

条件付非正規確率場を推定するための近似解法

野田 茂¹・長舟 健²・星谷 勝³

¹正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部社会開発システム工学科 (〒680-0945 鳥取市湖山町南4-101)

²正会員 国際航業(株) 海洋エンジニアリング部 (〒660-0805 尼崎市西長洲町1-1-5)

³正会員 Ph. D. 武蔵工業大学教授 工学部土木工学科 (〒158-0087 東京都世田谷区玉堤1-28-1)

確率論的補間法である Kriging 法は条件付確率場を更新するための技法であるが、これまでは主に正規確率場に適用されてきた。一般的な非正規確率場を推定する理論は星谷・野田・稲田(1997)によって提案されているが、観測点数が増えると、推定誤差分散を厳密に求めることは容易でない。そこで本研究では、非正規確率場においてノイズを含む観測値が与えられた条件下で、未観測点の物理量を推定するための近似解法を提案する。この方法では、非正規確率場を変換した正規確率場にカルマンフィルタを適用し、不偏性、最小誤差分散の両条件を満足させた上で、得られた結果を逆変換する。厳密解が知られている対称正規確率場を対象に数値計算を行い、近似解と理論解を比較した結果、本アルゴリズムの有効性、近似度などが明らかになった。

Key Words: non-Gaussian field, stochastic interpolation, kriging, Kalman filter, nonlinear unbiased estimator, approximate solution

1. 序論

最近では高解像度の人工衛星などにより同時刻にかつ空間的に密な観測値を得ることができるようになった。この場合各種の処理法を用いて時系列データを時間一周波数上で解析すると同様に、観測値を空間(位置)一波数上で処理することが可能である。しかしながら時間的に同時性が低く、空間的に疎な観測値に対してそのまま時系列解析のような統計処理を行うことは難しい。

古くは、時間的・空間的に疎な観測値に対して、経験と勘に基づいて等高線マップを描き、全体的な空間分布を捉える方法が用いられてきた。しかしながらこのような方法では解析者の主観に依存することになり、解析者が異なると異なる結果が得られ、客観的な結果を示すことができない。そこで客観的な補間・内外挿法を用いて、疎な観測値を対象領域内における格子上の空間データに変換する作業が行われる。

上述した客観的空間補間法には2つの方法がある。その一つは多項式法である。この方法によれば、得られた観測値を真値と見なした上で、双曲線関数などの曲面関数、スプライン関数で表した等値曲面を仮定し、観測値を基にしてこれら関数の係数を求めることにより、格子上の推定値を得ることができる。ところが実際には観測誤差などのため、得られた観測値は真値ではなく、誤差を含むことがある。このような場合には真値と格子点での推定値間の誤差を最小にするように、最適内外挿法を用いて格子上で最適推定値と推定誤差分散を求める第2の方法が用いられる。第1の方法は確

定論的補間法であり、第2の方法は確率論的補間法として知られている。

第2の補間法として、確率場の概念を用いて空間的に分布する地盤物性値や最大地動などのモデル化を行い、さらにはボーリング調査や地震計などによって得た観測値を併用することにより、未観測点における物理量を推定する研究が行われている。これは、確率場の一つの実現象である観測値を用いて空間分布を捉える条件付確率場の研究である。よく用いられる Kriging とは、鉱山工学の分野で開発され、空間分布を確率場として捉え、有限地点における既知の観測値を基にして未観測点の物理量を推定する方法である^{1),2)}。

条件付確率場の空間分布を厳密に捉えるためには、多次元結合条件付確率密度関数が必要である。この確率密度関数の平均値や共分散を正確に推定するためには多数のデータを必要とする。しかし現実には多くのデータを得ることは容易でない。平均値や共分散を規定するパラメータを厳密に求めることが難しいため、統計的モデル化に基づいて多次元結合条件付確率密度関数を推定することが行われる。

Kriging では、観測値を用いると、条件付確率場の空間分布を推定できるとともに、その推定誤差をも評価できる。一般によく適用されている Simple Kriging では非均一平均値と共分散を事前に既知量として、Universal Kriging では未知の非均一平均値と既知の共分散を与えている。これらの母数を推定することが容易でないため、Universal Kriging では、空間に依存した平均値の関数形を既知とするが、それを規定するパラメータを未知量としている。

前述した確定的補間手法は単に観測値を用いて未観測点の物理量を推定するのに対し、確率的補間手法では観測情報に基づいて事前確率場の更新が行われる。物理量の確率的空間分布の研究は注目されるべき研究テーマの一つであるが、正規確率場を前提にした研究がほとんどである。文献3)~5)では、正規確率場を対象に観測値を用いてKriging法により最適な線形補間推定値を求め、推定誤差分散を考慮することにより、未観測点における物理量のサンプル場を効率的に求める条件付シミュレーション法を提案している。また、この条件付シミュレーション理論が条件付確率密度関数法(CPDF法)と厳密に対応することを示している。さらに正規確率場におけるSimple Krigingの定式化がカルマンフィルタのアルゴリズムと等価であることは文献4)によって明らかになった。

地盤物性値や最大地動の観測値を統計的に解析すると、対数正規分布などの非正規性を示すことがある。そこで文献6)では対数正規確率場を対象にして条件付確率場の推定理論を導くとともに、条件付シミュレーション法を提案している。また文献7)ではより一般的な非正規確率場の更新理論の厳密解法を提案しているが、観測点数が増えると、推定誤差分散の評価に多重積分が必要となり、その解析解を求めることは容易でない。両文献における理論的研究ならびに数値解析の結果、1)Krigingによる最適推定値は条件付平均値に等しいこと、2)推定誤差分散は条件付分散に一致しないこと、3)推定誤差分散は観測位置のみに依存し、観測値に無関係であるが、条件付分散は観測値に依存すること、4)条件付シミュレーションには最適推定値と条件付分散が関与することなどが明らかになっている。このうち項目2)と3)は正規確率場の性質と異なる非正規確率場の特徴である。

非正規確率場の条件付シミュレーションを実施するため、文献8)、9)では非正規確率場の無条件シミュレーション法と文献3)~5)で提案された正規確率場の条件付シミュレーション法を組み合わせた反復解法を示している。この方法では、まず、確率変数間の相関性を考慮せずに非正規確率変数を正規確率変数に変換し、正規確率場においてサンプル場の条件付シミュレーションが行われる。次に、その結果を与えられた非正規確率場に逆変換したサンプル間の相関係数を求め、その値が目標の相関係数に一致するまで収束計算を繰り返すと、非正規確率場のサンプル値が得られる。ただし数値シミュレーションによる検証しか行われていないため、著者らが見出した知見(上記2)と3)の項目)は得られていない。

非正規確率場に従う条件付補間問題を解くため、MatheronはDisjunctive Krigingを提案した¹⁰⁾。この

方法によれば、最適推定値は線形補間式ではなく、エルミート多項式の級数で表される。不偏性ならびに推定誤差分散最小化の条件を考慮すると、多項式の係数は線形連立方程式の解として求められる。ただし、このDisjunctive Krigingは均一な確率場にしか適用できないので、実用的ではない。また一般的な非正規確率場を対象にしたとき、複雑な計算を伴っているため、数値的に安定した高精度な解が得られる保証はない。

以上のことから、本研究では、一般的な非正規確率場において観測値が与えられた条件下で、不偏性、最小誤差分散の条件を満足するように、未観測点での物理量を近似的に推定するための同定アルゴリズムを提案する。その上で厳密解が導かれている対数正規確率場に本手法を適用して数値解析を行い、推定値の近似度、ノイズの影響などについて分析する。

2. 条件付非正規確率場の厳密解

非正規・不均一確率場の離散空間地点 Z_i における物理量の確率変数を $Y(Z_i)$ とする。このとき、 N 地点で観測が行われ、観測値 $\underline{Y}(Z_i)(i=1\sim N)$ が得られたとする。以下、下線の付いた記号は観測値、下線の付かない記号は確率変数であることを意味する。

今、任意地点 Z_i における確率変数 $Y(Z_i)$ の無条件平均値 $m(Z_i)$ 、無条件分散 $C(Z_i, Z_i)$ 、2点 Z_i と Z_j における $Y(Z_i)$ と $Y(Z_j)$ 間の無条件共分散 $C(Z_i, Z_j)$ 、 $Y(Z)$ の非正規確率密度関数は与えられていると仮定する。従って、 $Y(Z_i)$ と $Y(Z_j)$ の相関係数 $\rho(Z_i, Z_j)$ は $C(Z_i, Z_j)/\sqrt{C(Z_i, Z_i)C(Z_j, Z_j)}$ として既知である。

