

2段階動的縮小法を用いた ハイラーキ要素による自由振動解析

林 正¹ ・ 渡辺 力²

¹正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部 環境・建設系 (〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)

²正会員 工修 函館工業高等専門学校講師 環境都市工学科 (〒042-0953 函館市戸倉町 14-1)

本論文では、大規模固有値問題のための2段階動的縮小法を開発し、本解法を用いたハイラーキ要素による自由振動解析法を提案する。この2段階動的縮小法では、全体剛性行列と質量行列の組立て手順は線形応力解析と同じで、静的縮小法と同程度の記憶容量があれば良く、大規模固有値問題に適した解法である。数値計算により、ハイラーキ四辺形要素とソリッド要素が極めて高い精度を有し、2段階動的縮小法を用いたハイラーキ要素解析によって大規模な構造物の自由振動解析を効率よく計算できることを示す。

Key Words: hierarchical finite element method, two phase dynamic condensation method, free vibration analysis

1. まえがき

有限要素法による構造物の全体解析が大次元の問題になるとときには、部分構造またはスーパー要素を用いて要素内部の非結合自由度を事前に縮約し、縮小された方程式を組み立てて構造全体の解析を行うことが多い。しかし、自由振動解析や座屈解析などの固有値問題では、変位の他に未知量である固有値が存在するため、理論的には自由度を事前に縮約することはできない。そこで、大次元の固有値問題を解くために種々の近似解法が用いられている。

汎用有限要素解析プログラムで用いられている静的縮小法¹⁾は、最も良く知られた解法である。この方法では、縮約する変位の動的効果を無視しているために、縮約する変位の採り方によって精度が悪化することが知られている。そのため、非縮約自由度の様々な選択方法が検討されているが、高次モードでの精度の改善は期待できない²⁾。

局所モードの影響を考慮した動的縮小法³⁾では、局所モードの数を多く採ることによって精度は良くなる^{3),4)}。しかし、この結果、全体解析における縮小効果は減少し、全体剛性行列などの組立て手順は複雑になって、行列のバンド幅が広がるなど数値計算の効率が低下する。さらに、局所モードの数が増大するに従い、静的縮小法に比べ記憶容量も増大し、大次元の問題では不利となる。この問題を解決するために、Bouhaddi と Fillod は、線形化動的縮小法⁵⁾を開発しているが、この解法では固有値問題の収束性が悪化することが報告されている⁶⁾。

また、ハイラーキ要素⁷⁾は、要素の細分割を行わず

に高次の変位関数によって精度を改善する方法、いわゆる p 法である。この解法を自由振動解析に適用した例も幾つか報告されている。Bardell⁸⁾ は C^1 級多項式を、Szabó と Babuška⁹⁾ は C^0 級多項式 (Legendre 多項式) を用いたハイラーキ要素によって、薄板の曲げ振動解析を行っている。Szabó らは板の曲げ解析に Mindlin 理論を用いて定式化された要素を用いているが、固有振動数の計算値は Kirchhoff 理論による解析解と 2~3 桁程度しか一致していない⁹⁾。さらに、著者らの知る限り、この解法を大規模固有値問題となる構造物の解析に適用した報告は、ほとんど無いようである。

本研究では、ハイラーキ要素⁷⁾を用いた自由振動解析法を提案する。ハイラーキ要素は、節点自由度の他に節線・節面自由度や体積自由度を有する高次の多自由度要素であるので、全体解析の前にできるだけ多くの自由度を消去しておくことが望ましい。そこで、内部自由度とともに自由辺の節線自由度なども縮約し、精度の悪化を防ぐために動的縮小法を用いるが、数値計算の効率化を考慮して、要素での縮約と構造全体での縮約を組み合わせさせた2段階動的縮小法を開発する。

この2段階動的縮小法では、固有値計算を要素ごとの局所モード解析、構造全体モード解析及びこれらの連成モード解析に分けて行う。各要素についての固有値解析と全体系の固有値解析は、それぞれ通常の動的縮小法と静的縮小法と同じである。最後の連成モード解析では、すべての要素についての局所モードと構造全体系モードのそれぞれから必要とするモード数だけの低次モードを選び出して計算するので、この縮小された連成モードの固有値問題の次元数は、大規模構造において総自由度数

の1/100以下になる。

この解法での全体剛性行列と質量行列の組立て手順は線形応力解析と同じで特別なアルゴリズムを必要とせず、最も計算時間を要する構造全体系の固有値計算は静的縮小法と同じである。また、解の精度は連成モード解析に用いる局所モードの数に依存するが、小規模固有値問題であるので、局所モードの数を多く用いても動的縮小法のように計算時間と記憶容量が極端に増加することがなく、精度を改善することが容易となる。

数値計算においては、局所モード解析と全体モード解析に、全モード中の一部の低次モードを求めるのに適したサブスペース法を用いる。連成モードの計算には一般化ヤコビ法を用いるが、相似変換を行って標準固有値問題に対するヤコビ法を用いることができる。この解法を2段階逆動的縮小法と呼ぶことにする。なお、Bouhaddi と Fillod⁶⁾も2段階動的縮小法を用いているが、1段階目で非線形固有値問題に縮小したために、2段階目で線形化した近似式を用いている。このために、本解法よりもアルゴリズムが複雑で精度も1桁悪い。

本論文では、薄板と厚板の数値計算例により、ハイアラキー四辺形要素とソリッド要素が極めて高い精度を有することを示し、大規模固有値問題での2段階動的縮小法を用いたハイアラキー要素法 (HEM) の計算効率を検討する。

2. 質量行列

(1) 四辺形要素

四辺形要素は、平面シェル要素として定式化する。したがって、要素の変位成分には並進変位 u, v, w と回転角 θ_x, θ_y を用いる。これらの任意の成分を d とすると、 d の変位関数を次式の二重級数で仮定する。

$$d(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N N_{mn}(\xi, \eta) d_{mn} \quad (1)$$

ここに、 (ξ, η) は要素中央面上の図心点を原点とする自然座標系、 $N_{mn}(\xi, \eta)$ はハイアラキー多項式 $f_m(\xi)$ と $f_n(\eta)$ の積で与えられる形状関数である⁷⁾。また、 d_{mn} は節点、節線、節面自由度の一般化変位で、添字 m, n は多項式の次数を表す (ただし、0 は1次式である)。

一般化変位を適当な順で1次元配列に並び換えて、その i 番目の変位を d_i 、これに対する形状関数を N_i とし、式(1)を次のように表す。

$$d = \sum_{i=1}^I N_i d_i = f^T d \quad (2)$$

ここに、 $(\)^T$ は転置を表し、形状関数ベクトル f と一

般化変位ベクトル d は次のようになる。

$$f = \{ N_1 \ N_2 \ \dots \ N_I \}^T \quad (3)$$

$$d = \{ d_1 \ d_2 \ \dots \ d_I \}^T \quad (4)$$

面内変位と面外変位の一般化変位を d_p, d_b とし、曲げ解析に Mindlin 理論を用いると次式の面内振動と曲げ振動に対する固有方程式が得られる。

$$[k_p] d_p = p^2 [m_p] d_p \quad (5)$$

$$[k_b] d_b = p^2 [m_b] d_b \quad (6)$$

ここに、 k_p, k_b は文献7)で求めた剛性行列、 p は固有円振動数であり、質量行列 m_p, m_b は次のようなブロック対角行列である。

$$d_p = \{ u^T \ v^T \}^T, \quad d_b = \{ w^T \ \theta_x^T \ \theta_y^T \}^T \quad (7)$$

$$m_p = \iint \rho t \begin{bmatrix} F & \\ & F \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (8)$$

$$m_b = \iint \rho \begin{bmatrix} tF & & \\ & rF & \\ & & rF \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (9)$$

$$F = f f^T \quad (10)$$

$$r = t^3/12 \quad (11)$$

$|J|$ は2次元の Jacobian で、各小行列の大きさは $(I \times I)$ である。また、 t は板厚、 ρ は質量密度である。

等質、等厚のハイアラキー要素では、式(10)の F の面積分を求めればよい。長方形要素では文献7)に示した積分公式を用いて容易に求められる。

三角形要素についても先の文献で求めた形状関数を用いて同様に定式化することができる。

(2) 六面体要素

六面体ソリッド要素の変位成分は u, v, w であり、これらの変位成分はハイアラキー多項式の三重積で与えられる⁷⁾。したがって、一般化変位に三重添字を用いて u_{mnl} などで表す。なお、一般化変位には節点、節線、節面と体積自由度が存在する。

