

無数の亀裂を有する物体の マルチスケール応力変形解析法

寺田賢二郎¹・京谷孝史²

¹正会員 Ph.D. 東北大学講師 情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

²正会員 工博 東北大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

内部に周期的に分布する無数の亀裂を含む物体に対する均質化法の定式化を示し、その数値解析例を示す。定式化は変分法を用いて記述し、漸近展開法に基づく均質化法の数理構造を説明する。導かれる微視(ミクロ)スケールの支配方程式は、許容変位が局所的な接触条件が規定される凸集合に属する変分不等式となり、拘束条件付きの最小化問題として記述されて、有限要素法による近似解法の定式化へとつながる。penalty法による数値解析アルゴリズムを示すとともに、数値解析によって局所接触問題が周期境界条件とともに解かれることを例示する。さらに、いくつかの数値解析例によって亀裂を有する構造の材料としての特性ならびに構造物の力学挙動を連成させたマルチスケール応力変形解析法の適用性を議論する。

Key Words : multiscale stress analysis, homogenization method, local contact problem, fissured media

1. はじめに

Signoriniの問題に代表される接触問題は、力学的な側面から盛んに研究が行われ、応用数学の分野でも変分不等式で定式化される物理問題の典型的な例としてその理論的枠組みができあがった¹⁾。この変分不等式論は、Lagrange未定乗数を用いた鞍点問題として定式され、最適設計論をはじめとする数理計画法の分野での理論的発展がめざましい²⁾。計算力学分野においても、接触問題をはじめ、その他の多くの現象が拘束条件付きの最小化問題として定式化され^{3),4)}、perturbed Lagrangian⁵⁾、augmented Lagrangian⁶⁾そして処罰(penalty)法などの等価性を利用した多くのアルゴリズムが開発された⁴⁾。また、大変形問題や材料非線形問題の解法と組み合わせられたその高度な数値解析技術は、汎用非線形有限要素解析プログラムへも組み込まれて、実用化されるに至っている。最近でも大変形問題における効率的なアルゴリズムあるいはより精度のよい解法等の研究成果はめざましい^{7),8)}。

これに対して、材料の内部に無数の微小亀裂等の欠陥が存在し、この亀裂面が接触面となるような問題は、現在確立している接触問題の解析技術を用いれば理論上は解析可能であるが、考えている構造物全体に比べて対象とする亀裂が非常に小さな場合には、現実的な計算は不可能となる。微視的な構造として存在する亀裂一つ一つを陽に数値モデル化し、全体の挙動を調べ

ることは現在の計算機性能を以てしても実用化にはほど遠い多大な計算時間を要してしまうからである。したがって、このような場合、微視構造を代表する領域を定義して、そこでの力学挙動をなんらかの方法で平均化することが実用的代替案として考えられる。このような問題状況において、複合材料に対して適用されている均質化法は、微視構造の解析を通して全体構造物の材料としての平均物性を比較的容易に評価できるため、有効な平均化手法の一つである⁹⁾。さらに、その数理的理論構造^{10),11)}は、数値解析を前提とした定式化を容易にし、多くの物理的解釈をさほど必要とせず異なるスケールの現象を記述できるので非常に应用到した方法論であるといえる¹²⁾。

本論文では、内部に周期的に分布する無数の微小亀裂を含む構造体に対する均質化法の定式化を示し、その数値解析例を示す。定式化は変分法を用いて記述し、漸近展開法に基づく均質化法の数理構造を明示する。また、変分不等式として導かれる微視的スケールの支配方程式についてpenalty法による数値解析アルゴリズムを示す。さらに、いくつかの数値解析例によって、亀裂を有する材料の特性ならびに構造物の力学挙動を考察し、開発したマルチスケール応力変形解析手法の適用性について考察する。

本研究の主眼は、微視的な亀裂面の接触状態を考えつつ構造全体の弾性体としての力学挙動を解析する手法の確立であり、マイクロメカニクスを用いた微視力

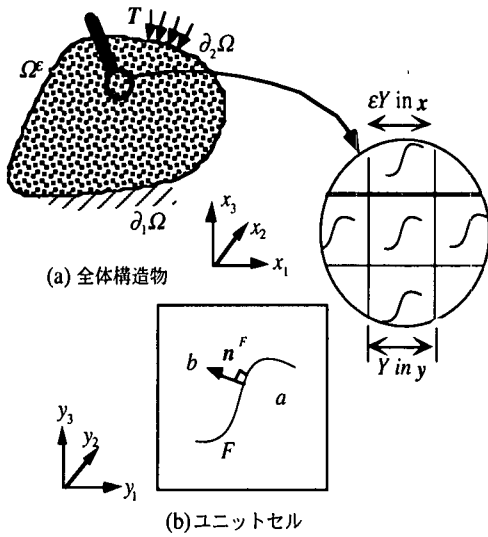


図-1 周期的な微視亀裂を有する構造物とユニットセル

学挙動の詳細な議論¹³⁾とは本質的に異なることを明記しておく。また、この種の均質化法の理論的枠組みは、既に文献9)等で確立されたものであるが、数値解析のための定式化は報告された例はない。さらに、ここで用いるマルチスケール応力変形解析のアルゴリズムは独自のものであり、Global-Local 連成解析の一つの技術を提示するものである。