上記のように事前情報を設定し、星谷らは、 N 地点で観測値 $\underline{Y}(Z_i)(i=1\sim N)$ が与えられた条件下において、未観測点 Z_r における物理量 $Y(Z_r)$ の最適推定値、推定誤差分散を導く理論を提案している⁷⁾。この理論は、非正規確率変数 $Y(Z_i)$ を標準正規確率変数 $X'(Z_i)$ に変換して標準正規確率場における条件付平均値 $\hat{X}'_P(Z_r)$ (あるいは最適推定量 $\hat{X}'_P(Z_r)$)と条件付分散 $\sigma'^2_P(Z_r)$ を求めた上で、これを用いて非正規確率場の条件付推定量を得ることを基本としている。なお、 X' と Y は等価標準正規変換式によって関連づけられる。また、 $'$ は標準正規確率変数に関連した項を、添字の P は条件付確率密度関数によって算定される厳密解であることを意味する。

$X'(Z_i)(i=1\sim N)$ よりなる確率変数ベクトル X'_N は、平均値ベクトル 0 、分散ベクトル 1 、 $X'(Z_i)$ と $X'(Z_j)$ の相関係数 $\rho'(Z_i, Z_j)$ を要素とするマトリックス R'_N からなる N 次元標準正規結合確率密度関数 $\varphi_N(X'_N, R'_N)$ に従う。ただし、非正規確率場の相関

係数 $\rho(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j)$ と標準正規確率場の相関係数 $\rho'(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j)$ の関係は解析的に導かれる場合もあるが、一般には収束計算により求められる¹¹⁾。

文献7)によれば、未観測点 \mathbf{Z}_r における物理量 $Y(\mathbf{Z}_r)$ の最適推定値 $\hat{Y}_p(\mathbf{Z}_r)$ 、推定誤差分散 $\sigma_p^2(\mathbf{Z}_r)$ は、等価標準正規変換式 $Y = g(X')$ 、標準正規確率密度関数 $\varphi(\cdot)$ 、標準正規確率場における条件付平均値 $\hat{X}'_p(\mathbf{Z}_r)$ (あるいは最適推定量 $\hat{X}_p(\mathbf{Z}_r)$)、条件付分散 $\sigma_p^2(\mathbf{Z}_r)$ を用いると、以下の式(1)、(5)で表せる。

まず、最適推定値 $\hat{Y}_p(\mathbf{Z}_r)$ は

$$\hat{Y}_p(\mathbf{Z}_r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(X'(\mathbf{Z}_r))}{\sigma_p'(\mathbf{Z}_r)} \varphi\left(\frac{X'(\mathbf{Z}_r) - \hat{X}'_p(\mathbf{Z}_r)}{\sigma_p'(\mathbf{Z}_r)}\right) dX'(\mathbf{Z}_r) \quad (1)$$

のようになる。ただし、 $\hat{X}'_p(\mathbf{Z}_r)$ は式(2)、 $\sigma_p^2(\mathbf{Z}_r)$ は式(3)で表せる。両式中の重み係数 λ'_i は、相関係数 $\rho'(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j)$ 、 $\rho'(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_r)$ ($i, j = 1 \sim N$)を用いると、式(4)の連立方程式の解として求められる。式(2)の $X'(\mathbf{Z}_i)$ ($i = 1 \sim N$)は観測値 $Y(\mathbf{Z}_i)$ を等価標準逆変換式に代入すると、 $g^{-1}(Y(\mathbf{Z}_i))$ として与えられる。

$$\hat{X}'_p(\mathbf{Z}_r) = \sum_{i=1}^N \lambda'_i X'(\mathbf{Z}_i) \quad (2)$$

$$\sigma_p^2(\mathbf{Z}_r) = 1 - \sum_{i=1}^N \lambda'_i \rho'(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_r) \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda'_j \rho'(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j) = \rho'(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_r) \quad (i = 1 \sim N) \quad (4)$$

一方、推定誤差分散 $\sigma_p^2(\mathbf{Z}_r)$ は次式で求められる。

$$\begin{aligned} \sigma_p^2(\mathbf{Z}_r) &= m(\mathbf{Z}_r)^2 + C(\mathbf{Z}_r, \mathbf{Z}_r) \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(X'(\mathbf{Z}_r))}{\sigma_p'(\mathbf{Z}_r)} \right. \\ &\cdot \varphi\left(\frac{X'(\mathbf{Z}_r) - \hat{X}'_p(\mathbf{Z}_r)}{\sigma_p'(\mathbf{Z}_r)}\right) dX'(\mathbf{Z}_r) \left. \right\}^2 \\ &\cdot \varphi_N(X'_N, \mathbf{R}'_N) dX'(Z_1) \dots dX'(Z_N) \quad (5) \end{aligned}$$

上式において、 $\hat{X}'_p(\mathbf{Z}_r)$ は式(6)で、 $\varphi_N(X'_N, \mathbf{R}'_N)$ は式(7)で表せる。

$$\hat{X}'_p(\mathbf{Z}_r) = \sum_{i=1}^N \lambda'_i X'(\mathbf{Z}_i) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_N(X'_N, \mathbf{R}'_N) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{R}'_N|^{1/2}} \\ &\cdot \exp\left(-\frac{1}{2} X'_N{}^T \mathbf{R}'_N{}^{-1} X'_N\right) \quad (7) \end{aligned}$$

なお式(6)の重み係数 λ'_i は式(4)の解である。

式(1)の最適推定値は条件付平均値に一致し、不偏推定式ならびに最小誤差分散推定式を満足している。ここでは条件付分散の式を割愛したが、式(5)の推定誤差分散が条件付分散と異なることは星谷ら⁷⁾によって証明さ

れた。最適推定値は式(1)に見られるように観測値に依存した標準正規確率場の条件付平均値 $\hat{X}'_p(\mathbf{Z}_r)$ を評価式に含んでいる。条件付分散も同様であり、これらの値は観測値に左右される。一方、式(5)の推定誤差分散の評価式には $\hat{X}'_p(\mathbf{Z}_r)$ を含むが、これは $X(\mathbf{Z}_i)$ ($i = 1 \sim N$)に関する積分の中に含まれているため、推定誤差分散は観測値に独立であり、観測点位置のみに左右される。これらの特徴は正規確率場と異なる性質であり、既に野田・星谷⁶⁾によって対数正規確率場において指摘された知見である。

式(1)の最適推定値、式(5)の推定誤差分散の算定式は与えられた非正規分布に従う確率変数を等価標準正規確率変数に変換可能ならば、すなわち変数の変換式 $g(\cdot)$ さえ求めることができれば、任意の非正規確率場に適用できる。しかしながら、これらの式には $g(\cdot)$ を含む積分が存在する。対数正規分布のように解析的に積分可能な形で $g(\cdot)$ が得られる場合を除いて、一般の非正規分布に対して式(1)、(5)を求めるには数値積分を行わなければならない。特に式(5)の評価に当たっては $(N+1)$ 重積分を必要とするため、観測点数が増えると、推定誤差分散の数値処理は必ずしも容易ではない。計算精度、数値的安定性、計算時間を勘案すると、この推定誤差分散の数値的評価は事実上不可能に近い。

従って、非正規分布に従う条件付確率場においては、全ての確率分布に対して最適推定値、推定誤差分散を解析的に推定することが可能とは限らず、これらの推定結果を近似的に求めることも必要となる。そこで、次章では式(1)、(5)の近似解法を提案するとともに、対数正規確率場における厳密解を本論文の定式化に対応づける。

3. 条件付非正規確率場の近似解

(1) 問題の設定

時間的・空間的に不規則に生起あるいは分布する現象は確率場によって表される。このとき一連の観測値から得られる情報を用いると、事前確率場は更新される。ここでは物理量を確率変数として取り扱い、対象システムをモデル化し、状態量で表現する。状態量は線形モデルで表す。観測によって事前確率場は更新されるが、その更新の程度はどの物理量をどこで観測するか、あるいはノイズの混入の割合などによって影響を受ける。このとき状態量と観測量を結びつける非線形な観測モデルを仮定する。状態量が正規性を有していても、対象となるシステムが非線形であると、観測値は非正規性となる。

今、 k 番目のデータセットに対し、正規確率場の状態量(総数 L)をベクトル $X_k = (X_k(Z_1), \dots, X_k(Z_L))^T$,

非正規確率場の観測量(総数 N)をベクトル $Y_k = ({}_1Y_k(Z_1), \dots, {}_N Y_k(Z_N))^T$ とする。 $k-1$ 番目のデータセットの情報に基づくと、状態方程式は式(8)で、観測方程式は式(9)で表せる。

$$X_k = f(X_{k-1}, k-1) + w_{k-1} \quad (8)$$

$$Y_k = h(X_k, k) + v_k \quad (9)$$

ここに、 $f(X_{k-1}, k-1)$ は状態量の更新過程を意味するベクトル関数である。 $h(X_k, k)$ は状態量と観測量を結びつける任意の非線形ベクトル関数である。ベクトルの w_{k-1} 、 v_k はシステムノイズ、観測ノイズであり、ホワイトノイズで表せる。

