

非ブーシネスク $k - \varepsilon$ 乱流モデルによる 固気・固液二相流の解析

福嶋祐介¹・鏡原聖史²・野口和義³

¹正会員 工博 長岡技術科学大学 教授 工学部環境・建設系 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

²正会員 工修 (株) ダイヤコンサルタント 大阪支店 (〒 564-0045 大阪府吹田市金田町 28-21)

³正会員 工修 (株) ニュージェック 大阪本店 (〒 542-0082 大阪市中央区島之内 1-20-19)

固体粒子を含む流れを非ブーシネスク流体と見なし、このような流れに対する $k - \varepsilon$ 乱流モデルを構築した。基礎方程式系は、連続式、固体粒子の質量保存式、レイノルズ方程式、乱れエネルギーの方程式、分子粘性逸散率の方程式で構成される。これらのいずれの式においても、ブーシネスク近似を行わずに密度変化を考慮する。密度変化が小さい場合、これらの方程式がブーシネスク近似を行った基礎方程式系と一致する必要がある。導かれた方程式系においては固液・固気二相流体特有の新たな項が考慮されている。本モデルを開水路の浮遊粒子流に適用し、妥当性を検討した。さらに、本モデルを吹雪に適用し、吹雪の基本的な特性が把握できた。また、ブーシネスク近似が許容される限界の粒子濃度についても考察した。

Key Words : solid-fluid two phase flow, suspension flow, non-Boussinesq approximation, numerical analysis, $k - \varepsilon$ turbulence model

1. 序論

水の流れや風により固体粒子が浮遊状態で輸送される現象は自然界でしばしば観察される。大きな湖や海の海底渓谷では泥水流と呼ばれる流れが発生する。河川においては、水の流れとともに大量の土砂が掃流や浮遊の状態では運ばれる。これらはいずれも流体である水の運動に伴う乱れによって、固体粒子である土砂が輸送される固液二相流と呼ばれる現象である。

一方、風すなわち空気の流れによって固体粒子が輸送される流れは、固気二相流と呼ばれる。海岸地域や砂漠地帯においては、大量の砂が浮遊状態で輸送される飛砂と呼ばれる現象が知られている。厳冬期山岳地帯で発生する煙型雪崩も、風の乱れによって乾いた雪粒子が浮遊状態で流れる現象である。同様に、平地でも地吹雪と呼ばれる現象がある、火山の活動に伴って発生する火砕流は雪崩や吹雪と類似の流れである。

固気・固液二相流を解析する手法の一つに拡散方程式を用いる方法がある。固体粒子の粒径が小さく、従って、沈降速度が小さく流体の流動に粒子が追従する場合には有力な手法である。ただし、固気二相流では、一般に固体粒子の密度が気体の密度に比べて遙かに大きいので注意が必要である。ここで、吹雪の場合を考えて見よう。雪粒子の密度は空隙がない場合純水の密度となり、空気の密度の約710倍である。従って、体積濃度が1%でも、混合流体としての密度は空気の密度の約

7.1倍である。

固液混相流などで、作業流体と固体粒子の密度差が小さい場合には密度変化を重力項及び圧力項のみで考慮し、慣性項と粘性項では密度を一定とするブーシネスク近似が用いられることが多い。実際、開水路の浮遊砂流では体積濃度が1%とかなり大きくなってても相対密度差は最大で0.0165程度で密度変化はかなり小さい。従ってこのような流れに対するブーシネスク近似は有効である。一方、固気混相流では固体粒子の密度が気体の密度に比べてかなり大きく、ブーシネスク近似は許容されない場合がある。ここでは、このような混相流体を非ブーシネスク流体と呼ぶことにする。

固気・固液混相流については数多くの研究がなされている。開水路における浮遊砂流は土木の分野で重要な固液混相流の一例である。芦田ら¹⁾は固液混相流における支配方程式とその適用性について検討し、従来のモデルを一流体モデル、二流体モデル、粒子-流体モデルに分類し、さらに浮遊砂流の解析例を示している。近年、土砂流の解析に高度な固相モデルによって解析された例がある。後藤ら³⁾は清水流近似を用いずに流体系と粒子系の相互干渉をPSI-Cellモデルで表現し、掃流層のシミュレーションを行っている。このモデルでは流体系の解析に $k - \varepsilon$ 乱流モデルが用いられている。PSI-Cellモデルは、Crowe⁴⁾が気体中の液滴の運動を解析するため提案した方法である。灘岡ら⁵⁾は高粒子濃度に適用できる固相モデルを用いた混相乱流モデルであ

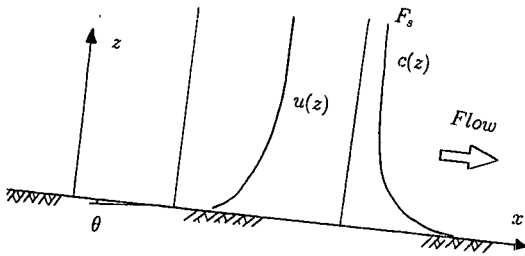


図 - 1 吹雪の概念図と座標系

る GAL-LES モデルを開発し、粒子ブルームに適用している。玉井ら⁶⁾は二流体モデルにより粒子ブルームの数値計算を行っている。

これらの新しい固相のモデル化に対し、固体粒子に対して拡散型の輸送方程式で定式化し、混相流を一流体モデルで解析する方法も有力な方法である。そのうち、 $k-\epsilon$ 乱流モデル (Rodi²⁾) を用い、平均流に加えて乱流構造まで計算した例として、次の研究がある。DeVantier and Larock⁷⁾、福嶋⁸⁾、福田・福嶋⁹⁾、岩佐ら¹⁰⁾、藤崎・高崎¹¹⁾である。また、固気混相流である吹雪については、小林¹²⁾、¹³⁾による現地観測、Uematsu et al.¹⁴⁾による数値計算例がある。この解析ではブーシネスク近似が採用されている。

本研究では、非ブーシネスク流体に対する $k-\epsilon$ 乱流モデルを提案する。このモデルは特別な場合として、ブーシネスク近似を行った基礎方程式と同じになる。そこで数値解析法の検証もかねて、開水路の浮遊砂の計算を行い、既存の実験データと比較した。さらに、典型的な非ブーシネスク流体である地吹雪を対象として計算を行った結果について述べる。また、ブーシネスク近似が許される限界の体積濃度について考察する。

2. 基礎方程式

固体と流体との二相流が傾斜角 θ の斜面上を流下する場合を考える。斜面に沿った座標系を $x_i (i = 1, 2, 3)$ とする。ここで、 x_1 を斜面方向の座標、 x_2 を水平方向、 x_3 を斜面と直交方向上向きにとる。これらに対応する流速成分を \hat{u}_i とする。流れの場に作用する外力は重力であり、重力加速度を g とする。静止した流体中での固体粒子の沈降速度を w_s 、その x_i 方向成分を w_{si} とする。粒子の体積濃度を \hat{c} とする。固体粒子を含む混相流の解析において、流体と粒子間の相互作用を流体抗力として表現する方法¹⁾ や PSI-Cell モデルのように流体の計算セルを通過する際の粒子の運動量変化を考慮して相互作用を表現する方法³⁾ などいくつかの方法がある。ここでは、混相流の密度変化を乱流モデルでも表現しようとする立場から、固気・固液二相流を一流体モデル

で記述する方法を用いた¹⁾。すなわち、固体粒子の粒径および沈降速度が小さく、粒子の速度と流体の鉛直速度と沈降速度だけ異なると仮定する。固体粒子の輸送を拡散型の輸送方程式で表すことにする。

沈降速度の x_i 成分は w_{si} 次式で表される。

$$w_{si} = (-w_s \sin \theta, 0, w_s \cos \theta) \quad (1)$$

流体相の連続式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(1 - \hat{c}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{u}_i (1 - \hat{c}) = 0 \quad (2)$$

固相の質量保存式は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{c} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{u}_i - w_{si}) \hat{c} = 0 \quad (3)$$

