

Smagorinsky モデルによる 複断面直線開水路乱流の解析

佐藤弘行¹・河原能久²・玉井信行³

¹正会員 工修 建設省土木研究所ダム部フィルダム研究室 (〒305-0804 茨城県つくば市大字旭1番地)

²正会員 工博 建設省土木研究所河川部都市河川研究室 (同上)

³フェロー会員 工博 東京大学教授 大学院工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1)

LES (Large Eddy Simulation) の基礎的なモデルである Smagorinsky モデルを用いて片側複断面開水路乱流の解析を行った。断面平均流速と径深により定義されるレイノルズ数は約 5,300、格子点数は $79 \times 75 \times 220$ である。平均量と乱流統計量を Tominaga & Nezu の実験結果と比較し、ほぼ妥当な結果を得た。また、渦度の輸送方程式の各項を定量的に評価するとともに、運動方程式からレイノルズ応力の効果を算出し、高水敷先端部の二次流の発生機構に関する考察を行った。流れの瞬間像についても検討し、基本的な乱流構造である壁面近傍のストリーク構造が捉えられていることを確認した。また、高水敷先端部からの斜昇流が間欠的に発生し、大きな流速を有することが確かめられた。

Key Words : *turbulent flow, compound open channel, Large Eddy Simulation, Smagorinsky model, secondary flow, Reynolds stress*

1. 序論

複断面直線開水路乱流では乱れの非等方性と不均一性に起因するいわゆるプラントルの第二種二次流が発生する。この二次流は、その大きさが主流の数パーセントと小さいにもかかわらず、主流速分布を歪ませたり壁面摩擦応力に影響を及ぼすことが知られている。このため複断面開水路乱流における二次流の特性を理解することは水理学上重要であり、多くの研究が行われてきた。近年、計測技術の発展により、レーザードップラー流速計による計測¹⁻³⁾や画像処理流速系による測定も行われ^{4,5)}、精度の高い測定結果が得られつつある。

一方、数値解析手法の開発並びにコンピュータの発達に伴い、複断面開水路乱流の数値解析的研究も行われている。非円形断面直線水路におけるプラントルの第二種二次流は等方的な渦粘性係数を仮定する標準 $k-\varepsilon$ モデルでは再現できないことが証明されており⁶⁾、そのためより高度な乱流モデルによる解析が必要となる。現在、複断面開水路乱流におけるプラントルの第二種二次流を再現するために最もよく利用されているモデルは、代数応力モデル (ASM, Algebraic Stress Model) である。この

ASM を用いた解析により、複断面直線水路における二次流とそれに伴う主流速分布の歪みが再現されている⁷⁻¹¹⁾。

しかし、ASM はレイノルズ応力の輸送方程式を代数式に簡略化したモデルであるため、二次流の発生に重要であるレイノルズ応力の挙動を正確に捉えるためにはより仮定の少ないモデルを用いる必要がある。

近年のコンピュータの発達に伴い、比較的低レイノルズ数で基礎的な流れ場に対して Navier-Stokes 方程式を直接解く DNS (Direct Numerical Simulation) が行われつつある¹²⁾。DNS は何ら仮定を用いずに流れ場を高精度かつ詳細に解いているので、乱流構造の解明並びに各種乱流モデルの検証データとしての利用価値は高い¹³⁾。しかし DNS では $Re^{9/4}$ 程度の格子点数が必要であるため、現在の最高速のスーパーコンピュータでも現実的な流れ場を DNS で解くことは非常に困難である。

DNS における格子点数の制約を緩和するために、空間平均に基づく LES (Large Eddy Simulation) の研究が活発に行われている。LES は「乱流の小スケールの運動は流れ場によらず普遍的である」という Kolmogorov の相似則を理論的背景としている。LES でモデル化するのはこの Kolmogorov 則の成立する SGS (Subgrid Scale) 成分である

ため、LES は流れ場によらない汎用的なモデルが構成できる可能性を秘めている。と同時に、乱れの大部分はGS(Grid Scale)成分により直接計算されるので、乱流構造を解明するツールとしても利用されている。反面、3次元非定常計算が不可欠であり、また格子間隔がKolmogorov 則を満たす必要があるため、DNS ほどではないが多くの格子点数が必要となり、従来の時間平均モデルよりも計算コストが高くなるのが短所である。

LES は Smagorinsky¹⁴⁾に始まっていると考えられているが、実際の計算は Deardorff による解析¹⁶⁾が最初である。彼は 24*20*14 の計 6,720 点の格子点による計算を行い、LES の可能性を示した。さらに、Moin & Kim による 128*63*64 の総格子点数 516,096 の大規模な LES では、平均量だけでなく瞬間的な乱流構造もとらえられていることが確認され、LES の有効性が強く示された¹⁶⁾。その後 LES はさらに精度を向上すべく、SGS(Subgrid Scale)応力の改良が行われている¹⁷⁻²⁰⁾と同時に、種々の複雑乱流に適用されつつある。

複断面開水路の横断形状は水深方向に比べて横断方向に十分に大きいので、横断方向に多くの格子点数を要する。そのため複断面流れ場を DNS で解くことは、まだ困難であると推測され、複断面流れを LES で解く意義は大きい。

LES による直線複断面開水路乱流の解析は Thomas & Williams により初めて行われた²¹⁾。彼らの解析では Smagorinsky モデルが用いられており、平均主流速 U_b と径深 R で定義されるレイノルズ数 $Re = U_b R / \nu$ は約 10,400 である。主流方向 127、鉛直方向 32、横断方向 127 に格子分割され、比較的大規模な計算が行われている。得られた統計量は Tomimaga & Nezu による実験結果²⁾と比較されており、時間平均の主流速分布や二次流分布等を良く再現している。しかし、彼らの解析では壁面最近傍格子の無次元壁座標が $y_1^+ = u_* y_1 / \nu \approx 16$ とパフアー領域に存在するため壁関数が用いられており、壁面近傍の流れは十分には解像されていない。

本研究では Smagorinsky モデルを用いて、複断面直線開水路乱流を壁面で No-Slip 条件で解いている。これにより壁面近傍も含めた乱流の素過程を再現することができるため、点計測による実験、可視化による瞬間構造の検討、ASM 等の時間平均モデルを用いた解析等、従来行われてきた研究手法のほぼ全てをただ 1 つの計算により再現することが可能となると考えられる。

本研究の目的は、平均流、乱流統計量の再現、並びに従来の実験や解析で計測されていなかった壁面近傍を中心として、時間平均の二次流の生成機構や乱れエネルギーの収支を明らかにすること、また LES では 3 次元非定常計算が必須であることから、複断面流れの瞬間構造を明らかにすることである。

2. 数値計算の概要

(1) 基礎方程式

非圧縮性流体の支配方程式は連続式と Navier-Stokes 方程式であり、以下のように表される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1b)$$

$$(F_1, F_2, F_3) = (g \sin \theta, -g \cos \theta, 0) \quad (1c)$$

ここで、 u_i は i 方向の流速、 F_i は i 方向に働く外力、 p は圧力、 ν は動粘性係数、である。これらの式に空間平均操作を行うと、以下のような空間平均量に関する基礎方程式が得られる²²⁾。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \bar{F}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho q \right) + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2b)$$

$$\tau_{ij} = \left(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} q \quad (2c)$$

$$q = \frac{1}{2} \left(\overline{u_k u_k} - \bar{u}_k \bar{u}_k \right) \quad (2d)$$

ここで、 $\bar{\phi}$ は ϕ の空間平均量、 τ_{ij} は計算格子スケールより小さな SGS(Subgrid Scale)成分の効果、 q は SGS 乱れエネルギー、を表している。

(2) Smagorinsky モデル

運動方程式(2b)中の τ_{ij} と q はモデル化する必要がある。Smagorinsky モデルでは τ_{ij} に以下のような渦粘性モデルを仮定し、また q を圧力勾配項に含めることで q に関するモデル化を回避している。

$$\tau_{ij} = -2\nu_i \bar{S}_{ij} \quad (3a)$$

$$\nu_i = (C_s \Delta)^2 \left(2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \right)^{1/2} \quad (3b)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3c)$$

$$\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (3d)$$

ここで、 ν_i は渦粘性係数、 S_{ij} はひずみ速度、 C_s は Smagorinsky 定数、 Δ はフィルター幅、 Δx は x 方向の格子間隔、 Δy は y 方向の格子間隔、 Δz は z 方向の格子間

隔, である. C_s は定数であり, 壁乱流の場合には通常 0.1 を用いる. フィルター幅 Δ は, 一般的には式(3d)の通り計算格子の大きさの立方根をとる²²⁾. また壁面で No-Slip 条件を用いる場合には壁面で $\tau_{ij} = 0$ としなければならないが, 壁面近傍の速度勾配のために $\tau_{ij} = 0$, すなわち $v_i = 0$ とはならない. 壁面にて $v_i = 0$ を実現させるために, フィルター幅 Δ に式(4a)に示す Van Driest 型減衰関数を乗じる^{22), 23)}.

$$f = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{25}\right) \quad (4a)$$

$$y^+ = \frac{u_* y}{\nu} \quad (4b)$$

ここで, u_* は摩擦速度, y は壁面からの距離を表す.