本研究では条件付非正規確率場の推定問題を取り扱うに当たって、非正規確率場を正規確率場に変換することを考える。このためには両確率場を結びつける関数式を必要とする。そこでまず、観測値を用いて事前統計量のモデル化を行うとともに、非正規確率分布 $P(y)$ を求める。次に、Fig.1のように、これを正規確率分布 $\Phi(x)$ に対応させると、正規確率変数 x と非正規確率変数 y を関係づける逆関数 $h^{-1}(\cdot)$ が求められる。すなわち、正規確率変数 x は $x = \Phi^{-1}(P(y))$ によって表せる。言い換えれば、 $y = P^{-1}(\Phi(x))$ の関係式すなわち $y = h(x)$ の式が得られる。

一回の観測によって得られた観測値を用いると、 y の頻度分布すなわち非正規確率分布 $P(y)$ が得られる。観測値 $y_i (i = 1 \sim N)$ に対応した正規確率変数 x_i は $P(y_i) = \Phi(x_i)$ の式を満たす解である。例えば、 $y = h(x)$ の関数式として $h(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ を仮定すれば、データセット $(x_j, y_j) (j = 1 \sim N)$ に対して $y_j = h(x_j)$ が定義できる。これより通常の回帰分析法を用いれば、多項式中の各係数 $a_i (i = 1 \sim n)$ は容易に求められる。なおデータ数 N が少ないときには先験知識などによって $h(x)$ を与えればよい。

(2) 近似解法

この近似解法は2.で述べた厳密解法と同様に、非正規確率場を正規確率場に変換し、正規確率場で補間問題を解き、その解を元の非正規確率場に逆変換することを基本としている。その際、正規確率場の条件付推定において、2.の厳密解法ではCPDF法を採用しているのに対し、この近似解法では拡張カルマンフィルタを用いる。さらに逆変換において、厳密解法では数値積分を実施するのにに対し、近似解法では不偏性を保証するように正規確率場の最適推定量の近傍で変換式をテーラー級数に展開して推定結果(最適推定量, 推定誤差分散)を求めることで、複雑な多重積分の操作を避けることができる。

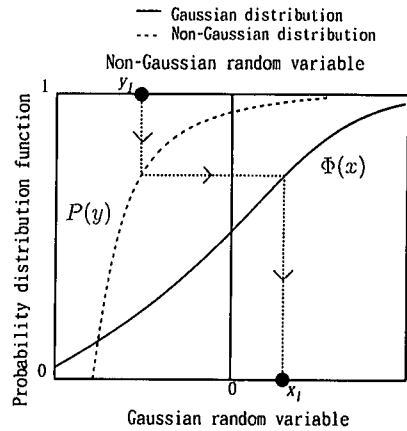


Fig.1 Mapping of non-Gaussian random variable y (dashed line) into Gaussian random variable x (solid line)

まず、非正規確率場の確率特性(Z 地点の無条件平均値 $m(Z)$ 、 Z_i と Z_j 地点における無条件共分散 $C(Z_i, Z_j)$)を正規確率場の無条件平均値 $m_e(Z)$ 、無条件共分散 $C_e(Z_i, Z_j)$ と関連づける。この関連式としては対数正規確率場のように解析的に与えられる場合もあるが、一般的には近似式¹¹⁾を用いればよい。その上で状態量 X_k の初期値ベクトル $\widehat{X}_{0|0}$ 、初期推定誤差共分散行列 $P_{0|0}$ は L 箇所の地点における $m_e(Z_i)$ 、 $C_e(Z_i, Z_j) (i, j = 1 \sim L)$ を用いて表す。

条件付正規確率場の補間問題は、Fig.2のアルゴリズムによって処理することができる。すなわち、正規確率場における最適推定量 $\widehat{X}_{k|k}$ と推定誤差共分散 $P_{k|k}$ は式(8)、(9)に拡張カルマンフィルタのアルゴリズム^{12)、13)}を適用すると容易に得ることが可能である。これらの結果を用いて非正規確率場に変換する際、推定の偏りを補正すると、最適推定量 $\widehat{Y}_{k|k}$ と推定誤差共分散 $\widehat{P}_{k|k}$ を求めることができる。なお、Fig.2は以下に示す式(10)、(11)の特別な場合、すなわち2次近似の変換アルゴリズムを示したものである。

複数個の確率変数よりなる非線形関数のモーメント(平均値、分散)は、計測理論における誤差伝播解析と同様な手順によって求めることができる¹⁴⁾。すなわち、複数の確率変数よりなる関数をその確率変数の平均値周りにテーラー級数に展開した上でその関数の数学的期待値を求めると、関数の平均値は関数を構成する確率変数のモーメントによって表すことができる。関数のテーラー級数展開項から関数の平均値を引いて2乗し、その2乗項の期待値をとると、非線形関数の分散が求められる。ただし、これらの計算のためには変数の高次モーメントが必要となる。文献14)には級数を1次の

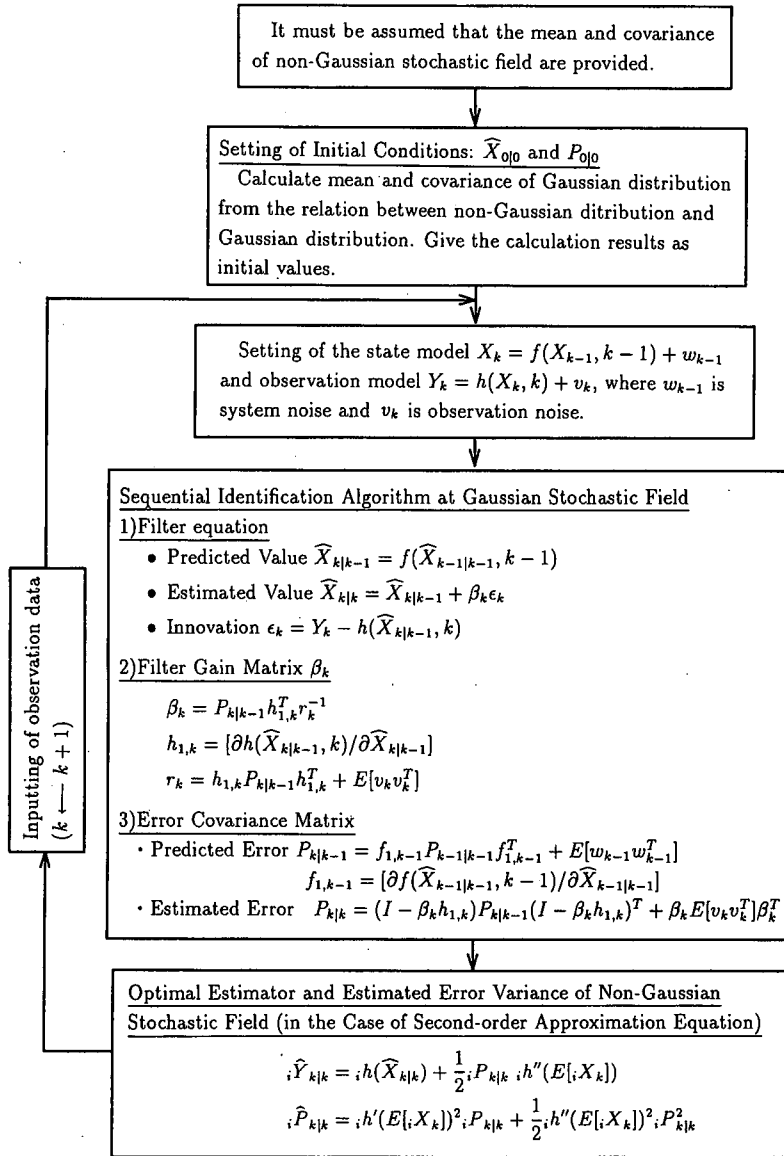


Fig.2 Flow diagram for estimating conditional non-Gaussian stochastic fields

項，2次の項で打ち切って求められる1次近似，2次近似の平均値，分散の式が示されている。本研究では確率変数の関数に関するモーメント計算の考え方をテーラー級数の高次項にまで拡張し，条件付推定理論に特有の近似解を算定する方法を提案する。

上述した確率変数の関数のモーメント計算に従い，正規確率場における最適推定量 ${}_i \widehat{X}_{k|k}$ ($\widehat{X}_{k|k}$ の i 要素)の回りに式(9)の $h(\cdot)$ をテーラー級数に展開する。ただし無偏性を保証するために， X に関する $h(X)$ の偏導関数は

無条件平均値 $E[{}_i X_k]$ ($E[X_k]$ の i 要素)における値をとるものとする。非線形関数 $h(\cdot)$ のテーラー級数を M 次項で打ち切ってその平均値と分散を計算すると，ベクトル Y_k の i 要素の最適推定量 ${}_i \widehat{Y}_{k|k}$ ，推定誤差分散 ${}_i \widehat{P}_{k|k}$ は，おのおの，式(10)，(11)によって近似的に表せる。その結果は M 次近似解となる。この近似は，テーラー級数の高次の項を考慮することにより，逐次改良することができる。