2. 周期的な微視亀裂を有する材料の均質化法

(1) 問題の設定

図-1(a)に示すような周期的に分布する無数の微視亀裂を有する線形弾性体を考える。ただし、亀裂はすべて閉じており厚みはないものとする。この亀裂を含む構造全体の3次元領域 $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ は、代表長さ ε を有する基本周期構造領域(ユニットセル) εY を繰り返し配置することによって覆うことができるものとする。さらに、そのときユニットセル内には亀裂は複数存在してもよいが、セルの境界と交差することはないものとする。このような物体の力学挙動は亀裂を含む微視構造に支配される。以下では、変数に添え字 ε を用いて微視構造への依存性を明記することにする。

領域 Ω^ε の内部において、亀裂が占める閉領域を F^ε と表すと、 $\Omega_F^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$ は開領域であり、次のつりあい方程式はこの物理領域のほとんどいたるところ(a.e.)で成り立つ。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega_F^\varepsilon \quad (1)$$

ここで、直交デカルト座標系 $x \in \mathbb{R}^3$ を用いており、 $\sigma^\varepsilon, f^\varepsilon$ はそれぞれ亀裂を除いた開領域 Ω^ε における応力と物体力である。斉次の変位境界条件と表面力 T を与えられる応力境界条件は、変位を u^ε 、境界における外向き法線ベクトルを n とすると次のように与えられる。

$$u_i^\varepsilon = 0 \text{ on } \partial_1\Omega; \sigma_{ij}^\varepsilon n_j = T_i \text{ on } \partial_2\Omega \quad (2)$$

ここで、変位境界と応力境界は、微視構造とは無関係に外的な条件が課せられる境界なので ε を付けずに、それぞれ $\partial_1\Omega, \partial_2\Omega$ と表している。一方、亀裂は開閉やずれを生じるが、それらの運動に対する制約条件として、亀裂が占める閉領域 F^ε においては亀裂の両側の領域が重ならないという条件、

$$[n_i^F u_i] \leq 0 \text{ on } F^\varepsilon \quad (3)$$

が与えられる。ここで、 n^F は図-1(b)に示すように亀裂を局所的な領域 a と b に分割した際の a から b へ向く法線ベクトルとする。また、 $[\phi]$ は変数 ϕ の不連続量を表す記号であり、法線ベクトル n^F を有する亀裂面をはさんで与えられる値 ϕ_a と ϕ_b の差 $\phi_a - \phi_b$ である。式(3)は等号が成立するときに接触、不等号のときは開口を表す。ここで、亀裂面は滑らかで摩擦はなく、垂直な接触力 σ_N のみが作用するものとする、

$$\sigma_{ij}^\varepsilon n_j^F \Big|_a = \sigma_N \Big|_a n_i^F; \sigma_{ij}^\varepsilon n_j^F \Big|_b = -\sigma_N \Big|_b n_i^F \quad (4)$$

$$\sigma_N \leq 0 \text{ on } F^\varepsilon \quad (5)$$

なる条件が得られる。すなわち、領域 a, b 各々の境界面には互いに逆向きの垂直圧縮力が作用する。さらに、式(3)において不等号が成り立つ場合には亀裂は開口しているので $\sigma_N = 0$ である。また、弾性係数テンソル a_{ijkl} を Y_F 内で与えることによって、構成式は

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ijm}^\varepsilon(x) \frac{\partial u_m^\varepsilon(x)}{\partial x_m} \quad (6)$$

と表される。ここで a_{ijm}^ε は対称性と正值性を有するものと仮定する。

式(1)~(6)で支配される力学現象は、典型的な片側拘束を有する接触問題であり、Signoriniの問題として知られている。局所形で与えられた支配方程式は、古典的な変分法の定式化によれば、以下のような変分不等式で与えられる^{1),4)}。

$$u^\varepsilon \in K_F^\varepsilon; a(u^\varepsilon, v^\varepsilon - u^\varepsilon) \geq l(v^\varepsilon - u^\varepsilon) \quad \forall v^\varepsilon \in K_F^\varepsilon \quad (7)$$

ここで、 $a(\cdot, \cdot), l(\cdot)$ はそれぞれ

$$a(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega_F^\varepsilon} a_{ijkl} \frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_i} dx \quad (8)$$

$$l(v^\varepsilon) = \int_{\Omega_F^\varepsilon} f_i v_i^\varepsilon dx + \int_{\partial_2, \Omega} \hat{t}_i v_i^\varepsilon ds \quad (9)$$

のような双一次形式と一次形式として定義されており、 K_F^ε は次のような許容関数の集合である。

$$K_F^\varepsilon = \left\{ v^\varepsilon \mid v^\varepsilon \in V_F^\varepsilon; [n_i^F v_i^\varepsilon] \leq 0 \text{ a.e. on } F^\varepsilon \right\}. \quad (10)$$

この解集合 K_F^ε は、線形空間

$$V_F^\varepsilon = \left\{ u^\varepsilon \mid u^\varepsilon \in H^1(\Omega_F^\varepsilon); u_i^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \quad (11)$$

の部分集合として与えられる凸錐であり、 H^1 は 1 次の Sobolev 空間である。式(8)と式(9)を用いて Korn の不等式が成り立つことから、 a の連続性と強圧性ならびに l の連続性と線形性が保証される。そして、よく知られた Lax-Milgram の定理により、変分不等式(7)が唯一の解 $u^\varepsilon(x)$ を持つことが示される⁴⁾。