なお, 壁面が複数ある場合は, 壁面の数だけ Van Driest 型減衰関数をかける. Smagorinsky モデルの長所は SGS 乱れエネルギーを圧力勾配項に含めることで, SGS の影響を評価するための方程式を追加的に解くことを不要としていることである. そのためプログラミングは比較的容易である. 一方, 短所は, 圧力と SGS 乱れエネルギーが分離できないこと, 逆カスケード過程を表現できないこと, 流れ場により Smagorinsky 定数 C_s を修正する必要があること, 等があげられる²²⁾.

(3) 数値解法

離散化を意識して Smagorinsky モデルを用いた運動方程式を書き直すと以下ようになる.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + H_i \quad (5a)$$

$$P = \bar{p} + \frac{2}{3} q \quad (5b)$$

$$H_i = -\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu_e \bar{S}_{ij}) + F_i \quad (5c)$$

$$\nu_e = \nu + \nu_i \quad (5d)$$

$$\nu_i = (C_s \Delta)^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \quad (5e)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5f)$$

これらの式を有限体積法により離散化し, HSMAC 法により収束解を得た. 差分精度は空間に関しては 2 次精度中心差分とし, 時間に関しては移流・拡散項は 2 次精度 Adams-Bashforth 法を用いた. 計算格子ではスタガード格子を用いた. 以上の解法を式で表すと以下ようになる.

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} H_i^n - \frac{1}{2} H_i^{n-1} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^n}{\partial x_i} \quad (6a)$$

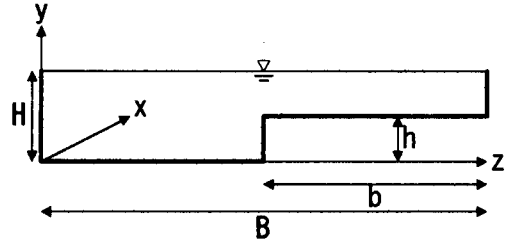


図-1 横断形状と座標系

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P}{\partial x_i} \quad (6b)$$

$$\frac{\partial^2 \delta P}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \bar{u}_j^n}{\partial x_j} \quad (6c)$$

$$\delta P = P^{n+1} - P^n \quad (6d)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j^{n+1}}{\partial x_j} = 0 \quad (6e)$$

計算手順は以下の(i)から(iv)の通りである. (i)式(6a)により仮の流速 \bar{u}_i^n を求め, (ii)式(6c)により圧力補正值 δP を求め, (iii)式(6b)と式(6d)により速度と圧力を補正し, (iv) (i)から(iii)までの操作を次の時刻での流速 \bar{u}_i^{n+1} が連続式(6e)を満たすまで繰り返す.

(4) 計算条件

計算で用いた座標系を図-1に示す. 横断形状は Tominaga & Nezu の実験条件²⁾並びに Thomas & Williams の解析²⁰⁾と等しく設定しており, 計算領域は水深 H , 主流方向 $4H$, 水路幅 $B = 5H$ とし, 高水数は幅 $b = 2.5H$, 高さ $h = 0.5H$, である. なお水深比は $D_r = 1 - h/H = 0.5$, アスペクト比は $B/H = 5$ である. 水路勾配 I は 1/1000 である.

格子は主流方向に等間隔, 横断面内では壁面に密な不等間隔格子を用いた. 格子点数は主流方向 79, 鉛直方向 75, 横断方向 220 の計 1,303,500 である. 格子間隔は摩擦速度 ($u_* = \sqrt{gRI} \approx 1.45$) と動粘性係数を用いた無次元壁座標で, 主流方向には $\Delta x^+ = u_* \Delta x / \nu \approx 30$, 鉛直方向には $\Delta y^+ = u_* \Delta y / \nu \approx 1 \sim 22$, 横断方向には $\Delta z^+ = u_* \Delta z / \nu \approx 1 \sim 42$ である. なお壁面第 1 点で $\Delta y_1^+ \approx 1$, $\Delta z_1^+ \approx 1$ となり, 壁面で No-Slip 条件を課すことができる²⁰⁾. また, 横断方向の格子間隔は, 壁面乱流の特徴の一つであるストリーク構造の平均幅である約 100 wall unit が解像できるように設定している^{20), 21)}.

図-2 は低水路のほぼ中央部の水路床から $y^+ = 6.20$ での流下方向の乱れの 2 点相関係数, 図-3 は高水数のほぼ中央部の水路床から $y^+ = 5.51$ での流下方向の乱れの 2 点相関係数である. 境界条件として周期境界条件を用いる場合, その方向の領域の半分で乱れの 2 点相関係数が

口になる必要がある¹³⁾。図-3の高水敷上ではほぼゼロとなっているが、図-2の低水路の主流の相関係数は領域の半分で約0.1となっている。そのため、本来ならば主流方向にもっと広い領域をとる必要があるのだが、計算時間と格子点数を考慮して主流方向の長さは決めている。

境界条件は主流方向に周期境界条件、壁面においてNo-Slip条件、自由水面で対称条件としている。初期条件は次のように与えた。主流は直線分布と対数分布の近似値に、絶対値が摩擦速度の2.5倍の一樣乱数を加えた。横断面内の流速成分はゼロとした。圧力は静水圧とした。

時間間隔は0~2,000ステップでは $\Delta t = 10^{-4}$ (sec), 2,001~5,000ステップでは $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ (sec)とし、その後 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$ (sec)として計算を行った。220,000ステップ(54.55sec)の助走計算により流路の平均流速がほぼ一定になっていることを確認し、その後50,000ステップ(12.5sec)にわたりアンサンブル量を求めた。なお、本研究の対象の流れ場は統計平均的には横断面内の2次元場であることから、流下方向にもアンサンブル量をとっている。

計算は東京大学大型計算機センターのベクトル型スーパーコンピュータS-3800/480で行った。CPU timeは約3秒/ステップであった。

3. 平均量と乱流統計量の検討

(1) 平均量の分布

図-4(a)は計算結果による平均主流速分布、図-4(b)はTominaga & Nezuによる実験結果である。なお、両図の等流速線は、ともに最大値で無次元化してある。図-4(b)の実験結果では平均主流速の最大値が $y/H \approx 0.6$ で発生しているのに対し、図-4(a)の計算結果では最大値はほぼ水面で発生している。これは自由水面の計算条件を対称条件にしたことと、自由水面近傍では格子間隔を密にできなかったために解像度が低下したことの影響が大きいものと考えられる。

図-5(a)と図-5(b)は高水敷先端部付近の平均二次流分布を示している。高水敷先端部からの斜昇流と、それが形成する2つの渦は再現されている。また断面平均主流速に対する平均二次流の割合の最大値は、計算結果では3.9%であり、Tominaga & Nezuの実験における約4%とほぼ同じであり、またその発生場所も高水敷先端部近傍と、ほぼ一致している。しかし、高水敷先端部からの斜昇流が低水路内に作る渦は実験結果よりも小さく、また実験結果ではほぼ水平な形状を示しているのに対し、計算結果では斜めに傾いた形状となっている。これは計算結果では、高水敷と低水路の隅角部への二次流が強く現れているために、それによって低水路内の渦は小さくなり、また斜めに傾けられたものと考えられる。一方、斜昇流が高水敷上に作る渦はほぼ再現されている。図-6は高水敷先端部付近の二次流ベクトルを示しているが、隅角部へ流れ込む二次流の大きいことが分かる。

