増分非線形性の考察⁸⁾や、上述の Bardet の論文に対応したシミュレーション解析^{9), 10)}が行われている。これらの解析結果は粒状要素法が精度の良い応力プローブ試験を可能にすることを示している。しかし、これらの論文における応力プローブ方向は限定されたものであり、増分非線形性や安定条件などについて明確な結論を得るまでには至っていない。

以上のような背景の下に、本研究においては、粒状要素法を用いた詳細なシミュレーション解析を行い、古典的弾塑性理論が粒状体の真の非弾性挙動を正確に表現し得るかという問題および Hill の安定条件が粒状体の安定性評価にも有効であるかという問題について考察する。なお、本文においては、実際の検討結果を示す前に、本研究で用いた要素試験シミュレーションのアルゴリズムを提示する。また、Hill の安定条件の意味を明らかにするために、Hill とは異なる方法で安定条件の誘導を行うとともに、安定条件が成立するための前提条件を明らかにする。

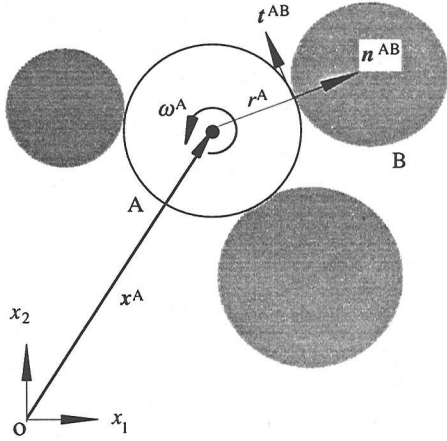


図-1 粒状供試体モデル内の典型的な粒子とその接触粒子

2. 要素試験を想定した粒状要素解析法

岸野⁷⁾によって提案された粒状要素法の解析アルゴリズムは初期のものから種々変遷しているので、ここでは、本論文で Hill の安定条件の適用性を調べるために行った粒状供試体モデルの要素試験シミュレーションに用いた解析アルゴリズムを示す。

(1) 粒子移動と接触力

図-1 に粒状体モデル中の典型的な粒子とその接触粒子を示す。粒子 A, B の半径を r^A, r^B 、重心の位置ベクトルを x^A, x^B とする。このとき、両粒子の接触点における粒子 A 側の単位法線ベクトルは

$$n^{AB} = (x^B - x^A) / d^{AB} \quad (1)$$

と表すことができる。ここに、 $d^{AB} = |x^B - x^A|$ は粒子重心間距離である。また、この接触点における粒子 A 側の単位接線ベクトル t^{AB} を n^{AB} を反時計回りに 90° 回転したベクトルとして定義する。すなわち、 t^{AB} の成分を次式で与える。

$$t_1^{AB} = -n_2^{AB}, \quad t_2^{AB} = n_1^{AB} \quad (2)$$

つぎに、時間ステップ Δt における粒子 A, B の並進移動の増分を $\Delta x^A, \Delta x^B$ 、回転の増分を $\Delta \omega^A, \Delta \omega^B$ と表す。これらの 2 粒子の移動を基に、粒子間の相対変位増分は次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_n^{AB} &= (\Delta x^A - \Delta x^B) \cdot n^{AB} \\ \Delta u_t^{AB} &= (\Delta x^A - \Delta x^B) \cdot t^{AB} + r^A \Delta \omega^A + r^B \Delta \omega^B \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

一方、A 粒子から B 粒子に作用する接触力の成分を f_n^{AB}, f_t^{AB} と表す。相対変位および接触力の法線方向成分は圧縮が正、接線方向成分は相手粒子の右

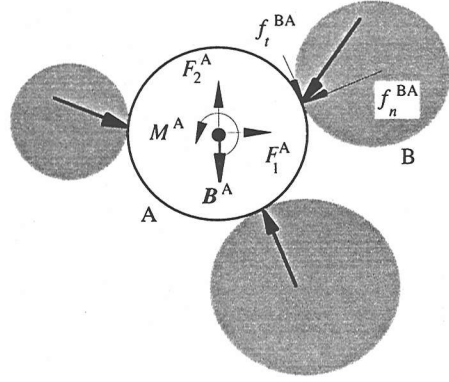


図-2 粒子に作用する力

ずれが正である。いま、図-2 に示すように、粒子 A が物体力 B^A の作用の下に静的平衡状態にあるとすると、粒子 A から隣接粒子に作用する接触力の合力

$$F^A = \sum_B (f_n^{AB} n^{AB} + f_t^{AB} t^{AB}) \quad (4)$$

は $F^A = B^A$ を満たす。ここに、 \sum_B は粒子 A に接触している全粒子についての和を表す。また、粒子 A から隣接粒子に作用する接触力のモーメント

$$M^A = r^A \sum_B f_t^{AB} \quad (5)$$

(反時計回り正) は $M^A = 0$ を満たす。

2 粒子 A, B の重心間距離について

$$d^{AB} < r^A + r^B \quad (6)$$

が満たされると A, B は互いに重なり合う。粒子を弾性体とした場合、重心間距離と接触力とは理論的には非線形式で関係づけられるが、ここではこれを線形化して簡易的にとり扱うこととする。すなわち接触力法線方向成分は、法線方向バネ定数を k_n として、次式で与えられる。

$$f_n^{AB} = k_n (r^A + r^B - d^{AB}) \quad (7)$$

上式に対する増分型の表式は、式 (3) で定義した相対変位増分を用いて次式で与えられる。

$$\Delta f_n^{AB} = k_n \Delta u_n^{AB} \quad (8)$$

一方、接線方向成分については式 (7) のような表式が存在しない。これは、粒子間にすべりが発生するので、各時点における接触力接線方向成分が過去の履歴の影響を受けるためである。したがって、接触力の接線方向成分 f_t^{AB} は、2 粒子 A, B が接し始めた時点以降、解析各ステップで生じた増分値の和として算定されることになる。接触力増分の接線方向成分は、すべりが発生しない限り、接線方向バネ定数を k_t として、次式で与えられる。

$$\Delta f_t^{AB} = k_t \Delta u_t^{AB} \quad (9)$$

逐次解析過程において、もし 2 粒子 A, B の重心

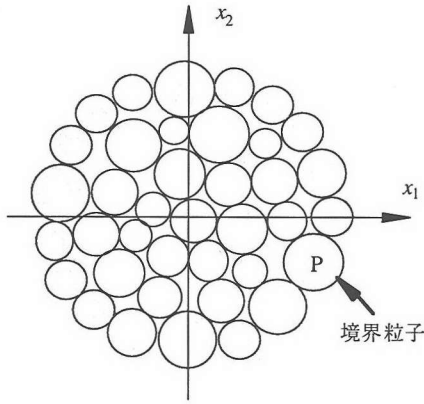


図-3 粒状供試体モデル概念図

間距離が式 (6) を満たさなくなるときには、接触力の法線方向成分および接線方向成分を強制的に零と置くこととする。また、粒子間接触力の接線成分が Coulomb の摩擦則で定まる限界値を超えることがないように、次式の限界値を超えた場合には、強制的にこの限界値に戻す修正を行うこととする。

$$f_i'^{AB} = \frac{f_i^{AB}}{|f_r^{AB}|} (c + f_n^{AB} \tan \phi) \quad (10)$$

ここに、 ϕ は粒子間摩擦角、 c は粒子間粘着力である。

(2) 境界粒子の制御と応力

以下、図-3 に示すような 2 次元円粒子集合を粒状供試体モデルとする要素試験を想定して剛性行列を構成する。領域境界の形状は任意であるが、領域の幾何学形状の異方性が要素試験結果に影響を及ぼさないようにするには円形領域を用いることが望ましいと考えられる。粒状供試体モデル周辺に配置された円粒子は境界粒子と称される。境界粒子は粒状供試体モデルの応力やひずみを制御するために用いられ、境界粒子同士の相互作用は意味をもたない。