ここで、分子拡散項は無視している。式(2)と式(3)の和をとると次式を得る。

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} w_{si} \hat{c} \quad (4)$$

固体粒子の密度を ρ_s 、流体の密度を ρ_a とする。固体と流体の混相の密度 $\hat{\rho}$ は、固体粒子の体積濃度を \hat{c} とするとき、次式で与えられる。

$$\hat{\rho} = \rho_a + (\rho_s - \rho_a) \hat{c} = \rho_a (1 + R \hat{c}) \quad (5)$$

ここで、 $R = (\rho_s - \rho_a) / \rho_a$ は固体粒子の流体中での有効比重であり、 $R \hat{c}$ が流体に対する相対密度差となる。式(5)と式(2)、式(3)から、混相流体の質量保存式は次式のように求められる。

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\rho} \hat{u}_i = \rho_s w_{si} \frac{\partial \hat{c}}{\partial x_i} \quad (6)$$

固相と流体相の質量保存式を表す、式(2)、(3)、(4)、(6)はそれぞれ独立ではなく、このうち2つが独立であることに留意されたい。

混相流体に対するナビエーストックスの方程式は次のようになる。

$$\hat{\rho} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \hat{\rho} \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} = \hat{\rho} g_i - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

ここで、 μ は粘性係数、 g_i は重力加速度の x_i 成分である。流れが十分発達した乱流であり、流速成分 \hat{u}_i 、固体粒子の体積濃度 \hat{c} 、圧力 \hat{p} がそれぞれ平均値と変動量に分けられるものとする。すなわち、

$$\hat{u}_i = u_i + u'_i; \quad \hat{c} = c + c'; \quad \hat{p} = p + p' \quad (8)$$

である。ここで、 u_i が平均流速成分、 u'_i が変動流速成分、 c が平均濃度、 c' が変動濃度、 p が平均圧力、 p' が変動圧力である。体積濃度の変動に伴って混相の密度 $\hat{\rho}$ も変化し、 ρ を平均密度、 ρ' を密度の変動成分とする。これらと濃度との関係は次式で表される。

$$\hat{\rho} = \rho + \rho'; \quad \rho = \rho_a (1 + R c); \quad \rho' = \rho_a R c' \quad (9)$$

このとき、平均流の連続方程式、混相流の質量保存式、固相の質量保存式、レイノルズ方程式、レイノルズ応力の方程式、乱れ運動エネルギーの方程式は次のよう

になる。ただし、連続の式及び質量保存式(10), (11), (12)のうち、2つが独立である。

(1) 連続方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = w_{si} \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (10)$$

(2) 混相流の質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j = \rho_s w_{sj} \frac{\partial c}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho' u_j'} \quad (11)$$

(3) 固相の質量保存則

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} c u_j = w_{sj} \frac{\partial c}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{c' u_j'} \quad (12)$$

(4) レイノルズ方程式

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{\rho' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u_i'} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_i' u_j'} + \overline{\rho' u_i' u_j} + \overline{\rho' u_i' u_j'}) \\ & = \rho_s w_{sj} u_i \frac{\partial c}{\partial x_j} + \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ & + \mu w_{sk} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

(5) レイノルズ応力の方程式

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i' u_j'} + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i' u_j'} + \overline{\rho' u_k'} \frac{\partial}{\partial x_k} u_i u_j \\ & - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\rho' u_k'} + \overline{\rho' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{\rho' u_i'} \frac{\partial u_j}{\partial t} \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u_i' u_j'} + (\overline{\rho u_j' u_k'} + \overline{\rho' u_j' u_k} + \overline{\rho' u_j' u_k'}) \frac{\partial u_i}{\partial u_k} \\ & + (\overline{\rho u_i' u_k'} + \overline{\rho' u_i' u_k} + \overline{\rho' u_i' u_k'}) \frac{\partial u_j}{\partial u_k} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho u_i' u_j' u_k'} + \overline{\rho' u_i' u_j' u_k} + \overline{\rho' u_i' u_j' u_k'}) \\ & = \rho w_{sk} u_i' u_j' \frac{\partial c}{\partial x_k} + g_i \overline{\rho' u_j'} + g_j \overline{\rho' u_i'} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho' u_j'} \delta_{ik} + \overline{\rho' u_i'} \delta_{jk}) - \overline{\rho' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \\ & + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \overline{u_i' u_j'} - 2\mu \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \\ & + \mu w_{sk} \left\{ \overline{u_j' \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \right)} + \overline{u_i' \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c}{\partial x_j} \right)} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

(6) 乱れ運動エネルギーの方程式

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial k}{\partial x_k} - k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\rho' u_k'} + \overline{\rho' u_i'} \frac{\partial u_i}{\partial t} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u_i' u_i'} + (\overline{\rho u_i' u_k'} + \overline{\rho' u_i' u_k} + \overline{\rho' u_i' u_k'}) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u_i' u_i' u_k'} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u_i' u_i' u_k} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u_i' u_i' u_k'} + \overline{\rho' u_i' u_k'} \right) \\ & = \frac{1}{2} \rho_2 w_{sk} u_i' u_i' \frac{\partial c}{\partial x_k} + g_i \overline{\rho' u_i'} + \overline{\rho' w_{si} c'} + \mu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k \partial x_k} \\ & - \rho \varepsilon + \mu w_{sk} u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 t は時間、 $k(= \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'})$ は乱れ運動エネルギー、 ε は分子粘性逸散率、 μ は粘性係数である。乱れ運動エネルギーの式(15)は、レイノルズ応力の方程式(14)において、 $j=i$ として導かれたものである。混相流が非ブーシネスク流体であるとしたことによって、レイノルズ方程式(13)、レイノルズ応力の方程式(14)、乱れ運動エネルギーの式(15)において、密度変動 ρ' と速度変動 u_i' の高次相関項が数多く含まれていることが特徴である。

以上が密度変動を考慮した固体・流体二相流の基礎方程式の完全な式系である。以下ではこれらの式をもとに、解析対象を具体的に絞り、方程式を簡略化する。対象とする流れは鉛直二次元であり、斜面方向の流れが鉛直方向の流れに比べて卓越しているものとする。ただし、レイノルズ方程式中で粘性項が他の項に比べて十分小さく無視できると仮定する。

空間座標 x_i 、流速の平均成分 u_i 、その変動成分 u_i' を次のように表す($i=1,2$)。

$$x_i = (x, z) \quad u_i = (u, w) \quad u_i' = (u', w') \quad (16)$$

重力加速度の x_i 方向成分 g_i は次のようになる。

$$g_i = (g \sin \theta, -g \cos \theta) \quad (17)$$

また、流れが主流方向に卓越しており、境界層近似が成立するものとする。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial z}, \quad w \ll u, \quad v = 0 \quad (18)$$

このとき、式(10)から式(13)及び式(15)は以下のように書き換えられる。

(1) 連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} \quad (19)$$

(2) 混相の質量保存式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial z} \rho w = \rho_s w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} \quad (20)$$

(3) 固相の質量保存式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} c u + \frac{\partial}{\partial z} c w = w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{c' w'} \quad (21)$$

(4) x 方向のレイノルズ方程式

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + \overline{\rho' w'} \frac{\partial u}{\partial z} \\ & \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho u' w'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' u' w} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' u' w'} \\ & = \rho_s w_s \cos \theta u' \frac{\partial c}{\partial z} + \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (22)$$

(5) z 方向のレイノルズ方程式

$$- \rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (23)$$

(6) 乱れ運動エネルギーの方程式

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho w \frac{\partial k}{\partial z} \\ & - k \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} + \overline{\rho' u'} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' u'^2} + \overline{\rho' w'^2} + \overline{\rho' u' w'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial u}{\partial z} (\overline{\rho u' w'} + \overline{\rho' u' w} + \overline{\rho' u' w'}) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i w'} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u'_i u'_i w} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u'_i u'_i w'} + \overline{p' w'} \right) \\
& = -\frac{1}{2} \rho_s w_s \cos \theta u'_i u'_i \frac{\partial c'}{\partial z} + g \sin \theta \overline{\rho' w'} - g \cos \theta \overline{\rho' w'} \\
& \quad - \overline{p' \frac{\partial w'}{\partial z}} + \mu \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} - \rho \varepsilon \quad (24)
\end{aligned}$$