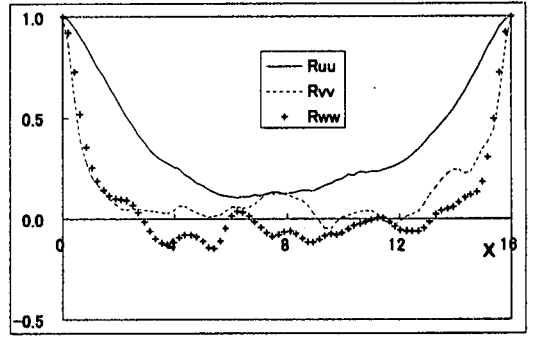


図-2 低水路中央部での乱れ速度の流下方向相関係数

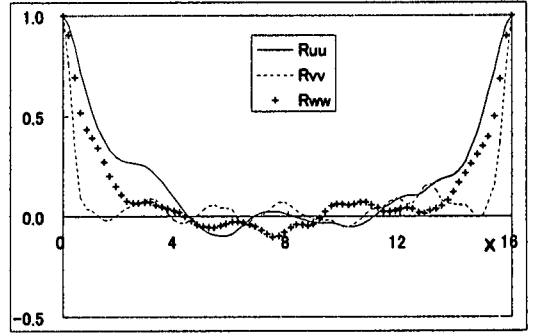


図-3 高水敷中央部での乱れ速度の流下方向相関係数

壁面でNo-Slip条件を課したLESによる複断面流れ場の解析が他にないことから、以上の平均流速に関する差異の原因は明らかではないが、格子間隔、主流方向の計算領域の大きさ、自由水面の境界条件、等が大きな要因になっているものと予想される。壁関数が使われているThomas & Williamsによる解析結果²¹⁾によれば、平均流速はほぼTominaga & Nezuの実験結果が再現されている。このことから、摩擦速度が局所的に正しく評価されれば、平均主流速と二次流はある程度再現できるものと考えられる。

図-7は壁面摩擦応力とその標準偏差を示している(どちらも平均値で無次元化している)。なお壁面摩擦応力は壁面に最も近い点の速度勾配から直接算出している。LESでは定常現象でも非定常解析が不可欠なので、標準偏差や最大・最小値などを求めることができるのも利点の1つである。

壁面摩擦応力が高水敷の先端部付近で極大値をとることは従来の知見と同様であるが⁹⁾、本解析の結果は高水敷先端部で従来よりも大きな値を示している。また低水路床の摩擦応力の分布に関して、Thomas & Williamsの結果では低水路床中央部で極大となっているが、本解析では壁面近傍以外ではほぼ一定になっている。

一方、壁面摩擦応力の標準偏差は平均値とほぼ同様の傾向を示しており、高水敷先端部での値が大きく、壁面近傍以外ではほぼ一律の値になっている。また標準偏差は平均値の50パーセントを超える地点が多く、壁面せん断応力は瞬間的には平均値よりもかなり大きな値をとることが推測される。

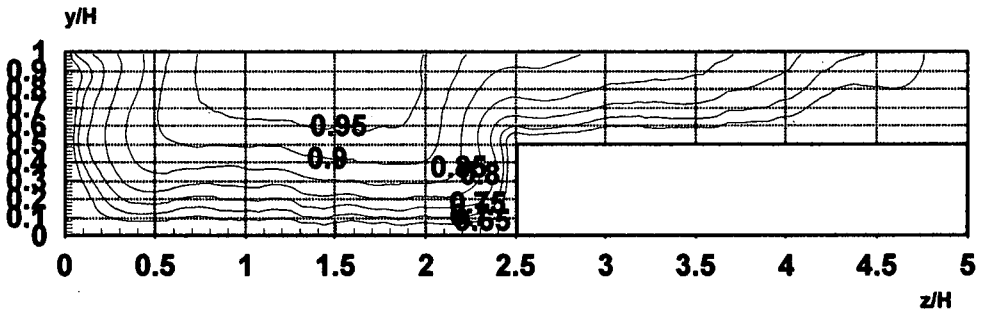


図-4(a) 平均主流速分布 (計算結果)

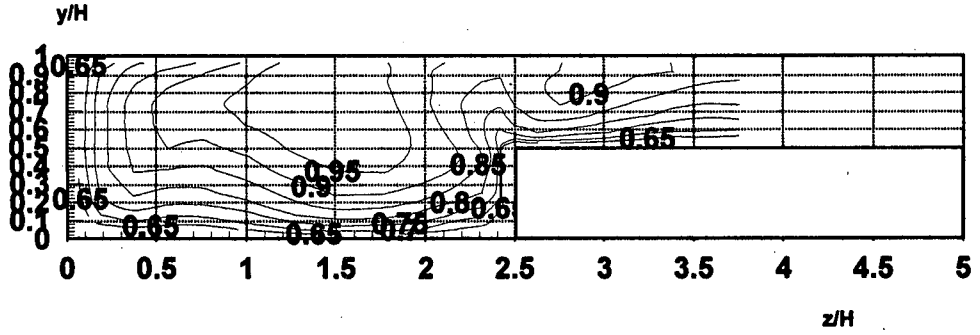


図-4(b) 平均主流速分布 (Tominaga & Nezu²⁾ による実験結果)

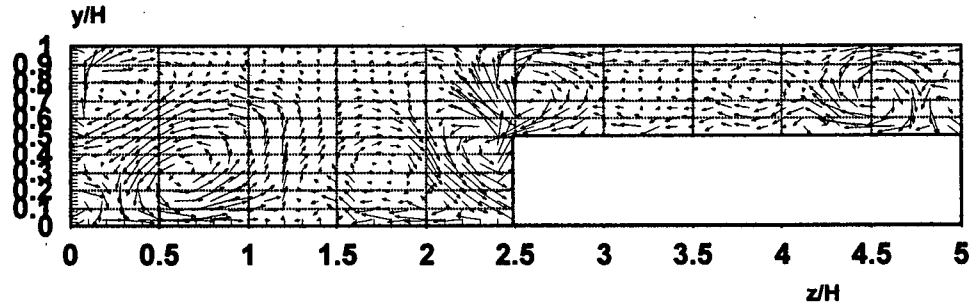


図-5(a) 平均二次流分布 (計算結果)

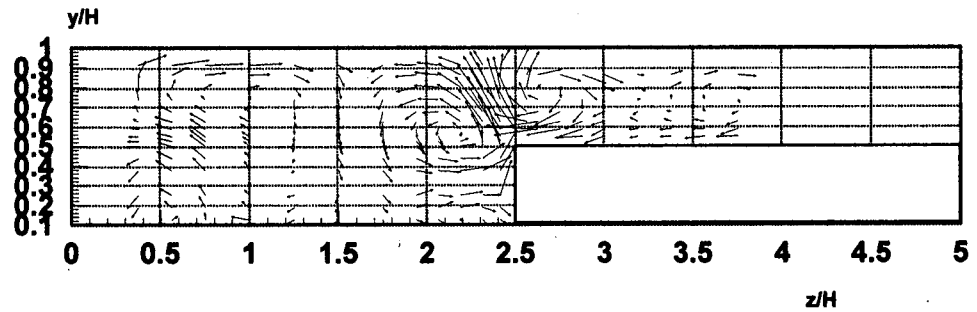


図-5(b) 平均二次流分布 (Tominaga & Nezu²⁾ による実験結果)

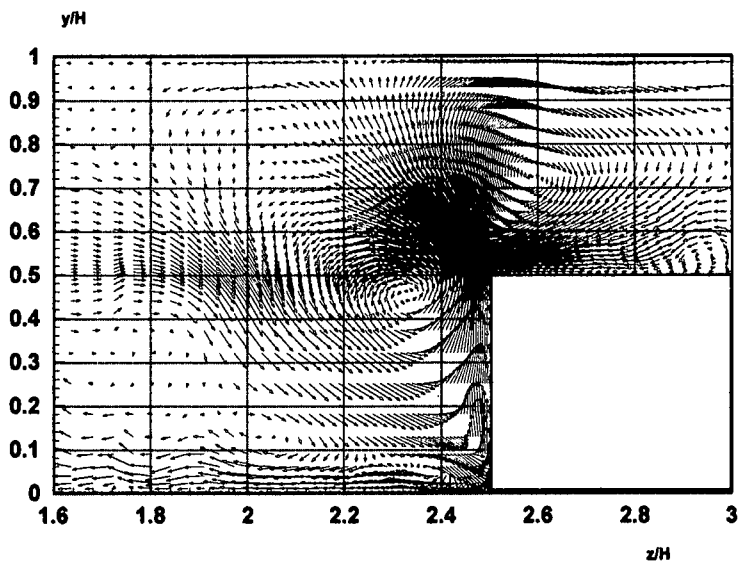
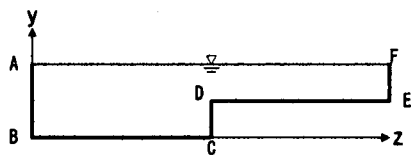
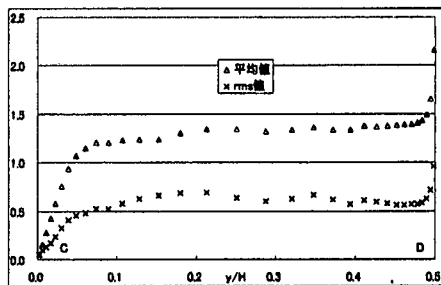