粒状供試体モデルの境界の移動を常に巨視的な変形勾配に適合したものとするために各境界粒子には特別な移動を強制することとする。すなわち、境界粒子 P の重心の位置座標は常に次式で与えられる位置に移動するような制御を行う。

$$\mathbf{x}^P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}^P \quad (11)$$

ここに、 \mathbf{x}^P および \mathbf{X}^P は、それぞれ、境界粒子重心の現在および基準状態における重心の位置座標、 \mathbf{T} は粒状供試体モデルに与える変形勾配である。なお、境界粒子の回転は拘束する。また領域全体の回転はないものとし、 \mathbf{T} は対称とする。

ここで、有限変形を考慮し、変形勾配 \mathbf{T} にエネル

ギー的に対応する第 1 Piola-Kirchhoff 応力 Π (Hill の論文^{1),2)} における nominal stress) の算定方法について説明する。 Π の成分 Π_{ij} は、基準状態において法線が x_i 方向を向いていた単位面素に対応する現在の面素に作用している応力ベクトルの第 j 成分を与える。この応力は、以下のように、粒子の仮想変位増分に対して領域表面に作用する接触力と応力とする仕事の増分を等値することにより与えられる。

まず、粒状供試体モデルの境界粒子 P から内部粒子に作用する接触力の合力は

$$\mathbf{F}^P = \sum_1 (f_n^{PI} \mathbf{n}^{PI} + f_t^{PI} \mathbf{t}^{PI}) \quad (12)$$

である。ここに、 \sum_1 は各境界粒子に接している内部粒子についての和を表す。つぎに、境界粒子の変位増分は、変形勾配の増分を $\Delta \mathbf{T}$ とすれば、式 (11) より次式で与えられる。

$$\Delta \mathbf{x}^P = \Delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}^P \quad (\text{または, } \Delta x_i^P = \Delta T_{ij} X_j^P) \quad (13)$$

ここで、領域表面に作用する接触力のする仕事の増分と応力のする仕事の増分を次式のように等置する。

$$\Delta W = -\sum_p \mathbf{F}^p \cdot \Delta \mathbf{x}^p = \Pi : \Delta \mathbf{T} A_0 \quad (14)$$

ここに、 \sum_p は全境界粒子に関する和を表し、 A_0 は基準状態における境界粒子重心を結ぶ多角形の面積、 $\Pi : \Delta \mathbf{T}$ は複内積 $\Pi_{ij} \Delta T_{ji}$ を意味する。式 (12)、(14) より、次式が成立する。

$$\Pi = -\sum_p \sum_1 \mathbf{X}^p (f_n^{PI} \mathbf{n}^{PI} + f_t^{PI} \mathbf{t}^{PI}) / A_0 \quad (15)$$

なお、Cauchy 応力 (Hill の論文^{1),2)} における true stress) を必要とする場合は、式 (15) における境界粒子重心の位置座標ベクトル \mathbf{X}^p を現在の位置座標ベクトル \mathbf{x}^p に、面積 A_0 を現在の面積 A に置き換えればよい。

(3) 剛性行列の構成

図-1 において、A 粒子の並行移動増分と粒子回転増分よりなる変位増分ベクトルを

$$\Delta U^A = (\Delta x_1^A, \Delta x_2^A, r^A \Delta \omega^A)^t \quad (16)$$

と置く。また、A 粒子重心に付加する力とモーメントの増分を表す付加力増分ベクトルを

$$\Delta F^A = (\Delta F_1^A, \Delta F_2^A, \Delta M^A / r^A)^t \quad (17)$$

と表す。A 粒子の移動 ΔU^A 、ならびに ΔU^B などの A 粒子に隣接する粒子の移動が生じたときに、A 粒子に付加すべき付加力増分ベクトルは、式 (3)、(4)、(5)、(8)、(9) より、次式のように置くことができる。

$$\Delta F^A = K^A \Delta U^A - \sum_B K'^{AB} \Delta U^B \quad (18)$$

逐次反復解析は、式 (24) の左辺に上式の不釣り合い量 ΔF を逐次代入することにより行う。これは以下の考え方に基づいている。いま、 ΔF で表される現状の不釣り合い状態に対して、もし仮想的な外力 $-\Delta F$ を補って考えると、現状は仮想的な釣り合い状態にあることになる。しかし、現実には仮想的な外力は作用しないので、実際に ΔF を加えれば仮想的な外力が解消され、実際の釣り合い状態が得られることになる。以上より、平衡状態を与える変位増分は次式で与えられる。

$$\Delta U = S^{-1} \Delta F \quad (32)$$

ところで、各粒子に ΔU に対応した接触力増分を付加すると平衡条件は一旦満たされるが、一般には粒子間の接触・非接触の変化やすべりが発生するので、接触力の補正を行う必要がある。すなわち、負の接触力法線成分が生じたときは接触力を零とし、接線成分については必要に応じて式 (10) の補正を行う。このとき新たな不釣り合い状態が生じるので、剛性行列 S の改定を行った上で式 (32) の計算を繰り返す必要がある。しかし、 S の改定およびその逆行列の計算には多くの計算時間を要するので、以下のような簡易な計算方法を用いることとする。

まず、 S の改定に関しては、粒子移動により粒子同士の新たな接触・非接触の変化が生じない限り行わないこととする。また、式 (32) における剛性行列 S の逆行列の計算を簡略化するために、反復計算を前提とした便法を用いる。すなわち、以下のように、剛性行列 S を構成する小行列の中、従要素剛性行列に対応する部分を無視して、主要要素剛性行列に対応する部分だけを残す。

$$S = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & K^{II} & 0 \\ 0 & 0 & K^{In} \end{pmatrix} \quad (33)$$

ここに、 K^{II} ($i=1, \dots, n$) は各内部粒子について式 (19) で定義される 3×3 の主要要素剛性行列である。 D や K^{II} の逆行列は陽な形で求まり、 S の逆行列はこれらの小行列の逆行列を並べたものとなる。

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (K^{II})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (K^{In})^{-1} \end{pmatrix} \quad (34)$$

