

[討議・回答]

阿井正博
田村健太郎 共著
西野文雄

「平面はり要素の弾性2次理論としての一離散化展開」への討議・回答

(土木学会論文集, No.591/I-43, 1998年4月掲載)

▶ 討議者 (Discussion)

後藤茂夫 (フォーラムエイト)・井嶋克志 (佐賀大学)

蒂屋洋之 (佐賀大学)・井口真一 (フォーラムエイト)

Shigeo GOTO, Katsushi IJIMA, Hiroyuki OBIYA and Shin-ichi IGUCHI

討議1 : 変位法による手法は2次離散化理論ではない。

著者らは、平面はりの弾性2次離散化関係には、はり・柱理論のたわみ角式による手法と有限要素法の手順を用いる手法（以下前者を変位法、後者を有限要素法と略称する）とがあるとしている。

しかしながら前者の手法では、使用する構成要素の許容挙動領域に応じて要素力式に微小変位理論、はり・柱理論さらに曲げ変形による弦長の変化を考慮する理論を用いるなど、周知の明解な挙動の力学モデルとしての設定が可能であり、これと整合して適合条件の非線形性に起因する先行要素力による幾何剛性項と合わせて接線剛性方程式を作成する事ができる。

すなわち、変位法は、前提となる仮定された力学モデル要素による構造系としての挙動を厳密に表現する収束解を得ることが可能であり、一律に2次の離散化理論の範疇にはないと考える。

討議2 : なぜ単純明解な弾性棒の仮定に、本来無関係かつ近似条件としかなり得ないグリーンのひずみ変位式を用いるのか。なぜ要素力式を経由して接線剛性方程式を定式化しないのか。

平面弾性棒とは、その微小部分の伸び率と軸方向力、曲率と曲げモーメントとが線形関係にあるという単純明解な仮定により、断面内の力学的条件とは一切無関係にその挙動を規定することが可能な2節点要素である。

この弾性棒に剛体変位を拘束する支点条件を与え、その非拘束方向の節点力と節点変位との関係を要素力式（部材力式）として設定、その全体座標系への座標変換に剛体変位を解放するための幾何学的条件

による幾何剛性を付加すれば、要素単体の接線剛性方程式が得られる。

この接線剛性方程式は、要素力式部分以外には仮定や近似条件の介入する余地はなく、その要素力式も細分化により急激な高精度化が保証されている。

すなわち、構成要素としての挙動を規定する要素力式設定の経由は、接線剛性方程式の定式化において、きわめて重要な過程であり、これにより要素に関する非線形要因はすべて剛体変位に関する接線幾何剛性から完全に分離されることとなり、非線形剛性方程式を使用しない安定性の高い反復手法（接線剛性法）を確立する事が可能となる。

これに対して有限要素法では、要素力式の2次離散化展開による幾何剛性項と適合条件の非線形性に起因する接線幾何剛性項が分離されず混在することになる。たとえば、初期剛性 $N[\bar{K}_c]$ の1行1列

要素 $\frac{6}{5l}N$ は文献2)の端モーメント式

$$M_i = ak\varphi_i + bk\varphi_j \quad (1)$$

における双曲線関数または三角関数で表される係数の級数展開

$$2(a+b)\frac{k}{l} = \frac{12EI}{l^3} + \frac{N}{5l} + \dots \quad (2)$$

の第2項と $\alpha=1, \beta=0$ とした幾何剛性項

$$\mu\alpha^2 - 2\nu\alpha\beta = \frac{N'}{l} \quad (3)$$

の和に相当する。

すなわち、変位法の手法は、分離されている後者の $\mu\alpha^2 - 2\nu\alpha\beta$ の部分は要素如何に拘わらず不变であり、前者の $\frac{N}{5l}$ に相当する部分がその適用理論により、また曲線棒材あるいは変断面材など、要素固有の性質による要素力式の自由な設定によって内容

が左右される部分である。

すなわち変位法では、要素力式に前記のような実用的な目的に適った理論を選択する事ができ、厳密な適合条件と釣合条件による不平衡力を収束せしめる接線剛性法の解が要素力式と完全に整合する理論的に明解なものであるのに対して、有限要素法による解は単に2次まであるいは3次まで考慮したというのみで具体的な精度に関する保証はなく、力学モデルとしての要素の挙動も明確ではない。