変位の3成分を式(2)のようにベクトルのスカラー積で表せば、六面体要素の固有方程式は次のようになる。

$$[k_s] d_s = p^2 [m_s] d_s \quad (12)$$

ここに、

$$d_s = \{ u^T \ v^T \ w^T \}^T \quad (13)$$

$$m_s = \iiint \rho \begin{bmatrix} F & & \\ & F & \\ & & F \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (14)$$

$|J|$ は3次元の Jacobian で、 (ξ, η, ζ) は自然座標である。直方体要素または一様断面の角柱要素では、 F の体積分に積分公式を用いた解析的または半解析的積分により計算効率を上げることができる。

3. 2段階動的縮小法

(1) 動的縮小法

式(5), (6)または(12)を縮約自由度 d_2 と非縮約自由度 d_1 に分けて次式のように表す。

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12}^T & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12}^T & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (\lambda = p^2) \quad (15)$$

ここで, d_1 は全体構造において要素間で結合する自由度, d_2 は要素内部の自由度や自由辺などの非結合自由度とする。動的縮小法は座屈解析にも適用することができるので, この場合には式(15)の質量行列を幾何剛性行列に置き換えれば, λ は荷重倍率を表す座屈係数になる。

動的縮小法は周知の手法であるので要点のみ示す。

まず, 式(15)の第2式において, 右辺の慣性項を無視すると次式が得られる。

$$d_2 = -\Gamma_2 d_1 \quad (16)$$

ここに,

$$\Gamma_2 = k_{22}^{-1} k_{12}^T \quad (17)$$

次に, 第2式で $d_1=0$ として要素周辺を固定した固有値問題

$$[k_{22}] \phi = \lambda [m_{22}] \phi \quad (18)$$

の i 番目の固有値を λ_i , 固有ベクトルを ϕ_i とし, モーダルマトリックス Φ_2 とスペクトル行列 A_2 を定める。

$$\Phi_2 = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots], \quad A_2 = \text{diag}[\lambda_i] \quad (19)$$

ここで, ϕ_i は λ_i の小さい低次モードから選ぶ。 ϕ_i は要素の局所振動(または局部座屈)モードである。

式(16)に局所モード Φ_2 を加えて

$$d_2 = -\Gamma_2 d_1 + \Phi_2 c_2 \quad (20)$$

とおく。ここに, c_2 は振幅ベクトルで, その成分 c_i は ϕ_i の振幅を表す広義の一般化変位である。

式(20)を式(15)の d_2 に代入し, 第2式を用いて第1式の左辺に現れる c_2 を消去すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \hat{m}_{11} & \hat{m}_{12} \\ \hat{m}_{12}^T & \hat{m}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \hat{k}_{11} &= k_{11} - k_{12} \Gamma_2 \\ \hat{m}_{11} &= m_{11} - \Gamma_2^T m_{12} - [m_{12} - \Gamma_2^T m_{22}] \Gamma_2 \\ \hat{m}_{12} &= [m_{12} - \Gamma_2^T m_{22}] \Phi_2 \\ \hat{k}_{22} &= \Phi_2^T k_{22} \Phi_2 = \text{diag}[\hat{p}_i] \\ \hat{m}_{22} &= \Phi_2^T m_{22} \Phi_2 = \text{diag}[\hat{q}_i] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\hat{p}_i = \phi_i^T k_{22} \phi_i = \lambda_i \hat{q}_i, \quad \hat{q}_i = \phi_i^T m_{22} \phi_i \quad (23)$$

式(21)を全要素について集めると動的縮小法による全

体固有方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{12}^T & \hat{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

C_2 の自由度数は d_2 の総自由度数よりかなり少なくなることができて, 大規模固有値問題では 1/100 以下になる。ここで, $C_2=0$ とすれば Guyan の静的縮小法¹⁾になる。

(2) 2段階動的縮小法

2段階縮小法では式(24)を解く前に, 静的縮小法の解を用いて全体モード D_1 を縮約する。すなわち, 式(24)の第1式で $C_2=0$ とした静的縮小法の固有方程式

$$[\hat{K}_{11}] \psi = \lambda [\hat{M}_{11}] \psi \quad (25)$$

の固有値を Λ_i , 固有ベクトルを ψ_i とし, 低次モードから必要とする回数だけ選び出したモーダルマトリックスとスペクトル行列を次のように表す。

$$\Psi_1 = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots], \quad \Lambda_1 = \text{diag}[\Lambda_i] \quad (26)$$

Ψ_1 に対する振幅ベクトル C_1 を用いて, D_1 を次式で表す。

$$D_1 = \Psi_1 C_1 \quad (27)$$

式(27)を式(24)に代入して2段階動的縮小法による固有方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} \\ \tilde{M}_{12}^T & \tilde{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

ここに, \hat{K}_{22} と \hat{M}_{22} は式(24)と同じで, 他の行列は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{K}_{11} &= \Psi_1^T \hat{K}_{11} \Psi_1 = \text{diag}[P_i] \\ \tilde{M}_{11} &= \Psi_1^T \hat{M}_{11} \Psi_1 = \text{diag}[Q_i] \\ \tilde{M}_{12} &= \Psi_1^T \hat{M}_{12} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$P_i = \psi_i^T \hat{K}_{11} \psi_i = \Lambda_i Q_i, \quad Q_i = \psi_i^T \hat{M}_{11} \psi_i \quad (30)$$

2段階縮小法は局所モード解析と全体モード解析を別々に行い, これらの連成モード解析は両モードを縮約した式(28)で計算する。 C_1 の自由度数は構造物の自由度数に依らず必要な固有値の数だけでよいので, 大規模構造でも式(28)の次元数は数百元である。また, \tilde{M}_{12} 以外の小行列は対角行列であるので, 一般化ヤコビ法を用いて簡単に解くことができる。

(3) 2段階逆動的縮小法

式(29), (24)より

$$\left. \begin{aligned} \tilde{K}_{11}^{1/2} &= \text{diag}[P_i^{1/2}] = P_1 \\ \tilde{K}_{22}^{1/2} &= \text{diag}[\hat{P}_i^{1/2}] = P_2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

が得られるから、これらの対角行列を用いると

$$\left. \begin{aligned} P_1^{-1} \tilde{M}_{11} P_1^{-1} &= \text{diag} [A_i^{-1}] = A_1^{-1} \\ P_2^{-1} \tilde{M}_{22} P_2^{-1} &= \text{diag} [\lambda_i^{-1}] = A_2^{-1} \end{aligned} \right\} (32)$$