(2) 微視および巨視スケールの導入

領域内に周期的に分布するユニットセルは、全体の領域 Ω_F^ε に対して微小であると想定する。このとき、スケール $x \in \mathbf{R}^3$ で測ったときの直方体の各辺は εY_i ($i=1,2,3$) なる大きさを有するので、ユニットセル領域 εY はもはや測ることのできない「点」として認識される。しかし一方で、巨視的な挙動を大きく支配する物理量は Y 内で分布するため、点 x に存在する無限に小さい領域 Y を測り得る測度を導入するのは自然なことである。その測度として、本論文で適用した均質化法ではユニットセルの代表長さ ε をパラメータとしたスケール $y = x/\varepsilon$ を導入する。

ユニットセル内の物理量をスケール y で測ることにすると、ユニットセルの領域 Y がその定義域になり、亀裂領域は Y における閉領域 F と同一視される (図-1(b))。さらに、スケール x は測度として Y 、 F とは無関係になり、 x を変数とする物理量の定義域は微視構造の影響を直接的には受けないという意味において添え字 ε を外して Ω と書くことができる。したがって、ユニットセルの物理領域を表す開領域を $Y_F = Y \setminus F$ で表すと、考えている領域は、スケールの異なる領域の重なりとして、

$$\Omega_F^\varepsilon = \Omega \cap \left\{ y \in \mathbf{R}^3 \mid y = \frac{x}{\varepsilon} \in Y_F \right\} = \Omega \cap \varepsilon \mathbf{R}^3 \quad (12)$$

と表わされ、以降は便宜的に $\Omega \times \varepsilon \mathbf{R}^3$ などと表記する。こうすることで、各物理量は、巨視的領域 Ω と微視的領域 Y_F の 2 つの領域を定義域とする関数で表されることになり、それぞれ領域において別個の許容関数の集合を導入できることになる。このことは、問題を変分法で記述する際に、それぞれのスケールの解空間を規定する拘束条件を明確に区別できることを意味している。

ここで導入したスケール $x \in \Omega$ と $y \in Y_F$ をそれぞれ

巨視 (マクロ) スケールと微視 (ミクロ) スケールと呼ぶことにする。問題を定義する物理量は、これら 2 つのスケールによって測ることが可能になるので、巨視スケール $x \in \Omega$ および微視スケール $y \in Y_F$ の関数であることを明示的に書き、

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(x) = \sigma_{ij}(x, y); u_i^\varepsilon(x) = u_i(x, y) \quad (13)$$

などと表記することにする。

(3) 微視および巨視スケールを用いた漸近展開法

微視および巨視それぞれのスケールにおいて成り立つべき支配方程式を導く。すなわち、 $x \in \Omega$ と $y \in Y_F$ の 2 つのスケールを用いた漸近展開法によって、極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ を取ったときの微分方程式(7)の漸近挙動を調べることが本小節での目的である。求めるべき未知変数は微視的ならびに巨視的な力学挙動を表すが、ここで示す均質化法のアイディアは、それらが $\Omega \times Y_F$ で定義され、変数 y について周期的 (Y-periodic) な関数とすることにある。巨視スケール $x \in \Omega$ は等価な均質体の境界値問題の記述に用いられるのに対して、 $y \in Y_F$ は微視スケールで生起する周期的な振る舞いを測る役割を果たす。

ε をパラメータとした式(7)の解 $u^\varepsilon(x)$ および試験関数 $v^\varepsilon(x)$ をそれぞれ 2 つのスケール表示を用いて次のように漸近展開する。

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (14)$$

$$v^\varepsilon(x) = v^0(x) + \varepsilon v^1(x, y) + \varepsilon^2 v^2(x, y) + \dots \quad (15)$$

ここで、各変数 $u^k(x, y)$ は $\Omega \times Y_F$ 内で定義され、Y-periodic (変数 y について周期的) であり、 u^0 と v^0 は y に依存しないことが示されるので $x \in \Omega$ のみの関数としてある¹⁰⁾。こうして、2 つのスケール変数の関数として変位を扱うことに対応して、亀裂は微視領域 Y の内部の閉領域 F として扱われる。それは、微視スケール y によって測られるもので、 x とは無関係になる。したがって、 $u^0(x)$ は亀裂部とは直接関係せず、式(10)における片側拘束の条件は、

$$[n_i^F u_i^k] \leq 0 \text{ on } F \quad (k=1,2,\dots) \quad (16)$$

と解釈される。さらに、

$$V_{Y_F} = \left\{ v \mid v_i \in H^1(Y_F); Y\text{-periodic} \right\} \quad (17)$$

$$K_{Y_F} = \left\{ v \mid v \in V_{Y_F}; [n_i^F v_i] \leq 0 \text{ a.e. on } F \right\} \quad (18)$$

なる関数空間とその凸な部分集合を考えると、式(12)によって、 u^k と v^k ($k=1,2,\dots$) は Y 上の K_{Y_F} に属する関数として与えられ、同時に $x \in \Omega$ をパラメータとして値を変え得ることがわかる。これに対して、式(12)

によると u^0 と v^0 は亀裂の存在を考慮しなくてもよい Ω のみを定義域とすることから、許容関数の空間は、

$$u^0, v^0 \in V = \left\{ v \mid v_i \in H^1(\Omega); v_i|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \quad (19)$$

なる線形空間になり、もはや拘束条件は斉次の変位境界条件のみとなる。

このように、領域 Ω_ε^e における変位 u^ε の漸近展開形の各項を $x \in \Omega$ と $y \in Y_\varepsilon$ のそれぞれのスケールで独立に記述することにより、材料内部に分布する微小亀裂に関する力学現象は、微視領域での問題として扱われ、その結果として具現する何らかの効果が巨視的領域での挙動に影響を及ぼすという、2段階スケールで現象を記述する枠組みが出来上がる。ここで、 $\Omega \times Y_\varepsilon$ に属する2つの異なるスケールで測るときには、漸近展開形の各項が次の微分演算則に従うことを注意しておく。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\Omega_\varepsilon^e} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \Big|_{\Omega \times Y_\varepsilon} \quad (20)$$