この場合，上述したように状態量 X に関する高次モー

メントが必要となるが、 X は正規確率変数であるので、 X の奇数次モーメントは0で、偶数次の高次モーメントは2次モーメントで表せることになる¹⁵⁾。この2次モーメントは、条件付正規確率場の推定誤差分散が条件付分散に一致するので、その条件付分散によって表せる。このことを利用して、式(12)の記号を定義した上で、実用的な近似式として整理したのが式(10)、(11)である。なお、 \hat{Y} , h , P の添字 i は、ベクトルの i 要素あるいはマトリックスの i 番目の対角要素を意味する。

$$\begin{aligned} {}_i\hat{Y}_{k|k} &= {}_i h(\widehat{X}_{k|k}) \\ &+ \sum_{l=1}^{M/2} \frac{S_{2l}}{(2l)!} {}_i h^{(2l)}(E[{}_i X_k]) \quad (i=1 \sim L) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} {}_i\hat{P}_{k|k} &= \sum_{l_1=1}^{M/2} \sum_{l_2=1}^{M/2} ({}_i P_{k|k})^{l_1+l_2-1} \left\{ T_{l_1 l_2} {}_i h^{(2l_1)}(E[{}_i X_k]) \right. \\ &\quad \cdot {}_i h^{(2l_2)}(E[{}_i X_k]) + Q_{l_1 l_2} {}_i h^{(2l_1-1)}(E[{}_i X_k]) \\ &\quad \left. \cdot {}_i h^{(2l_2-1)}(E[{}_i X_k]) \right\} \quad (i=1 \sim L) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} N_l &= 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2l-1) \\ S_n &= N_{\frac{n}{2}} ({}_i P_{k|k})^{\frac{n}{2}} \\ T_{l_1 l_2} &= \frac{N_{l_1+l_2} - N_{l_1} N_{l_2}}{(2l_1)!(2l_2)!} {}_i P_{k|k} \\ Q_{l_1 l_2} &= \frac{N_{l_1+l_2-1}}{(2l_1-1)!(2l_2-1)!} \\ {}_i P_{k|k} &= \text{推定誤差共分散行列 } P_{k|k} \text{ の } i \text{ 対角要素} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで、 ${}_i h'$ (あるいは ${}_i h^{(1)}$)、 ${}_i h''$ (あるいは ${}_i h^{(2)}$)、 \dots 、 ${}_i h^{(2l)}$ は、 ${}_i X_k (i=1 \sim L)$ に関する1次、2次、 \dots 、 $(2l)$ 次偏導関数を意味する。

式(10)の右辺第1項は単なる逆変換式で、絶対誤差評価関数に基づいて求められる条件付中央値に相当する。ここでは2乗誤差平均の最小化規範に基づいて推定計算を行うことを基本としているので、この項を用いた推定量は不偏性を満たさない。すなわち推定量の数学的期待値 $E[{}_i h(\widehat{X}_{k|k})]$ は非正規確率変数の無条件平均値 $E[{}_i Y_k(\mathbf{Z}_i)] = m(\mathbf{Z}_i)$ に一致しない。この第1項は $h(\cdot)$ のテーラー級数を1次の項で打ち切って求められる1次近似の推定量であるが、単なる変換式で0次近似解と同一なので、以下においてはこの1次近似解を0次近似解と呼ぶことにする。

式(10)と式(11)において、 M を2とすると、Fig.2中の2次近似推定式が得られる。正規確率場の推定誤差分散が式(10)右辺第1項に比較して小さければ、 $h(\cdot)$ が非

線形関数であっても、2次近似解は実用的に十分なものになると考えられる。この関係を用いると非正規確率場における最適推定量ならびに推定誤差分散を容易に求めることができる。推定精度を高めるためには M の値を大きくとり、より高次項を評価するようにすればよい。

これまでの記号、式において添字の k は観測ステップを表しており、Fig.2に示すループの k に対応している。従って Fig.2 中の $k|k-1$ は $(k-1)$ ステップまでの観測情報を用いた k ステップでの推定を、 $k|k$ は k ステップまでの観測情報を用いた k ステップでの推定を意味する。 $k=1$ の場合、 $k=0$ における無条件特性値(無条件平均値、無条件共分散)、1組の観測値に基づいて推定量が得られることになる。複数組の観測値が得られた場合には Fig.2 のループが繰り返される。複数ステップからなる条件付推定問題においては、あるステップの最適推定量ベクトル、推定誤差共分散行列が次のステップの事前情報として引き継がれることになり、複数ステップの観測情報から総合的に真値を推定することが可能になる。特にノイズで汚染された観測値が複数組得られている問題においては推定結果を順次更新できるので、より真値に近づいた解を見出すことができると期待される。

さて、ここで重要なことは不偏性を満たすように逆変換を行うことである。以下に示すように、不偏性はテーラー級数展開の高次項を含むことによって満足される。

式(10)よりわかるように、正規確率場での推定量 $\widehat{X}_{k|k}$ を用いて関数 $h(\cdot)$ から ${}_i h(\widehat{X}_{k|k})$ を求めても、この値は非正規確率場での最適推定量にはならない。これは前述のように絶対誤差評価関数に基づく条件付中央値を求めていることに他ならない。非正規確率場における不偏最小誤差共分散規範に基づく解は条件付平均値である。この条件付平均値は既に述べた非線形関数のモーメントの定義より明らかなように、式(10)右辺の高次項を含むとよりよい近似値になる。このことは本論の推定評価関数の定義に従う限り、正規確率場の最適推定量 $\widehat{X}_{k|k}$ を単に変換式 $h(\cdot)$ に代入しても不偏推定量が得られないことを意味する。この点は極めて重要な事項であるが、Kriging 推定法の定義を無視して補間を行う場合がある^{16), 17)}。

例えば文献16)では非正規確率場の最適推定量を ${}_i h(\widehat{X}_{k|k})$ によって計算している。後述する数値計算例でも明らかなように、この方法は無条件分散が小さい確率場に適用した場合にのみ近似的に成立する。しかしながら一般的にこのような考え方が理論的かつ数値的に成り立たないことは本論の展開・分析で明らかである。

(3) 対数正規確率場における厳密解との関係

具体的に対数正規確率場を対象にした場合には $h(x) = e^x$ になるので、このときの内外挿問題を考えてみる。

この場合、文献6)のKriging法によれば、対数正規確率場の未観測点 Z_r における最適推定値は、正規確率場の推定値 $\hat{Y}_{K_e}(Z_r)$ (式(14))を用いた計算値 $\exp(\hat{Y}_{K_e}(Z_r))$ すなわち $h(\hat{Y}_{K_e}(Z_r))$ ではなく、式(13)の $\hat{Y}_K(Z_r)$ になる。ここに、添字の K はKriging法による解、添字の e は正規確率場であることを意味する。

$$\hat{Y}_K(Z_r) = \exp \left\{ \hat{Y}_{K_e}(Z_r) + \frac{1}{2} \sigma_{K_e}^2(Z_r) \right\} \quad (13)$$

$$\hat{Y}_{K_e}(Z_r) = m_e(Z_r) + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\ln Y(Z_i) - m_e(Z_i)) \quad (14)$$

$$\sigma_{K_e}^2(Z_r) = C_e(Z_r, Z_r) - \sum_{i=1}^N \lambda_i C_e(Z_i, Z_r) \quad (15)$$

上式の名記号を説明すると、次のようになる。 $m_e(Z_r)$ は $\ln Y(Z_r)$ の、 $m_e(Z_i)$ は $\ln Y(Z_i)$ の無条件平均値、 $C_e(Z_r, Z_r)$ は $\ln Y(Z_r)$ の無条件分散、 $C_e(Z_i, Z_r)$ は $\ln Y(Z_i)$ と $\ln Y(Z_r)$ の無条件共分散、 $\sigma_{K_e}^2(Z_r)$ は正規確率場の推定誤差分散、 $Y(Z_i)$ は地点 Z_i における観測値である。ただし、重み係数 λ_i は次式の連立方程式によって求められる。

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j C_e(Z_i, Z_j) = C_e(Z_i, Z_r) \quad (i = 1 \sim N) \quad (16)$$

一方、Kriging手法⁶⁾によると、対数正規確率場における推定誤差分散 $\sigma_K^2(Z_r)$ は式(17)によって求められる。

$$\sigma_K^2(Z_r) = m(Z_r)^2 e^{C_e(Z_r, Z_r)} (1 - e^{-\sigma_{K_e}^2(Z_r)}) \quad (17)$$

ここに $m(Z_r)$ は $Y(Z_r)$ の無条件平均値である。

文献7)では、式(13)の $\hat{Y}_K(Z_r)$ が式(1)の $\hat{Y}_P(Z_r)$ に、式(17)の $\sigma_K^2(Z_r)$ が式(5)の $\sigma_P^2(Z_r)$ に一致することを証明している。このことは、不偏推定・最小誤差共分散規範に基づくKriging法の最適推定値、推定誤差分散が2.で示したCPDF法による算定結果と対応することを意味する。すなわちKriging法とCPDF法は等価であることが理解できる。