となる。したがって、式(28)を次式の標準固有値問題に変換することができる。

$$\begin{bmatrix} A_1^{-1} & \tilde{M}_{12} \\ \tilde{M}_{12}^T & A_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{12} &= P_1^{-1} \tilde{M}_{12} P_2^{-1} \\ \bar{C}_1 &= P_1 C_1, \quad \bar{C}_2 = P_2 C_2, \quad \omega = 1/\lambda \end{aligned} \right\} (34)$$

(4) アルゴリズム

動的縮小法も2段階縮小法も式(24)の小行列を求めたまでは同じである。このとき、式(22)の \hat{k}_{11} 、 \hat{m}_{11} の計算は静的縮小法と同じで、ガウスの消去法を使用すれば一度に計算することができる。連成項 \hat{m}_{12} は、このときの[]内の中間結果を利用すれば簡単に求められる。

式(18)の計算では、サブスペース法を用いて最小の固有値から数個求めればよい。この計算を全要素について行うが、最小固有値の大きい要素では式(18)の計算を省略することができる。この判別では、すでに求めた他の要素の固有値と比較するために、コレスキー分解した結果にスツルムの定理を用いる。

最も計算時間のかかるのは式(24)または式(25)の固有値計算である。この場合にもサブスペース法が適しているが、2段階動的縮小法は式(24)の次元数を縮小して計算時間の短縮化を図ったものである。したがって、 C_2 の次元数である局所モード数が多い場合に2段階動的縮小効果が大きくなり、同時に記憶容量の節約効果も大きくなる。なお、式(28)、(33)の計算時間は全時間に比べて極わずかである。

2段階動的縮小法は数万元の固有値問題を対象にして開発した手法であるので、大規模問題ほど解法の長所が活かされる。さらに、計算時間と記憶容量を少なくするために、サブスペース法でのLDL^T分解ではスカイライン法を使用する。また、ハイアラキー要素は多自由度であり、要素の剛性行列は数百元から千円を越える密行列になる。この行列演算を効率良く行うために、行列を1次元展開したアルゴリズムを用いる。

局所モードの選び方は、各要素から満遍なく採る方法よりも、全要素の局所モードから固有値の小さいものから順に選ぶ方が精度が良い。選択する局所モードの総数 n_L が少なすぎると全体モードの精度が悪くなり、高次モードほどその影響が現れる。 n_L の最適な数は一概には言えないが、必要とする固有値の数 n_0 の3倍程度が

よいと考えられる。また、式(27)の2段階縮小法での C_1 の数は、必要とする数 n_0 よりも数個(n_G 個)多く採るのが良い。この手法はサブスペース法と同じ考え方である。以後、 n_G を加算全体モード数と呼ぶことにする。

4. ハイアラキー要素の精度

数値計算を行ってハイアラキー四辺形要素とソリッド要素の精度と収束性を調べる。

(1) Kirchhoff 要素

図-1に示す周辺単純支持板(SSSS)と、相対する1辺が単純支持され他の辺が固定支持された板(SCSC)を計算し、薄板解析でのハイアラキー四辺形要素の精度と収束性を検討する。解析モデルは、1辺が $a (=b)$ の正方形板で、板厚比 t/b を1/100、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、密度を ρ 、せん断弾性係数を G とし、せん断補正係数 k には5/6を用いる。計算においては、要素分割を行わずに1要素でモデル化し、多項式の次数はすべての節線で同一($m=n$)として、4~10次式を用いる。また、内部自由度は、二重級数展開のすべての項を用いる⁷⁾。

Mindlin 理論により定式化された要素を薄板解析に用いると、せん断変形の影響で固有振動数は若干小さくなる($t/b=0.01$ の単純支持板では、(1,1)モードで0.04%、(3,3)モードで0.3%)。そこで、Kirchhoff 理論に忠実な値を求めるために、板のせん断剛性 $D_s (=kGt)$ にペナルティ係数 α を掛けて¹⁰⁾、式(9)の回転慣性項 rF を省略する。

表-1は、 $\alpha=10^4$ として剛性行列に次数低減積分⁷⁾を用いて計算したものである。比較のために、薄板理論による解析解¹¹⁾とFEM解も示してある。FEMでは、双2次要素を用いて、5×5に分割し、要素分割以外はペナルティ数も含めてハイアラキー要素法(HEM)と同じ解析条件を用いている。また、表中の (i,j) は x, y 軸方向の半波長数を示し、振動数の計算結果は、次式の無次元振動数を用いて表している。

$$\lambda^* = \pi t (\rho/G)^{1/2} \quad (35)$$

表は、 x 軸と y 軸に関して、半波長数が3波形までのモードについて薄板理論に対する無次元振動数の誤差を示したものである。SSSSにおいて、(1,1)モードで、多項式の次数に4次式を用いると3桁、6次式で6桁、8次式で9桁が薄板理論による解析解と一致している。最も精度の悪い(3,1)モードでも10次式で5桁が厳密解と一致しており、極めて良い精度と収束性が得られている。

SCSCでも、SSSSと同程度の収束性と精度が得られている。

表-1 薄板の無次元振動数の誤差 (Kirchhoff 要素)

境界条件	解法	m=n	λ^* / λ_0^*							自由度数		
			(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)	(3,2)		(2,3)	(3,3)
SSSS	HEM	4	1.000164	1.052516	1.052516	1.068335	1.414438	1.414439	1.299175	1.299175	1.327409	75
		6	1.000000	1.000483	1.000483	1.000630	1.014394	1.014394	1.009772	1.009772	1.011687	147
		8	1.000000	1.000001	1.000001	1.000001	1.000204	1.000204	1.000131	1.000131	1.000153	243
		10	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000001	1.000001	1.000000	1.000000	1.000000	363
	FEM	5x5	1.000515	1.004424	1.004561	1.006671	1.021243	1.021250	1.017891	1.021088	1.024751	363
	解析解 ¹¹⁾	($\lambda_0^* \times 10000$)	1.0 (9.631748)	1.0 (24.07937)	1.0 (24.07937)	1.0 (38.52699)	1.0 (48.15874)	1.0 (48.15874)	1.0 (62.60636)	1.0 (62.60636)	1.0 (86.68573)	
SCSC	HEM	4	1.000115	1.046916	1.197063	1.135970	1.394907	non	1.289128	non	non	75
		6	1.000018	1.000493	1.003903	1.001829	1.013739	1.045923	1.008150	1.026761	1.016519	147
		8	1.000000	1.000001	1.000024	1.000008	1.000196	1.001578	1.000095	1.001053	1.000789	243
		10	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000001	1.000013	1.000000	1.000005	1.000001	363
	FEM	5x5	1.001124	1.003866	1.010373	1.009063	1.019713	1.041950	1.017996	1.035254	1.032479	363
	解析解 ¹¹⁾	($\lambda_0^* \times 10000$)	1.0 (14.12657)	1.0 (26.71188)	1.0 (33.82812)	1.0 (46.15289)	1.0 (49.87639)	1.0 (62.99217)	1.0 (68.41279)	1.0 (75.52281)	1.0 (97.49756)	

表-2 厚板の無次元振動数の誤差 (Mindlin 要素)