以下の検討では、連続式(19)、固相の質量保存式(21)、 x 及び z 方向のレイノルズ方程式(22)、(23)、乱れ運動エネルギーの式(24)を基礎方程式として用いる。

3. 圧力勾配の評価

x 方向のレイノルズ方程式(22)には圧力 p が含まれている。この項は対象とする流れによって異なる境界条件から定められる。吹雪の場合と開水路の浮遊砂流について、具体的な圧力勾配を求める。

a) 吹雪の場合

固体粒子浮遊流を一般的に考えて、降雪があり、上方から固体粒子の供給 $w_s F_s$ がある場合を考える。ここで、 F_s は降雪粒子の体積濃度を表す。このとき、境界層外縁での密度 ρ_1 、任意位置での混相の密度 ρ は次のようになる。

$$\rho_1 = \rho_a + (\rho_s - \rho_a)c_1 = \rho_a(1 + Rc_1) \quad (25)$$

$$\rho = \rho_a + (\rho_s - \rho_a)c = \rho_a(1 + Rc) \quad (26)$$

z 方向のレイノルズ方程式(23)に、式(26)を代入して積分を行う。今基準点高さを H とする。ここで、

$$z = H = z_0 + x \tan \theta$$

である。 z_0 は $x = 0$ での z 座標を表す。圧力 p と濃度 c の上部の境界条件は次式で表される。

$$p = p_0; \quad c = F_s; \quad \delta c = c - F_s \quad (27)$$

ここで、 p_0 は $z = H$ での圧力、 δc は雪粒子濃度から降雪粒子の濃度を差し引いた量である。である。このとき、式(23)を積分して圧力 p を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}
p &= p_0 + \rho_a g \cos \theta (H - z) + \rho_a R g \cos \theta \int_z^H F_s dz \\
& \quad + \rho_a R g \cos \theta \int_z^H \delta c dz \\
&= p_0 + \rho_a g \cos \theta \left((1 + RF_s)(H - z) + R \int_z^H c dz \right) \quad (28)
\end{aligned}$$

式(28)を x で微分する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p_0}{\partial x} + \rho_a g \sin \theta (1 + RF_s) \\
& \quad + \rho_a R g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H c dz \quad (29)
\end{aligned}$$

重力の斜面方向成分と圧力勾配との差は

$$\rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_a \{1 + R(F_s + \delta c)\} g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (30)$$

で表される。この式に式(29)を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
\rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_a R \delta c g \sin \theta - \frac{\partial p_0}{\partial x} \\
& \quad - \rho_a R g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H \delta c dz = \rho_a g I \quad (31)
\end{aligned}$$

ここで、 I は無次元の圧力勾配であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\rho_a g} \left(\rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\
&= -\frac{1}{\rho_a g} \frac{\partial p_0}{\partial x} + R \delta c \sin \theta - R \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_\eta^1 \delta c dz \quad (32)
\end{aligned}$$

ここで $\eta = z/H$ は無次元の座標である。

等流の場合に I は次のようになる。

$$I = R \delta c \sin \theta - \frac{1}{\rho_a g} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (33)$$

降雪がない場合には、 $F_s = 0$ であるので δc を c とおけばよい。

b) 開水路流の場合

この場合には、粒子の上方からの供給が無いことから、 $F_s = 0$ である。水面($z = h$; h は水深)で圧力(ゲージ圧力)が零になることから、式(23)、(26)から圧力は次式のように求められる。

$$p = p_0 + \rho_a g \cos \theta \left\{ (h - z) + R \int_z^h c dz \right\} \quad (34)$$

ここで、 p_0 は大気圧であり、ゲージ圧で考えるとき、この項は零となる。式(34)を x で微分すると無次元の圧力勾配 I が次のように求められる。

$$\begin{aligned}
\rho_a g I &= \rho g \sin \theta \\
& \quad - \rho_a g \cos \theta \left\{ \frac{dh}{dx} + R \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h c dz \right\} \quad (35)
\end{aligned}$$

等流の場合には次のようになる。

$$I = (1 + Rc) \sin \theta \quad (36)$$

4. 粒子濃度の小さい定常等流の基礎方程式

前節までに得られた基礎方程式をもとに流れが時間的に変化せず、さらに流れが流下方向に変化しない流れを考える。また、以下の式の展開では、固体粒子の濃度 c が1に比べて十分小さい場合を取り扱う。粒子濃度が小さいことは、必ずしもブーシネスク近似と同じ仮定ではない。すなわち、固体粒子の密度が流体の密度に比べてかなり大きな場合 $1 \ll c$ であるが、相対密度差 $\Delta \rho / \rho_a \gg 1$ となる場合があるからである。このような現象の代表的なものとして、雪崩、火砕流などが挙げられる。等流の場合、式(19)から

$$w = 0$$

となる。また、式(22)のレイノルズ方程式において、3重相関項は2重相関項に比べて小さく無視できると考える。すなわち、

$$|\overline{\rho u'w'}| \gg |\overline{\rho'w'}| \quad (37)$$

このとき、式(22)は次のようになる。

$$\frac{d}{dz} \overline{\rho u'w'} + \rho'w' \frac{du}{dz} = \rho_a g I \quad (38)$$

また、固相の質量保存式は式(21)より、以下のようになる。

$$w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{c'w'} = 0 \quad (39)$$

乱れ運動エネルギーの式において、以下の関係が成り立つと仮定する。

$$|\overline{\rho u'w'}| \gg |\overline{\rho'w'}| \quad |\overline{\rho u'_i u'_i w'}| \gg |\overline{\rho' u'_i u'_i w'}|$$

このとき、乱れ運動エネルギーの式は次のようになる。

$$\begin{aligned} -(\overline{\rho u'w'} + \overline{\rho'w'}) \frac{du}{dz} + k \frac{d}{dz} \overline{\rho'w'} \\ - \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i w'} + \overline{p'w'} \right) \\ - g \cos \theta \overline{\rho'w'} + \mu \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} - \rho \epsilon = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

式(40)の第三項は次のような拡散型で近似する。

$$\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i w'} + \overline{p'w'} = -\rho \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \quad (41)$$

ここで、 ν_t は渦動粘性係数であり、 σ_k は乱れ運動エネルギーに対する乱流シュミット数である。このとき、式(40)は次のようになる。

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \right) + P + G - \rho \epsilon = 0 \quad (42)$$

$$P = -\overline{\rho u'w'} \frac{du}{dz} + k \frac{d}{dz} \overline{\rho'w'} \quad (43)$$

$$G = -g \cos \theta \overline{\rho'w'} \quad (44)$$

非ブーシネスク流体に対する分子粘性逸散率 ϵ に対する方程式を次のように求める。ブーシネスク流体に対する k 、 ϵ 方程式は次のように表される(Rodi²⁾。

k 方程式

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P_* + G_* - \epsilon \quad (45)$$

ここで、 P_* 、 G_* はブーシネスク流体に対する乱れエネルギーの生成項と負の生成項であり、以下のように表される。

$$P_* = -\overline{u'w'} \frac{du}{dz} \quad (46)$$

$$G_* = -\frac{1}{\rho_a} g \cos \theta \overline{\rho'w'} \quad (47)$$

このとき、分子粘性逸散率 ϵ についての方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) \\ + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (P_* + G_*) (1 + c_{3\epsilon} R_{f*}) - c_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (48)$$