なお、行列 K^{II} は特異になることがあり得るので、あらかじめ対角線上に粒子間バネ定数に比して十分小さな量を加え、特異性を排除することとする。

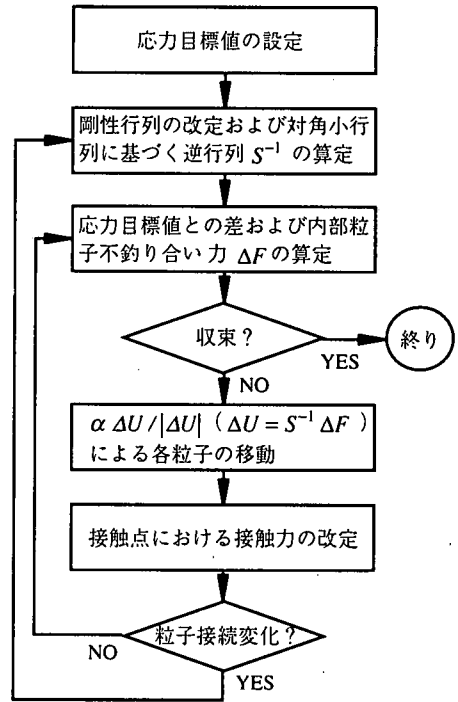


図-4 応力制御要素試験の解析アルゴリズム

式 (34) のような簡易の逆行列を用いた逐次反復解析法に類似の方法としてラーメン構造の古典的数値解法であるモーメント分配法が挙げられる。この解析法においては、着目節点以外の節点を固定して、不釣り合いモーメントを逐次解消して行く方法を用いているが、基本的考え方は上記の従要素剛性行列を無視することに等価である。ただし、粒状要素法ではモーメント分配法のように不釣り合い量の解消を順序づけて行う方法とはらず、全不釣り合い力を式 (32) に基づいて同時に解消する方法をとる。

つぎに、式 (32) に基づいて算定される ΔU に関しては以下のような取り扱いを行うこととする。逐次反復解析の各ステップで求まる ΔU は、場合によっては、粒子間に大きな相対変位や過度の重なり合いを生じさせ、非現実的な粒子移動や不安定な収束計算の原因となる。これを避けるために、式 (32) に基づいて算定される移動量はその成分の比のみを利用し、絶対量については各逐次計算ステップにおける変位ベクトル ΔU のノルムを一定に保つように、 ΔU の代わりに $\alpha \Delta U / |\Delta U|$ (α は与える移動量のノルムを表す正の定数) を用いる。

以上の逐次反復計算は、次の応力の目標値を定めた新しい載荷ステップに移る前に、 $|\Delta F|$ がある許容誤差の範囲内に収まるまで繰り返すことになる。

3. 仮想仕事の原理によるHillの安定条件の誘導

硬化状態におかれた材料が Hill の安定条件^{1), 2)} を満たすべきかどうかについては従来より議論のあるところである^{3), 4)}。ここでは、Hill の安定条件よりやや一般的な形の安定条件を動的仮想仕事の原理を用いて誘導するとともに、Hill の安定条件の適用性について考察を行うこととする。

いま、連続体が静的に安定した状態にあるとした場合、この連続体は静的な平衡条件を満たしている。しかし、静的な平衡状態を動的な方程式において慣性項等を無視して実現したものと考えらるならば、不安定現象を捉えるためには、動的な項を補って考える必要がある。以下、動的な平衡条件を考えることとし、図-5 に示すように、ある連続体の基準状態における領域を V_0 、境界を S_0 、密度を ρ_0 とする。領域内の物質点をその点の基準状態の位置ベクトル X で表し、時刻 t をパラメータとする物質点の運動を $x = x(X, t)$ 、変形勾配を $T(X, t) = \partial x(X, t) / \partial X$ または $T_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ と置く。また、この領域に作用する外力として、基準状態単位面積当たりの表面力を t_0 、基準状態単位体積当たりの物体力を b_0 で表す。さらに、領域内部の応力は第1 Piola-Kirchhoff 応力 Π で表す。このとき、時刻 t におけるこの系の動的平衡条件より次の仮想仕事の原理が成立する。

$$\int_{S_0} t_0 \cdot \delta x \, dS_0 + \int_{V_0} (b_0 - \rho_0 \ddot{x}) \cdot \delta x \, dV_0 = \int_{V_0} \Pi : \delta T \, dV_0 \quad (35)$$

ここに、 $\Pi : \delta T$ は $\Pi_{ij} \delta T_{ji}$ を表す。時刻 Δt 後に Π が $\Pi + \Delta \Pi$ 、 \ddot{x} が $\ddot{x} + \Delta \ddot{x}$ になったとし、 b_0 は一定とする。この状態に対する仮想仕事の原理は次式のよう表される。

$$\int_{S_0} (t_0 + \Delta t_0) \cdot \delta x \, dS_0 + \int_{V_0} \{b_0 - \rho_0 (\ddot{x} + \Delta \ddot{x})\} \cdot \delta x \, dV_0 = \int_{V_0} (\Pi + \Delta \Pi) : \delta T \, dV_0 \quad (36)$$

式 (35)、(36) 中の δx 、 δT は任意であるから、 Δt 後までに実際に生じた増分 Δx 、 ΔT についても成立しなければならない。 δx 、 δT をこれらの増分に置き換えて式 (35)、(36) を辺々引くと次式を得る。

$$\int_{S_0} \Delta t_0 \cdot \Delta x \, dS_0 - \int_{V_0} \Delta \Pi : \Delta T \, dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \Delta \ddot{x} \cdot \Delta x \, dV_0 \quad (37)$$

ところで、上式において ΔT が剛体回転のみの場合、変形は生じないことから、 $\Delta \Pi = 0$ 、 $\Delta t_0 = 0$ であり、応力の平衡条件は静的に満たされ、加速度運動は生じないことになる。以下の議論においてはこ

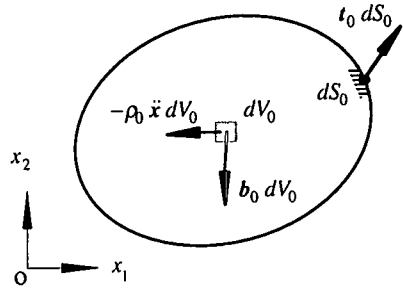


図-5 領域に作用する外力の基準状態における表示

のような特殊な状態は除外しておくこととする。

本文においては安定性を以下のように考える。静的平衡条件を満たす系に一時的な外乱を与えたとき、その後の系の運動が周期的である場合、系は復元性を有する。逆に、周期性のない運動が生じる場合、もし粘性減衰が零であれば、系は復元不可能である。一方、粘性減衰があれば系は復元することもあり得るが、本文では材料として砂のような材料を対象とし、粘性減衰は十分小さいと仮定する。このとき、周期性がなければ、事実上系は復元せず、不安定であるとみなすことができる。後に示すように、非周期的な運動の場合、式 (37) 右辺の符号は必ず正となり、これより安定条件式を誘導することができる。ここではこのような考えに基づいて定式化を行う。

以下の議論においては、前提条件として、領域内で急激な構造変化が生ぜず、諸量の変化が十分滑らかに生じるとする。さらに、このことから、領域内の全物質点の運動は十分小さな時間間隔 Δt に対して次式のような変数分離形により表すことができると仮定する。

$$x(X, t + \tau) = x(X, t) + \chi(X, t) g(\tau) \quad (0 \leq \tau \leq \Delta t) \quad (38)$$

このとき式 (37) の右辺は以下のように変形される。

$$\int_{V_0} \rho_0 \Delta \ddot{x} \cdot \Delta x \, dV_0 = \Delta g \Delta \ddot{g} \int_{V_0} \rho_0 \chi \cdot \chi \, dV_0 \quad (39)$$