また、以下の微視および巨視的なスケールの方程式の導出の過程においては、極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ をとることによって漸近挙動が捉えられるが、任意の Y -periodic な関数 $F(x, y) \in \Omega \times Y_\varepsilon$ の積分は、次式に従うことが知られている⁹⁾。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon^e} F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{Y_\varepsilon} F(x, y) dy \right] dx := \int_{\Omega} \bar{F}(x) dx \quad (21)$$

ここで、 $\bar{\cdot}$ は体積平均を与える演算子とし、 $\bar{F} = (F)^{\bar{\cdot}}$ など書くことにする。

以上の数学的な枠組みに注意して、式 (14) および (15) を変分不等式 (7) に代入すると、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon^e} a_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} + \dots \right) \\ & \times \left(\frac{\partial (v_i^0 - u_i^0)}{\partial x_j} + \frac{\partial (v_i^1 - u_i^1)}{\partial y_j} + \dots \right) dx \\ & \geq \int_{\Omega_\varepsilon^e} f_i (v_i^0 + \dots - u_i^0 - \dots) dx \\ & \quad + \int_{\partial_i \Omega} T_i (v_i^0 + \dots - u_i^0 - \dots) ds \end{aligned} \quad (22)$$

が得られ、漸近挙動を見るために極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ をとることによって、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} a_{ijkh} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} \frac{\partial (v_i^0 - u_i^0)}{\partial x_j} dx \\ & + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} a_{ijkh} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} \left(\frac{\partial (v_i^1 - u_i^1)}{\partial y_j} \right)^{\bar{\cdot}} dx \\ & + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} a_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right)^{\bar{\cdot}} \frac{\partial (v_i^0 - u_i^0)}{\partial x_j} dx \\ & + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} a_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right)^{\bar{\cdot}} \frac{\partial (v_i^1 - u_i^1)}{\partial y_j} dx \\ & - \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_i (v_i^0 - u_i^0) dx - \int_{\partial_i \Omega} T_i (v_i^0 - u_i^0) ds \geq 0 \quad (23) \\ & \quad \forall v^0 \in V, \forall v^1 \in K_{Y_\varepsilon} \end{aligned}$$

が得られる。極限操作の結果、上式においては微視構造の影響を表す項は u^1, v^1 しか残らない。また $(\cdot)^{\bar{\cdot}}$ は式 (21) に示す体積平均であることを注意する。さらに、任意の $\alpha \in [0, 1]$ ならびに $w^0 \in V$ として $v^0 = u^0 \pm \alpha w^0$ をとり、 $v^1 = u^1$ を選ぶと、微視構造の影響項が消えた所望の巨視スケールの方程式として

$$u^0 \in V_\varepsilon: a(u^0, w^0) = l^0(w^0) \quad \forall w^0 \in V \quad (24)$$

なる等式を得る。ここで双一次形式は式 (8) に与えたものと同じであるが、一次形式 l^0 は式 (9) に K_{Y_ε} の寄与分を加えた次式となる。

$$\begin{aligned} l^0(w^0) = & - \int_{\Omega} a_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right)^{\bar{\cdot}} \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \\ & + \int_{\Omega} f_i w_i^0 dx + \int_{\partial_i \Omega} T_i v_i^0 ds \end{aligned} \quad (25)$$

この右辺第1項が微視スケールの接触状態（あるいは不均質性）を反映した寄与分である。

このようにして得られた巨視的スケールの方程式 (24) は、均質化された弾性体（等価均質体）に対するもので、次の境界値問題と等価である。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}^0}{\partial x_j} + f_i = 0; \quad \bar{\sigma}_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_\varepsilon} \sigma_{ij}^0 dy; \\ & \sigma_{ij}^0 = a_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right) \quad \text{a.e. in } \Omega \\ & \quad u_i^0 = 0 \quad \text{on } \partial_i \Omega \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、均質化弾性体の領域 Ω には、もはや亀裂は存在しないことに注意されたい。これは、解空間 V が片側拘束の条件を含まないことの現れであり、問題を2つのスケール変数で記述し、漸近挙動として捉えた結果得られるものであることを再度強調しておく。

一方、式 (23) における試験関数 v^1 は、 K_{Y_ε} が凸であ

ることから、任意の滑らかな関数 $0 \leq \theta(x) \leq 1$ を用いて次のように取ることができる。

$$\begin{aligned} v^1(x, y) &= (1 - \theta(x))u^1(x, y) + \theta(x)w(x, y) \\ \forall 0 \leq \theta(x) \leq 1, \forall w \in K_{Y_F} \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、巨視スケール x は単なるパラメータの役割を果たすことに注意する。巨視スケールの方程式 (24) を式 (23) に代入したものにこれを代入すると、

$$\int_{\Omega} \left[a_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial (w^1 - u_i^1)}{\partial y_j} \right] \theta(x) dx \geq 0 \quad (29)$$

$$\forall 0 \leq \theta(x) \leq 1, \forall w \in K_{Y_F}$$

が得られる。そして、これは Ω のほとんどいたるところ (a.e.) で次の微視スケールの方程式と等価である。

$$\int_{Y_F} a_{ijkh} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \right) \frac{\partial (w^1 - u_i^1)}{\partial y_j} dy \geq 0 \quad \forall w \in K_{Y_F} \quad (30)$$