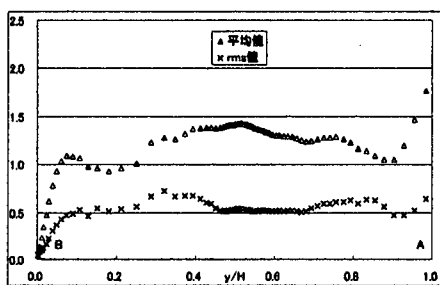
図-6 高水数先端部付近の平均二次流分布 (計算結果)



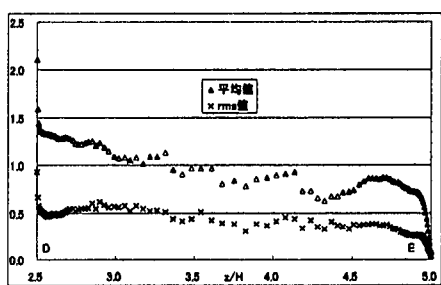
(a) 溝辺の記号



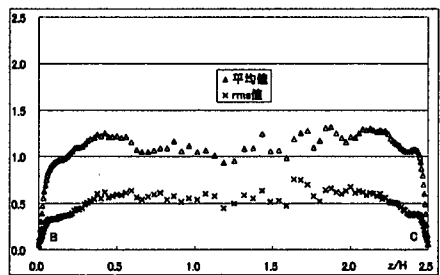
(d) 辺 CD



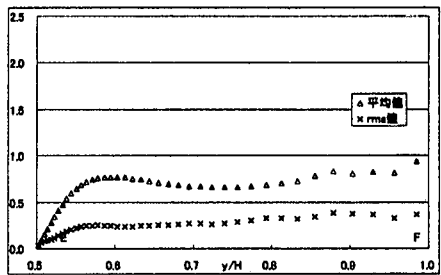
(b) 辺 AB



(e) 辺 DE



(c) 辺 BC



(f) 辺 EF

図-7 溝辺に沿った壁面摩擦係数の平均値と標準偏差

(2) 乱流統計量の分布

図-8(a) から (e) と 図-9(a) から (e) に計算結果と Tominaga & Nezu の実験による乱れエネルギー、乱れ強度 3 成分、レイノルズ応力の垂直成分の分離 $\langle \bar{w}'^2 \rangle - \langle \bar{v}'^2 \rangle$ 、レイノルズ応力 $-\langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$ の分布を示す。ここで、 $\langle \phi \rangle$ は ϕ のアンサンブル平均、 ϕ' は ϕ のアンサンブル平均からのずれを表している。ただし、乱れ強度は摩擦速度 u_* で無次元化、 $\langle \bar{w}'^2 \rangle - \langle \bar{v}'^2 \rangle$ と $-\langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$ は u_*^2 で無次元化している。

各レイノルズ応力と垂直成分の分離ともに定性的には一致している。一般的に空間解像度が低いと、平行平板間流れの Smagorinsky モデルによる解析では、主流方向の乱れ強度は過大評価され、それ以外の乱れ強度は過小評価される傾向がある^{27), 28)}。本解析結果では主流の壁面近傍と、横断方向のほぼ全域でそのような傾向を示している。

(3) 乱れエネルギーの収支

全流速成分の時間平均に関する乱れエネルギー $(k = \langle u_i' u_i' \rangle / 2)$ の輸送方程式は以下になる²⁹⁾。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_j \rangle k}{\partial x_j} = PROD + TD + VD + VPG - \varepsilon \quad (7a)$$

$$PROD = -\langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \quad (7b)$$

$$TD = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \langle u_i' u_j' u_k' \rangle \right) \quad (7c)$$

$$VD = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} \quad (7d)$$

$$VPG = PD = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p' u_j' \rangle}{\partial x_j} \quad (7e)$$

$$\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle \quad (7f)$$

ここで、 $\langle \phi \rangle$ はアンサンブル平均、 ϕ' はアンサンブル平均からのずれ、を表している。式(7a)の右辺各項の中で、第1項は乱れエネルギーの生成を表し、第5項は乱れエネルギーの散逸の効果を表している。式(7a)は全流速成分に対する輸送方程式であるが、Smagorinsky モデルではGS成分の流速しか算出されないため、右辺各項をGS成分の流速により計算した。

GS成分より求められた乱れエネルギーと、式(7a)の右辺第1項(7b)と第5項(7f)を計算した結果が図-10~図-12である。ただし、高水数先端部を中心に各方向8(mm)の正方形領域のみを示す。また、乱れエネルギーは u_*^2 で無次元化、生成項と散逸項は u_*^4/ν で無次元化されている。高水数先端部で乱れエネルギーの値が大きな値を示している。また、壁面から離れた領域では乱れの生成と散逸とが釣り合う、いわゆる局所平衡がほぼ成り立っている。

4. 平均二次流発生機構の考察

(1) 渦度の収支

定常かつ十分発達した主流方向の渦度 $\langle \omega_1 \rangle (= \partial \langle w \rangle / \partial y - \partial \langle v \rangle / \partial z)$ の輸送方程式は次のように表される^{30), 31)}。

$$\Omega_C = \Omega_N + \Omega_S + \Omega_V \quad (8a)$$

$$\Omega_C = \langle v \rangle \frac{\partial \langle \omega_1 \rangle}{\partial y} + \langle w \rangle \frac{\partial \langle \omega_1 \rangle}{\partial z} \quad (8b)$$

$$\Omega_N = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\langle v' v' \rangle - \langle w' w' \rangle \right) \quad (8c)$$

$$\Omega_S = - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \langle v' w' \rangle \quad (8d)$$

$$\Omega_V = \nu \left(\frac{\partial^2 \langle \omega_1 \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle \omega_1 \rangle}{\partial z^2} \right) \quad (8e)$$

左辺は渦度の移流(Convection)の効果を表し、右辺第1項はレイノルズ応力の垂直成分(Normal Stress)の効果、右辺第2項はレイノルズ応力のせん断成分(Shear Stress)の効果、右辺第3項は渦度の粘性拡散(Viscosity)の効果を表している。式(8a)には主流が含まれていないので、横断面内の二次流が厳密に定義されていると考えられている。

図-13~図-17に渦度と主流方向の渦度の輸送方程式の各項の分布を示す。なお、渦度は U_{mean}/H で無次元化、渦度の輸送方程式の各項は U_{mean}^2/H^2 で無次元化されている。なお、渦度は高水数先端部を中心に各方向2(cm)の正方形領域、渦度の輸送方程式の各項は高水数先端部を中心に各方向4(mm)の正方形領域についてのみを示す。図-13の渦度分布において、高水数先端部からの対角線を挟んだ一対の閉じた渦度分布は二次流を表しており、時計回りの渦が $\langle \omega_1 \rangle < 0$ 、反時計回りの渦が $\langle \omega_1 \rangle > 0$ である。また壁面近傍において逆符号の渦度が存在しているが、これは壁面における滑りなし条件による速度勾配によるものである。

図-14~図-17は各方向4mm(約58wall unit)の正方形領域の渦度方程式の収支を示している。全体的には Ω_N と Ω_S が卓越しており、移流項 Ω_C はやや小さく、粘性項 Ω_V は高水数の先端部のごく近傍のみで大きい。Nezu & Nakagawa は台形突起を設置した実験水路において壁面近傍を除いた実験的検討により横断面内で Ω_N と Ω_S がバランスすると述べている³²⁾が、壁面近傍では Ω_V も重要な役割を果たしているものと考えられる。 Ω_N と Ω_S はともに複雑な挙動を示しているが、ダクト流れの隅角部と同様に Ω_N と Ω_S は互いに打ち消す合うように働いていることが分かる³⁰⁾。

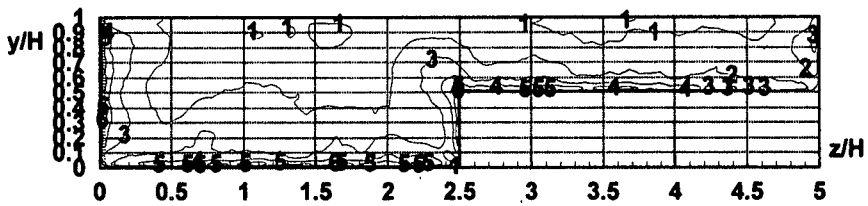


図-8(a) 乱れエネルギー (計算結果)