ここで、 R_{f*} はフラックス Richardson 数であり、次式で表される。

$$R_{f*} = \frac{-G_*}{P_* + G_*} \quad (49)$$

ブーシネスク流体の乱れエネルギーの式(45)と分子粘性逸散率の式(48)を比較し、非ブーシネスク流体に対する乱れ運動エネルギーの式(42)と ϵ 方程式に対照させて考える。その結果、 ϵ 方程式は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \right) + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (P + G) (1 + c_{3\epsilon} R_f) \\ - c_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

ここで、 R_f 、渦動粘性係数 ν_t は、次のように表される。

$$R_f = \frac{-G}{P + G} \quad (51)$$

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (52)$$

渦動粘性係数を ν_t/σ_t とすると、濃度・速度相関項 $-\overline{c'w'}$ は次のように与えられる。

$$\overline{c'w'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} \quad (53)$$

レイノルズ応力 $-\overline{\rho u'w'}$ は次のようになる。

$$-\overline{\rho u'w'} = \rho \nu_t \frac{du}{dz} \quad (54)$$

となる。また、式(39)、(38)は、式(53)、(54)を用いると次のようになる。

$$\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} = -w_s \cos \theta (c - F_s) \quad (55)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \nu_t \frac{du}{dz} \right) + \rho_a R \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} \frac{du}{dz} + \rho_a g I = 0 \quad (56)$$

k 、 ϵ に対する方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \right) + P + G - \rho \epsilon = 0 \quad (57)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \right) + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} \{ P + (1 - c_{3\epsilon}) \bar{G} \} - c_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (58)$$

ここで、乱れの生成項 P 、乱れの負の生成項 G は、式(53)、(54)を用いて次のように表される。

$$P = \rho \nu_t \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - k \rho_a R \frac{d}{dz} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} \right) \quad (59)$$

$$G = g \cos \theta \rho_a R \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} \quad (60)$$

境界条件は底面近傍($z = z_0$)、境界層の外縁($z = z_1 = d$)において、次のように与える。
 $z = z_0$ (底面)で

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z_0}{k_s} + Ar \quad (61)$$

$$\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} = -w_s \cos \theta E_s \quad (62)$$

$$\frac{k}{u_*^2} = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}} \quad (63)$$

$$\epsilon = \frac{u_*^3}{\kappa z_0} \quad (64)$$

$z = d$ で

$$\frac{du}{dz} = \frac{dk}{dz} = \frac{d\varepsilon}{dz} = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} = w_s \cos \theta (F_s - c_1) \quad (66)$$

ここに、 $c_1 (= F_s)$ は $z = d$ での固体粒子の体積濃度である。

5. 方程式の無次元化

前節の連立常微分方程式を数値的に解くために、諸変数を無次元化する。無次元変数にはティルダ ($\tilde{\quad}$) を付けることにする。特性速度を摩擦速度、特性長さを境界層厚 d (開水路の浮遊砂流の場合、水深 h とする)、底面濃度 $c_b (= c_0)$ として、諸変数を次のように表す。底面における摩擦速度 u_{*0} は、吹雪の場合と浮遊砂流の場合で次のようになる。

$$u_{*0} = \sqrt{(-dp_0/dx)d/\rho_a} \quad (67)$$

$$u_{*0} = \sqrt{g \sin \theta h} \quad (68)$$

諸量は次のように無次元化される。

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} u_{*0} & w &= \tilde{w} u_{*0} & c &= \tilde{c} c_b \\ k &= \tilde{k} u_{*0}^2 & \varepsilon &= \tilde{\varepsilon} \frac{u_{*0}^3}{d} & z &= \tilde{z} d \\ \nu_t &= \tilde{\nu}_t u_{*0} d & \rho &= \tilde{\rho} \rho_a & F_s &= \tilde{F}_s c_b \end{aligned} \quad (69)$$

このとき、固相の質量保存式、流下方向のレイノルズ方程式、 k 方程式、 ε 方程式は次のように無次元化される。

$$\tilde{\nu}_t \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{z}} = -\frac{1}{Z} (\tilde{c} - \tilde{F}_s) \quad (70)$$

ここで、 Z は次に示されるような無次元パラメータである。

$$Z = \frac{u_{*0}}{\sigma_t w_s \cos \theta} \quad (71)$$

流下方向のレイノルズ方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\tilde{\rho} \tilde{\nu}_t \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} \right) + \chi \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} \frac{\tilde{c}}{\tilde{z}} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} + 1 + R_i \tan \theta (\tilde{c} - \tilde{F}_s) = 0 \quad (72)$$

ここで、 R_i はリチャードソン数、 $\tilde{\rho}$ 、無次元の渦動粘性係数 $\tilde{\nu}_t$ 、無次元パラメータ χ は、次のように表される。

$$R_i = \frac{Rc_b g \cos \theta d}{u_{*0}^2} = \frac{\chi g \cos \theta d}{u_{*0}^2} \quad (73)$$

$$\tilde{\rho} = 1 + Rc_b \tilde{c} = 1 + \chi \tilde{c} \quad (74)$$

$$\tilde{\nu}_t = c_\mu \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (75)$$

$$\chi = Rc_b \quad (76)$$

浮遊砂流の場合、 $\tilde{F}_s = 0$ である。

k 方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\tilde{\rho} \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} \frac{d\tilde{k}}{d\tilde{z}} \right) + \tilde{P} + R_i \tilde{G} - \tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} = 0 \quad (77)$$

ここで、 \tilde{P} 、 \tilde{G} は、それぞれ、無次元の乱れエネルギー生成項、無次元の乱れエネルギーの負の生成項であり、次式のように表される。

$$\tilde{P} = (1 + \chi \tilde{c}) \tilde{\nu}_t \left(\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} \right)^2 - \chi \tilde{k} \frac{d}{d\tilde{z}} \left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{z}} \right) \quad (78)$$

$$\tilde{G} = \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{z}} \quad (79)$$

ε 方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\tilde{\rho} \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{d\tilde{\varepsilon}}{d\tilde{z}} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} \{ \tilde{P} + (1 - c_{3\varepsilon}) R_i \tilde{G} \} - c_{2\varepsilon} \tilde{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}} \quad (80)$$

境界条件は次のように無次元化して表される。

$\tilde{z} = \tilde{z}_0$ で

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{u}_{*0}}{\kappa} \ln \frac{\tilde{z}_0}{\tilde{k}_s} + A\tau \quad (81)$$

$$\tilde{c} = 1 \quad (82)$$

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{u}_{*0}^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad (83)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{u}_{*0}^3}{\kappa \tilde{z}_0} \quad (84)$$

$\tilde{z} = 1$ で

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} = \frac{d\tilde{k}}{d\tilde{z}} = \frac{d\tilde{\varepsilon}}{d\tilde{z}} = 0 \quad (85)$$

以上において、主たる未知数は \tilde{u} 、 \tilde{c} 、 \tilde{k} 、 $\tilde{\varepsilon}$ であり、式 (70)、(72)、(77)、(80) を基礎方程式として、境界条件式 (81) から (85) のもとで数値計算を行った。非ブーシネスク流体としたことの効果は、拡散項の中で密度が考慮されていること及び、式 (72) の第二項、式 (78) の第一項、第二項、第三項により表される。これらには無次元パラメータ χ が乗じられている。

境界条件式 (85) は、境界層の外縁で u 、 c がそれぞれ一様流速、雪粒子フラックス ($w_s F_s$) に接続すると考えた。計算では圧力勾配 I が含まれており、この値を変えると境界層外縁での流速が変化する。従って後で示す吹雪の計算結果は、「圧力勾配が同じ」とした場合の流速の値を示している。通常の場合のように境界層外縁での流速が与えられる場合には、 I の値を試行錯誤的に変化させ、与えられた流速と境界層内での流速とを滑らかに接続させる必要がある。