さらに注意すべきは、弾性棒というきわめて単純明解な仮定があるにもかかわらず、その挙動を近似的にしか表現し得ないグリーンのひずみ変位式を用い、また剛体変位を拘束した挙動に関する要素力式（要素座標系の設定）を経由せずに定式化する有限要素法の手法では（本論文の他、有限要素法ハンドブック⁴⁾や土木工学ハンドブック⁵⁾も同様）、文献2)における幾何剛性

$\mu =$

$$\begin{bmatrix} \mu\beta^2 + 2\nu\alpha\beta & -\mu\alpha\beta - \nu(\alpha^2 - \beta^2) & 0 \\ -\mu\alpha\beta - \nu(\alpha^2 - \beta^2) & \mu\alpha^2 - 2\nu\alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

の中のせん断力に関する項

$$\nu = Q/l = -(M_i + M_j)/l \quad (5)$$

に相当するものが欠落する。

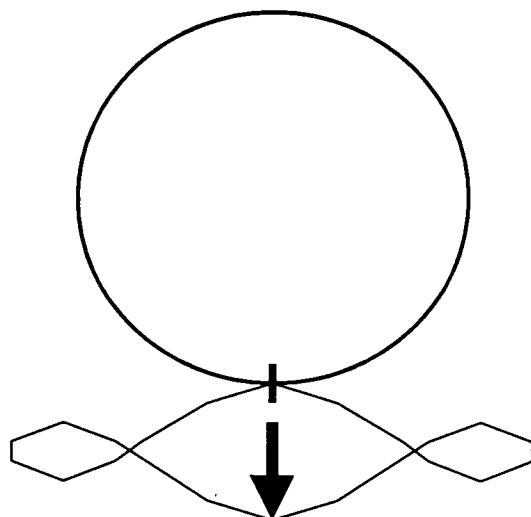


図-1 下端固定の円環とその変形図

表-1 反復回数と不平衡力の推移A

回数	不平衡力	不平衡モーメント
0	5000.0000	0.0000
1	9081.2206	7650.1555
2	15837.6092	11261.6312
3	11113.0239	5062.0895
4	928.2364	1458.0793
5	2039.3895	91.2539
6	463.9943	371.9362
7	37.4946	12.6381
8	0.3518	0.3130
9	0.0000	0.0000

表-2 反復回数と不平衡力の推移B

回数	不平衡力	不平衡モーメント
0	5000.0000	0.0000
1	9081.2206	7650.1555
2	2370.4708	2661.7362
3	309.9731	141.5460
4	19.1987	0.1703
5	3.2592	0.0066
6	0.4105	0.0002
7	0.2213	0.0000
8	0.0292	0.0000
9	0.0191	0.0000
10	0.0045	0.0000
11	0.0130	0.0000
12	0.0388	0.0000
13	0.1156	0.0000
14	0.3433	0.0000
15	1.0258	0.0004
16	3.0559	0.0034
17	9.1026	0.0306
18	27.0920	0.2844
19	80.0644	2.8086
20	225.0650	26.4474
21	464.3062	79.5169

この欠落の影響は、変形がそれほど大きくない通常の荷重増分の範囲では実用上問題とはならないようであるが、大きな荷重を一時に載荷して極端な大変形を生ぜしめるような場合に問題となる。

たとえば、図-1は、半径2m、EI=2000tf·m² EA=20000tf の下端を固定された円環を頂点の垂直荷重5000tfにより押しつぶした結果である。（頂点の変位は5.0599mとなる。）

表-1はせん断力項を省略しない変位法を用いた接線剛性法による完全収束までの最大不平衡力の推移である。すなわち全荷重を一時に載荷しても9回の反復で完全に収束するが、同様な反復手法により前記の文献4)5)のようなせん断力項が省略された接線剛性マトリックスを用いた場合には、表-2のよ

うに一旦は収束の傾向を示すが不平衡力が完全に0とはならずやがて発散する事になる。

討議3：軸方向力の剛性式について

著者らは変位法による手法では、軸方向力を節点変位に関して陽な剛性式で表す事ができないとしている。しかしながら討議者の一人は、要素座標系における軸方向力（弦方向の節点力）とその微小増分に関する式を文献2)の式(49)と式(57)の第1行に示している。