モード	m=n	λ^* / λ_0^*					
		(1,1)	(1,2)	(2,2)	(1,3)	(2,3)	(3,3)
I-A	4	1.000155	1.107434	1.101091	1.310548	1.223934	1.228002
	6	1.000000	1.001227	1.001127	1.011629	1.007547	1.008219
	8	1.000000	1.000003	1.000003	1.000164	1.000099	1.000105
	10	1.000000	1.000000	1.000000	1.000001	1.000000	1.000000
	解析解 ¹²⁾	($\lambda_0^* \times 100$)	1.0 (9.299567)	1.0 (22.17628)	1.0 (34.01826)	1.0 (41.43983)	1.0 (51.97421)
II-A	4	1.000008	1.001020	1.001391	1.010945	1.023257	1.154869
	6	1.000000	1.000009	1.000012	1.000496	1.001080	1.002853
	8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000008	1.000019	1.000052
	10	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	解析解 ¹²⁾	($\lambda_0^* \times 100$)	1.0 (317.2853)	1.0 (321.9175)	1.0 (326.4839)	1.0 (329.4930)	1.0 (333.9559)
III-A	4	1.000007	1.000439	1.000914	1.079484	1.065204	1.080951
	6	1.000000	1.000002	1.000018	1.001408	1.006590	1.006722
	8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000044	1.000030	1.000035
	10	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	解析解 ¹²⁾	($\lambda_0^* \times 100$)	1.0 (325.3810)	1.0 (341.1193)	1.0 (355.7975)	1.0 (365.0960)	1.0 (378.4256)

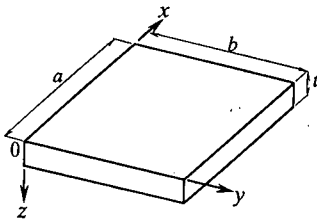


図-1 平板

それに対して、FEM 解 (h 法) は、HEM で 10 次式を用いたときの自由度数と同じ自由度数を用いているにもかかわらず 1~4% 程度の誤差が生じている。

(2) Mindlin 要素

図-1 に示す周辺単純支持正方形板を計算し、ハイアラキ四辺形要素の厚板解析への適用性を検討する。解析モデルは、板厚比 $t/b=1/10$ 、せん断補正係数 $k=\pi^2/12$ とし、他の定数は (1) と同じとする。また、要素分割と多項式の次数も (1) と同じである。

表-2 は、剛性行列に完全積分を用いて計算した式 (35) の無次元振動数について、Mindlin 理論による解析解¹²⁾ に対する誤差を示してある。表は、x 軸と y 軸に関して半波長数が 3 波形までのモードについて、I-A モード (flexural モード)、II-A モード (thickness-twist モード)、III-A モード (thickness-shear モード) に分類してまとめたものである。

I-A、II-A、III-A のどの場合でも、10 次式を用いると (1,1) モードで 13 桁が Mindlin 解に一致しており、他のモードでも 5~8 桁が一致している。

(3) ソリッド要素

(2) で計算した周辺単純支持正方形板をソリッド要素を用いて計算する。数値計算では 1 要素を用いて x, y 軸方向に $m=n=9$ 次式、z 軸方向に $l=5$ 次式を用いる。

表-3 は、x 軸と y 軸に関して半波長数が 3 波形までの式 (35) による無次元振動数について、厳密解¹³⁾ に対する誤差を曲げ振動 (I-A、II-A、III-A)、伸縮振動 (I-S、

表-3 厚板の無次元振動数の誤差 (ソリッド要素)

モード	解法	λ^* / λ_0^*					
		(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)
I-A	HEM	1.000000	1.000000	1.000000	1.000059	1.000039	1.000047
	FEM	1.117847	1.183338	1.148914	1.270301	1.203360	1.196644
	厳密解 ¹³⁾ ($\lambda_0^* \times 100$)	1.0 (9.314992)	1.0 (22.25993)	1.0 (34.20729)	1.0 (41.71365)	1.0 (52.39112)	1.0 (68.89293)
I-S	HEM	1.000000	1.000000	1.000000	1.000014	1.000009	1.000009
	FEM	1.011507	1.027737	1.047035	1.053785	1.075795	1.109528
	($\lambda_0^* \times 100$)	(44.42883)	(70.24815)	(88.85766)	(99.34588)	(113.2717)	(133.2865)
II-S	HEM	1.000000	1.000000	1.000000	1.000002	1.000002	1.000003
	FEM	1.004018	1.017965	1.016053	1.049161	1.035216	1.036099
	($\lambda_0^* \times 100$)	(74.98306)	(118.2732)	(149.2252)	(166.5432)	(189.3604)	(221.7090)
II-A	HEM	1.000000	1.000000	1.000000	1.000001	1.000001	1.000002
	FEM	1.016422	1.017060	1.018812	1.014350	1.023553	1.031250
	($\lambda_0^* \times 100$)	(317.2853)	(321.9175)	(326.4839)	(329.4930)	(333.9559)	(341.2643)
III-A	HEM	1.000001	1.000002	1.000003	1.000004	1.000005	1.000009
	FEM	1.016479	1.018099	1.018561	1.025668	1.024169	1.026391
	($\lambda_0^* \times 100$)	(324.6485)	(339.3278)	(352.9771)	(361.6002)	(373.9261)	(393.1044)
モード	解法	λ^* / λ_0^*			\diagdown		
		(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)			
I- Γ S	HEM	1.000000	1.000000	1.000017			
	FEM	1.005084	1.020412	1.046073			
	($\lambda_0^* \times 100$)	(31.41593)	(62.83185)	(94.24778)			
II- Γ A	HEM	1.000000	1.000000	1.000002			
	FEM	1.016407	1.016670	1.024661			
	($\lambda_0^* \times 100$)	(315.7262)	(320.3808)	(327.9919)			

II-S)とせん断振動(I- Γ S, II- Γ S)で分類したものである。比較のために、FEM解を示した。FEMでは、8節点6面体要素を用いて、厚さ(z)方向に5分割、x軸とy軸方向に10分割して、HEMと同じ自由度数を用いている。なお、文献13)の固有値の計算値に些細な間違いがあり、論文中に示されていないモードも低次モードで存在することから、付録Iに厳密な値を示した。

曲げ振動(I-A)では、(1,1)モードで10桁、他のモードでも4~8桁が厳密解と一致している。伸縮モードとせん断モードでは、13桁~5桁が厳密解と一致している。それに対してFEM(h法)では、HEMより多い自由度数を用いているにも拘わらず1~22%程度の誤差が生じている。固有振動モードを付録の図-IIに示す。

以上のように、本論文のハイアラーキ要素による解は、展開項数を増やせば厳密解に収束することが分かる。

5. 動的縮小法の計算効率

実構造物規模の数値計算を行って2段階動的縮小法の精度と計算効率を検討する。

(1) 薄肉門形ラーメン

図-2に示す高さ10.5m、幅11m、奥行き1mの薄肉箱形断面の門形ラーメンを計算して、2段階動的縮小法における局所モード数 n_L および加算全体モード数 n_G の

採り方による精度と計算効率を調べる。解析モデルの板厚はすべて16mmで、柱とはりの支間中央と隅角部にダイヤフラムを有する。材料定数には、ヤング係数 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ (206GPa)、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、密度 $\rho=8.0 \times 10^{-6} \text{ kgf} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$ ($7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$)を用いる。

要素分割と多項式の次数を図-3(a)に示す。要素分割はダイヤフラムの取り付け位置でのみ分割するものとし、多項式には、はりと柱の要素で長手方向に8次式、幅方向に6次式を、隅角部とダイヤフラムで両方向に6次式を用いる。また、比較解には、図-3(b)に示すように、8節点要素を用いて1600要素、4717節点でモデル化したFEM解¹⁴⁾を用いる。