いま、 $\tau = 0$ において系はある平衡状態にあり、系内の物質点は $x(X, t)$ に置かれ、 $g(0) = 0$ とする。また、時刻 t における外乱として、 $g(\tau)$ に対する初速度が $\dot{g}(0)$ 、変形モードが $\chi(X, t)$ となる運動が与えられたとする。このとき、物体力は一定であるとする。さらに、系の動的平衡条件式の具体的な形が、通常の運動方程式におけるように、時間に関して2階の微分方程式であるとし、構成則を考慮した後の動的平衡条件式を次のように置く。

$$\rho_0 \chi \ddot{g} + D_1 \chi \dot{g} + D_2 \chi g = 0 \quad (40)$$

ここに、 D_1 、 D_2 は構成則により定まる空間的な微分演算子である。いま、この式と χ との内積をとつ

て領域 V_0 で積分すれば、次式を得る.

$$M\ddot{g} + C\dot{g} + Kg = 0 \quad (41)$$

ここに、

$$M = \int_{V_0} \rho_0 \chi \chi dV_0, \quad C = \int_{V_0} \chi D_1 \chi dV_0, \quad K = \int_{V_0} \chi D_2 \chi dV_0$$

は、それぞれ、質量、粘性減衰、剛性に対応した量である。ここで、次のパラメータを定義しておく。

$$\alpha = \left(\frac{C}{2M} \right)^2 - \frac{K}{M} \quad (42)$$

式 (41) の解は以下のように与えられる。

a. $\alpha > 0$ のとき

$$g(\tau) = \frac{\dot{g}(0)}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{C}{2M}\tau} (e^{\sqrt{\alpha}\tau} - e^{-\sqrt{\alpha}\tau}) \quad (43a)$$

b. $\alpha = 0$ のとき

$$g(\tau) = \dot{g}(0)\tau e^{-\frac{C}{2M}\tau} \quad (43b)$$

c. $\alpha < 0$ のとき

$$g(\tau) = \frac{\dot{g}(0)}{\sqrt{-\alpha}} e^{-\frac{C}{2M}\tau} \sin\sqrt{-\alpha}\tau \quad (43c)$$

系の粘性減衰が小さい場合、これらの解の中の a. および b. の挙動は外乱に対して事実上 $\tau=0$ の状態に戻らないので不安定とみなす。これに対して、c. は周期運動であり、復元性があるので、安定とみなす。上式およびその 2 階微分式に含まれる関数を、 $\tau=0$ の近傍で τ の 1 次項までを含むテーラー展開で近似すると、全ての場合について、次式を得る。

$$\Delta g \Delta \ddot{g} \approx (\dot{g}(0))^2 \left\{ \left(\frac{C}{M} \right)^2 - \frac{K}{M} \right\} \Delta t^2 \quad (44)$$

a. および b. の場合上式の右辺は正である。また、c. の場合、粘性減衰が剛性に比して小さく、少なくとも $\frac{K}{M} > \left(\frac{C}{M} \right)^2$ が成立するとき、上式の右辺は負となる。逆に $\Delta g \Delta \ddot{g} < 0$ が成立するのは c. の場合に限られる。ただし、周期性の解は $\left(\frac{C}{M} \right)^2 \geq \frac{K}{M} > \left(\frac{C}{2M} \right)^2$ の場合も存在することに注意する必要がある。よって、 $\Delta g \Delta \ddot{g} < 0$ は系が安定であるための十分条件を与え、次式と等価である。

$$\int_{V_0} \Delta \Pi : \Delta T dV_0 > \int_{S_0} \Delta t_0 \cdot \Delta x dS_0 \quad (45)$$

とくに、境界条件が変位拘束 ($\Delta x = 0$) と死荷重 ($\Delta t_0 = 0$) の組み合わせで与えられ、強制的外力の作用がない状態で不安定性が生じない条件として、Hill の安定条件

$$\int_{V_0} \Delta \Pi : \Delta T dV_0 > 0 \quad (46)$$

を誘導することができる。すなわち、2 次の仕事増

分の積分値が正という条件が得られる。このように、Hill の安定条件は式 (45) で表される不等式において右辺を零と置いた特殊な場合として誘導されることが注目される。

なお、上記のように、周期性の解は $\Delta g \Delta \ddot{g} > 0$ の場合にも生じ得るので、式 (45) や式 (46) は系が安定であるための十分条件と考えるべきである。ただし、式 (41) の中の係数 C が零、すなわち粘性減衰がない場合には、式 (45) や式 (46) は系が安定であるための必要十分条件となる。このとき、安定条件は係数 K が正となる条件に等価である。

運動特性を決定する微分方程式 (41) の各係数 M, C, K は変形モード χ に依存した量であるが、もし、対象とする構成則のもつ特性として、常に式 (45) や式 (46) が保証されれば、式 (37) より、実現可能なあらゆる変形モード χ に対して系は安定であるということができる。

Hill は、構成則として弾性体や弾塑性体モデルを具体的に仮定し、解の唯一性の条件として式 (46) を誘導した^{1), 2)}。これに対して、本文においては、構成則は陽には用いず、解 $x(X, t)$ の示す動的性質から逆に系の安定条件として同式の誘導を行った。当然、実際に式 (46) が成立するかどうかは構成則に依存している。いま、構成則として線形弾性体モデルを考えると、式 (46) の被積分関数は正値 2 次形式となり、Hill の安定条件が満たされることは明らかである。

これまでの説明においては、増分や積分のもつ意味を明確にするために、全て有限変形理論の表現を用いたが、次章も含め、以下の具体的な応用は微小変形に限定する。

ここで、Hill の安定条件の非関連流動則モデルへの適用について考える。応力増分 $\Delta \sigma$ (圧縮を正とする) に対する負荷方向の塑性ひずみ増分テンソルは次式で与えられる。

$$\Delta \epsilon_p = (1/h) m n : \Delta \sigma \quad (47)$$

ここに、 m は塑性ひずみ増分の方向を表す単位のテンソル ($m : m = 1$)、 n は降伏曲面の外向き法線を表す単位のテンソル ($n : n = 1$)、 h は硬化状態により定まる正値スカラー量である。式 (47) より 2 次の塑性仕事増分は次式で与えられる。

$$\Delta \sigma : \Delta \epsilon_p = (m : \Delta \sigma)(n : \Delta \sigma) / h \quad (48)$$

塑性ひずみが生じる条件は $n : \Delta \sigma > 0$ であるので、2 次の塑性仕事増分の正負は $m : \Delta \sigma$ の正負によって定まる。いま、Drucker の安定条件⁴⁾ が満たされ、2 次の塑性仕事増分が正であれば、2 次の弾性仕事増分 $\Delta \sigma : \Delta \epsilon_e$ ($\Delta \epsilon_e$ は弾性ひずみ増分) は常に正であ

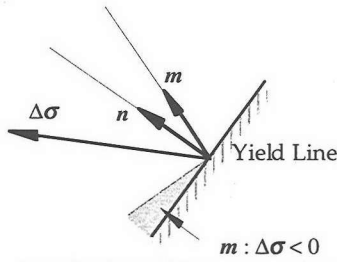


図-6 非関連流動則における不安定領域

るから、2次の仕事増分 $\Delta\sigma:\Delta\varepsilon$ ($\Delta\varepsilon$ は全ひずみ増分) は正となり、Hill の安定条件は必然的に満たされる。ところで、非関連流動則においては $m \neq n$ であることから、図-6 に示すように、 $m:\Delta\sigma < 0$ となる方向が必ず存在する。一様な応力を受ける供試体においては、このような载荷に対して Hill の安定条件が満たされる保証がないことになる^{3),4)}。このことは非関連流動則モデルに備わった宿命であるといえることができる。