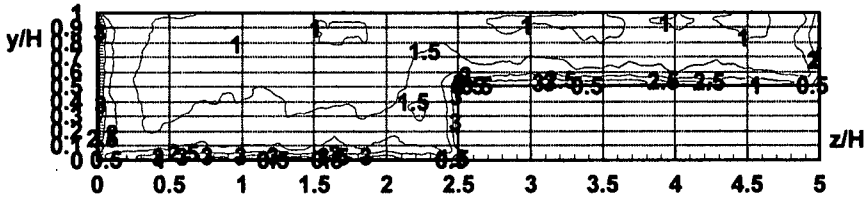


図-8(b) 主流方向乱れ強さ (計算結果)

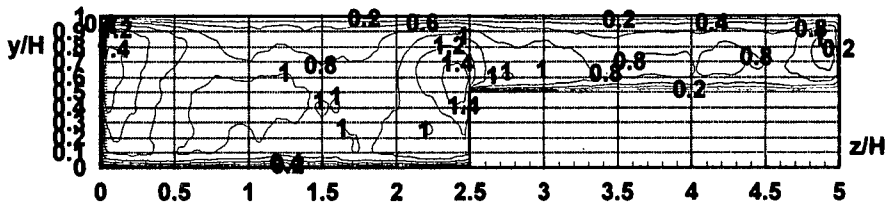


図-8(c) 鉛直方向乱れ強さ (計算結果)

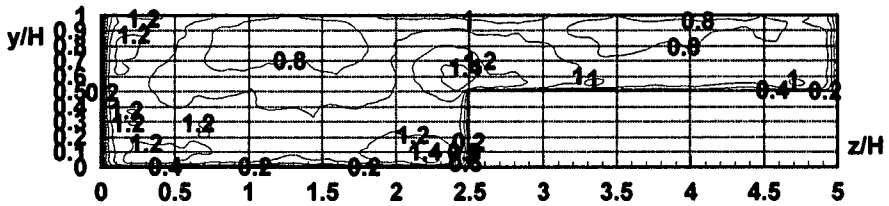


図-8(d) 横断方向乱れ強さ (計算結果)

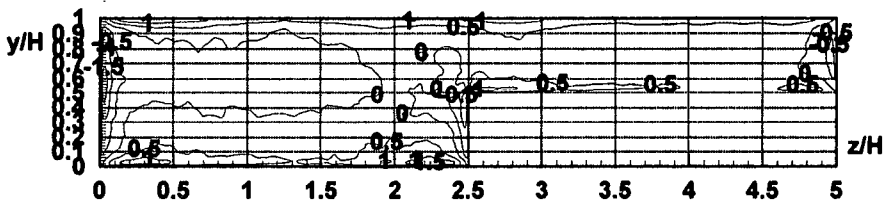


図-8(e) Normal Stress の分離 $\langle \bar{w}^2 \rangle - \langle \bar{v}^2 \rangle$ (計算結果)

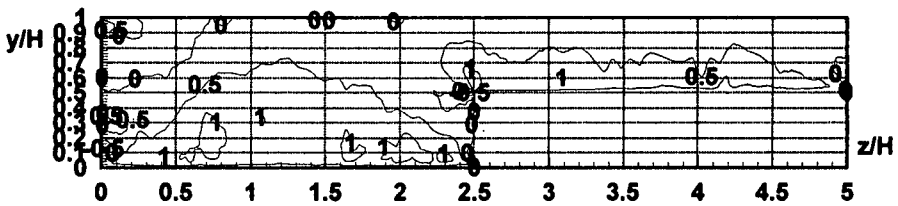


図-8(f) レイノルズ応力係数 $-\langle \bar{u} \bar{v} \rangle$ (計算結果)

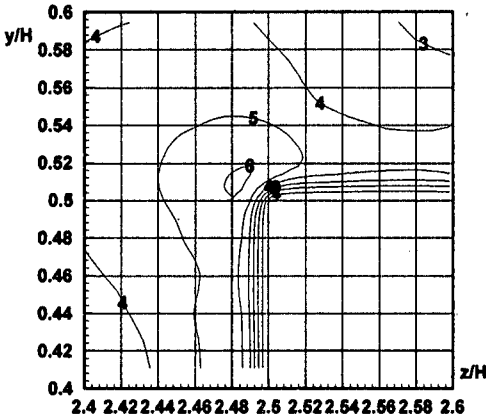


図-10 乱れエネルギーの分布

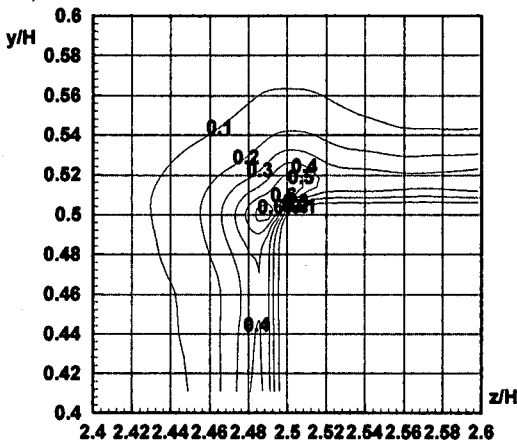


図-11 乱れエネルギーの生成項の分布

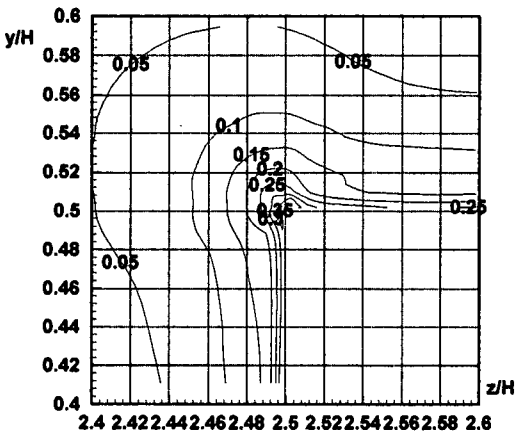


図-12 乱れエネルギーの散逸項の分布

(2) 運動方程式からみた二次流発生機構

壁面近傍の渦はその場所の渦運動と逆符号になるなど、渦度と渦度方程式の収支から見た二次流の考察はわかりにくい部分が多い。そこで壁面近傍におけるレイノルズ応力の作用を明確にするため、梶島らの手法³⁰⁾を用いて、運動量の輸送方程式から圧力の効果も含めた二次流の発生機構を検討する。

定常かつ十分発達した横断面内の全流速成分に対する連続式と各方向の運動量方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} = 0 \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v \rangle \langle v \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v \rangle \langle w \rangle}{\partial z} = & -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} \\ & + v \left(\frac{\partial^2 \langle v \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle v \rangle}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v \rangle \langle w \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w \rangle \langle w \rangle}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} - \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} \\ & + v \left(\frac{\partial^2 \langle w \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle w \rangle}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (9c)$$

ここで、圧力に対する運動方程式中の各項の作用を明確にするために、圧力を次のように移流項(Convection)、重力項(Gravity)、レイノルズ応力の垂直成分(Normal stress)、レイノルズ応力のせん断成分(Shear stress)、粘性項(Viscosity)の各項に対応する成分に分解することを考える。

$$\langle p \rangle = \langle p_C \rangle + \langle p_G \rangle + \langle p_N \rangle + \langle p_S \rangle + \langle p_V \rangle \quad (10)$$

また、運動方程式と連続式より次の圧力に関するポアソン方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial z^2} \right) = & - \left(\frac{\partial^2 \langle v'^2 \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle w'^2 \rangle}{\partial z^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 \langle v'w' \rangle}{\partial y \partial z} \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \langle v \rangle \langle v \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v \rangle \langle w \rangle}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \langle v \rangle \langle w \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w \rangle \langle w \rangle}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、プラントルの第二種二次流は乱流において発生することから、二次流の発生機構に関しては本質的にレイノルズ応力が重要であると考え、式(11)中のレイノルズ応力の垂直成分とせん断成分に対応する圧力のポアソン方程式を解くこととする。