絶対誤差評価規範に基づいた対数正規確率場における最適推定値は条件付中央値であり、 $\exp(\hat{Y}_{K_e}(Z_r))$ で評価される。これは前述のように式(10)の0次近似解に相当する。式(13)において $\ln Y(Z_i)$ の代わりに $\ln Y(Z_i)$ とおいて最適推定量 $\hat{Y}_K(Z_r)$ を得た上で、その数学的期待値を求めると、 $E[\hat{Y}_K(Z_r)] = m(Z_r)$ となり、不偏性が成立する。しかしながら条件付中央値の期待値 $E[\exp(\hat{Y}_{K_e}(Z_r))]$ は $m(Z_r)$ に一致せず、不偏性を満たさない。

式(10)において $M = 2$ とおけば2次近似解による最

適推定量が得られ、この解に対応した推定誤差分散は式(11)で $M = 2$ とおけば求められる。これらの2次近似解を具体的に示したのがFig.2中の式である。図中の各式の右辺第1項はテーラー級数を1次の項で打ち切った1次近似項である。そこで以下では式(11)の右辺第1項のみ、すなわち $h(\cdot)$ に関する1次偏導関数のみを考え、最適推定値 $h(\hat{X}_{k|k})$ に対応した推定誤差分散算定式 $h'(E[i; X_k])^2 P_{k|k}$ の近似度を検討する。

この場合、対数正規確率場すなわち $h(x)$ が e^x であれば、式(15)の記号を用いると、推定誤差分散の近似解は

$$\sigma_K^2(Z_r) \doteq \sigma_{K_e}^2(Z_r) e^{2m_e(Z_r)} \quad (18)$$

となる。ここに $m_e(Z_r)$ は前述のように $\ln Y(Z_r)$ の無条件平均値であり、式(11)の $E[i; X_k]$ に対応する。今、式(15)の $\sigma_{K_e}^2(Z_r)$ (正規確率場での推定誤差分散) が小さいと仮定する。このとき式(17)の厳密解における指数項にマクローリン展開を行って2次以上の項を無視するとともに、 $m(Z_r) = \exp(m_e(Z_r) + \frac{1}{2} C_e(Z_r, Z_r))$ の関係を考慮すると、推定誤差分散は近似的に次式で表せる。

$$\sigma_K^2(Z_r) \doteq \sigma_{K_e}^2(Z_r) e^{2m_e(Z_r)} e^{C_e(Z_r, Z_r)} \quad (19)$$

不偏性と最小誤差分散に注目すれば、推定誤差分散は式(19)によってほぼ正確に求められる。一方、関数 $h(\cdot)$ をテーラー級数の1次の項で打ち切る近似解法によれば、式(18)より、推定誤差分散を評価できる。しかし、式(18)と式(19)を比べると明らかなように、式(18)の近似解は式(19)の結果に対し、 $1/e^{C_e(Z_r, Z_r)}$ 倍だけ推定誤差分散を過少評価することになる。このことは、 $\ln Y(Z)$ の分散が $\hat{Y}_{K_e}(Z_r)$ に比べて無視できないければ、式(18)を用いて推定誤差分散を正確に評価できないことを意味する。

以上からわかるように、式(10)右辺第1項に示す最適推定量 $h(\hat{X}_{k|k})$ ならびにそれに対応した式(11)の推定誤差分散 $h'(E[i; X_k])^2 P_{k|k}$ は条件付対数正規確率場における不偏推定量、そのときの最小誤差分散にならないことが証明された。

文献17)では、対数正規確率変数間で、あるいは対数正規確率変数と正規確率変数間で混合した条件付確率場におけるCokrigingを実施している。Cokrigingは対数正規分布に従う物理量の対数をとった正規確率場で行い、正規確率場での最適推定値と推定誤差分散を求めている。

同文献によると、対数正規確率場の最適推定値は正規確率場の最適推定値の指数をとることによって算出されている。この推定値は既に述べたように条件付中央値に相当するが、条件付中央値は絶対誤差を評価規範として得られる。Krigingは2乗誤差評価規範に基づいて推定値を求める方法であるので、Krigingの枠内で

推定計算を実施するならば、条件付中央値ではなく条件付平均値が最適推定値になる。文献16)もこのような手法を採用しているため、不偏最小誤差分散推定値は得られない。

さらに文献17)では対数正規確率変数と正規確率変数における無条件平均値と無条件分散の関係式から、正規確率場の最適推定値と推定誤差分散を用いて、対数正規確率場の推定誤差分散を求めている。その際、最適推定量と最適推定値、条件付分散と推定誤差分散の違いが明確に考慮されていない。推定誤差分散は式(5)、(17)の厳密解、あるいは式(11)の近似解によって理論的に評価される。Kriging理論に基づく条件付確率場の定義に従って理論展開が行われていないので、求められた推定誤差分散は正確さに欠けると考えられる。

4. 数値計算結果および考察

ここでは、無条件確率場を設定した上で、3.で述べた条件付確率場の同定アルゴリズムを用いて推定結果に関する数値分析を実施する。近似解法の妥当性を調べるため、非正規確率場の物理量 $Y(Z)$ は厳密解がわかっている対数正規分布に従うと仮定する。このとき、無条件場において、ケース1の計算では無条件平均値を $E[Y(Z)] = 2\left(1 + \left|\sin\frac{\pi}{50}Z\right|\right)$ 、無条件共分散を $C(Z_1, Z_2) = 2e^{-\frac{11|Z_1 - Z_2|}{4}}$ で、ケース2の計算では無条件平均値を $E[Y(Z)] = 2\left(1 + \left|\sin\frac{\pi}{50}Z\right|\right)$ 、無条件共分散を $C(Z_1, Z_2) = 0.5e^{-\frac{11|Z_1 - Z_2|}{4}}$ でモデル化する。無条件平均値については2つのケースで共通の関数を用い、位置に依存した非均一関数としている。一方、無条件共分散は2点間距離のみに依存した均一関数に設定したが、ばらつきを意味する無条件分散値には大小2種類の値を各ケースに対して与えている。ケース2の物理量 $Y(Z)$ の無条件分散はケース1のときの1/4であり、そのばらつきがかなり小さいケースを想定した。このような前提条件を設定し、ここでは分析を簡単に行うことができるように、1次元の補間(内挿・外挿)問題を取り扱う。

観測値は等間隔に11点与えた。これは、文献6)で提案された対数正規確率場における効率的な漸次拡張方式による条件付シミュレーション法を用いて、無条件確率場の特性を満足するように、1観測値から順次10地点のサンプル場をシミュレートして得たものである。無条件場のシミュレーションは上記2つのケースについて独立に実施したので、両ケースにおけるサンプル場は異なる。未観測点は等間隔に136地点設定した。このようにして得られた観測値に対し、式(8)の状態方程式としては $x_k = x_{k-1} + w_{k-1}$ を、式(9)の観測方程式と

しては $y_k = e^{x_k}$ を考えた。

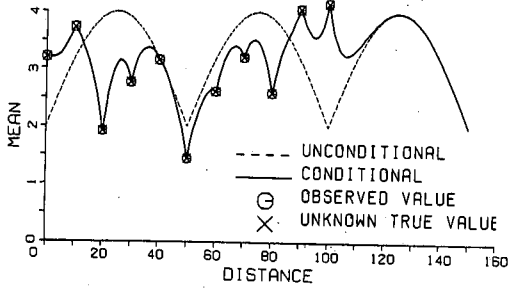
ノイズが推定結果(最適推定値、推定誤差分散)に及ぼす影響を調べるため、ノイズを含まない観測値、ならびにノイズに汚染された観測値をシミュレートした。ノイズを含む観測値を求めるため、システムノイズの分散の大きさを変え、正規乱数を発生することにより真値にホワイトノイズを付加した。すなわち、システムノイズ w の平均値は0、分散は任意の値(0, 0.015, 0.05)に設定した。

ノイズを考慮しないとき、ケース1の事前情報に基づいた最適推定値(Simple Krigingによる式(13)の理論解と本逐次型同定法による式(10)の結果)をFig.3に、式(11)、(17)による推定誤差分散をFig.4に示す。ただし、式(10)、(11)の逆変換のとき、最適推定値の計算には0次近似、2次近似、4次近似、推定誤差分散の計算には2次近似、4次近似、10次近似を用いている。Fig.3において、点線は無条件場の平均値、実線は最適推定値、○は観測値、×はノイズで汚染されていない真値である。この場合、ノイズで汚染されていないので、○と×は同一の値である。観測値は観測位置に依存して、無条件平均値よりも大きくなっているか、小さくなっている。

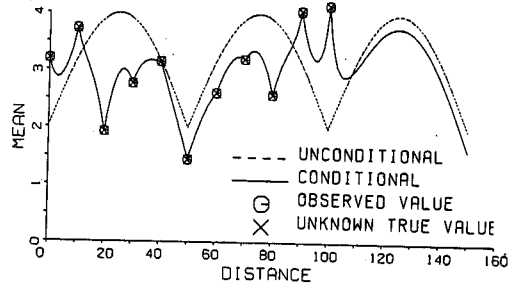
近似の度合いを高めれば、すなわち M を大きくとるほど、本論文で提案した近似解法による結果はSimple Krigingによる理論解にほぼ一致してくる。文献16)、17)で使われた0次近似解すなわち $h(\sum_{k|k})$ (あるいは $\exp(\hat{Y}_{Ke}(Z_r))$)によると、内挿および外挿地点の最適推定値は厳密解からかけ離れている。3.において既に理論的に証明したように、このような考え方は条件付補間問題を捉えることができないと言える。