ただし、変分不等式 (30) の解は不定である。すなわち、式 (30) を満たす Y -periodic な解 u^1 に定数を加えたものも解となり、 V_{Y_F} と K_{Y_F} で許容関数を定義しては解の一意性が保証されない。この不定性は、許容関数を次の部分集合に制限することで回避される。

$$\tilde{V}_{Y_F} = \{v \mid v \in V_{Y_F}; \bar{v} = 0\} \quad (31)$$

$$\tilde{K}_{Y_F} = \{v \mid v \in K_{Y_F}; \bar{v} = 0\} \quad (32)$$

ここで、 $\bar{v} = 0$ は v の Y での体積平均がゼロとなることを表し、 $v \in \tilde{V}_{Y_F}$ が x のみの関数 (つまり定数関数) と直交することを意味する。こうして、亀裂を有する弾性体の局所的な力学応答を得ることは次の変分不等式を解くことに帰着する。

$$u^1 \in \tilde{K}_{Y_F} : a_{Y_F}(u^1, w - u^1) \geq l_{Y_F}(w - u^1) \quad \forall w \in \tilde{K}_{Y_F} \quad (33)$$

ここで、 Y_F 上で双一次形式と一次形式を

$$a_{Y_F}(u^1, v) = \int_{Y_F} a_{ijkh} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \quad (34)$$

$$l_{Y_F}(v) = - \int_{Y_F} a_{ijkh} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \quad (35)$$

と定義した。

(4) 巨視スケールの構成則

以下の議論を見やすくするために、ここで式 (26) における各変数を次のように書き換える。

$$\sigma_{ij}^0 \rightarrow \sigma_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{ij}^0 \rightarrow \tilde{\sigma}_{ij} \quad (36)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h^0}{\partial x_k} \right) \rightarrow E_{kh}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial y_h} + \frac{\partial u_h^1}{\partial y_k} \right) \rightarrow e_{kh}(u^1) \quad (37)$$

これによって、式 (26) に与えられた微視的な応力とひずみの関係式も、

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} (E_{kh} + e_{kh}(u^1)) \quad (38)$$

と書き換えられる。一方、巨視的な応力はこのユニットセル上の体積平均、

$$\Sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_F} \sigma_{ij}(y) dy \quad (39)$$

で与えられるため、巨視的な構成関係は R^6 から R^6 への写像 $E_{kh} \mapsto \Sigma_{kh}$ として与えられる。このことから、 Ω の各点 x におけるひずみエネルギー密度を

$$U(E(x)) = \frac{1}{2|Y|} \int_{Y_F} a_{ijkh} (E_{ij} + e_{ij}(u^1)) (E_{km} + e_{km}(u^1)) dy \quad (40)$$

と定義すると、巨視的な構成式は、

$$\Sigma_{ij} = \frac{\partial U(E)}{\partial E_{ij}} \quad (41)$$

なる超弾性体のそれと与えられることが分かる⁹⁾。

3. 解法と数値解析アルゴリズム

巨視スケールの支配方程式 (24) は、式 (25) に見られるように微視スケールの応力の変動分に相当する量のユニットセルでの体積平均 $a_{ijkh} (\partial u_k^1 / \partial y_h)$ を含む。これを全体構造の各点 x で評価することを除けば、式 (24) は形式的には通常の線形弾性体に対する定式となら変わらない。したがって、本節では、変分不等式 (33) で表された微視スケールの問題について、具体的な解法と数値解を得るためのアルゴリズムを示す。

巨視スケールの変位 $u^0(x)$ が与えられたと仮定する。このとき、変分不等式 (33) で与えられる微視スケールの問題は、汎関数を

$$J(w) = \frac{1}{2} a_{Y_F}(w, w) - l_{Y_F}(w) \quad (42)$$

のように定義すると、次の最小化問題と等価である。

$$J(u^1) = \min_{w \in \tilde{K}_{Y_F}} J(w) \quad (43)$$

この拘束条件付きの最小化問題は、Lagrangian 汎関数を定義して、変位に対する片側拘束条件をはずすことができる⁴⁾。

式 (43) に示されるような不等式拘束条件付きの最小化問題については、接触問題や最適化問題を解くことを目的として、近似的に拘束条件を満足させる各種解

法が提案されている。数理計画法における古典的解法としては Uzawa の方法⁴⁾があり、有限要素解析において代表的なものとしては perturbed Lagrangian 法⁵⁾や augmented Lagrangian 法⁶⁾などが挙げられる。Lagrange 未定乗数を用いて微視スケールの問題 (43)にもこれらの定式化は可能である。ここでは、perturbed Lagrangian との等価性が示されることで知られる penalty 法⁴⁾を用いた定式化および解法を示す。

(1) penalty 法による定式化

微小パラメータ $\delta > 0$ を用いて penalty 汎関数を次のように定義する。

$$P_\delta(v) = \frac{1}{2\delta} P(v) = \frac{1}{2\delta} \int_F \left\{ \left[n_i^F v_i \right]^+ \right\}^2 ds \quad (44)$$

ここで、 $[\phi]^+$ は正值関数で、

$$\phi^+ = \begin{cases} \phi & \text{if } \phi > 0 \\ 0 & \text{if } \phi \leq 0 \end{cases} \quad (45)$$