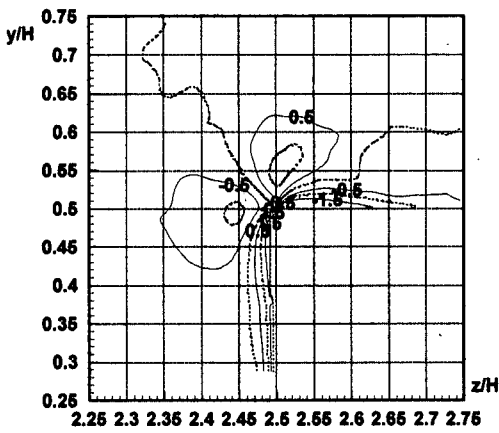


図-13 渦度分布

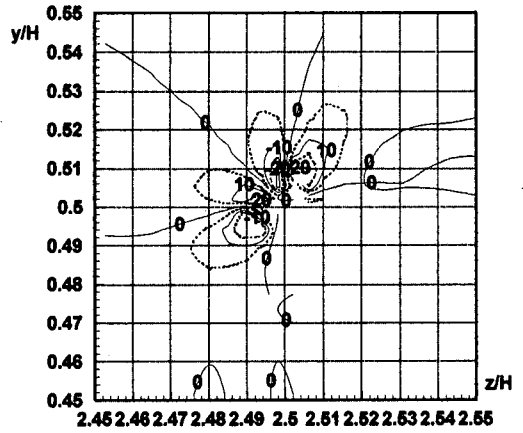


図-16 Ω_S の分布

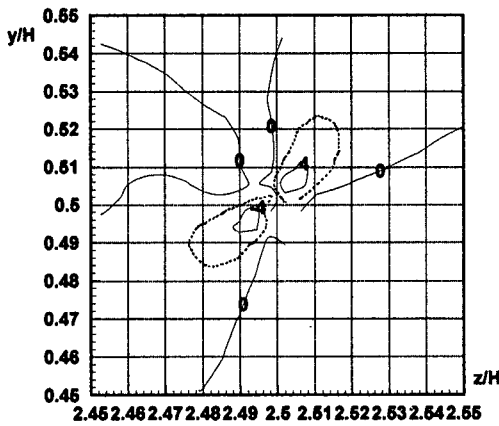


図-14 Ω_C の分布

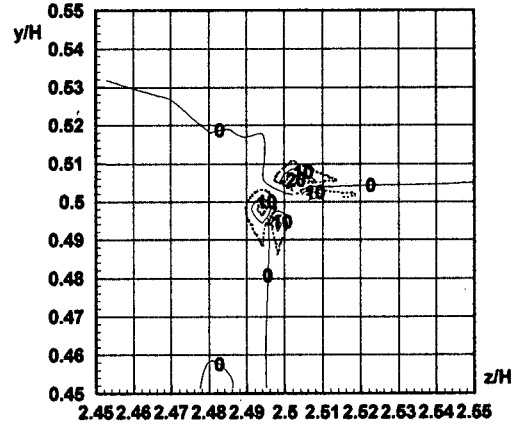


図-17 Ω_V の分布

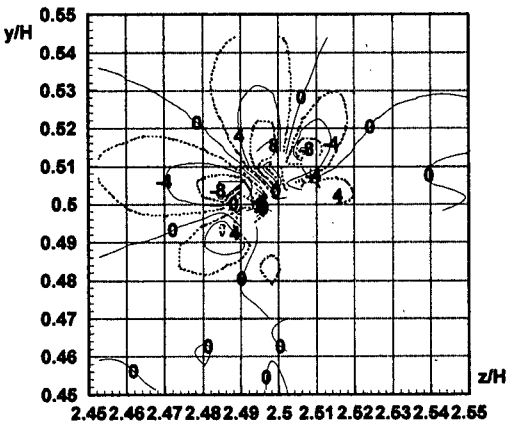


図-15 Ω_N の分布

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \langle p_N \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle p_N \rangle}{\partial z^2} \right) = - \left(\frac{\partial^2 \langle v'^2 \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle w'^2 \rangle}{\partial z^2} \right) \quad (12a)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \langle p_S \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle p_S \rangle}{\partial z^2} \right) = -2 \frac{\partial^2 \langle v'w' \rangle}{\partial y \partial z} \quad (12b)$$

両式の境界条件は、壁面および自由水面において垂直勾配がゼロである。

図-18～図-24 に結果を示す。記号の意味はそれぞれ以下の通りである。

$$\overline{R_N} = \left(-\frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y}, -\frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} \right) \quad (13a)$$

$$\overline{R_S} = \left(-\frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z}, -\frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} \right) \quad (13b)$$

$$\overline{P_N} = \left(-\frac{\partial \langle p_N \rangle}{\partial y}, -\frac{\partial \langle p_N \rangle}{\partial z} \right) \quad (13c)$$

$$\overline{P_S} = \left(-\frac{\partial \langle p_S \rangle}{\partial y}, -\frac{\partial \langle p_S \rangle}{\partial z} \right) \quad (13d)$$

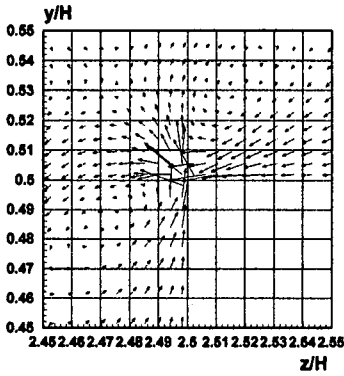


図-18 $\overline{D_N} + \overline{D_S}$ の分布

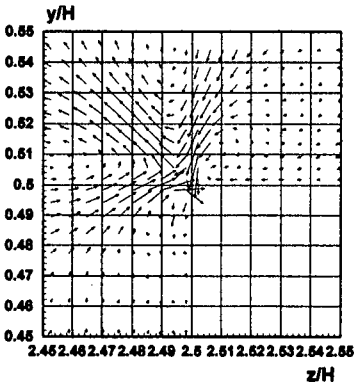


図-19 $\overline{D_N}$ の分布

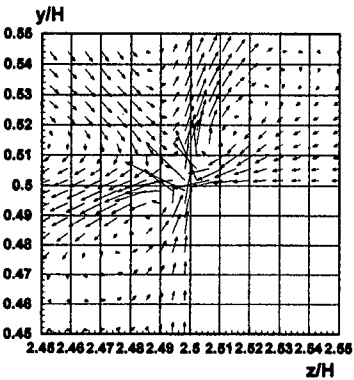


図-20 $\overline{D_S}$ の分布

$$\overline{D_N} = \overline{R_N} + \overline{P_N} \quad (13e)$$

$$\overline{D_S} = \overline{R_S} + \overline{P_S} \quad (13f)$$

図-18 は圧力も含めたレイノルズ応力の効果を示しているが、高水敷先端部から斜め上向きにベクトルが向いている。これはこの方向に運動量の輸送が生じていること

を示しており、レイノルズ応力が高水敷先端部からの二次流の発生機構に大きな役割を果たしているものと考えられる。さらに図-18により、壁面に沿う流れや一對の渦運動も説明できる。

さらに詳細にレイノルズ応力の効果を各成分、つまり $\overline{D_N}$ 、 $\overline{D_S}$ 、 $\overline{R_N}$ 、 $\overline{R_S}$ 、 $\overline{P_N}$ 、 $\overline{P_S}$ に分解して考える。図-21～図-24 からは、圧力勾配はそれぞれのレイノルズ応力の勾配とは反対向きに運動量を輸送していることが読み取れる。しかしながら、両者は各点において微妙にずれているために、図-19、図-20 のような運動量の輸送が生ずるのである。図-18 を見ると、高水敷先端部のごく近傍の強い斜め上向きの運動量の輸送はレイノルズ応力のせん断成分の効果 $\overline{D_S}$ でありそれはレイノルズ応力のせん断成分そのものの勾配 $\overline{R_S}$ に起因すること、また高水敷先端部から少し離れた弱い斜め上向きの運動量の輸送はレイノルズ応力の垂直成分 $\overline{D_N}$ の効果でありそれはレイノルズ応力の垂直成分に由来する圧力勾配 $\overline{P_N}$ に起因しているものと考えられる。

5. 瞬間像の考察

(1) 低速ストリーク構造

図-25 は低水路床から 6.20wall unit 上方の断面内、図-26 は高水敷床から 5.51wall unit 離れた断面内において、式(14)で表される主流速の無次元瞬間変動値 \bar{u}'^+ が小さい領域を表示したものである(流れは左から右である)。

$$\bar{u}'^+ = \frac{\bar{u} - \langle \bar{u} \rangle}{u_*} \quad (14)$$

図-25 の低水路内と図-26 の高水敷上において、それぞれ流下方向に長い筋上のいわゆる低速ストリーク構造が見取れる。しかし、低水路中央部および高水敷中央部では横断方向の解像度が低いので、あまり明瞭ではない。また図-26 では、壁面から離れた低水路側では低速ストリーク構造は見られず、壁面による乱流構造の違いも捉えられていることが確認できる。この低速ストリーク構造が壁面から持ち上がり周囲の高速流体と干渉する過程で大きな乱れを引き起こし、レイノルズ応力の発生源となっているものと考えられている³³⁾。壁面に No-Slip 条件を課した LES はこのような乱流の基本構造を捉えることが可能であり、そのため乱流の詳細な現象を解明するのに有用なツールになるものと考えられている。