表-4には、求めたいモード数を $n_0=15$ としたときのFEMおよび非縮小時の固有振動数 f_0 (Hz)と、静的縮小解、 $n_L=16 \sim 40$ を用いた動的縮小解、 $n_L=40$ とし $n_G=0, 3, 5$ と採ったときの2段階縮小解の非縮小解に対する誤差を示した。また、表の下段には、各解法での縮約自由度数、静的縮小解に対する計算時間の比、および各要素から採択された局所モード数も示してある。

非縮小解の振動モードはFEMによるモードと全て一致しており、固有振動数の差は、5次と12~15次で0.35%程度である他は0.2%以下で、FEMの1/3の自由度数で精度の良い値が得られている。また、縮小解は太枠内がこれらのモードと一致していて、静的縮小法では、5次モードまでが数%の誤差であるものの6次以上では10%以上の誤差を生じており、モードは3次モードまで

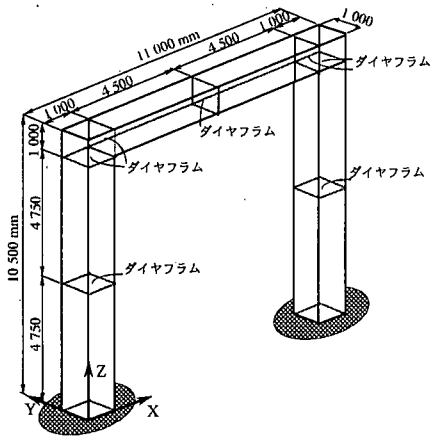
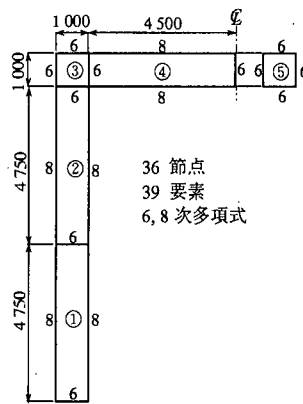
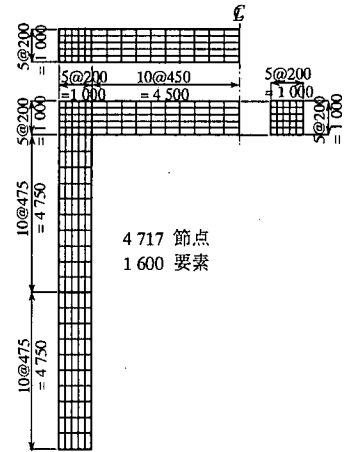


図-2 薄肉門形ラーメン



(a) ハイアラーキ要素分割



(b) 有限要素分割

表-4 門形ラーメンの固有振動数

モード	FEM [Hz]	非縮約 f_0 [Hz]	誤差 $(f - f_0)/f_0 \times 100$ (%)							
			静的縮小	動的縮小法				2段階 ($n_L=40$)		
				$n_L=16$	$n_L=24$	$n_L=39$	$n_L=40$	$n_G=0$	$n_G=3$	$n_G=5$
1	6.249	6.248	0.06	0.05	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
2	9.524	9.525	0.06	0.02	0.02	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02
3	12.136	12.126	0.21	0.10	0.06	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05
4	34.558	34.493	3.01	2.12	0.39	0.39	0.33	0.37	0.37	0.37
5	37.058	36.929	3.48	1.37	0.49	0.48	0.39	0.45	0.45	0.44
6	40.871	40.919	12.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
7	40.871	40.919	12.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
8	41.047	41.013	12.08	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
9	41.047	41.013	12.08	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
10	41.141	41.145	12.12	12.12	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
11	41.260	41.245	12.20	12.20	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
12	46.621	46.788	9.32	4.08	2.98	2.91	0.02	0.03	0.03	0.03
13	46.621	46.788	13.43	6.58	4.82	4.81	0.02	2.43	0.03	0.03
14	47.320	47.153	12.62	6.37	5.44	5.39	0.01	3.87	0.02	0.02
15	47.320	47.153	14.18	12.66	11.82	11.52	0.01	4.82	0.02	0.02
縮約自由度数			2544	2560	2568	2583	2584	55	58	60
総自由度数	28302		9834							
計算時間比			1.00	1.05	1.00	1.09	1.46	1.09	1.12	1.15
局所モード数の選択	要素①		0	1	1	1	2	2		
	要素②		0	1	1	1	2	2		
	要素③		0	0	0	1	0	0		
	要素④		0	0	1	1	1	1		
	ダイヤフラム⑤		0	0	0	1	0	0		
合計			0	16	24	39	40	40		

が一致している。

まず、動的縮小法を用いて局所モードの採り方について検討する。表中では、局所モード数 n_L を 16~40 まで用いているが、 $n_L=16, 24, 40$ はすべての要素について低次のものから順に n_L 個取り出しているのに対して、 $n_L=39$ では全要素からそれぞれ 1 個ずつの局所モードを用いている。 n_L の値を増すにつれ、縮小の誤差は減少しており、 $n_L=16$ では、4 次モードと 5 次モードの順序が

逆転しているが 9 次モードまでの誤差が約 2% 以下に、 $n_L=24$ では 11 次モードまで、 $n_L=40$ では 15 次まですべての誤差が 1% 以下となっている。また、各要素から 1 個ずつの局所モードを用いた $n_L=39$ では、 $n_L=40$ と同程度の局所モード数を用いているにもかかわらず、12~15 次の精度が悪いことから、局所モードは各要素より低次のものから順に採択したほうが精度の良い解が得られることが分かる。なお、多くの要素を用いる構造物の解析

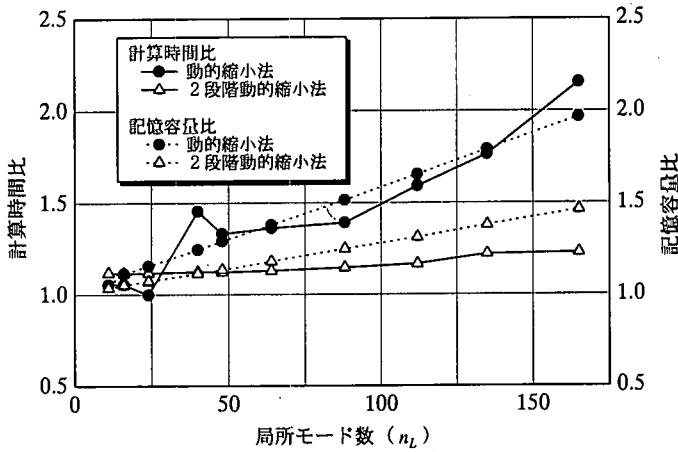


図-4 静的縮小法に対する計算時間比と記憶容量比

では、各要素において数個の局所モードを計算しておけば良く、本計算例では、一要素当たり5個の局所モードを計算している。

次に、2段階縮小法での加算全体モード数の採り方を検討する。局所モード数には動的縮小法で誤差が1%以下となる $n_L=40$ を用い、求めたいモード数 $n_0=15$ に加算全体モード数 $n_G=0, 3, 5$ を加えている。 $n_G=0$ では、13~15次で誤差が2~5%生じているが、 $n_G=3$ を用いると誤差は0.5%以下となっており、動的縮小法と同程度の縮約誤差となっている。