以下、ある増分载荷に対して式 (46) 左辺の被積分関数が正、すなわち、

$$\Delta\sigma:\Delta\varepsilon > 0 \quad (49)$$

が成立する場合に系は安定であるという十分条件の下に安定性の検討を行う。いま静的な平衡状態にある系に増分载荷を行った結果、安定的に変形が生じ再び静的な平衡状態が得られたとすると、式 (37) の右辺は零、したがって、

$$\int_V \Delta\sigma:\Delta\varepsilon dV = \int_S \Delta t \cdot \Delta x dS \quad (\text{静的な場合}) \quad (50)$$

が得られる。ここに、 V, S は現在の体積領域とその境界面、 t は現在の境界面の単位面積当たりの表面力である。Lade³⁾ の行ったような実験的研究においては、供試体内部の応力分布を実際に調べる事ができないので、供試体外部の計測値を基に式 (50) の右辺に相当する量を求め、間接的に式 (46) または一様応力分布を仮定した式 (49) が成立するかどうかを調べることになる。本研究においても同様の方法をとることとする。シミュレーションにおける応力は境界粒子に作用する接触力を基に定義される平均値であり、式 (13) や式 (15) を参照すれば、式 (50) の右辺は平均応力増分と変形勾配増分の積に領域の体積 (2次元解析の場合は面積) を乗じたものに等価であることがわかる。そこで、種々の増分载荷 (応力プローブ) を与えて、この式をもとに2次の仕事増分の積分値を求め、式 (49) が平均的に成立するかどうかを調べることにする。

式 (46) の誘導においては、領域内の運動が時刻 t から $t+\Delta t$ の間で滑らかであり、運動が変数分離

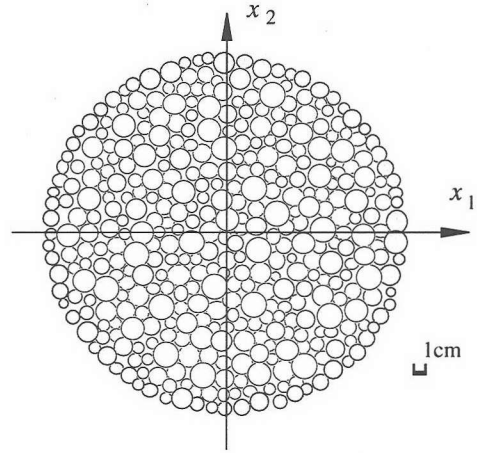


図-7 用いた粒状供試体モデル

できるという前提条件を仮定した。したがって、このような誘導方法を Hill の安定条件式の妥当性の根拠とするならば、粒状体において、その内部構造が急激に変化するような場合には、Hill の安定条件は適用できないことになる。さらに、たとえば塑性論においては载荷方向と除荷方向で応力ひずみ関係が異なるが、一般的な安定性評価を行うためには、種々のプローブ方向毎に線形比較体として検討する必要がある。一般に運動の方向毎に安定性評価を行う必要があることは、式 (41) 以下の条件式の誘導過程を見ても明らかである。構成則が運動方向によって異なると、たとえば、周期運動の応力反転に対して、変数分離型の関数表現ができない。しかし、実際の適用に当たっては、最初に与える運動方向の構成関係に基づく運動が復元困難なものであるか否かということによって安定性の評価を行うことができよう。

4. シミュレーションによるHillの安定条件の検討

ここでは、図-7 に示すような粒状供試体モデルについて行った要素試験シミュレーションの試験結果に基づいてHillの安定条件の検討を行う。シミュレーションに用いた粒状供試体モデルは、395個の円形粒子 (内72個は境界粒子) を充填したものである。粒子半径は0.5cmから1cmまでの一様乱数分布に従って選んだ。粒子間接触点における法線および接線方向のバネ定数を、それぞれ、1000 kN/m および 700 kN/m、粒子間摩擦角を 25° とした。また粒子間粘着力は零とした。全ての要素試験シミュレーションは x_1, x_2 方向を応力主軸とする主軸回転のない応力制御により行った。要素試験シミュレーションは側

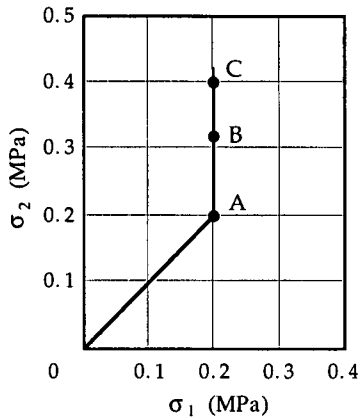


図-8 シミュレーション荷経路

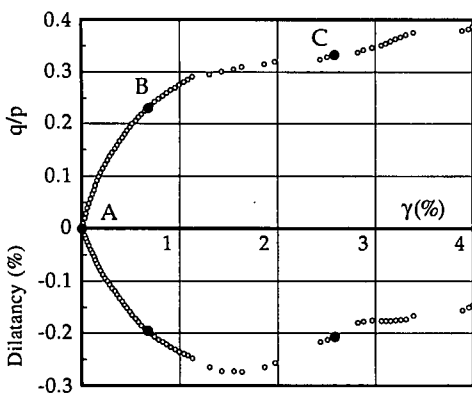


図-9 応力ひずみ関係

圧一定せん断荷試験と、この試験より得られる中途データから分岐して行う詳細な応力プローブ試験とからなる。

まず、前者については既に発表している⁹⁾、解析結果は応力ひずみ関係のみを記す。側圧一定せん断荷試験シミュレーションは、図-8 に示すように、等方圧0.2 MPaのA点まで等方荷した後にいった。軸応力の増分は $\Delta\sigma_2 = 8 \text{ kPa}$ とした。図-9 に応力ひずみ関係を示す。同図の応力比は主応力を用いて、

$$q/p = (\sigma_2 - \sigma_1) / (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (51)$$

と表される量であり、横軸は最大せん断ひずみ

$$\gamma = \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2} \quad (52)$$

である。図にはシミュレーション解析における各荷ステップ終端の状態を。印でプロットした。応力比の大きな部分でこれらのプロットの間隔が大きな部分があるが、このような荷ステップは一定の応力増分に対する応答がやや不安定であることを示している。またダイレイタンシー $-(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$ の変化より、用いている粒状供試体モデルはやや緩詰めのも

のであるということができよう。

つぎに、Hill の安定条件の検討を行うために実施した詳細な応力プローブ試験の結果とその考察について示す。詳細な応力プローブ試験は、図-8, 9 に示したせん断荷試験について、荷途上のB, C 2点において実施した。この2点の中、B点では硬化過程にあり変形は安定的に生じると考えられる。また、C点では比較的大きな変形が生じる点である。応力増分の絶対値は $|\Delta\sigma| = 1 \text{ kPa}$ とした。一方、プローブ方向は主応力空間上で 9° 毎の40方向とし、各々の方向に荷・除荷を行った。これらの応力プローブ試験により、各プローブ方向の塑性ひずみ増分、および2次の塑性仕事増分と全仕事増分を求めた。以下に解析結果とその考察を示す。なお、Bardet⁵⁾も個別要素法を用いた応力プローブ試験により弾塑性挙動の検討を行っているが、プローブ方向は8方向と限定されたものであり、また、応力制御が十分な精度で行われていないために、以下に示すような詳細な検討を行うまでには至っていない。