これらは、解析的に明確に表示されたもので、曲げ変形による弦長の変化を考慮したはり・柱の理論として十分な精度を有する。

さらに著者らの軸方向伸びに関するはりのたわみの2次効果を表わす式(17a)は、以下のように文献2)式(57)から級数展開し高次項を省略して求める事ができる。すなわち、式(57)の第1行より

$$\delta N = F(\delta l + \mathbf{u}^T \delta \theta) \quad (6)$$

\mathbf{u}^T を級数展開して1次の項のみを用いれば

$$\mathbf{u}^T \delta \theta \cong \frac{1}{30} [4\theta_i - \theta_j, 4\theta_j - \theta_i] \begin{bmatrix} \delta \theta_i \\ \delta \theta_j \end{bmatrix} \quad (7)$$

弦に対する両端のたわみ角を用いれば

$$\theta_{i,j} = \varphi_{i,j} - (\nu_j - \nu_i)/l \quad (8)$$

$$\mathbf{u}^T \delta \theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{5l}(\nu_i - \nu_j) + \frac{1}{10}(\varphi_i + \varphi_j) \\ \frac{1}{10}(\nu_i - \nu_j) + \frac{1}{30}(4\varphi_i + \varphi_j) \\ \frac{1}{5l}(\nu_j - \nu_i) - \frac{1}{10}(\varphi_i + \varphi_j) \\ \frac{1}{10}(\nu_i - \nu_j) + \frac{1}{30}(4\varphi_j - \varphi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \nu_i \\ \delta \varphi_i \\ \delta \nu_j \\ \delta \varphi_j \end{bmatrix} \quad (9)$$

さらに

$$\delta l = \delta u_i - \delta u_j + \frac{\nu_i - \nu_j}{l} \delta \nu_i + \frac{\nu_j - \nu_i}{l} \delta \nu_j \quad (10)$$

を用いて

$$\begin{aligned} \delta U = \delta N &= F(\delta l + \mathbf{u}^T \delta \theta) = \frac{EA}{l} (\delta u_i - \delta u_j) \\ &+ \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5l}(\nu_i - \nu_j) + \frac{1}{10}(\varphi_i + \varphi_j) \\ \frac{1}{10}(\nu_i - \nu_j) + \frac{1}{30}(4\varphi_i - \varphi_j) \\ \frac{6}{5l}(\nu_j - \nu_i) - \frac{1}{10}(\varphi_i + \varphi_j) \\ \frac{1}{10}(\nu_i - \nu_j) + \frac{1}{30}(4\varphi_j - \varphi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \nu_i \\ \delta \varphi_i \\ \delta \nu_j \\ \delta \varphi_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

のように著者らの式(17a)を得ることができる。

討議4：解を得るための手順と計算例について

非線形解析の論文においては、解式の提示のみでなく、非線形解を得るまでの手順と解が満たす条件が付記される事が望ましい。著者らの論文においては計算例が示されてはいるが、その手順や反復回数などは明示されていない。

ただ、比較されているのが振動法による文献3)であるので著者らが振動法を用いたものと考えて討議者らの私見を述べたい。

構造解析における外力を与えて変形、内力を求めるための手順を含めた一連の非線形解式は、ある変位の状態に厳密な適合条件を介しての要素変形から仮定された要素力式によって求めた内力が与えた外力と完全に釣合っているならば、それらの変位の状態を解として満足している必要がある。

もちろん、外力の漸増経路に伴う分岐解のみでなく、経路に沿わない飛び移り状態を含むすべての解を満足していかなければならない。

構造物に作用する外力は、任意の静的外力といえどもその作用過程は多様であり、決して0から漸増して既定値に達するといった都合のよい外力は現実にはありえない。

その意味においても、存在する複数の解を満足する解式とそれらすべてを求める事が可能な手順と一体となって非線形解析の理論として完結し、はじめてその有意性が価値付けられるものと考えられる。