と定義されている。このとき、 δ が微小ならば、最小化問題 (43) は境界 $\partial_1 \Omega$ における斉次の変位拘束条件のもとで、

$$u^i \in \tilde{V}_{V_f} : J_\delta(u) = \min_{v \in \tilde{V}_{V_f}} J_\delta(v) \quad (46)$$

なる最小化問題と近似的に等価である。ここで、 $J_\delta(v)$ は式 (42) の汎関数を用いて

$$J_\delta(v) = J(v) + P_\delta(v) \quad (47)$$

としてある。したがって、 δ が非常に小さいときに、次の等式で与えられる弱形式は、式 (33) (あるいは式 (43)) と近似的に等価な支配方程式である。

$$a_{V_f}(v, u^i) + \frac{1}{\delta} \int_F [n_i^F v_i] \left[(n_k^F u_k^i) \right]^+ ds = l_{V_f}(v) \quad v \in \tilde{V}_{V_f} \quad (48)$$

ここで、許容関数は凸集合 K_{V_f} からではなく、 V_{V_f} の部分空間から選ばれる。

(2) 有限要素解析アルゴリズム

空間変数の次元が NDF で全節点数 NX を有する微視スケールの有限要素モデルを考える。大域的な形状関数を N_α ($\alpha = 1, \dots, NX$) とすると、変位および許容変位は節点値をそれぞれ U_i^α , V_i^α ($i = 1, \dots, NDF$) として次のように近似される。

$$v_i = V_i^\alpha N_\alpha, \quad u_k^i = U_k^\beta N_\beta \quad (49)$$

ただし、 i, k などに対する総和規約を総節点数 NX 個の成分を持つラテン文字 α, β の指標にも拡張して記してある。この式を penalty 法の式 (48) に代入して、 V_i^α の任意性を考慮すると、

$$K_{ik}^{\alpha\beta} U_k^\beta = F_i^\alpha \quad (50)$$

なる剛性方程式が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} K_{ik}^{\alpha\beta} &= \bar{K}_{ik}^{\alpha\beta} + \frac{1}{\delta} P_{ik}^{\alpha\beta} \\ &= \int_{V_f} a_{ijkl} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_l} dy + \frac{1}{\delta} \int_F [N_\alpha n_i^F] \left[(n_k^F U_k^\beta N_\beta) \right]^+ ds \end{aligned} \quad (51)$$

$$F_i^\alpha = - \int_{V_f} a_{ijkl} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} dy E_{kl} \quad (52)$$

とおいた。また、 E_{kl} は式 (37) で与えられる巨視スケールのひずみであり、全体構造物の各点で得られるがユニットセル内では定数値をとる。つまり、 E_{kl} は構造物の巨視スケールの変形を式 (24) を有限要素法を用いて解くことによって求め、その要素中心あるいは Gauss 点での値をユニットセルに定数として与えることになる。

いま、有限要素モデルにおいて亀裂面での接触状態を評価する節点は、同一座標値をもつ 2 重節点とし、正值関数が値を持つとき、すなわち式 (45) の $\phi > 0$ が成り立つ場合を考える。このとき、接触の判定は式の右辺第 2 項の積分であるが、接触面上の節点を仮に a, b とすると節点値のみで判定してもよい。すなわち、

$$g = [n_k^F u_k]_F \approx n_k^F U_k^a N_a - n_k^F U_k^b N_b \quad (53)$$

の値が正の場合には、亀裂面 F 上の積分は、

$$\begin{aligned} & \int_F (n_i^F N_a - n_i^F N_b) (n_i^F U_k^a N_a - n_i^F U_k^b N_b) ds \\ &= I_a^\alpha n_i^F n_k^F I_\beta^\alpha U_k^a - I_a^\alpha n_i^F n_k^F I_\beta^b U_k^b \\ & \quad - I_a^b n_i^F n_k^F I_\beta^\alpha U_k^a + I_a^b n_i^F n_k^F I_\beta^b U_k^b \end{aligned} \quad (54)$$

で置き換えられる。ここで、 n_i^F は節点 a における外向き法線ベクトルであり、 I_α^a は、

$$I_\alpha^a = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha = a \\ 0 & \text{if } \alpha \neq a \end{cases} ; (\alpha = 1, \dots, NX) \quad (55)$$

のように定義している。

実際の数値解析においては、有限要素法における剛性方程式 (50) は、各要素ごとの要素剛性行列 $K_{ik}^{(\alpha)\beta}$ と要素荷重ベクトル $F_i^{(\alpha)\beta}$ を重ね合わせることで求めた。したがって、penalty 項についても節点間に体積を持たない特殊な要素の結合規則をあらかじめ用意しておくこと効率がよい。以下には、微視スケールの penalty 法による数値解析アルゴリズムを示す。

[微視スケールの解析アルゴリズム]

- i) 初期の節点変位 U_i^α および巨視スケールのひずみ E を与える。

ii) 接触に関わる各2重節点の組 (a, b) について節点 a における法線 n_i^f を求め、両節点間の距離 g (式 (53)) を求める、

iii) 要素剛性方程式、

$$K_{ik}^{(e)\alpha\beta} u_k^\beta = F_i^{(e)\alpha}$$

をつくる。ここで α, β は要素節点番号である。

iv) ii) で求めた g の値によって、剛性行列に式 (54) で与えられる値に penalty $(1/\delta)$ を乗じた値を対応する自由度に組み込む。

v) 全体剛性方程式 (50) を組み立て、変位境界条件を付加した後、方程式を解く。

vi) 節点変位の収束を判定し、所望の精度が得られるまで ii) にもどって繰り返し計算する。

具体的な penalty パラメータの値は、

$$\delta = \frac{\delta_0}{\max_{i,\alpha} (\text{diag}(K_{ik}^{\alpha\beta}))}; \delta_0 \approx 10^{-4} \sim 10^{-6} \quad (56)$$