非ブーシネスク $k - \varepsilon$ 乱流モデル中には幾つかのモデル定数が含まれる。著者は $k - \varepsilon$ 乱流モデルを幾つかの異なるタイプの流れに対して適用してきた^{8), 15)}。その結果、モデル定数のうち、 $c_{3\varepsilon}$ 、 σ_t 以外のパラメータは成層している流れ場でも均一流体に対する標準値²⁾を用いればよいことが分かっている。また、成層流、浮遊砂流において、 σ_t はほぼ 1.0 の値になること、 $c_{3\varepsilon}$ を大きく変えても流速分布濃度分布の計算結果が余り変化しないことも確かめている^{8), 15)}。ここではブーシネスク $k - \varepsilon$ 乱流モデルの標準値と等しいと考え、表-1 の値を用いた。ただし、非ブーシネスクモデル中のパラメータに対して、標準値を用いることの妥当性については

表 - 1 $k - \epsilon$ 乱流モデルの係数

c_{μ}	σ_k	σ_{ϵ}	$c_{1\epsilon}$	$c_{2\epsilon}$	$c_{3\epsilon}$	σ_t
0.09	1.0	1.3	1.44	1.92	0.8	1.0

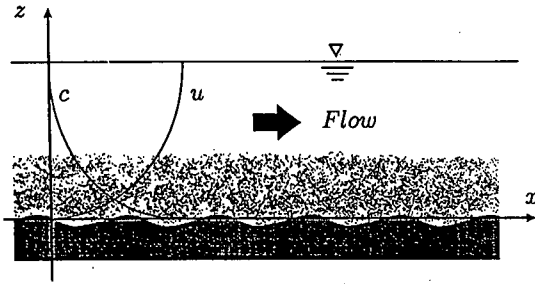


図 - 2 開水路の浮遊砂流

今後いろいろな流れ場を計算することで検討する必要がある。

$k - \epsilon$ 乱流モデルのパラメータのうち $c_{3\epsilon}$, σ_t は著者による先の論文⁸⁾ で用いた値とは若干異なった値を用いた。これは、底面近傍の高さを与えるに際して、吹雪の計算と同じ位置（無次元で）を統一したためである。

6. 開水路浮遊砂流への適用

開水路流における浮遊砂流を $k - \epsilon$ 乱流モデルを用いて解析した例はいくつかある (DeVantier and Larock⁷⁾, 福嶋⁸⁾, 福田・福嶋⁹⁾, 岩佐ら¹⁰⁾, 藤崎と高崎¹¹⁾)。今回提案した非ブーシネスク $k - \epsilon$ 乱流モデルは浮遊物質を含むために生じる相対密度差が小さい範囲では、ブーシネスク近似を用いた基礎方程式と完全に一致する。そこで、このモデルの適合性を検討するため、開水路の浮遊砂流に適用した。ここでは、比較的精度のよい実験結果を得ている Vanoni and Nomicos¹⁶⁾ の実験条件で浮遊砂流を解析し、今回のモデルの妥当性を検討する。福嶋⁸⁾, 福田・福嶋⁹⁾ はブーシネスク近似を用いた基礎方程式を用いて、同じ実験条件で数値計算を行い流速と濃度の実験結果と比較を行っている。

計算では、単位幅流水量 q , 単位幅流砂量 q_s を与えた。無次元パラメータ k_s/h , σ_t を変化させ、流速分布と濃度分布が最も一致するようにこれらの値を定めた。表-2に計算に用いた Vanoni and Nomicos の実験条件をまとめて示す。表-2において、 c_b の値は、計算された流速分布と濃度分布、実験から得られた単位幅流水量、単位幅流砂量から計算で求めたものである。 c_b の値は前報⁸⁾ で得られた計算値と若干異なる。これは、今回の計算と前報の計算とで与えたパラメータのうち、 k_s/h , $c_{3\epsilon}$ と σ_t の値が異なることによる。

図-3, 図-4は流速分布と濃度分布の数値計算結果を

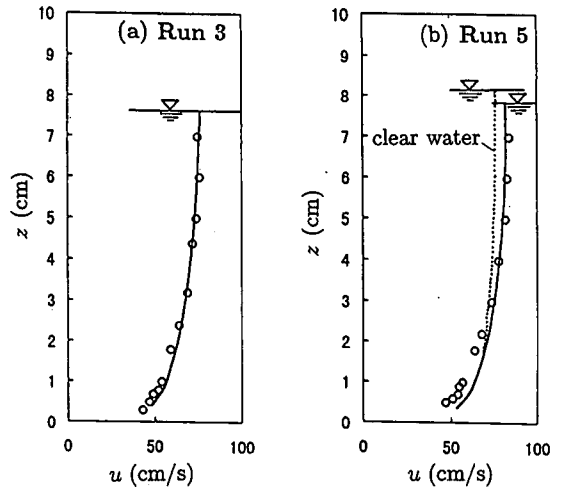


図 - 3 浮遊砂流の流速分布の計算値と実験値の比較。実験値は Vanoni and Nomicos¹⁶⁾ の Run 3 and Run 5。

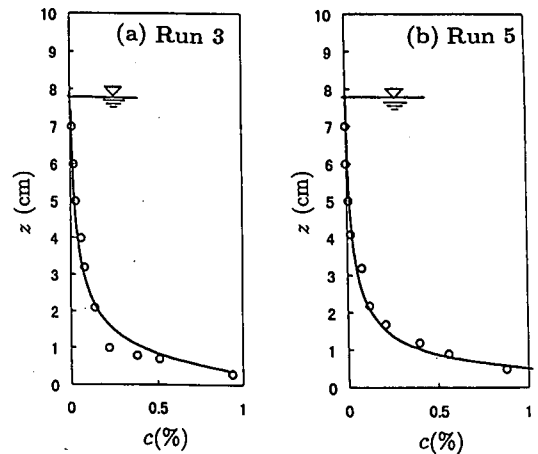


図 - 4 浮遊砂流の濃度分布の計算値と実験値の比較。実験値は Vanoni and Nomicos¹⁶⁾ の Run 3 and Run 5。

Vanoni and Nomicos¹⁶⁾ (Run 3, Run 5) の実験値と比較したものである。これより、流速分布、濃度分布についての数値解は、パラメータ k_s/h , σ_t を適切に選べば実測値を良好に説明できることがわかる。浮遊砂濃度勾配は底面の付近で急に減少している。これに対応して流速勾配は、清水流の場合に比べて流れの下半分の領域で大きくなっているのがわかる。このことが浮遊砂流の特徴である。先にも述べたように福嶋⁸⁾ は、ブーシネスク近似を用いた基礎方程式により同様の計算を行っている。その結果によると、ブーシネスク近似を用いた数値計算でも図-3, 4と同程度の一致度であった。これは浮遊砂流の濃度が小さく、無次元パラメータ χ の値が、0.0152 (Run 3), 0.020 (Run 5) と小さく非ブーシネスク流体としての特性が顕著には表れなかったこ

表 - 2 Vanoni and Nomicos の実験条件¹⁶⁾

Run No.	q (cm ² /s)	q_s (cm ² /s)	h (cm)	c_b (%)	θ	k_s/h	σ_t
Run 1	382	0.542	8.66	0.567	0.0025	0.151	0.8
Run 3	500	0.612	7.44	0.923	0.0020	0.0040	1.1
Run 5	571	0.678	7.83	1.216	0.0021	0.0028	1.4
Run 7	608	0.183	7.77	0.319	0.0026	0.0030	1.0