また、少なくとも不特定多数の読者を前提とする公共の機関誌への発表には、利用者がプログラムを作成する事が可能な手順への言及に加えて、計算例での解を得るまでの収束状況、収束解が満たす条件、分割載荷における荷重増分幅の目安など、読者のための便宜が図られている必要がある。

これらは、論文の搭載条件、査読者の意向などにより実現し得ない場合もあるかもしれないが、著者らの論文にとどまらず、自戒を含めて的一般的な搭載論文への切実な要望としたい。

結言

構造物の幾何学的非線形構造解析手法には、従来の構造力学として蓄積された変位法によるものと有限要素法によるものとがあるが、現在では後者の手法が主流となったかの感があり、ハンドブックなどにもその種の記述がなされている。

しかしながら、折角弾性棒として簡明なモデル化が可能なものに何故2次元弾性体のひずみ・変位式から出発しなければならないかの論拠は示されては

いない。

討議者らは、要素座標系を設定して、要素力式の仮定を経由し、要素固有の性質に左右されない幾何剛性を用いる変位法の拡張理論は、有限要素法による手法よりもその解の挙動が理論的に明解であり、汎用性を有するものであると考えている。

有限要素法の手法でも、要素の剛体変位を拘束した状態での要素力式の定式化のみに止め、これに汎用性のある幾何剛性を考慮する方がよいのではないか。

著者らも計算例として比較した文献3)では、変位法の手法について述べ、前記の幾何剛性を式(41b)に示しており、要素力式と要素分割におけるその精度に関する言及をしている。

討議者らはむしろ、これを摂動法ではなく厳密な適合条件と適当な要素力式を経由しての不平衡力を0へ収束させる接線剛性法を用いた方が任意の大きさの荷重増分に対応できるより汎用性のある手法となつたのではないかと考える。

ただ、この幾何剛性は、すでに討議者らが文献2)の式(70)で、さらに古くは文献1)の式(13)で用いたものと同じであることを付記したい。

最後に、ひずみテンソルの非線形性に立脚する以上、細部に省略のない、如何に高精度な理論を展開したとしても、それは剛体変位を拘束された要素の挙動を記述する要素力式の非線形性（要素の細分化により、その効果は激減する）を補完する以上の期

待は望めず、前述のような弾性棒としての軸方向力と曲げの伸び率と曲率に関する厳密な関係から導かれた要素力式による変位法の手法に優る理論とはなり得ないという事を強調しておきたい。

参考文献

- 1) 後藤茂夫：有限変形法に関する二、三の考察、土木学会論文集, No.163, pp.61~66, 1969.
- 2) 後藤茂夫、羽根悟朗、田中達朗：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析、土木学会論文報告集, No.238, pp.31~42, 1975.
- 3) 阿井正博、西野文雄：離散化系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組みへの適用、土木学会論文報告集, No.304, pp.17~32, 1980.
- 4) 有限要素法ハンドブック編集委員会：有限要素法ハンドブックII応用編、(株)培風館, pp.122~169, pp.643~651, 1983.
- 5) 土木学会：土木工学ハンドブックI、技報堂出版(株) pp.288~291, 1989.
- 6) 後藤茂夫、荒牧軍治、井嶋克志：要素剛性分離の手法による構造物の幾何学的非線形解析、構造工学論文集, Vol.37A, pp.315~328, 1991.
- 7) 後藤茂夫、井嶋克志、古賀勝喜、帶屋洋之：接線剛性法による要素力式の設定と解の精度、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集第18巻, pp.121~126, 1994.

(1998. 9. 21受付)

►回答者 (Closure)——阿井正博(法政大学)・田村健太郎(東急建設)・西野文雄(政策研究大学院大学)
Masahiro AI, Kentaro TAMURA and Fumio NISHINO

1. はじめに

本論文(ノート)の結果が、更新Lagrange手法や変形一剛体変位分離の手法に組み合わせられれば、大きい変位が扱えることは、1. Introductionで断っている通りです。討議者等のいう“部材力式”あるいは変形力一変形関係(討議文献3))として、厳密な非線形関係を展開することは難しく、線形のものでは密な要素分割を要すこととなり、無理なく展開できる2次理論程度が、平面骨組に限らず一般の有限変位問題において、一つの妥当な非線形形式であろうかと判断しています。