を目安にし、vi) から ii) への反復は、

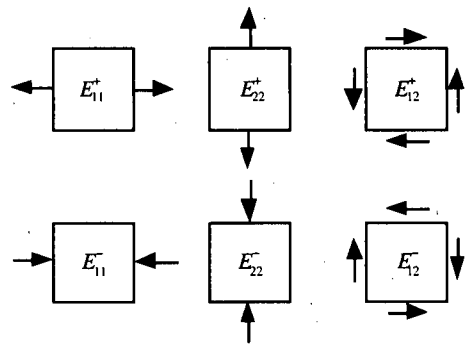
$$\text{TOL} = \frac{\sum_{k,\beta=1}^{Neq} |\text{NEW } u_k^\beta - \text{OLD } u_k^\beta|}{\sum_{k,\beta=1}^{Neq} |\text{NEW } u_k^\beta|} \quad (57)$$

なる量を定義して、 $\text{TOL} < 10^{-4} \sim 10^{-6}$ になったときに打ち切ればよい。ここで、左上付きの添え字 NEW は現在の、OLD は直前の反復ステップの解であることを示す。

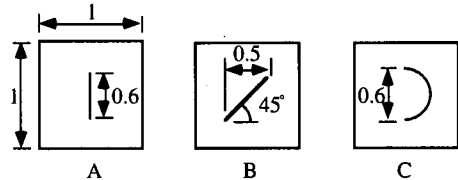
以上のアルゴリズムは微視スケールの問題のためのものであり、実際は全体構造の変形解析とカップリングしたマルチスケール応力変形解析となる。具体的には巨視的スケールの解析アルゴリズムは以下のようになる。

[巨視スケールの解析アルゴリズム]

- I) 巨視スケールの有限要素モデルの各要素中心あるいは Gauss 点において評価された巨視スケールのひずみ E を外荷重として、前述の微視スケールの解析アルゴリズムを実行して u^1 を求める (式 (33))。
- II) 剛性行列および荷重ベクトルを組み立てる。
- III) 巨視スケールの解析 (式(24)) を行って変位 u^0 を求める。
- IV) 巨視スケールのひずみ E (および応力) を求める。



(a) 巨視ひずみのパターン



(b) 微視亀裂を有するユニットセルのパターン

図-2 巨視ひずみとユニットセル

V) 巨視スケールの有限要素モデルの節点変位の収束を判定し、所望の精度が得られるまで I) にもどって繰り返し計算する (収束判定は式 (57) と同様)。

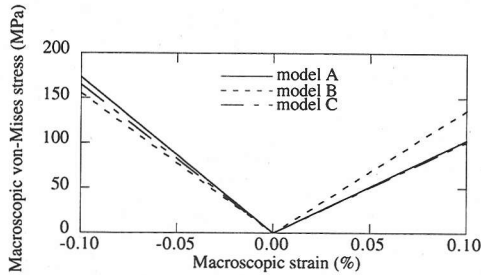
こうして両スケールにおいて釣り合いが満足されるまで反復を繰り返す収束計算の結果、微視スケールにおける亀裂を含んだ問題と巨視スケールでの境界値問題を同時に満たす解が得られる。次節では、このようなマルチスケール応力変形解析法の数値解析例を紹介し、方法論としての妥当性を示すことにする。

4. 数値解析例

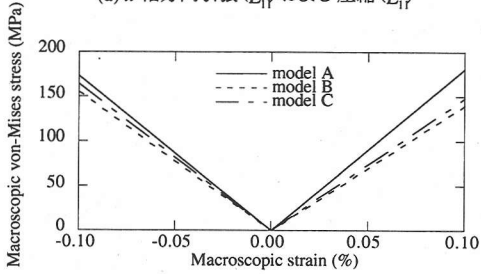
前節の定式化および解析アルゴリズムを用いて、微視亀裂を有する構造物の有限要素解析のいくつかの例を示す。計算はすべて平面ひずみ条件のもとで行う。また、亀裂を含む材料基質部の弾性係数は、ここでの数値解析を通して Young 率 $E=200$ GPa、Poisson 比 $\nu=0.3$ とする。比較的単純な幾何形状を仮定した計算例ではあるが、この種のマルチスケール解析は本研究ではじめて示されるものである。

(1) 平均的な変形特性

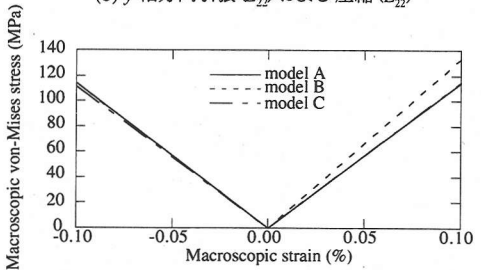
ここでは、亀裂の入り方についていくつかのパターンを想定し、1成分のみの巨視ひずみ (0.1%) を与えた際の、式 (39) によって評価されるマクロ応力 Σ の応答を調べる。一定の巨視ひずみは、亀裂の開閉を考慮して、正と負それぞれを与えることにする。図-2には、



(a) x 軸方向引張 (E_{11}^*) および圧縮 (E_{11}^*)



(b) y 軸方向引張 (E_{22}^*) および圧縮 (E_{22}^*)