動的縮小法と2段階動的縮小法の計算効率を比較する。 $n_L=40$ を用いた動的縮小法では、自由度数は非縮小時の約1/4に、計算時間は静的縮小法の約1.5倍となっているのに対して、2段階縮小法では、自由度数は約1/170に縮小され、計算時間は静的縮小法の1.1~1.2倍になっている。このことから、2段階動的縮小法では、動的縮小法に比べ記憶容量と計算時間を減少させることができ、動的縮小法の計算効率を改善することができる。また、加算全体モード数をあまり多く用いることは、計算効率を悪化させることになるので、大次元の計算では、 n_G に3程度を用いるのが良いと思われる。

図-4には、 n_L を16から165まで採ったときの静的縮小法に対する計算時間比と記憶容量比を示す(記憶容量比は動的割付を用いてそれぞれの解法で最小と考えられる容量を用いている)。動的縮小法での計算時間はサブスペース法の反復回数によって変動するが、 n_L が90を越えると急激に計算時間が増加し、記憶容量も n_L の増加とともに急激に増加している。それに対して、2段階動的縮小法では、 n_L が増加しても計算時間はほぼ一定で、記憶容量も動的縮小法のように急激に増大することはない。

以上のように、2段階動的縮小法では、高次振動モードを求めるために局所モード数を多く採るような大規

模固有値問題に特に有効であることが分かる。また、2段階逆動的縮小法では同じ精度の値が得られ、計算効率も2段階動的縮小法とほぼ同じである。

(2) コンクリート箱桁橋

実構造物への適用例として、図-5(a)~(d)に示す支間40mの箱桁橋を2段階動的縮小法により計算する。解析モデルは、桁高1.56m、車道幅員6m、上スラブ厚20cm、下スラブ厚13cm、ウエブ厚40cmで、支点部に厚さ3mの端横桁と8.2m間隔に厚さ40cmの隔壁を3枚有している。材料定数には、ヤング係数 $E=2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ (20.6GPa)、ポアソン比 $\nu=0.2$ 、密度 $\rho=2.55 \times 10^{-6} \text{ kgf} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$ ($2.50 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$) を用いる。橋軸方向に、隔壁(横桁)と箱桁の結合する位置でのみ要素分割を行い、多項式には、端横桁に5次式、箱桁に6次式、隔壁に3次式を用いる。断面内には、図-5(d)のような要素分割と多項式の次数を用いる。これより、ソリッド要素数200、節点数400を用いている。また、境界条件は、橋軸方向変位 u を $X=0$ の下フランジで線支持とし、橋軸直角方向変位 v は $X=0$ と $X=40\text{m}$ の下フランジ中央点で固定する。

数値計算においては、求めたいモード数 $n_0=10$ とし、局所モード数 $n_L=32$ 、加算全体モード数 $n_G=3$ を用いる。これより、総自由度数22176を45自由度と約1/493に縮小する。また、比較解には節点プリズム法による解りを用いる。節点プリズム法では、動的縮小法を用いて総自由度数22407を5010自由度と約1/4.5に縮小している。

図-6に、10次までの本解法による固有振動数と()内に節点プリズム法での固有振動数、構造全体の断面A-Aでの振動モードを示す。1次から10次までの固有振動数と振動モードは節点プリズム法と良く一致しており、2段階動的縮小法は大規模固有値問題でも精度が悪化することはない。

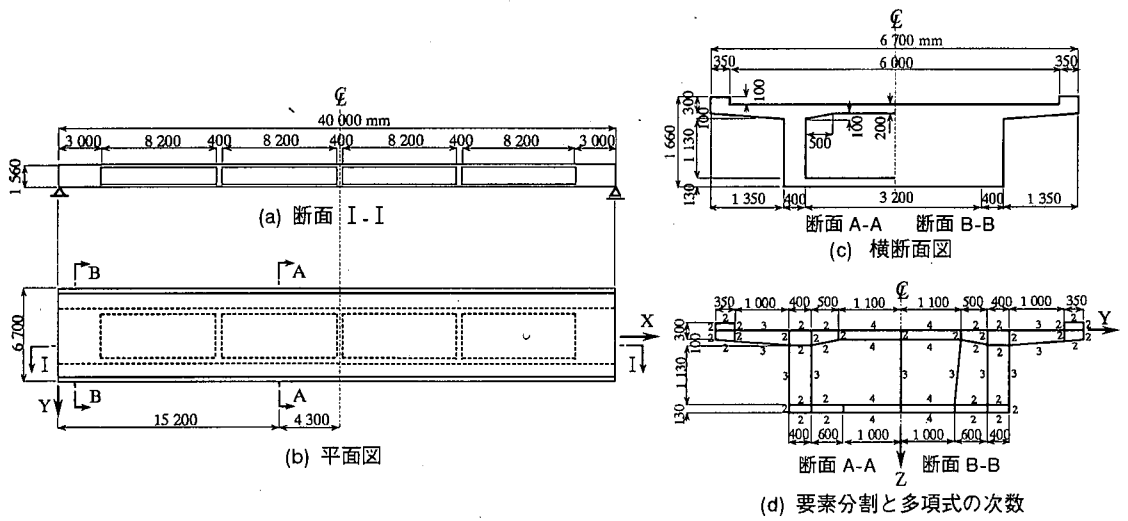


図-5 箱桁橋

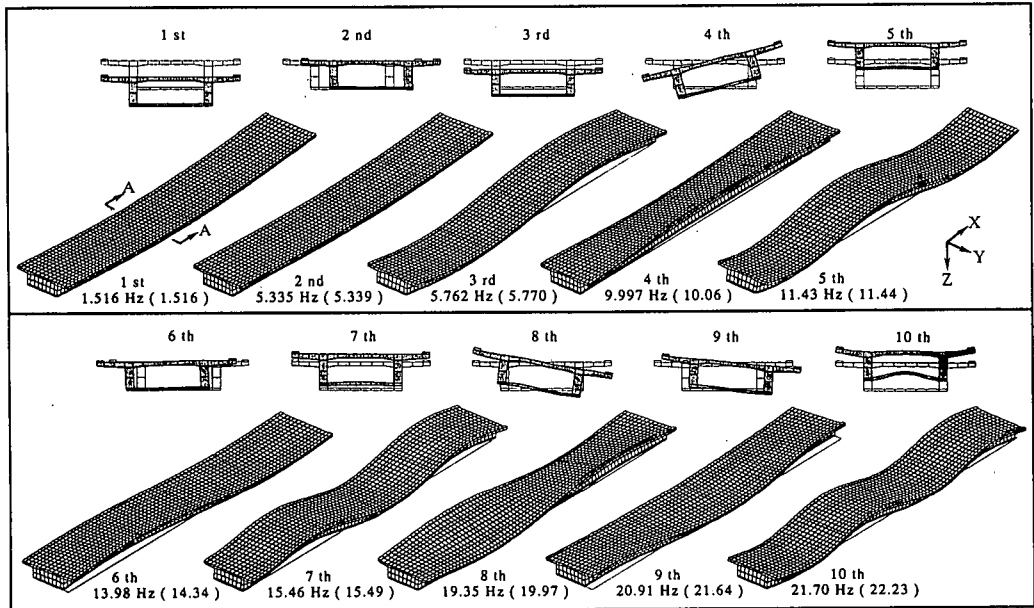


図-6 固有振動数と振動モード

6. 結 論

以上の数値計算結果から、自由振動解析について以下のことが言える。

- (1) 本研究で定式化したハイラーキ要素による解は厳密解に収束し、低次の有限要素を用いた h 法に比べてかなり精度が良い。
- (2) 定形な要素の質量行列は、ハイラーキ多項式の積分公式を用いて容易に求められる。
- (3) 要素の内部自由度を縮約する動的縮小法を用いても