そのような背景にはありますが、本論文の内容は、前記の有限変位手法に関するものではなく、平面はりの2次理論としての離散化そのものを、変形の自由度ではなく(他への適用も考えられるので)、全節

点自由度の上で展開したものです。これまでの2次有限要素展開の中で、改善されるべき点があることの指摘が主旨です。2次理論としての離散化は、他の要素でも実用性が高く、重要なことと考えられます。

2. 討議1に対して

平面はりの弾性2次の離散化関係は、基本的には、はり一柱理論のたわみ公式によるものと有限要素法の手順によるものがあると言ってよいのではないでしょうか。式(5)のひずみ一変位関係では、式(3)の関係のもとに、変位の2次項までを考慮している($u_G(x)$ は $v_G(x)$ の2次に相当)。このことを基準として、2次理論の呼称があるものと理解しています。この適合関係に対して、変分原理のもとに微分つり

合い式が決まりますが、変分結果によるのですから、つり合い式は変位の3次項までを含み、ひずみエネルギーは4次項までとなります。この種の展開は従来よりあり(回答文献2)等), 討議文献2)の微分基礎式(27)～(34)も同じではないでしょうか。これらの常微分方程式を解いたとき、圧縮/引張軸力を中に含む \sin, \cos, \sinh, \cosh 関数による特有の齊次解が得られ、平面はりでのそれがはり一柱理論のたわみ式と言われています。この齊次解は、構造解析において必ずしも扱い易いものではなく、対して、有限要素法展開(2次)では、変位補間という別の近似の可能性を含むが、軸力が節点変位に関して“陽”に表されるという有利性があります。断っておくべきは、齊次解もまた2次までの微分基礎式による近似表現であることであり、討議文献2)では、その齊次解がさらに級数展開されていますが、表-3の高次項は無意味となる可能性があります。

曲げ変形による弦長の変化は、微分基礎式の上では式(5)右辺のたわみ変位の2次項 $1/2 \cdot (dv_c/dx)^2$ に相当しており、はり一柱理論そのものは“曲げ変形による弦長の変化を考慮した理論”と考えられます。はり一柱理論といえば、Euler座屈に対する展開をすぐに想起しますが、当然、より下位の基礎式は含まれることになります。この展開は、“軸力状態で線形化されたはり一柱理論”と言われており、そのような整理で特に不都合は無いのではないでしょうか。

3. 討議 2 に対して

平面弾性棒は、“その微小部分の伸び率と軸方向力、曲率と曲げモーメントとが線形関係にあるという単純明解な仮定”で考えればよいと断言されていますが、例えば、微小変位理論であっても、曲げモーメントと曲率が、材料の弾性定数と幾何学的な断面2次モーメントの積を定数とした比例関係にあると、直接いえるでしょうか? さらに、有限ひずみで変形するとき、討議者等のいう“曲率”とは、軸線の空間曲線としての曲率でしょうか? それとも、軸線初期長さに沿ったたわみ角の変化率でしょうか? 有限ひずみでは、この2つの量は異なります。弾性定数は微視的な直応力一直ひずみ間で定義されている量であり、曲げによる断面直ひずみの分布を知ることなしに、前記の関係を正確に確認することはできないと考えられます。Greenのひずみは、例えばその直ひずみ成分は伸び率とは別定義であるが、はりの問題に限らず、一般弾性有限ひずみ状態を正確に規定する幾何学的パラメータであり、“近似条件としかなりえない”量ではない。はりの変形も1つの弾性変形であり、

その表現式に照らして展開するとき、その立場が明確になるといえます。

Bernoulli-Eulerの仮定のもとで変形するはりでは、軸方向の直ひずみしか生じない。討議者等はこのことに関連して述べているのでしょうか。確かに、この有限ひずみ問題に限っては、せん断ひずみがないので、その変形をGreenのひずみで扱った微分基礎式(回答文献3))と伸び率の上で展開を進めたもの(討議文献3))とがありますが、その違いは構成式に帰着する問題であり、幾何学的非線型問題としてはそれぞれ正しいものです。対象論文は、微小ひずみの上の2次近似理論を扱っており、その出発点はGreenのひずみ、伸び率のいずれであってもよい筈です。