(2) 二次流の瞬間像

図-27 は流下方向にほぼ等間隔の4つ横断面内の瞬間的な二次流をベクトル表示したものである。各図とも 270,000 タイムステップでの結果から任意に抽出したのであるが、この4つの中で高水敷先端部からの斜昇流が確認されるのは1つだけであり、他の3つの図からはそれは見受けられない。一方、図-27 の瞬間的な二次流の平

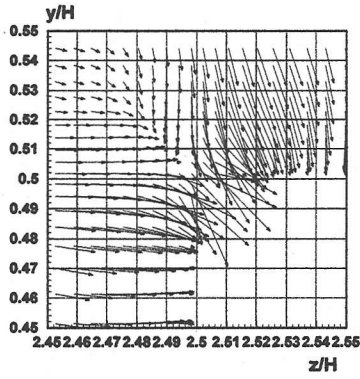


図-21 \vec{R}_N の分布

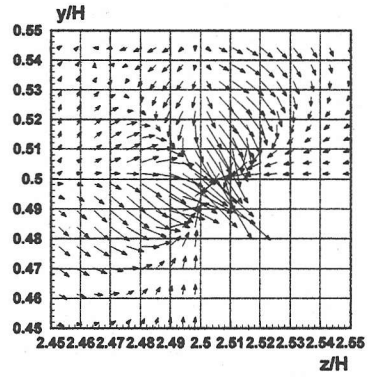


図-24 \vec{P}_S の分布

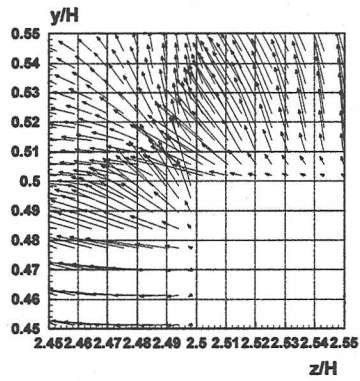


図-22 \vec{P}_N の分布

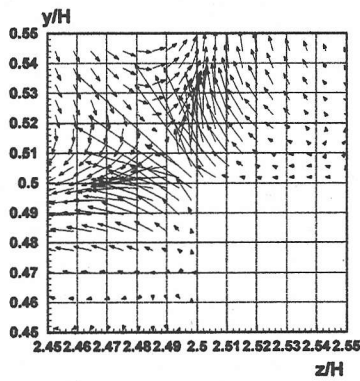


図-23 \vec{R}_S の分布

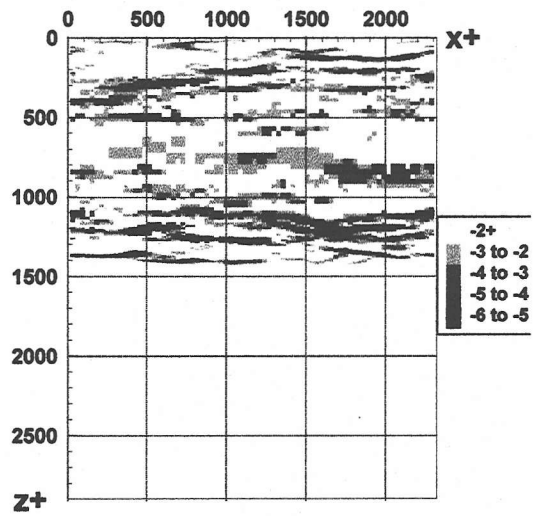


図-25 低水路の低速ストリーク

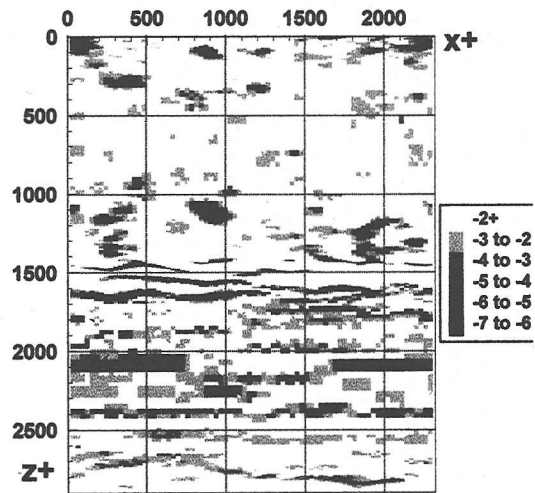


図-26 高水敷の低速ストリーク

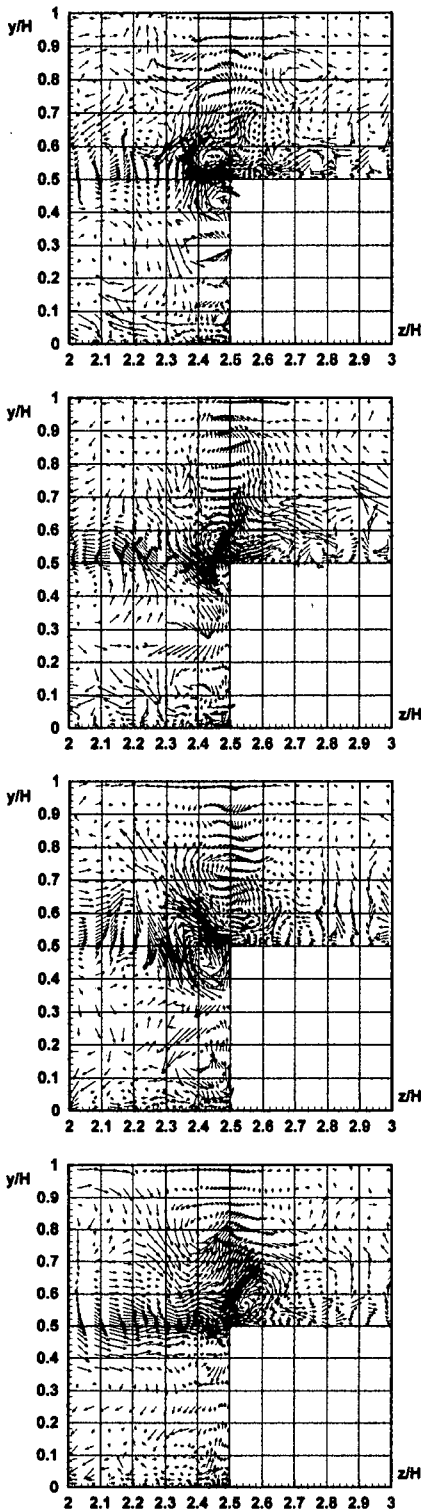


図-27 二次流の瞬間像

均主流速に対する最大値は上から 26.1, 23.8, 26.7, 29.6(%) であり, 時間平均の二次流の平均主流速に対する割合 3.9(%) よりもかなり大きく, 従来の知見とほぼ同程度な値を示している³⁰. ただし, 瞬間的な二次流の最大値の発生地点は, 高水敷の先端部近傍とは限らない.

6. 結論

本研究では LES の基本モデルである Smagorinsky モデルを用いて片側直線複断面開水路乱流の解析を行った. 統計平均量を Tominaga & Nezu の実験結果と比較し, 平均二次流の発生機構と二次流の瞬間像に関する考察を行った. 本論文で得られた結論は以下のようにまとめられる.

- 1) 平均主流速の最大値の水面からの降下現象は捉えられなかった. これは自由水面の境界条件, 水面での解像度, 計算領域等の影響によるものと考えられる.
- 2) 高水敷先端部からの斜昇流とそれが作る高水敷上の渦は良好な一致を得た. しかし斜昇流が低水路側に作る渦の形状には差異が認められた. これは高水敷と低水路の隅角部への二次流が計算では強く算出されたためと考えられる.
- 3) 乱れ強度, レイノルズ応力は実験結果と定性的には一致した. また, 壁面から離れたところではほぼ乱れの生成と散逸が釣り合う局所平衡が成立することが確認された.
- 4) 平均二次流の主流方向の渦度方程式の各項を定量的に評価した. レイノルズ応力の垂直成分の非等項とレイノルズ応力のせん断成分が支配的であり, それらは複雑なパターンを示すことが分かった. また, 壁面近傍では粘性項も無視できないことが分かった.
- 5) 横断面内の運動量方程式から平均二次流の発生機構を考慮した. この際, 圧力の効果を明確にするため, レイノルズ応力に起因する圧力も含めてレイノルズ応力の効果を考慮した. その結果, 高水敷先端部のごく近傍の斜昇流はレイノルズ応力のせん断成分そのものに起因すること, 高水敷先端部から少し離れた箇所ではレイノルズ応力の垂直成分に由来する圧力勾配が斜昇流を維持していることが定量的に明らかとなった.
- 6) 瞬間像の可視化により, 乱流の構造上重要である低速ストリーク構造が捉えられていることが確認された. また横断面内の瞬間的な二次流の考察では, 高水敷先端部からの斜昇流は間欠的なものであること, 瞬間的な二次流は大きな絶対値を有していることが示された.