観測点から遠く離れた外挿地点において、最適推定値は無条件平均値に近づかなければならない。内挿地点の最適推定値は無条件平均値に近づくように補間される。外挿地点の推定誤差分散は無条件分散に近づき、内挿地点の推定誤差分散は無条件分散を超えることはない。また、観測点は等間隔の位置にあるため、内挿領域の推定誤差分散は空間位置によらず同一の挙動を呈さなければならない。しかし、0次近似解はこのような傾向を示していない。このケース1の事前情報では無条件場の分散が大きい(2の値)、 M を大きくとっても、推定誤差分散の近似はあまりよくならない。ただし、観測点において、推定誤差分散は0となり、最適推定値は観測値に一致している。これらの結果から、ばらつきが大きいとき、確率論的補間手法であるSimple Krigingは威力を発揮していると理解できる。

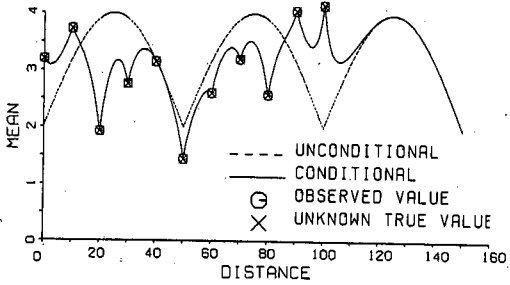
Fig.5は無条件場のばらつきが小さいケース2における最適推定値、Fig.6はそれに対応した推定誤差分散である。このときの観測値は確率特性が異なるので、Fig.3の観測値とは違っている。Fig.5(b)、Fig.6(b)



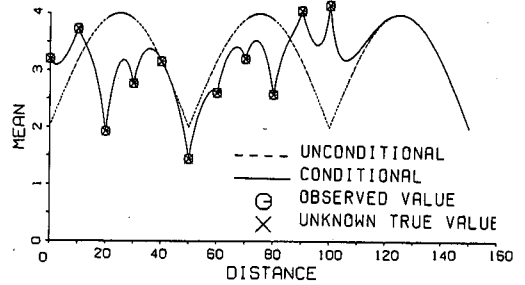
(a) Simple Kriging



(b) Zero-order approximation

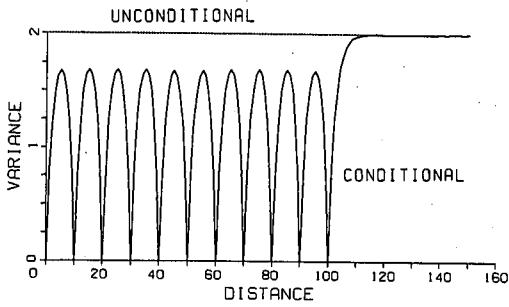


(c) Second-order approximation

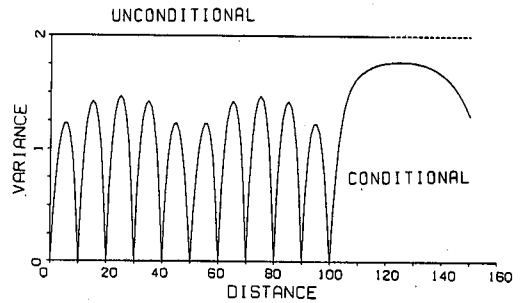


(d) Fourth-order approximation

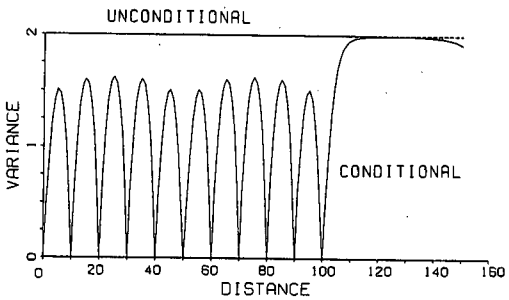
Fig.3 Comparison of optimum estimators obtained by simple Kriging method and proposed algorithm based on a priori information No.1 when observed data are noise free



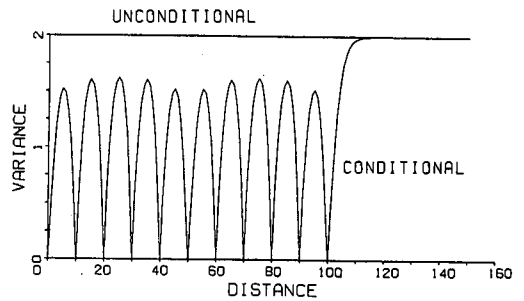
(a) Simple Kriging



(b) Second-order approximation



(c) Fourth-order approximation



(d) Tenth-order approximation

Fig.4 Comparison of estimated error variances obtained by simple Kriging method and proposed algorithm based on a priori information No.1 when observed data are noise free

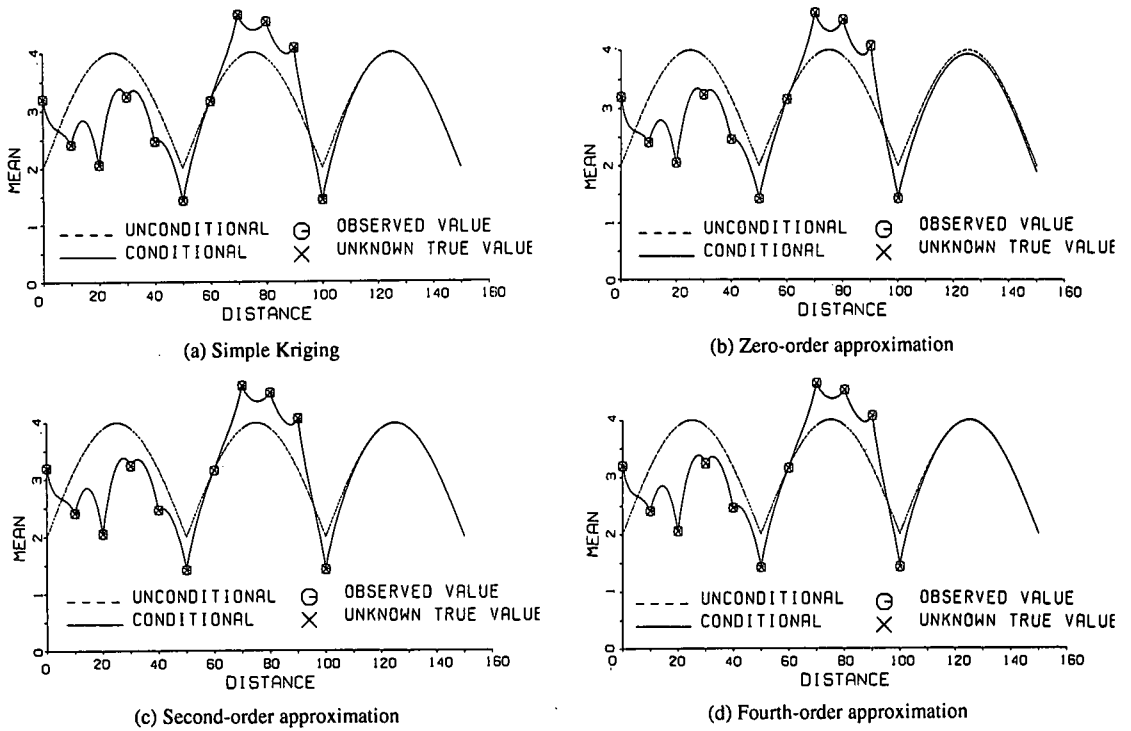


Fig.5 Comparison of optimum estimators obtained by simple Kriging method and proposed algorithm based on a priori information No.2 when observed data are noise free