要素の全節点自由度の上での接線幾何剛性が、変形一剛体変位分離の手法の上では(討議文献3)の表現), 節点力一変形力間の幾何剛性と変形力一変形間に含まれる幾何剛性の和になることは、その通りであり、既に認識されています(回答文献5))。

4. 討議 3 に対して

討議者等は、接線剛性式のみを必要な関係式と考えているのでしょうか。著者等は、Lagrange表現として先ず節点変位→節点力の力学関係を要すと考えます。接線剛性は、単にその微分式として得られ、微分量同士が線形という陽な関係にあることは恒等的な真理であります。著者等は、節点力一節点変位関係の上で“軸力Nが節点変位に関して陽な形にない”と言っているのです。討議文献2)の軸力Nの表現式(49)を、簡単のために、2次元問題(A_l と $\{\theta_{ii}, \theta_{jj}\}$ のみ)で考えると、 $\{\theta_{ii}, \theta_{jj}\}$ の2次項の係数マトリックス $\partial A_l / \partial N$ 中に $y = \sqrt{N/EI} \cdot l_0$ が複雑な形で含まれている、つまり 軸力Nの表現式の右辺中にNがあります。これは、普通には、“陰な表現”と言う。陽でないので、一般的の変位法解析では(“接線剛性法”は別として)、全体のつり合いを考える以前に、両端節点位置に対する要素軸力を知るために、別の繰返し計算等の数値処理を要すと言っているのです。

式(6)～(11)の展開が示されており、成程、討議文献2)の式を省略すれば本論文の1つの接線式(17a)が得られます。しかし、討議文献2)は、そこに示されている関係式こそが有効であるとする論文ではないでしょうか。著者等は、2次有限要素展開が最も精緻ですべての項を包含しているとは、元より言っています。ただ、実用上重要だと考えているだけです。討議者等は、式(17a)を得るのに、討議文献2)の展開をたどった上で、高次項を省略してそれに

到達するのが良いと言われるのでしょうか。著者等は、対象論文のよう展開するのが、2次理論として1つの閉じた形であり、簡潔で明晰ではないかと提案しているのです。

5. 討議4に対して

数値計算手順について問われているが、対象論文の数値計算例では、零外力時の初期形状が自明であり、Fig.3, 5, 6に示されている各荷重段階において単純Newton-Raphson法を適用しています。特異現象を生じる範囲ではないので、いずれも4～5回程度の繰返し収束しています。なお、 $(u_i, \theta_i, \theta_r) = (-1.23\text{cm}, 0.139, -0.083)$ 等に対しては無理な力が生じているが、これらは強制変位に対する直接の力であり、繰返し計算を要しません。2次理論としての精度を、比較的小さい変位の範囲で確認しようとしただけです。

6. 結言に対して

「有限変位に対して、討議者等のいう“有限要素法”のみが決して主流なのではなく、ただ確立されて久しいのでハンドブック等には大抵記述されているのではないでしょうか。」

はりとしての基礎式を弾性論としてのひずみ一変位関係から記述することの意義は、討議1への回答に述べた通りです。

「討議者等は、要素座標を設定して…汎用性を有するものであると考えている。」と“有限要素法の手法でも…これに汎用性のある幾何剛性を考慮する方がよいのではないか。”の2つ節の内容は、既に認識されていることではないでしょうか。

“著者等も計算例として比較した文献3)では…”と次の“討議者等はむしろ…”の文節ですが、“適当な要素力式”とは、線形の最も単純なものという意味でしょうか。その方が“任意の大きさの荷重増分に対応できる”ことが、幾つかの数値計算例の上ではなく、一般性をもって言えるのでしょうか。弾性有限変位離散系の変位法においては、例えばNewton-Raphson法などが収束しやすい傾向にあることは経験的に認識していますが、しかし 任意の大きさの荷重増分では何所に収束するかわからないではないですか。著者等は、線形の“要素力式”も偏った1つの方法であり、またそれを高次項まで煩雑に展開するのも偏っていると考えます。