図-10 はB点各プローブ方向の塑性ひずみ増分の絶対値を極座標上にプロットしたものである。同図の角度は主応力空間におけるプローブ方向の σ_1 軸からの角度を表す。この図に示したように、塑性ひずみ増分の絶対値を連ねた線は円状となり、これをもとに、塑性ひずみが生じる方向と生じない方向の境界線、すなわち降伏曲線の接線を定めることが可能である。同図にはこの降伏曲線の接線と降伏曲線の外向き法線を表す単位のテンソル n を示した。このような降伏曲線の接線の決定方法は細かな応力プローブ試験を実施してはじめて可能となるものである。また、Bardet⁵⁾の解析とは異なり、剛性行列に基づく正確な応力制御が行われたため、このような方法を用いることができたということが出来る。

図-11 はB点各プローブ方向の塑性ひずみ増分の主ひずみ空間におけるプロットを示す。同図に記されている角度は $\Delta\epsilon^p$ 軸からの角度を表す。ひずみ空間における各プローブ方向の塑性ひずみ増分ベクトルは応力増分の方に拘わらずほぼ一定の方向 m を向いており、近似的に塑性論における仮定が成立しているとみなすことも不可能ではない。

以上、主応力空間における n の方向、および主ひずみ空間における m の方向を定めることが可能であることを示したが、応力主軸と塑性ひずみ増分主軸の方向には若干ではあるがずれが認められる。すなわち、本文におけるせん断荷試験や応力プローブ試験はすべて主軸回転を伴わない応力制御で行っているため、応力主軸の方向は固定されていて常に $\sigma_{12} = 0$ であるが、ひずみについては対称性以外の拘

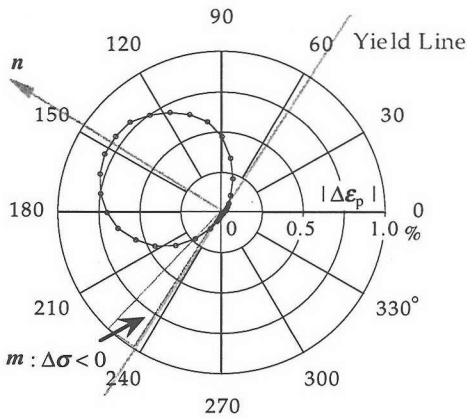


図-10 各プローブ方向の塑性ひずみ増分の絶対値 (B点)

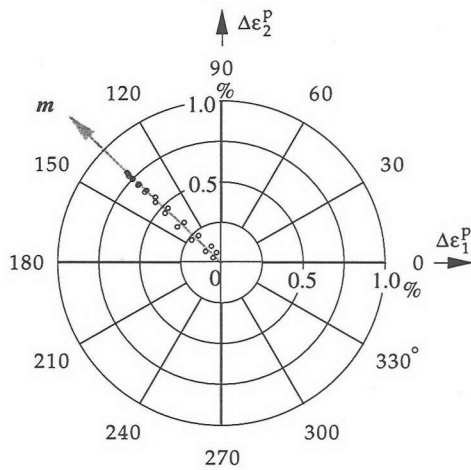


図-11 塑性ひずみ増分の塑性主ひずみ空間表示 (B点)

束はないので一般に $\varepsilon_{12} \neq 0$ であり、ひずみ主軸は回転可能である。実際、B点での応力プローブ試験における塑性ひずみ増分の主軸の方向は、プローブ方向によって若干異なるが、応力主軸の方向から右まわりに 4.5° 前後であった。ただし、この差が流動則の検討に及ぼす影響はクリティカルなものではなく、 m の主値を近似的に $m_1 = m_{11}, m_2 = m_{22}$ と置くことに含まれる誤差、すなわち、 $|m_{11} - m_1|/m_1$ や $|m_{22} - m_2|/m_2$ の値は1%程度であった。

得られた降伏曲線の外向き法線方向 n と平均的塑性ひずみ増分方向 m とを比較すると、 $m \neq n$ であり、流動則については少なくとも関連流動則が成立するとみなすことはできず、大局的には非関連流動則に従うとみなすべきである。しかし、この場合、図-10に示したグレー色の部分で $m: \Delta\sigma$ は負となり、Hillの安定条件が満たされないことになる。ここで、応力プローブ試験結果をさらに詳細に調べ、流動則の

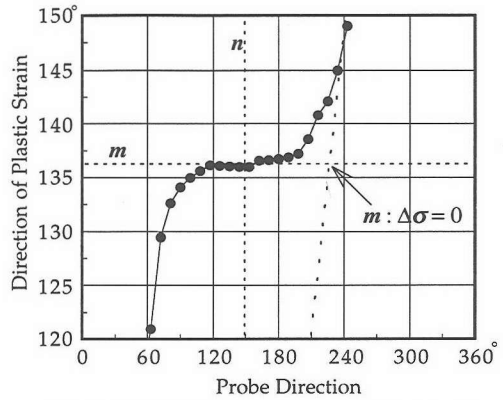


図-12 塑性ひずみ増分ベクトルの方向 (B点)

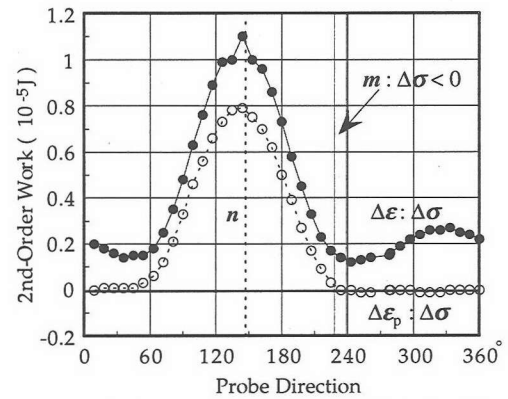


図-13 各プローブ方向の2次の仕事増分 (B点)

再吟味を行うこととする。

図-12 はプローブ方向による塑性ひずみ増分の変化を示したものであるが、明らかに、塑性ひずみ増分方向について一定方向 m からのずれが観察され、塑性ひずみ増分方向が負荷方向に依らず一定という塑性論における仮定が成り立っていない。このようなずれは図-10 と対比すると、塑性ひずみレベルの小さな部分で生じていることがわかる。

図-12 には、2次の塑性仕事増分が正から負に変わる限界線(塑性ひずみ増分の生じる方向がプローブ載荷方向と直角をなす線)を示した。もし、塑性ひずみ増分方向が一定値 m で与えられるとすると、同図の矢印で示した箇所より右で2次の塑性仕事増分が負となる。しかし、シミュレーションでは、塑性ひずみ増分方向が一定にはならず、全ての負荷プローブ方向で2次の塑性仕事増分がほぼ正となるように変化が生じていることが注目される。実際に各プローブ方向の塑性仕事増分および全仕事増分を算定してみると図-13 のようになる。塑性仕事増分による2次の仕事増分はほぼ常に正で、Drucker の