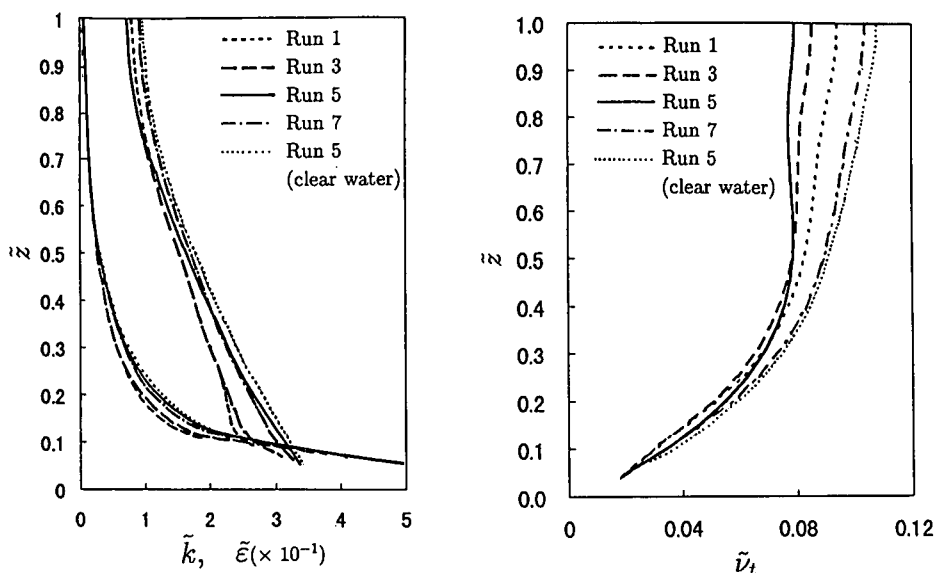


図 - 5 無次元の乱れ運動エネルギー \tilde{k} , 分子粘性係数 $\tilde{\epsilon}$ と渦動粘性係数 $\tilde{\nu}_t$ の分布

とによる。

図-5は、図-3、4と同様に他の実験条件の計算結果も含め得られた (a) 乱れ運動エネルギー \tilde{k} 、分子粘性逸散率 $\tilde{\epsilon}$ と (b) 渦動粘性係数 $\tilde{\nu}_t$ を比較したものである。この中で、Run 1, 3, 5, 7 は Vanoni and Nomicos¹⁶⁾の実験結果である。これに対する計算結果は乱れ運動エネルギー \tilde{k} 、分子粘性逸散率 $\tilde{\epsilon}$ ともに底面付近で値が小さくなっている。また、底面濃度の増加に伴って上半部で渦動粘性係数 $\tilde{\nu}_t$ が減少している。開水路の浮遊砂流においてよく知られているように、浮遊砂濃度の増加にしたがって乱流構造に変化が生じ、カルマン定数 κ が減少する、すなわち抵抗係数が減少するという実験事実がある。志村¹⁷⁾、日野¹⁸⁾の先駆的な解析的研究によって、浮遊砂濃度の増加に伴う、 κ の減少を解析的に説明した。著者⁸⁾は、ブーシネスク近似を用いた $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いた計算によって、 κ の減少を説明した。岩佐ら¹⁰⁾は semi-Lagrangian モデルで κ の減少を説明し、辻本ら¹⁹⁾は Lagrange 型の浮遊粒子モデルと液相に $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いることによって、 κ の減少と wake パラ

表 - 3 計算に用いた雪粒子の直径と静止空気中での沈降速度

	$\theta = 0^\circ$			$\theta = 30^\circ$		
	c_b (%)	D_s (mm)	w_s (m/s)	c_b (%)	D_s (mm)	w_s (m/s)
	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05
	0.08			0.12	0.16	0.18
	0.0852			0.174	0.277	0.332

メータの増加として平均流速分布の変化を説明している。ここで示したように今回の $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いた数値解析でも、濃度の増加に伴って流速勾配が大きくなる現象を的確に説明できることが確認できた。

7. 吹雪の流動解析に対する応用

以上で得られた、非ブーシネスク $k-\epsilon$ 乱流モデルを吹雪の流動解析に適用する。計算に用いたプログラムは6.の浮遊砂流の計算に用いたものを使い、パラメータ ρ_a , R , d 以外のパラメータは、6.と同じ値を用いている。この場合、固体粒子である雪粒子の密度は

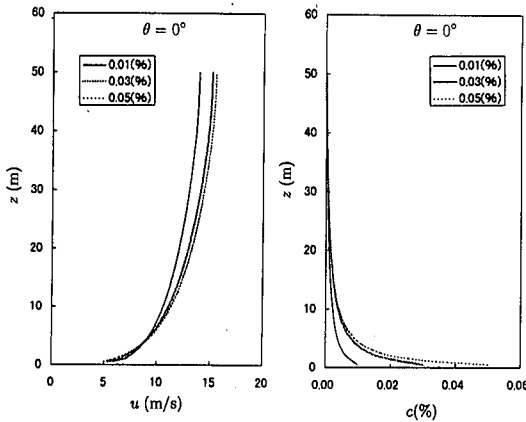


図 - 6 水平床上の吹雪の流速分布と濃度分布 ($\theta = 0^\circ$).

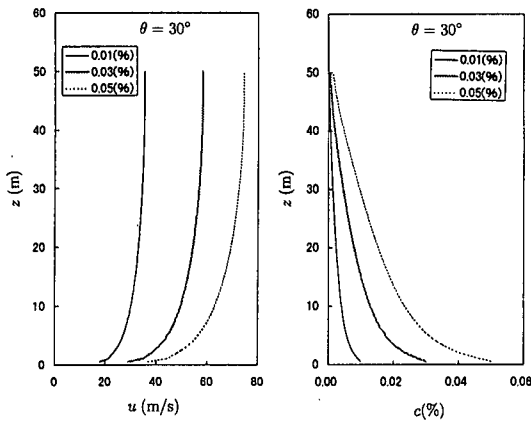


図 - 8 傾斜面上の吹雪の流速分布と濃度分布 ($\theta = 30^\circ$)

周囲流体である空気密度に比べて非常に大きい。従って雪粒子の濃度が1%以下であっても雪・空気二相流においてはプーシネスク近似は妥当ではない。今、気温が 0° の場合を考える。純氷の密度 $\rho_i = 917.0 \text{ kg/m}^3$ であり、空気の密度は $\rho_a = 1.293 \text{ kg/m}^3$ である。今雪粒子の密度を純氷の密度の50%とすると、空気中の相対比重 $R = (\rho_s - \rho_a) / \rho_a = 353.6$ となる。従って、雪粒子の体積濃度が0.1%以下であっても吹雪中での密度は空気の密度に比べてかなり大きい($\chi = Rc_b = 0.35$)。式(73)で示されるように無次元数 χ はリチャードソン数 Ri の分子に含まれている。したがって、 χ 及び Ri が大きい場合には、プーシネスク近似を適用することはできない。

計算では、雪粒子の静止空気中での沈降速度 w_s を見積もる必要がある。ここでは、雪粒子が見かけの密度 $\rho_s = 0.5 \times \rho$ をもつ球形であるものと仮定する。球に関する抵抗係数 c_D の式として、Schillerの式(Graf²⁰)

$$c_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.150 Re^{0.687}) \quad (86)$$

を用いた。ここで、 Re は球の半径 a を用いて、次式で定義されるレイノルズ数である。

$$Re = \frac{2aw_s}{\nu} \quad (87)$$

静止空気中での雪粒子に作用する力の釣り合い方程式により、次式による反復計算を行って沈降速度 w_s を計算した。

$$c_D a^2 \pi \rho_s \frac{1}{2} w_s^2 = \frac{4a^2 \pi}{3} (\rho_s - \rho_a) g \quad (88)$$

計算では、雪粒子の直径 $D_s (= 2a)$ を与え、(86) - (88)により沈降速度を計算した。計算に用いた雪粒子の直径と沈降速度を表-3にまとめて示す。

図-6に、斜面の傾斜角 $\theta = 0^\circ$ の場合の流速分布と濃度分布の計算結果を示す。ここで、底面での体積濃度 c_b を0.01%, 0.03%, 0.05%とした。いずれのケースにおいても流速は上方に向かっていくに従って、次第に増加しており、底面濃度が大きいほど僅かに流速が大きくなっている。流速の大きさは最大で13~15m/s程度である。