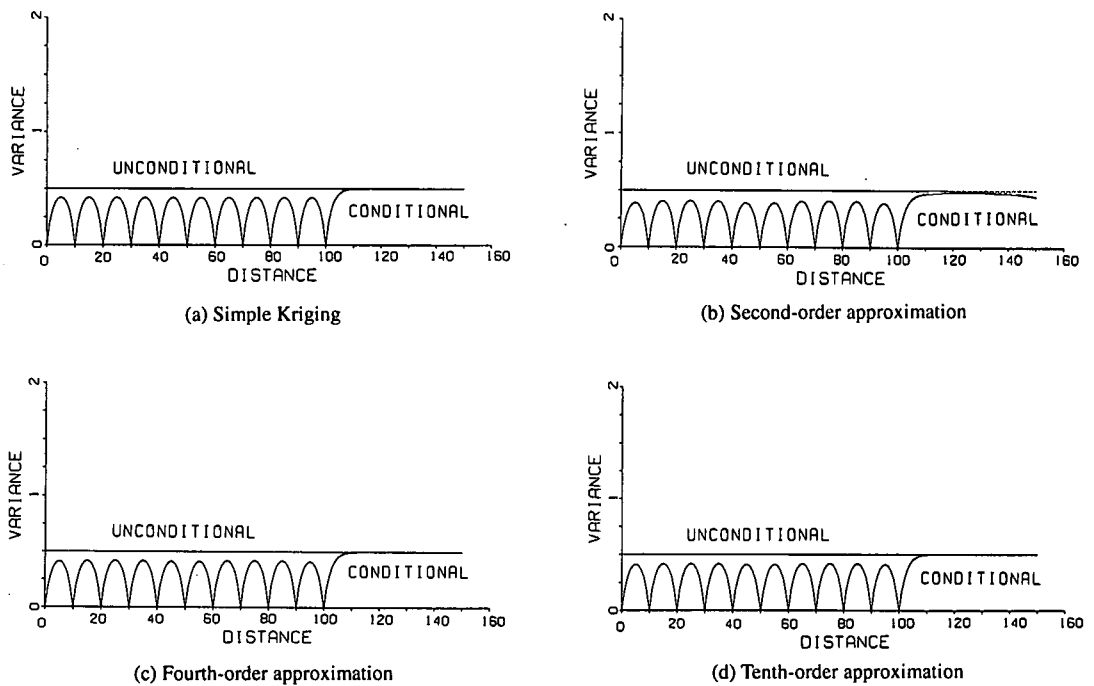
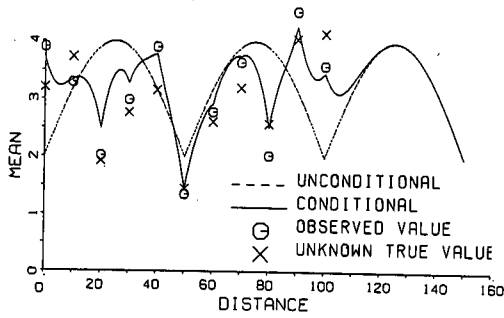
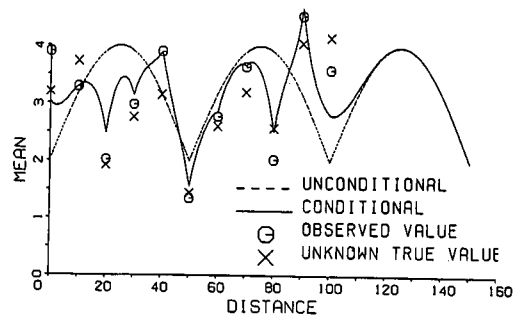


Fig.6 Comparison of estimated error variances obtained by simple Kriging method and proposed algorithm based on a priori information No.2 when observed data are noise free

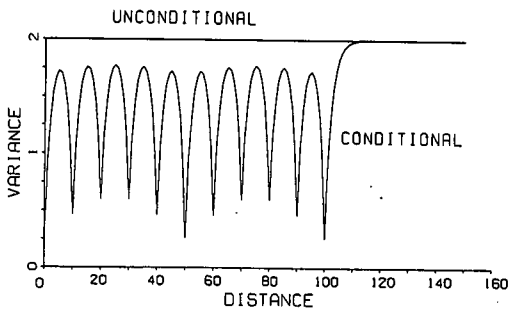


(a) Simple Kriging

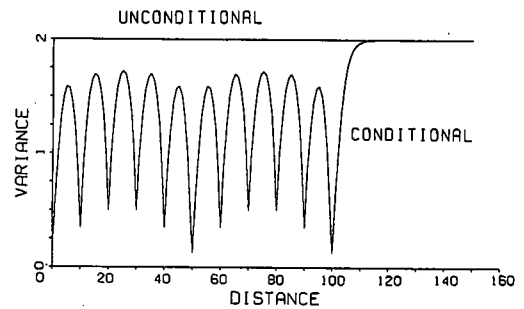


(b) Fourth-order approximation

Fig.7 Optimum estimators based on a priori information No.1 when observed data are contaminated with noises (system noise variance =0.05)



(a) Simple Kriging



(b) Tenth-order approximation

Fig.8 Estimated error variances based on a priori information No.1 when observed data are contaminated with noises (system noise variance =0.05)

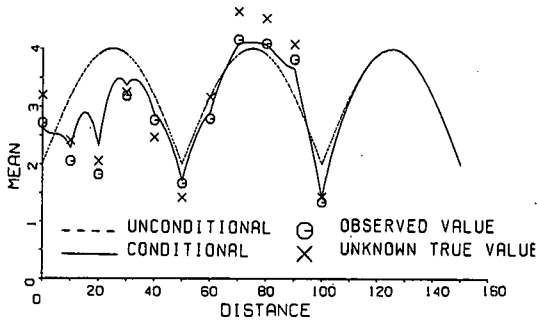
からわかるように、無条件分散が小さくなくても、式(10)の0次近似解 ($\exp(\hat{Y}_{Ke}(Z_r))$)、式(11)の2次近似解によると、最適推定値、推定誤差分散を正確に表現できないのは先のケース1と同様である。しかしながらこの場合には無条件分散が小さいので、 M をあまり大きくとらなくても、近似解は厳密解とほぼ一致してくる。このことはばらつきの小さい確率場に対して式(10)の0次近似解、式(11)の2次近似解を許容できることを意味する。

一方、Fig.3の観測値にノイズ(ノイズの分散=0.05)を含むと、ケース1の無条件確率特性に対する最適推定値はFig.7、推定誤差分散はFig.8のようになる。なお、近似解法の適用に当たって、最適推定値の評価には4次近似、推定誤差分散には10次近似を用いている。図中、○はノイズを含む観測値、×はノイズのない真の物理量である。ノイズの大きさは観測点によって異なっているので、○と×の相違は観測位置によって違う。ノイズが存在しないとき、未観測点と観測点が一一致すると、最適推定値は観測値に一致するが、ノイズに汚染

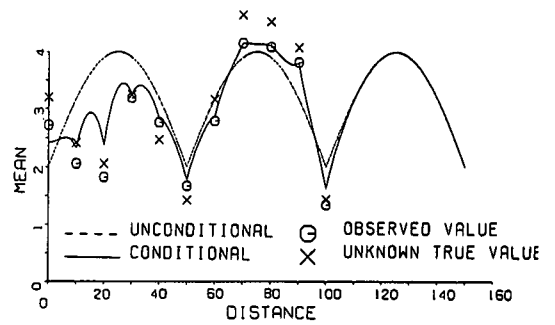
されるとこのような状況にないことがわかる。すなわち、未観測点における最適推定値は○、×の値と同一にならない。この場合、ノイズの存在により、一組の観測値を処理するだけでは真値の×を必ずしも推定できないことがわかる。しかし、内挿点の最適推定値は、無条件場の平均値に漸近する傾向にあり、内外挿における補間の特徴を忠実に表している。

Fig.4とFig.8の比較より、推定誤差分散はノイズの影響を強く受けていることがわかる。つまり、観測点において推定誤差分散は0にならず、ノイズの分散が関与している。観測点よりも未観測点で推定誤差分散に及ぼすノイズの影響が大きいことがFig.8より理解できる。ただし、この推定誤差分散は観測値に依存しないので、観測値のデータセットを変えても、推定誤差分散は不変である。このことは、アルゴリズムの展開ならびに数値分析からも明らかである。

ノイズを伴うと、Simple Krigingと近似解法による最適推定値は若干異なった様相を示している。この傾向はFig.3の結果と違う。観測点ではノイズの存在によ

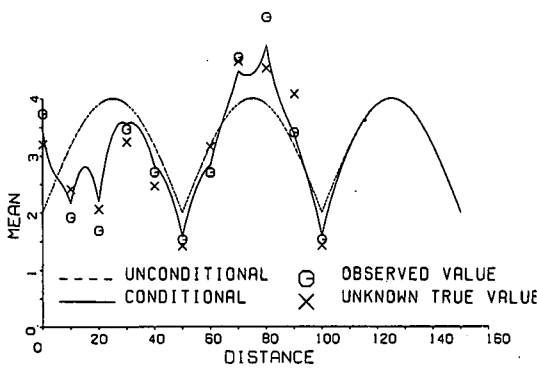


(a) Simple Kriging

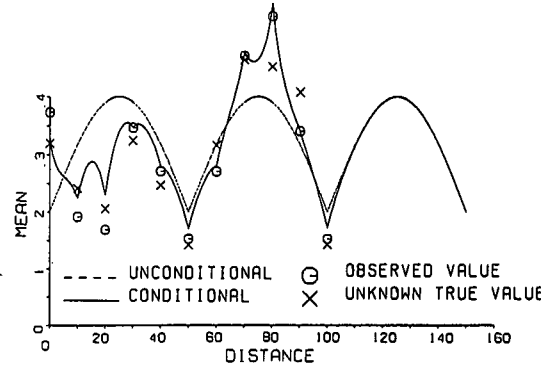


(b) Fourth-order approximation

Fig.9 Optimum estimators based on a priori information No.2 when first set of observed data is contaminated with noises (system noise variance =0.015)