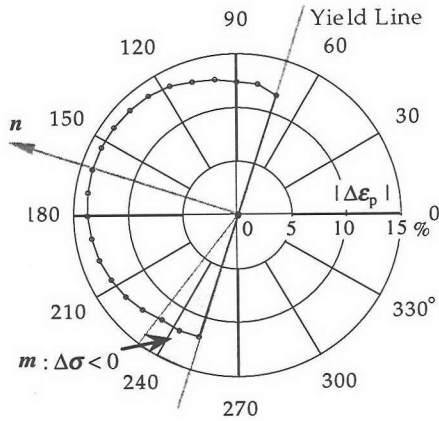


図-14 各プローブ方向の塑性ひずみ増分の絶対値 (C点)

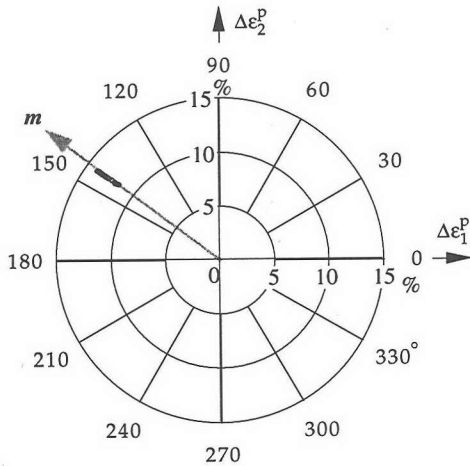


図-15 塑性ひずみ増分の主ひずみ空間表示 (C点)

安定条件⁴⁾が満たされており、したがってこれに弾性部分を加えた全ひずみ増分の2次の仕事増分は完全に正となり、Hillの安定条件が満たされることがわかる。このように、非関連流動則からのずれがHillの安定条件を満たすように生じることは非常に注目すべきことである。

つぎに、大きな変形を生じたC点について同様の応力プローブ試験を行った結果を示す。図-14, 15に、それぞれ、各プローブ方向の塑性ひずみ増分の絶対値、および主ひずみ空間上にプロットした塑性ひずみ増分を示す。B点の場合と比較して、塑性ひずみ増分の大きさは、同じ大きさの応力増分に対し約20倍と非常に大きな値となった。載荷試験は応力制御で行っているために、一時的に軟化状態になった可能性もあり得る。また、B点の場合と異なり、

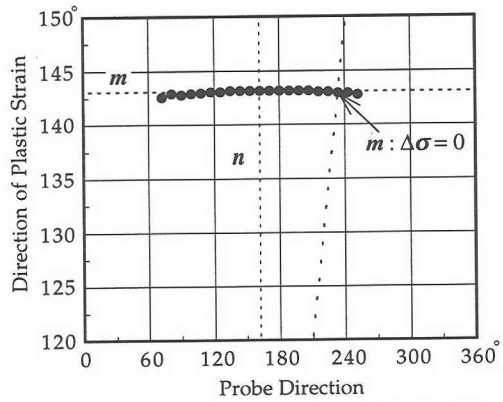


図-16 塑性ひずみ増分ベクトルの方向 (C点)

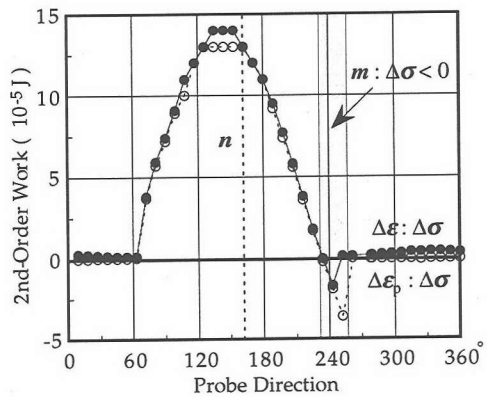


図-17 各プローブ方向の2次の仕事増分 (C点)

塑性論における塑性ひずみ増分の方が負荷方向に依らず一定という仮定自体はほぼ成立している。しかし、ひずみ増分の大きさについては、各プローブ方向とも一様に大きな値となり、式(47)の非関連流動則から大きくずれている。なお、C点の応力プローブ試験における応力主軸と塑性ひずみ増分主軸の方向の差は約8°とB点の場合より大であった。

図-16に各プローブ方向の塑性ひずみ増分の方法を示す。図-12の場合とは異なり、塑性ひずみ増分の方法は負荷方向に依らず一定という傾向が現れている。この理由は、応力レベルが高くなるにつれて粒状供試体内部においてすべりのメカニズムに支配された特定の固有変形モードが形成され易いためと考えられる¹¹⁾。もし、塑性ひずみ増分の方法が一定であれば、図-16の斜めの破線の右側で2次の仕事増分は負になる。実際に各プローブ方向の2次の仕事増分の値を示せば、図-17のようになり、Hillの安定条件が満たされない場合が生じることがわかる。しかし、各方向ともひずみ増分の程度は同程度であり、

とくに Hill の安定条件が満たされない方向で特異となる現象は見られない。以上のような力学特性を示す C 点においては, 3. で安定条件の誘導の際に仮定した変数分離が適用できない可能性が大きい。すなわち, 粒状体のシミュレーション解析過程においては, 内部構造が時々刻々変化し, とくに応力レベルが最大に近づくと, 変化も顕著である。一般に材料内部の微視構造の変化は解くべき運動方程式系の変化を意味するので, 3. に示したような連続体理論は C 点のような場合には適用が困難であろう。この C 点では Hill の安定条件が満たされないような応力増分方向が実際に存在したことから, 剛性はかなり低下しており, 各プローブ方向とも大きな変形が生じたと考えられる。

一方, B 点は応力レベルが中程度の硬化過程にあり, 剛性も十分に大きく, 不安定性の存在は想定し難い。しかし, 流動則は関連流動則とはならないので, 一見不安定性が含まれているように思われる。この矛盾は, 上述のように, 流動則が非関連流動則から僅かにずれており, この僅かなずれのために Hill の安定条件が満たされると考えることにより解決された。このようなずれは構成則における増分非線形性¹²⁾を示唆するものである。

従来より非関連流動則と安定性の関係については種々の議論がなされてきた。Lade は砂の排水実験結果より非関連流動則は成立するが Hill の安定条件, さらには, Drucker の安定条件は実験結果の安定性評価に用いることができないと結論づけた³⁾。また, Drucker は非関連流動則が成立する場合には必ず不安定性が生じ得るので敢えて非関連流動則を用いることには問題があると述べた⁴⁾。これらの議論はいずれも古典的流動則を前提としたものであるが, 本研究におけるシミュレーション解析結果から判断する限り, B 点および C 点のいずれにおいても厳密には流動則が成立しない。Lade と Drucker の議論の中, 実験によると塑性ひずみ増分応答は関連流動則に適合しないという Lade の主張や, 非関連流動則ならば不安定な変形が生じるという Drucker の主張は正しいであろう。しかし, 地盤材料の挙動が古典的な流動則に忠実に適合するものであるということが実際の実験で検証されない限り, 流動則を前提とした議論から正しい結論を導くことはできないであろう。本研究のシミュレーション試験結果は, 古典的流動則を前提とした両者の議論の原点に問題があることを示唆するものである。