実用上十分な精度の固有振動数が求められる。また、局所モード数は求めるモード数の3倍程度を用いれば良い。

- (4) 2段階法による縮約を行っても精度は悪化しない。また、大規模固有値問題ほど解法の長所が活かされ、高次モードを求めるために局所モード数を多く用いる場合ほど効果が大い。
- (5) 2段階目に縮約する全体振動モード数は、求めるモード数より数個多く採るのが良い。

表-I 固有値 λ^* ($\nu=0.3$)

g^2/π^2	I-A	II-S	III-A	III-S	V-S	IV-A
0.02	0.0931499203	0.7498306250	3.2464854376	5.7632012825	6.4461400979	9.4222555818
0.05	0.2225992650	1.1827323096	3.3932778267	5.6651748635	6.6178298188	9.4193398494
0.08	0.3420728596	1.4922518212	3.5297707859	5.6009884528	6.7563209539	9.4174074463
0.10	0.4171365416	1.6654320857	3.6160018368	5.5688311119	6.8383945837	9.4166364248
0.13	0.5239112028	1.8936044096	3.7392605627	5.5315356898	6.9511719640	9.4162167760
0.17	0.6570719341	2.1568596301	3.8939042309	5.4968607679	7.0877088531	9.4169598173
0.18	0.6889292661	2.2170898212	3.9310441385	5.4903429500	7.1199241938	9.4173676335
0.20	0.7511047352	2.3320381259	4.0036793407	5.4795111612	7.1824452014	9.4184396197
0.25	0.8985276025	2.5924900761	4.1766388838	5.4636025981	7.3294027854	9.4225542126
0.32	1.0888534342	2.9070112883	4.4012543140	5.4634665275	7.5178697853	9.4315319259

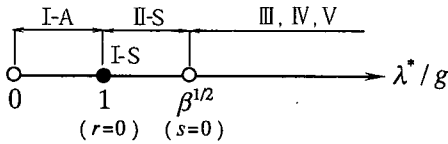


図-I 固有値の分布

付録 I 厚板の自由振動の厳密解

(1) 基礎方程式

文献13)では、図-1に示した周辺単純支持長方形厚板の自由振動解析において、3次元弾性理論により種々の表面境界条件に対する振動数方程式が求められている。ここでは、自由表面の場合について数値計算の容易な式を示す。

本文の計算例 4. (3) で用いた周辺単純支持の境界条件を満たす振動モードとして次式を用いる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} \phi(\bar{\xi}) \cos m\pi \bar{\xi} \sin n\pi \bar{\eta} \\ \psi(\bar{\xi}) \sin m\pi \bar{\xi} \cos n\pi \bar{\eta} \\ \chi(\bar{\xi}) \sin m\pi \bar{\xi} \sin n\pi \bar{\eta} \end{Bmatrix} \quad (I.1)$$

ここに、 $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ は点 O を原点とする正規化座標で、 h は板厚である。

$$\bar{\xi} = x/a, \quad \bar{\eta} = y/b, \quad \bar{\zeta} = z/h \quad (I.2)$$

自由表面 ($\bar{\zeta} = 0, 1$) で変位が $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ を満たす条件から、 (m, n) 項に対する次の振動数方程式が求められる¹³⁾。

$$\sinh r [8g^2rs(r^2 + g^2)^2(1 - \cosh r \cosh s) + \{(4g^2rs)^2 + (r^2 + g^2)^4\} \sinh r \sinh s] = 0 \quad (I.3)$$

ここに、

$$g^2 = M^2 + N^2, \quad M = m\pi h/a, \quad N = n\pi h/b \quad (I.4)$$

$$r^2 = g^2 - \lambda^{*2}, \quad s^2 = g^2 - \frac{\lambda^{*2}}{\beta}, \quad \beta = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \quad (I.5)$$

G, ν, ρ, p は本文中の記号と同じであり、固有値 λ^* は式(35)の無次元振動数である。

(2) 固有振動モード

半角公式を用いて式 (I.3) の [] 内の式を因数分解すると、振動数方程式は3つの場合に分けられる。

$$\left. \begin{aligned} \sinh r &= 0 \\ 4g^2rs \tanh \frac{r}{2} - (r^2 + g^2)^2 \tanh \frac{s}{2} &= 0 \\ 4g^2rs \tanh \frac{s}{2} - (r^2 + g^2)^2 \tanh \frac{r}{2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I.6)$$

r と s は特性方程式の根であり、式 (I.6) は r, s とともに実根の場合で、式 (I.5) の r^2 または s^2 が負になる場合には、式 (I.6) の r, s に ir または is ($i = \sqrt{-1}$) を用いる。したがって、 r^2 と s^2 の正負の組み合わせ (ただし、 $r^2 < s^2$) によって各方程式は3通りの場合がある。なお、第1式の $\sinh r = 0$ の根は $r = 0$ のみであるが、 r が虚根のときには $\sinh r = 0$ より無限個の振動モードが存在する。文献13)では、この振動モードを記号 I-S, II-A, IV-S で表している。ここに、S は中央面に対して対称モード、A は逆対称モードを意味する。

第2式と第3式はそれぞれ逆対称モードと対称モードに対する式で、原論文の I-, III-, IV-A モードと II-, III-, V-S モードがこれらの式に対応する。固有値 λ^* を求めるためには、適当な2つの初期値 λ_0^*, λ_1^* を仮定してセカント法で容易に収束解が得られる。初期値の推定には、図-Iを参考にされたい。

原論文に示された λ^* の値に些細な誤りがあり、また、有効桁数が少ないので、これを表-Iに示す。表に示されていないモードは次式で求められる。

$$\lambda^* = \begin{cases} g & \text{(I-S)} \\ \sqrt{g^2 + \pi^2} & \text{(II-A)} \\ \sqrt{g^2 + 4\pi^2} & \text{(IV-S)} \end{cases} \quad (I.7)$$

式 (I.6) のそれぞれの振動モードに対する式 (I.1) の固有関数を示す。なお、 $\sinh r = 0$ に対する固有関数は原論文に示されているので省略する。