討議文献3)の式(41b)の平面はり要素の接線幾何剛性の表現が、討議文献2)の式(70)(および討議文献

1)の式(13))にあるとあり、そのように確認しました。また、回答文献1)でも、式(41b)中の \bar{l} が l (初期長さ)に近似されたものが示されています。討議文献3)は、その個所でその断りをすべきであったかと考えます。ただ、この関係式は、はりの変形後の静的つまり合い式の微分式という、それぞれの手法構成の一部であり、剛性式そのものの扱いなどを含む全体力学関係式の展開としては、これら2つの論文は討議文献3)とは別なものと考えられます。回答文献1)では、はり一柱理論による変形の上での剛性式に含まれる軸力について、主にそれに影響するたわみの効果について論じているが、全体解析としては“(解析途中では未知の)解状態”での軸力としており、閉じた解析手順を示しているものではない。その意味で、論文題目通りであるといえます。討議文献2)の“接線剛性法”では、“不平衡力算出のための非線形の部材力式、適合条件式”(節点変位→節点力の剛性式)自体が、先行状態からの増分形で展開されています。増分形で表現することの基本的な意義は、非線形表現ではあっても増分の高次項を打ち切る、あるいは増分前後の平均値の割線をとるなどの工学的な処理がとれることにあると考えられます。一般式に統いて、5.(4)に示されている平面骨組要素としての具体的な式展開をみると、式(74)右辺中の $[\bar{\theta}_i + \theta_i, \bar{\theta}_r + \theta_r]$ や式(75), (76), (82)の $\bar{\rho}, \bar{p}', \bar{q}, \bar{q}', \bar{a}, \bar{b}$ などの展開より明らかですが、先行状態とその増分後の間に割線処理がなされている。これらの非線形形式の依って立つ拠は、それ以前の接線剛性式と基本的に同等であり、ただその係数の値を増分前後の中间にとったものに過ぎない。この意味で、討議文献2)の“接線剛性法”とは、一般的なLagrange手法ではなく、接線増分法の1発展形なのではないでしょうか。剛性式でのその展開は力学式ではなく、1つの工学的手法としての提案と考えられます。討議文献3)では、構造の各変形状態そのもの上で剛性関係が先ず展開されており、接線剛性はその微分式として誘導されています。それらは、離散系の力学関係式として示されているものであり、変形力一変形関係は当然ながら実構造に対しては近似ですが、任意に大きい変位/変形に対して、どのような自己矛盾をも含まない有限変位力学モデルとして成立しています(回答文献4))。その意味で、手法というよりも、力学関係式そのものを記述していると言えます。

“ひずみテンソルの非線形性に立脚する以上、細部に省略のない、いかに高精度な理論を展開したとしても、…”とあります。無論、近似化なしで離散化することが難しいので前記のような方法があるのですが、微分基礎式自体はひずみテンソルを用いて正確

に定式化できるのですから、もし“細部に省略”なく展開できれば、それはやはり正確なものとなるのではないかでしょうか。

7. おわりに

著者等の論文(ノート)についての貴重な討議、深く感謝申し上げます。最初にも述べましたように、対象論文は、平面はり要素の2次離散化を展開しているのみで、有限変位に対する更新Lagrange的な様々な手法に関するものではありません。しかし、適用として、著者等の結果がその方面で使用されることが考えられ、討議内容に関するこれまでの研究経緯を、著者等のおよぶ限りで整理しながら、回答させて頂きました。幾分かのご参考になれば幸甚です。

参考文献

- 1) Oran, C.: Tangent Stiffness in Plane Frames, *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol.99, No.ST6, Jun. 1973.
- 2) 西野文雄, 倉方慶夫, 長谷川彰夫, 奥村敏恵:軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No.225, 1974.4.
- 3) 西野文雄, 倉方慶夫, 後藤芳顯:一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論, 土木学会論文報告集, No.237, 1975.5.
- 4) Ai, M. and Nishino, F.: On Convergence of Geometrically Nonlinear Discretization at Limit Element Division, *Structural Eng./Earthquake Eng.*, JSCE, Vol.3, No.2, Oct. 1986.
- 5) Nishino, F., Ai, M. and Nakano, T.: On The Stability of Frame Members in A Global Buckling, *Structural Eng./Earthquake Eng.*, JSCE, Vol.14, No.2, Oct. 1997.

(1999. 4.13受付)