以上のように, 非関連流動則に基づく Hill の安定性評価が現実と合わないという問題は, 式 (47) で与えられる流動則の現実とのずれを考慮することに

より説明が可能となった。また, Hill の安定条件を適用するためには, 3. に述べた前提条件を満たしておくことにも注意する必要がある。このように, 地盤材料の安定性評価においては, 非関連流動則のもつ欠点の問題と, 構造変化による不均一性の発達の問題とが混在することになるので, これらを明確に分離して議論を行う必要があろう。

粒状体の挙動を表現する構成則を設定する上で, 安定性を確実に確保するためには, 本シミュレーション解析の B 点に見られるような増分非線形性を考慮する必要があるであろう。何らかの増分非線形性を考慮した具体的なモデルも既に種々提案^{13), 14), 15)}がなされているが, 実際の挙動を精度良く表現し, 物理的に意味のある定式化を行うことが必要となるであろう。また, 応力レベルが高い領域では, 解析上変数分離ができない状態があり得, このような場合には不均一性の発展をとり入れるための特別な工夫も必要になると考えられる。

5. 結 語

本研究は, Hill の安定条件が粒状体の安定性評価に適用できるか, また, 適用できるとすれば, 非関連流動則を用いたときの矛盾がどのように是正されるかを調べる目的で行われたものである。この検討を進めるために, まず, 粒状要素法による要素試験シミュレーションを実施するとともに, Hill の安定条件の意味を明らかにするための考察を行った。本文においては, 以下に示す諸項目の詳細を示した。

- 1) 粒状体の非弾性挙動に関する基本データを得るための応力制御要素試験シミュレーションのアルゴリズムの提示
- 2) 動的仮想仕事の原理に基づく安定条件式の誘導, および, 安定性の考え方や安定性評価を行う上での制約事項の提示
- 3) 側圧一定せん断載荷シミュレーションの 2 種の中途データに対して行った詳細な応力プローブ試験シミュレーションの結果とその考察の提示

本文にも述べたように, 粒状要素法は, 個別要素法と異なり, 剛性関係式に基づくアルゴリズムを用いているため応力制御が十分な精度で行われ, 本研究における詳細な考察を可能とした。Bardet⁵⁾も従来の弾塑性理論では表せない現象の把握を目的として個別要素法に基づく検討を行ったが, 弾塑性理論以外の構成則理論を用いなければならない根拠を見出すことはできなかったと述べているに留まっている。このことから, 1) に示したアルゴリズムは今

後とも、粒状体の合理的な構成則を検討する上で有用であろう。

Hill は静的な仮想仕事の原理に基づき、材料の構成則として弾性や弾塑性を仮定した上で解の唯一性の条件として安定条件式を導いた。これに対して2)に示した条件式の誘導は動的な仮想仕事の原理に基づき、外乱を与えた後の運動のもつ特性から安定性を定義し、十分条件式としての安定条件式を導いた。とくに特定の構成則に限定した誘導ではない点が Hill の誘導よりは一般的であると思われる。ただし、この式を導くに当たって、運動方程式の解の変数分離可能性を前提とした。この前提は安定性評価の適用を制限するものであるが、実際の粒状材料で内部構造が大きく変化する場合までを含めた安定性評価を行うことは本来困難である。本文に示した前提条件の下における安定性評価はこのような段階に達する以前の安定性評価として位置付けられよう。

3) の粒状要素法を用いて実施した応力プローブ試験シミュレーション結果において最も注目されるのは、安定な硬化状態においては塑性ひずみ増分の方向が一定方向に生じるという古典的流動則の仮定が厳密には満たされなかったことである。しかも、そのずれは、非関連流動則を用いた場合に Hill の安定条件が満たされないという不都合を解消するものである。このような結果は本研究における詳細な応力プローブ試験シミュレーションではじめて得られた知見であると思われる。また、この結果は粒状材料の構成則に必要に応じて増分非線形性を持ち込まなければならないことを示唆するものである。

謝辞：本論文をとりまとめるに当たり、東北学院大学工学部の飛田善雄教授、東北大学大学院工学研究科の岩熊哲夫教授・新関 茂助教授・京谷孝史助教授にいろいろと御討議を頂いた。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Hill, R.: On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.5, pp.229-241, 1957.
- 2) Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.6, pp.236-249, 1958.
- 3) Lade, P.V. and Pradel, D.: Instability and plastic flow of soils. I: Experimental observations, *J. Engrg Mech.*, ASCE, Vol.116, pp.2532-2550, 1990.
- 4) Drucker, D.C. and Li, M.: Triaxial test instability of a nonassociated flow-rule model, *J. Engrg Mech.*, ASCE, Vol.119, pp.1188-1204, 1993.
- 5) Bardet, J.P.: Numerical simulations of the incremental responses of idealized granular materials, *Int. J. Plasticity*, Vol.10, pp.879-908, 1994.
- 6) Cundall, P.A. and Strack, O.D.L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, Vol.29, pp.47-65, 1979.
- 7) 岸野佑次：新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析，土木学会論文集，No.406/III-11, pp.97-106, 1989.
- 8) 岸野佑次，森谷直樹：粒状体の応力ひずみ関係における増分非線形性の微視力学的解析，構造工学論文集，Vol.42A, pp.307-316, 1996.
- 9) 武 建勲，岸野佑次，京谷孝史：改良粒状要素法による粒状体の弾塑性挙動の研究，構造工学論文集，Vol.43A, pp.403-412, 1997.
- 10) 武 建勲，岸野佑次，京谷孝史：2次元粒状体モデルプローブ試験による弾塑性挙動の考察，構造工学論文集，Vol.44A, pp.399-408, 1998.
- 11) 岸野佑次：粒状体の固有変形解析，土木学会論文集，No.481/III-25, pp.87-95, 1993.
- 12) Tobita, Y.: Importance of incremental nonlinearity in the deformation of granular materials, *IUTAM Symposium on Granular Materials*, Fleck, N.A. and Cocks, A.C.F. eds., Kluwer Academic Pub., pp.139-150, 1997.
- 13) Kolymbas, D.: An outline of hypoplasticity, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.61, pp.143-151, 1991.
- 14) Darve, F., Flavigny, E. and Meghachou, M.: Yield surfaces and principle of superposition: Revisit through incrementally non-linear constitutive relations, *Int. J. Plasticity*, Vol.11, pp.927-948, 1995.
- 15) Hashiguchi, K.: The extended flow rule in plasticity, *Int. J. Plasticity*, Vol.13, pp.37-58, 1997.

(1998. 5. 18 受付)

APPLICABILITY OF THE HILL'S CONDITION OF STABILITY TO GRANULAR MATERIALS

Yuji KISHINO and Jianxun WU

This paper discusses applicability of the Hill's condition of stability to granular materials with the aid of numerical simulations performed in terms of the granular element method. It also presents a new version of the granular element method itself before showing results of stress-probe simulations which give detailed behaviors of a specimen model. Results in a stable state show that the non-elastic behavior exhibits incrementally non-linear character which brings deviation from the non-associated flow rule in such a way that the Hill's condition is fulfilled. Other results show that applicability of the Hill's condition is restricted when the heterogeneity is progressing. The latter restriction seems to have its origin among premises appearing in a new derivation of the Hill's condition of stability.