雪粒子の濃度は底面付近で上方に向かって急激に減少していることがわかる。図-7には、 $\theta = 0^\circ$ の場合の無次元の乱れエネルギー(\bar{k})、分子粘性逸散率($\bar{\epsilon}$)、渦動粘性係数($\bar{\nu}_t$)の計算結果を示す。 \bar{k} は底面付近で急激に減少した後、上方に向かって緩やかに減少している。この領域では底面濃度の違いによる \bar{k} の違いは大きくはない。 $\bar{\nu}_t$ は底面付近から上方に向かって次第に大きくなり、 $z=0.5$ 付近で最大となった後、減少してゆく。 $\bar{\nu}_t$ の最大値は底面濃度が大きいほど小さい。

今回提案したモデルでは、式(72)の第2項、式(78)の右辺第2項が浮遊粒子の影響を表している。これらの項はプーシネスク近似を採用したモデルでは表れない。従って水平な場合に雪粒子の濃度の増加に伴って速度が増加する機構はプーシネスク近似モデルでは表れないことになる。このように吹雪の場合にも、底面濃度が大きいほど流速が大きくなること示された。これは雪粒子を浮遊することで、乱れエネルギーを多く消費し、渦動粘性係数が小さくなり、その結果流速勾配が大きくなったものである。同様な結果は前節でも示されており、流速分布の対数則におけるカルマン定数 κ の減少として、よく知られている現象である(志村¹⁷、日野¹⁸)。

図-8, 9に傾斜角 $\theta = 30^\circ$ の場合の計算結果を示す。この場合には、底面濃度 c_b が大きくなるに従って、流速分布、濃度分布が顕著に大きくなる。 $c_b = 0.01\%$, 0.03%, 0.05%の場合で $u_{max} = 35, 55, 75 \text{ m/s}$ ほどになっている。この理由は底面の傾斜により、雪粒子の重さの流下方向成分が大きくなるため、流速が大きくなったものである。 \bar{k} , $\bar{\epsilon}$, $\bar{\nu}_t$ の値は、水平床の場合に比べて相当大きくなっている。これは重力の斜面方向成

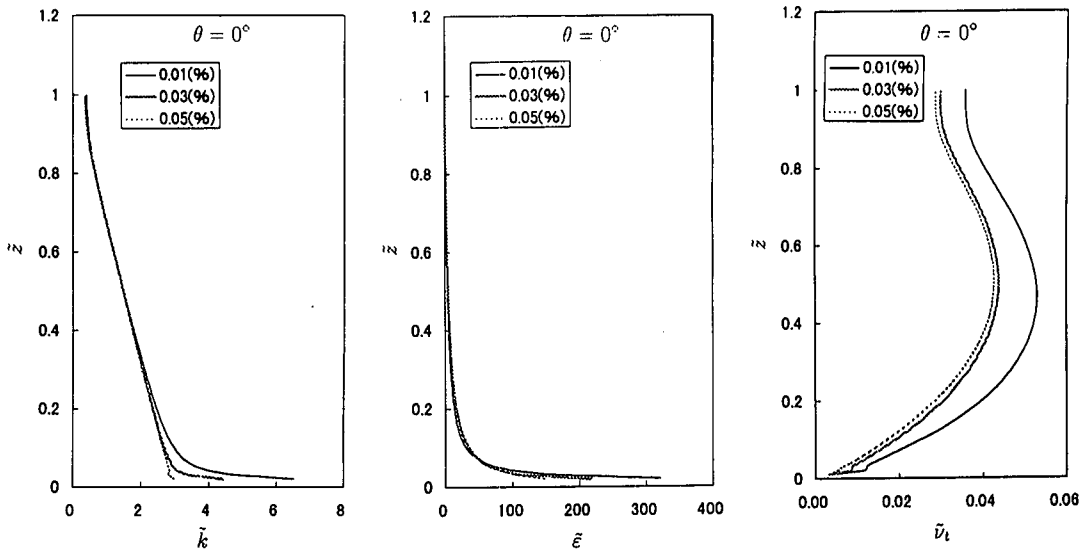


図 - 7 水平床上の吹雪の無次元乱れエネルギー，無次元分子粘性逸散率，無次元渦動粘性係数 ($\theta = 0^\circ$)

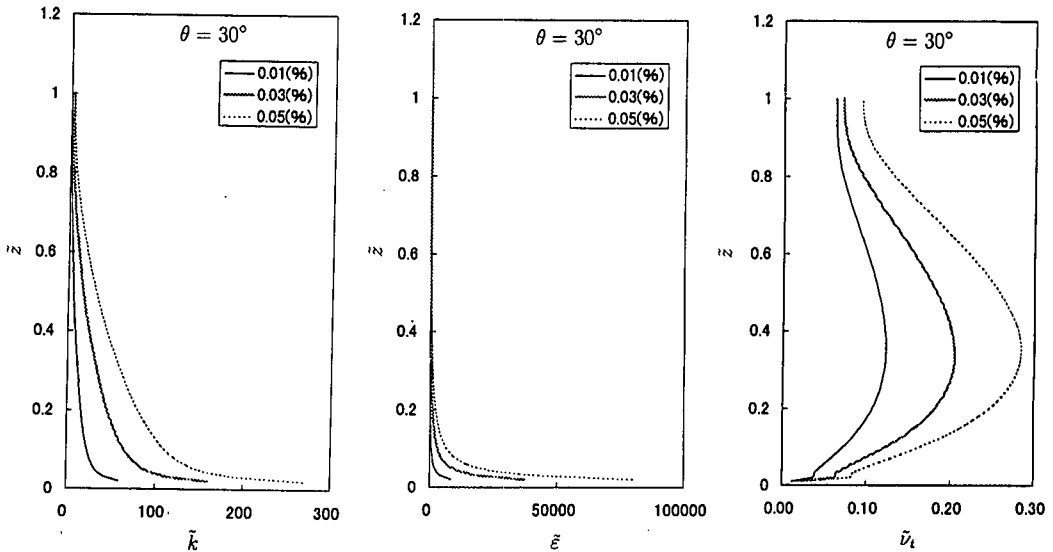


図 - 9 傾斜面上の吹雪の無次元乱れエネルギー，無次元分子粘性逸散率，無次元渦動粘性係数 ($\theta = 30^\circ$)

分が作用するため，摩擦速度 u_* が大きくなり，それが \bar{k} , $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\nu}_t$ の値に反映されたためである。

以上の結果より，雪崩特に煙型の雪崩の発生機構として，急斜面上の積雪が風によって巻き上げられ，更に自身の重さのため大きな流速となるメカニズムがあることが示唆される。

これまで，固気二相流が非ブーシネスク流体となる場合についてのモデル化を検討してきた。それではどのような場合にブーシネスク近似が破綻し，どのような場合に非ブーシネスク流体として取り扱うことが必要であるか検討した結果を図-10に示す。ここで，ブー

シネスク近似を用いた計算をブーシネスク計算，ブーシネスク近似を用いない計算を非ブーシネスク計算と呼ぶ。この場合(図-10)，底面濃度 $c_b = 0.03\%$, $\chi = 0.106$ で両者の差が現れている。 $c_b = 0.05\%$, $\chi = 0.177$ ではブーシネスク計算の流速が非ブーシネスク計算に比べ2割ほど大きな値を示している。