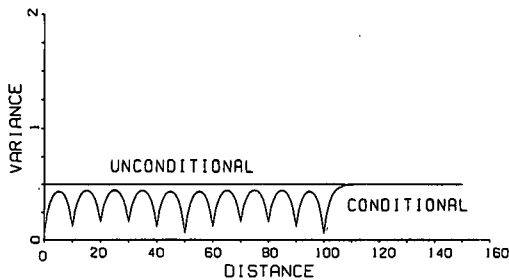


(a) Simple Kriging

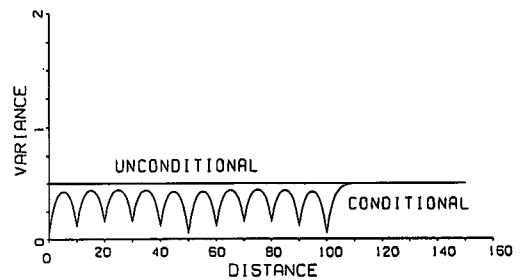


(b) Fourth-order approximation

Fig.10 Optimum estimators based on a priori information No.2 when second set of observed data is contaminated with noises (system noise variance =0.015)



(a) Simple Kriging



(b) Tenth-order approximation

Fig.11 Estimated error variances based on a priori information No.2 when observed data are contaminated with noises (system noise variance =0.015)

て推定誤差分散が0とならないため、最適推定値は真値のxに一致しないと言える。

ケース2の無条件確率場において0.015の分散を有するノイズが発生したときの最適推定値を示したのが Fig.9, Fig.10である。ノイズの乱数値が異なるため、

Fig.9, Fig.10の観測値は違っている。Simple Krigingと近似解法による最適推定値は必ずしも完全に一致していない。この場合無条件分散が小さいので、ノイズを含んでも Simple Krigingと近似解法による推定誤差分散はほぼ同一値を与えている (Fig.11)。

いずれの計算も一組の観測値を処理しただけであり、複数組の観測条件下でFig.2のループ計算を実施したわけではない。ここではこのような逐次型同定処理の結果を割愛したが、文献4)の正規確率場の結果と同様に複数ステップのデータ処理を施せば、ノイズを伴っていても観測点において得られた最適推定値は次第に真値に、推定誤差分散は順次0に近づいていくことが予想される。

5. 結論

条件付非正規確率場における確率論的補間手法として、星谷・野田・稲田は任意の非正規分布に適用できる厳密解法を提案している⁷⁾。この方法では数値積分が必要となるため、特に推定誤差分散を求めるのは容易でない。本数値計算例では11観測点を対象に推定結果(最適推定値、推定誤差分散)を得ているが、この場合厳密解法によると一つの未観測点で式(5)の推定誤差分散を評価するのに12重積分を行わなければならない。確率論的補間手法の利点は、観測値が与えられた条件下で、未観測点の誤差評価を定量的に行えることにある。従って多重積分を実施せずにこの推定誤差分散を近似的に評価することができれば、実用的であると考えられる。

そこで本研究では、任意の非正規分布に従う条件付確率場において推定結果を容易に求めることができる近似解法を提案した。その方法を解析解が得られている条件付対数正規確率場に適用し、本アルゴリズムの有効性を検討した。その主な成果は次のようになる。

- 1) 本方法は、非正規分布に従う確率変数を正規確率変数に変換し、正規確率場でカルマンフィルタを適用して得られた推定結果を非正規確率場に逆変換することを基本としている。逆変換においては、確率変数の関数のモーメントを近似的に評価する考え方を応用した上で、不偏性・最小誤差分散の規範を満足させた。
- 2) 事前情報だけでなく、逐次的に得られる複数データを取り入れることにより、非均一な条件付確率場を推定できるアルゴリズムとなっているため、本方法はMatheronのDisjunctive Krigingよりも使い易く、実用的である。
- 3) ノイズを含まない場合、本同定アルゴリズム(オンライン処理)によれば、Simple Krigingの理論解(オフライン処理)とほぼ完全に一致した近似解が得られた。このことは、本近似解法の妥当性を示しているとともに、データをリアルタイムに処理するのに都合がよいことを示唆している。

- 4) ノイズを含むと、ノイズに汚染されないときに比べ、観測点で推定誤差分散は0にならない。ただし推定誤差分散は観測値に左右されないで、ノイズを含むサンプル場が変わっても推定誤差分散は不変である。最適推定値も同様にノイズに乱され、観測点で真値を同定することができない。このようなときには、複数のデータセットを取り込んで推定結果を更新していくことにより、ノイズのない最適推定値と推定誤差分散に近づいていく可能性がある。
- 5) 正規確率場と非正規確率場を結びつける関数式(対数正規確率場だと指数関数)に正規確率場の推定量を代入すると、非正規確率場における条件付中央値が得られる。条件付中央値はKrigingの定義に従う条件付平均値とは異なる推定量である。従ってこのような手続によれば、Kriging法の基本すなわち最小誤差分散規範を犯した不相应な解が得られることになる。既往の研究ではこのような考え方をとることがあるが、これは不偏推定・最小誤差分散規範あるいは条件付確率密度関数を用いた確率論の定義に従うものではない。

今後は、式(5)の多重積分の効率化を考え、任意の非正規分布に本アルゴリズムを適用して近似解を求め、式(1)の最適推定値、式(5)の推定誤差分散に関する厳密解と比較していきたい。

参考文献

- 1) Journel, A. G. and Huijbregts, Ch. J.: *Mining Geostatistics*, Academic Press, New York, 1978.
- 2) Cressie, N. A. C.: *Statistics for Spatial Data*, Revised Edition, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- 3) 星谷 勝: 条件付確率場のシミュレーション理論, 土木学会論文集, No.459/I-22, pp.113-118, 1993年1月.
- 4) Hoshiya, M.: Kriging and conditional simulation of Gaussian field, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.121, No.2, pp.181-186, February 1995.
- 5) Shinozuka, M. and Zhang, R.: Equivalence between kriging and CPDF methods for conditional simulation, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.122, No.6, pp.530-538, June 1996.
- 6) 野田 茂, 星谷 勝: 条件付対数正規確率場の同定, 第9回日本地震工学シンポジウム(1994)論文集, Vol.1, pp.247-252, 1994年12月.
- 7) 星谷 勝, 野田 茂, 稲田 裕: 観測情報に基づく条件付非正規確率場の推定理論の誘導, 土木学会論文集, No.570/I-40, pp.83-95, 1997年7月.
- 8) Elishakoff, I., Ren, Y. J. and Shinozuka, M.: Conditional simulation of non-Gaussian random fields, *Engineering Structures*, Vol.16, No.7, pp.558-563, July 1994.
- 9) Ren, Y. J., Elishakoff, I. and Shinozuka, M.: Conditional simulation of non-Gaussian random fields for earthquake monitoring system, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol.5, No.1, pp.91-101, January 1995.

- 10) Matheron, G.: A simple substitute for conditional expectation; The disjunctive kriging, in *Advanced Geostatistics in the Mining Industry*, Edited by Guarascio, M., David, M. and Huijbregts, C., pp.221-236, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1976.
- 11) Liu, P.-L. and Kiureghian, A. Der: Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.1, No.2, pp.105-112, June 1986.
- 12) Kalman, R. E.: A new approach to linear filtering and prediction problems, *Journal of Basic Engineering*, ASME, Vol.82D, No.1, pp.34-45, March 1960.
- 13) Kalman, R. E. and Bucy, R. S.: New results in linear filtering and prediction theory, *Journal of Basic Engineering*, ASME, Vol.83D, No.1, pp.95-108, March 1961.
- 14) Ang, A. H-S. and Tang, W. H.: *Probability Concepts in Engineering Planning and Design Vol.1 Basic Principles*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- 15) Papoulis, A.: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Third Edition, MacGraw-Hill, New York, 1991.
- 16) Li, C-C. and Kiureghian, A. Der: Optimal discretization of random fields, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.119, No.6, pp.1136-1154, June 1993.
- 17) 白木 渡, 恒国光義, 松島 学, 安田 登: 地盤物性値間の回帰関係を利用したコクリッキングによる送電用鉄塔基礎の支持力の推定, 土木学会論文集, No.582/III-41, pp.47-58, 1997年12月.

(1998. 5. 13 受付)

APPROXIMATE SOLUTION FOR STOCHASTIC INTERPOLATION OF CONDITIONAL NON-GAUSSIAN FIELDS

Shigeru NODA, Takeshi NAGAFUNE and Masaru HOSHIYA

The approximate algorithm for stochastic interpolation and extrapolation of conditional non-Gaussian fields proposed in this paper produces a nonlinear unbiased estimator with the characteristic minimum variance of errors. The extended Kalman filtering procedure is then used for solving the conditional estimation problem transformed into the Gaussian stochastic field. A lognormal stochastic field is taken up as an example. The accuracy and efficiency of the proposed method is discussed compared with the theoretical solutions of Simple Kriging. It is found that the proposed method does not suffer from the difficulties associated with computing the optimum estimator and estimated error variance.