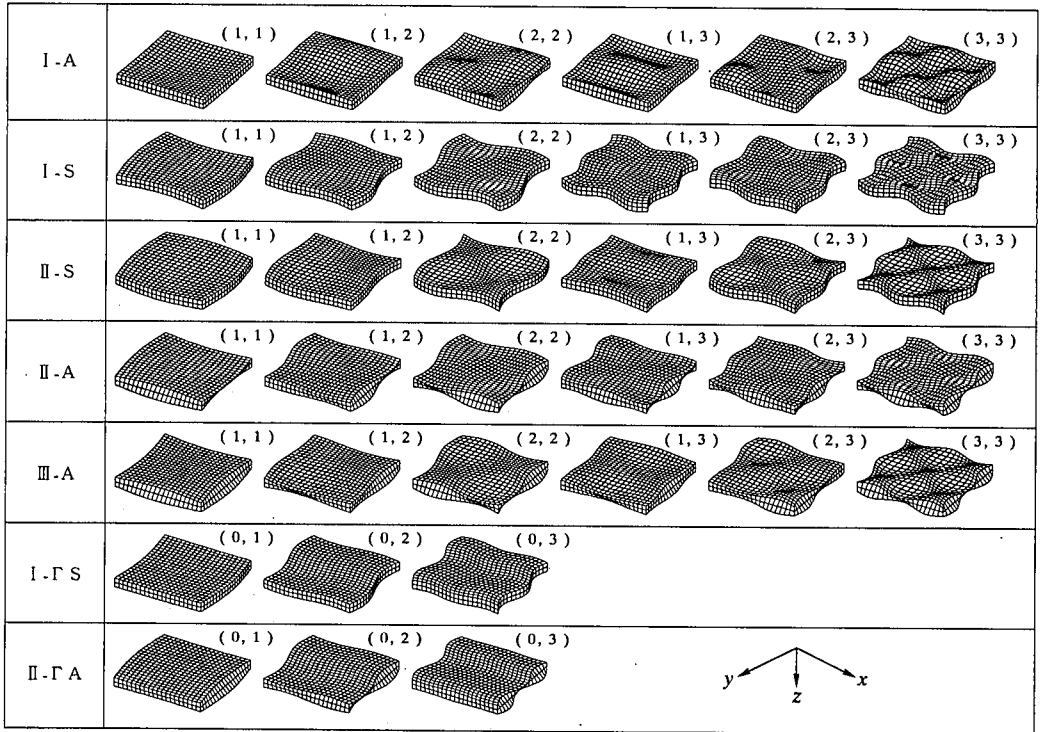


図-II 固有振動モード図 ($t/b=1/10, \nu=0.3$)

$$\left. \begin{aligned}
 \phi(\xi) &= AM \left\{ 2r \operatorname{sech} \frac{r}{2} \sinh \frac{r}{2} \xi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{s} (r^2 + g^2) \operatorname{sech} \frac{s}{2} \sinh \frac{s}{2} \xi \right\} \\
 \psi(\xi) &= AN \left\{ 2r \operatorname{sech} \frac{r}{2} \sinh \frac{r}{2} \xi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{s} (r^2 + g^2) \operatorname{sech} \frac{s}{2} \sinh \frac{s}{2} \xi \right\} \\
 \chi(\xi) &= A \left\{ 2g^2 \operatorname{sech} \frac{r}{2} \cosh \frac{r}{2} \xi \right. \\
 &\quad \left. - (r^2 + g^2) \operatorname{sech} \frac{s}{2} \cosh \frac{s}{2} \xi \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (I.8)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \phi(\xi) &= SM \left\{ 2r \operatorname{cosech} \frac{r}{2} \cosh \frac{r}{2} \xi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{s} (r^2 + g^2) \operatorname{cosech} \frac{s}{2} \cosh \frac{s}{2} \xi \right\} \\
 \psi(\xi) &= SN \left\{ 2r \operatorname{cosech} \frac{r}{2} \cosh \frac{r}{2} \xi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{s} (r^2 + g^2) \operatorname{cosech} \frac{s}{2} \cosh \frac{s}{2} \xi \right\} \\
 \chi(\xi) &= S \left\{ 2g^2 \operatorname{cosech} \frac{r}{2} \sinh \frac{r}{2} \xi \right. \\
 &\quad \left. - (r^2 + g^2) \operatorname{cosech} \frac{s}{2} \sinh \frac{s}{2} \xi \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (I.9)$$

ここに、 ξ は自然座標 ($\xi = 2\bar{\xi} - 1$)、 A, S は任意定数で逆対称モードと対称モードを表す。なお、式 (I.8)、(I.9) より、原論文の逆対称と対称モードの意味は、 u と v の振動モードを指していることが分かる。

(3) せん断モード

式 (I.1) で $n=0$ または $m=0$ とおくと、原論文に示されていない振動モードが存在する。このモードは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 u &= 0, \quad v = h \sum_{m=1}^{\infty} \psi(\bar{\xi}) \sin m\pi \bar{\xi}, \quad w = 0 \\
 u &= h \sum_{n=1}^{\infty} \phi(\bar{\xi}) \sin n\pi \bar{\eta}, \quad v = w = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (I.10)$$

これらの変位から生じる応力はせん断応力のみであるので、これらの振動モードをせん断モードと呼ぶことにする。

式 (I.10) に対する無次元振動数を求めると、式 (I.4) の M, N を用いて次の値が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda^* &= \sqrt{M^2 + \alpha^2 \pi^2} \quad \text{for } (m, 0) \\
 \lambda^* &= \sqrt{N^2 + \alpha^2 \pi^2} \quad \text{for } (0, n)
 \end{aligned} \right\} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots) \quad (I.11)$$

また、式 (I.10) の固有関数は、 A, B を任意定数として次式で与えられる。

$$\psi(\bar{\xi}) = A \cos \alpha \pi \bar{\xi}, \quad \phi(\bar{\xi}) = B \cos \alpha \pi \bar{\xi} \quad (I.12)$$

$\alpha=0, 1, 2, \dots$ に対する振動モードを I-ΓS, II-ΓA, III-ΓS, ... とする。

参考文献

- 1) 鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦 : 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 倍風館, pp.96-100, 1981.
- 2) たとえば, Bouhaddi, N. and Fillod, R. : A method for selecting master DOF in dynamic substructuring using the Guyan condensation method, *Computers & Structures*, Vol.45, pp.941-946, 1992.
- 3) 林 正, 渡辺 力 : 節点帯板法による薄肉構造物の自由振動解析, 土木学会論文集, No.549/I-37, pp.141-148, 1996.
- 4) 林 正, 渡辺 力 : 構造物の3次元応力解析と自由振動解析への節点プリズム法の応用, 構造工学論文集, Vol.44A, pp.339-348, 1998.
- 5) Bouhaddi, N. and Fillod, R. : Substructuring using a linearized dynamic condensation method, *Computers & Structures*, Vol.45, pp.679-683, 1992.
- 6) Bouhaddi, N. and Fillod, R. : Substructuring by a two level dynamic condensation method, *Computers & Structures*, Vol.60, pp.403-409, 1996.
- 7) 林 正, 山中素直, 加瀬節弘, 佐藤敏亮 : ハイアラキー要素による有限要素解析の効率化, 土木学会論文集, No.591/I-43, pp.71-84, 1998.
- 8) Bardell, N.S. : Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method, *J. sound vib.*, Vol.152, pp.263-289, 1991.
- 9) Szabó, B. and Babuška, I. : *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, pp.272-273, 1991.
- 10) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. : *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol.2, McGraw-Hill, pp.1-102, 1991.
- 11) Leissa, A.W. : The free vibration of rectangular plates, *J. sound vib.*, Vol.31, pp.257-293, 1973.
- 12) Mindlin, R.D., Schacknow, A. and Deresiewicz, H. : Flexural vibrations of rectangular plates, *J. Appl. Mech.*, pp.430-436, 1956.
- 13) Srinivas, S., Rao, C.V.J. and Rao, A.K. : An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, *J. sound vib.*, Vol.12, pp.187-199, 1970.
- 14) NISAIII ユーザーズ・マニュアル Version 93.0 : Engineering Mechanics Research Corporation, 1994.

(1998. 6. 8 受付)

FREE VIBRATION ANALYSIS BY HIERARCHICAL ELEMENT USING TWO PHASE DYNAMIC CONDENSATION METHOD

Masa HAYASHI and Chikara WATANABE

Hierarchical finite element method using the two phase dynamic condensation method is proposed for the free vibration analysis. In the two phase dynamic condensation method, the assembly procedure of the global stiffness and mass matrices is the same as that of stress analysis and the required memory size is comparable to that in the usual static condensation method. Therefore, this method is applicable to large eigenproblems. From the results of numerical calculation, it is found that very accurate solutions are obtained with one hierarchical element in the free vibration analysis of thin and thick plates and the hierarchical element analysis using the two phase dynamic condensation method is very effective for large eigenproblems.