8. 結論

固体粒子を含む流れを非ブーシネスク流れに対し適用可能な $k - \varepsilon$ 乱流モデルを発展させた。いずれの基礎

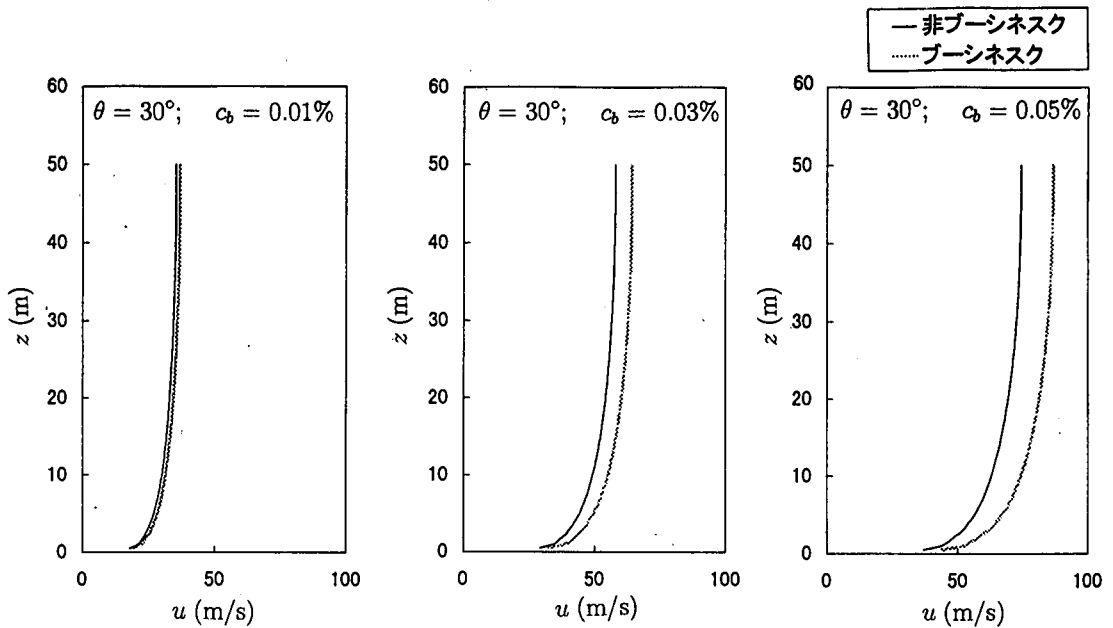


図 - 10 吹雪のブーシネスク計算と非ブーシネスク計算の比較 ($\theta = 30^\circ$)

方程式でも混合流体の密度が周囲流体の密度とほぼ等しいか、あるいは、かなり大きくなる場合をモデル化しており、ブーシネスク近似は用いていない。本モデルをブーシネスク流体である開水路の浮遊砂流に適用し、実験値との良好な一致を見た。特に、砂粒子の体積濃度が大きくなると、底面付近の速度勾配が急になるような解析結果を得た。これはカルマン定数 k の減少として古くから知られている実験事実であって、今回の解析によっても再現された。

また、本モデルを傾斜している平面上の吹雪の流動解析に適用した。斜面の傾斜角を 0° 、 30° の場合について数値解析を行った。その結果、傾斜角が 0° の場合には、底面濃度の増加に伴って、流速が若干増加することを示した。これは、先に述べた開水路の浮遊砂流で指摘された現象と同じである。また、傾斜角が 30° の場合には、底面濃度の増加に伴って流速が大きく増加することを示した。これは、濃度の増加に伴って斜面方向の重力成分が増加することに対応する。

さらに、同じ斜面の傾斜角について、ブーシネスク計算を行い、非ブーシネスク計算との比較を行った。この結果、今回検討した範囲では、 $\theta = 0^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ のいずれの場合もブーシネスク近似が許される限界が $c_b = 0.03\%$ 以下の底面濃度であることを示した。ただし、これについては僅かの計算例によるものであり、今後多くの計算例を増やし、より一般的なブーシネスク近似の許容限界を明らかにする必要がある。

本研究の一部は、文部省科学研究費、基盤研究 (C)

(課題番号 09650563 代表者福嶋祐介) の補助を受けた。ここに記して、感謝します。

参考文献

- 1) 芦田和男, 江頭進治, 佐々木幹夫, 清水義彦, 関根正人, 玉井昌宏, 藤田正治, 宮本邦明, 森明巨: 固液混相流における支配方程式とその適用性, 水工学論文集, 38, pp. 537-550, 1995.
- 2) Rodi, W.: Turbulence models and their application, *State of the Arts Paper, IAHR*, 1980.
- 3) 後藤仁志, 辻本哲郎, 中川博次: 流体・粒子相互作用系としての掃流層の数値解析, 土木学会論文集, No. 485/II-26, pp.11-19, 1994.
- 4) Crowe, C.T., Sharma, M.P. and Stock, D.E.: The Particle-Source in Cell (PSI-Cell) Model for Gas-Droplet Flows, *Jour. Fluid Eng.*, pp.325-332, 1977.
- 5) 灘岡和夫, 二瓶泰雄, 八木宏: 新しい固相モデルに基づく固体-流体混相乱流 L E S モデルの開発, 土木学会論文集, No. 533/II-34, pp.61-73, 1996.
- 6) 玉井昌宏, 村岡浩爾, 下屋陽八郎: 2 流体モデルを基礎とした $k-\epsilon$ 乱流モデルによる粒子プルームの数値計算, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp.1071-1075, 1993.
- 7) DeVantier, B.A. and Larock, B.E.: Sediment transport in stratified turbulent flow, *J. Hydraulic Eng., ASCE*, Vol. 109, No. 12, pp. 1622-1635, 1983.
- 8) 福嶋祐介: 開水路浮遊砂流の乱流構造の解析, 第 30 回水理講演会論文集, 第 30 巻, pp. 631-636, 1986.
- 9) 福田正晴, 福嶋祐介: 浮遊砂流に対する $k-\epsilon$ 乱流モデルの適合性について, 第 31 回水理講演会論文集, 第 31 巻, pp. 587-591, 1987.
- 10) 岩佐義明, 細田尚, 坂井伸一: 滑面上の浮遊砂を有する開水路流れの抵抗則について, 第 33 回水理講演会論文集, 33, pp. 595-600, 1989.
- 11) 藤崎一裕, 高崎秀一: 浮遊砂を伴う開水路流れの解析, 水工学論文集, 第 41 巻, pp. 813-818, 1997.
- 12) 小林俊一: 降雪時の吹雪空間密度の高度分布式, 低温科

- 学, Ser. A 43, pp. 79-83, 1984.
- 13) 小林俊一: 吹雪時の雪粒子の移動と限界, 地学雑誌, 100(2), pp. 240-249, 1991.
 - 14) Uematsu, T., Nakata, T., Tekeuchi, K., Arisawa, Y. and Keneda, Y.: Three-dimensional numerical simulation of snowdrift, *Cold Region Science and Technology*, Vol. 20, pp. 65-73, 1991.
 - 15) 福嶋祐介: 乱流モデルによる傾斜壁面密度噴流の解析, 土木学会論文集, 第399号, II-10, pp. 65-74, 1988.
 - 16) Vanoni, V.A. and Nomicos, G.N.: Resistance properties of sediment-laden streams, *Trans. American Soc. Civil Engrs*, Vol. 125, pp. 1140-1175, 1960.
 - 17) 志村博康: 流砂ある水流の諸特性について, 土木学会論文集, 第46号, 1657.
 - 18) 日野幹雄: 固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化, 土木学会論文集, 第92号, pp. 11-20, 1963.
 - 19) 辻本哲郎, 後藤仁志, 中川博次: 流体・粒子間干渉を考慮した浮遊砂流の数値シミュレーション, 混相流シンポジウム講演論文集, 1995.
 - 20) Graf, W.H.: *Hydraulics of Sediment Transport*, Water Resources Publications, p.42, 1984.

(1998. 6. 15 受付)

NUMERICAL ANALYSIS OF SOLID-GAS AND SOLID-LIQUID TWO PHASE FLOW USING NON-BOUSSINESQ $k - \epsilon$ TURBULENCE MODEL

Yusuke FUKUSHIMA, Masashi KAGAMIHARA and Kazuyoshi NOGUCHI

The Boussinesq approximation for flow calculation is invalid in the case of snow drift and avalanches, in which the density of snow particles is appreciably larger than that of air. The formulation of $k - \epsilon$ turbulence model for the solid-fluid two-phase flow considering the density variation is presented. The model is applied to sediment-laden streams. It is shown that the model explains well the experimental data. The model calculations for the snow drift in the cases of the slope angle of 0° and 30° , respectively, are carried out. As the bed concentration of snow particles is larger, the velocity is considerably larger in case of 30° . The Boussinesq approximation is inadequate, when the near bed concentration becomes larger than 0.03% for snow drift.