計算時間の制約のため格子分割が十分ではなく、空間解像度は十分ではない。また、差分精度も改善の余地がある。特に瞬間像に関しては空間差分が2次精度では渦運動の位相誤差が大きい²⁰⁾ため、瞬間的な構造に関しては定量的な考察はせず、定性的なものにとどめている。

本研究により、LESの有効性が示された。今後は高解像度かつ高精度な解析によりデータベースの蓄積を図り、複断面流れの瞬間像の解明を行いたいと考えている。

謝辞：本研究にあたり、名古屋工業大学工学部社会開発工学科の冨永晃宏教授には貴重な実験データを提供して頂きました。ここに深く感謝いたします。

参考文献

- 1) Tominaga, A., Nezu, I. and Ezaki, K.: Experimental study on secondary currents in compound open-channel flows, *Proc. 23rd Cong. IAHR*, Ottawa, Canada, A15-A22, 1989.
- 2) Tominaga, A. and Nezu, I.: Turbulent structure in compound open channel flows, *J. Hydraulic Eng., ASCE*, vol. 117, No. 1, pp. 21-41, 1991.
- 3) 橋津家久, 阿部崇, 中川博次: 複断面開水路流れの乱流構造と二次流に関する実験および数値計算, *水工学論文集*, 第39巻, pp. 747-752, 1995
- 4) Maghrebi, M. F., Kawanishi, K. and Yokoshi, S.: Mean and turbulent flows in a single-flood plain open channel, *Annual J. Hydraulic Eng.*, Vol. 39, pp. 753-760, 1995.
- 5) Nezu, I. and Nakayama, T.: Space-time correlation structures of horizontal coherent vortices in compound open-channel flows by using particle-tracking velocimetry, *J. Hydraulic Res.*, Vol. 35, No. 2, 1997.
- 6) 河原能久, 玉井信行: 非円形断面直線水路の2次流に対する乱流モデルについて, *土木学会論文集*, 第399号, pp. 247-250, 1988.
- 7) Krishnappan, B. G. and Lau, Y. L.: Turbulence modelling of flood plain flows, *J. Hydraulic Eng., ASCE*, Vol. 112, pp. 251-266, 1986.
- 8) Kawahara, Y. and Tamai, N.: Numerical calculation of turbulent flows in compound channels with an algebraic stress turbulence model *Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, Tokyo, Japan, pp. 9-16, 1988.
- 9) Larsson, R.: Numerical simulation of flow in compound channels, *Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, Tokyo, Japan, pp. 537-544, 1988.
- 10) Naot, D., Nezu, I. and Nakagawa, H.: Hydrodynamic behavior of compound rectangular open channels, *J. Hydraulic Eng., ASCE*, Vol. 119, No. 3, pp. 390-408, 1993.
- 11) Naot, D., Nezu, I. and Nakagawa, H.: Calculation of compound open channel flow, *J. Hydraulic Eng., ASCE*, Vol. 119, No. 12, pp. 1418-1426, 1993.
- 12) Kim, J., Moin, P. and Moser, R.: Turbulent statistics in fully developed channel flow at a low Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, Vol. 177, pp. 133-166, 1987.
- 13) 黒田明慈: 乱流解析・第5章・直接数値シミュレーション, *数値流体力学シリーズ3*, pp. 119-135, 東京大学出版会, 1995.
- 14) Smagorinsky, J.: General Circulation experiments with the primitive equations I. The basic experiment, *Monthly Weather Review*, No. 91, pp. 99-164, 1963.
- 15) Deardorff, J. W.: A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, Vol. 41, pp. 453-480, 1970.
- 16) Moin, P. and Kim, J.: Numerical investigation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.* Vol. 118, pp. 341-377, 1982.
- 17) Yoshizawa, A.: Subgrid-scale modelling with a variable length scale, *Phys. Fluids*, A1(7), pp. 1293-1295, 1989.
- 18) Yakhot, V. and Orszag, S.A.: Renormalization group analysis of turbulence. (I. Basic theory), *J. Sci. Comp.*, 1(1), pp. 3-51, 1986.
- 19) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W.H.: A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Phys. Fluids*, A3(7), pp. 1760-1765, 1991.
- 20) Horiuti, K.: A proper velocity scale for modelling subgrid-scale eddy viscosities in large eddy simulation, *Phys. Fluids*, A1(2), pp. 426-428, 1993.
- 21) Thomas, T. G. and Williams, J. J. R.: Large eddy simulation of turbulent flow in an asymmetric compound open channel, *J. Hydraulic Res.*, Vol. 33, No. 1, 1995.
- 22) 小林敏雄, 谷口伸行, 戴毅: 乱流解析・第4章・乱流モデル(III)・Large Eddy Simulation, *数値流体力学シリーズ3*, pp. 67-118, 東京大学出版会, 1995.
- 23) Van Driest, E. R.: On turbulent flow near a wall, *J. Aeronautical Sci.*, Vol. 23, pp. 1007-1011, 1956.
- 24) 堀内深: 乱流のラージ・エディ・シミュレーションについて, *天気*, No. 38(11), pp. 3-17, 1991.
- 25) 佐賀孝徳, 大成博文, 渡辺勝利, 斎藤隆: 開水路乱流における組織構造の時間平均像, *水工学論文集*, 第34巻, pp. 457-462, 1990.
- 26) 明賢國, 小林敏雄: 正方形断面管内の発達乱流の数値解析, *日本機械学会論文集(B編)*, 57巻540号, pp. 58-66, 1991.
- 27) 梶島岳夫, 永翁龍一, 三宅裕: 平行平板間乱流のLES, 第11回生研NSTシンポジウム, 東京大学生産技術研究所, pp. 207-210, 1996.
- 28) 河村洋: チャンネル乱流の数値解析における対流項風上化と

- 格子点数の影響, 第 11 回生研 NST シンポジウム, 東京大学生産技術研究所, pp. 207-210, 1996.
- 29) 村上周三: 乱流解析・第 2 章・乱流モデル(I)レイノルズ平均モデル(その 1): 渦粘性型モデル, 数値流体力学シリーズ 3, pp. 21-52, 東京大学出版会, 1995.
- 30) 梶島岳夫, 三宅裕, 西本俊幸: 正方形断面流路内の乱流の LES, 日本機械学会論文集(B編), 57 巻 540 号, pp. 50-57, 1991.
- 31) 桶津家久, 中川博次: 開水路流れの三次元構造(縦渦)とそれに及ぼす自由水面の影響に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第 28 号 B-2, pp. 499-522, 1985.
- 32) Nezu, I. and Nakagawa, H.: Cellular Secondary Currents in Straight Conduit, *J. of Hydraulic Eng.*, ASCE, vol. 110, No. 2, pp. 173-193, 1984.
- 33) 中村育雄: 乱流現象, pp. 198-201, 朝倉書店, 1992.
- 34) 今本博健, 石垣泰輔: 複断面開水路流れの水理特性について(4), 京都大学防災研究所年報, 第 33 号 B-2, pp. 559-569, 1990.

(1998. 6. 3 受付)

LARGE EDDY SIMULATION USING SMAGORINSKY MODEL OF TURBULENT FLOW IN A STRAIGHT COMPOUND OPEN CHANNEL

Hiroyuki SATOH, Yoshihisa KAWAHARA and Nobuyuki TAMAI

Large Eddy Simulation using the Smagorinsky model of turbulent flow is carried out for a straight open channel with one flood plain. The Reynolds number based on hydraulic radius and cross-sectional average velocity is about 5,300, and the total number of grid points is $79 \times 75 \times 220$. The calculated results agree reasonably well with the experimental data by Tominaga & Nezu in mean velocities and turbulence quantities. Then, the balances of the streamwise vorticity equation and the momentum equations are analyzed to discuss the mechanism of mean secondary flow. Instantaneous flow field is also visualized. It is confirmed that the present simulation captures streak structures and that instantaneous secondary flow near the edge of flood plain has unsteady and localized features with large magnitude in velocity.