(c) 正負の面内せん断 (E_{12}^* , E_{12}^*)

図-3 異なるユニットセルによる巨視ひずみ-応力関係

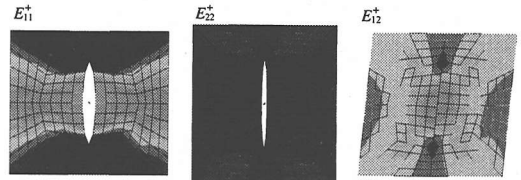
与えた巨視ひずみと、考えた亀裂のパターンの模式図を示す。

図-3(a)～(c)は、与えた巨視的なひずみと巨視的な応力 (von-Mises) の関係を示したものである。モデルが同じであっても与える巨視ひずみの正負に応じて微視スケールで亀裂の開閉が生じる結果、巨視的な応答における剛性が異なることがわかる。このように微視亀裂の開閉の影響によって、材料としての巨視的な力学特性が変化することが数値的に確かめられた。この結果は物理的な直感と合致している。微視スケールにおける亀裂の開閉が、結果として巨視的力学特性に影響を及ぼすことは、図-4に示すユニットセルの微視的応力分布と変形の様子が如実に物語っている。

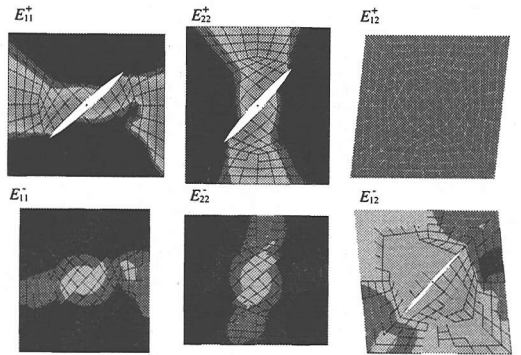
いま、ユニットセルには外力として一様なひずみまたは応力が作用し、亀裂は平面であるとしている。この場合、微視スケールでは単純な力学モデルが想定できるため、penalty 法による微視スケールの解析は数回の反復で収束する。仮に接触面の摩擦等のメカニズムを導入すると更に多くの計算コストを要する。

0 300

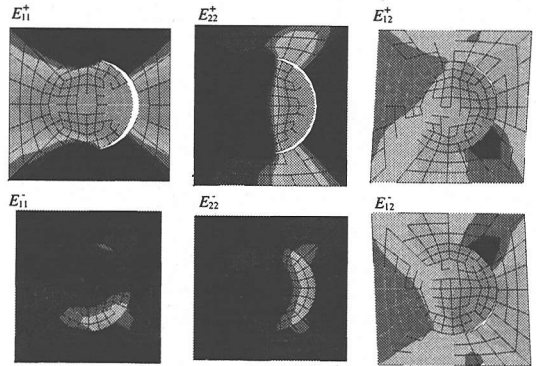
MPa



(a) モデル A



(b) モデル B



(c) モデル C

図-4 ユニットセル内の応力分布と変形

(2) マルチスケール解析例

均質化法の定式化により導出された微視および巨視スケールの境界値問題 (24), (33) を同時に解くことによって得られる巨視的変形挙動の妥当性を、実際に亀裂を配置した物体のそれとの比較によって考察する。

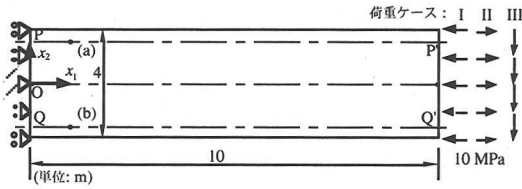


図-5 全体構造物の荷重および支持条件

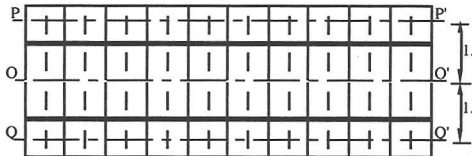


図-6 比較のために実際に亀裂を配置した全体構造物モデル

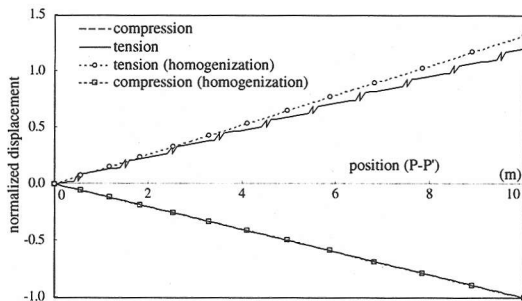


図-7 荷重ケースI, IIにおける方向変位の比較

以下では、前者の解析における全体構造物の解析モデルを「等価均質体モデル」、後者のそれを「実際のモデル」と呼んで区別することにする。全体構造物および支持条件は図-5に示すようなものと考え、荷重は同図に示されるI～IIIの3ケースについて検討する。また、亀裂を含むユニットセルは、図-2(b)のモデルAを用い、比較のための実際に亀裂を配置した全体構造物モデル(実際のモデル)には図-6に示すようなものを準備した。ここで、実際のモデルの各亀裂は、等価均質体モデルを解析するのに必要なユニットセルモデル(A)と同じメッシュ分割を用いた。一方、等価均質体モデルは、それ自身が連続体モデルに置き換えられるので、ユニットセルとは独立に要素を配置した。

まず、図-5に示す荷重ケースI, IIについて、微視スケールの接触状態を反映した等価均質体モデルの巨視的変形が実際の変形を再現していることを確かめる。構造物のP-P'線上の x_1 軸方向の変位の比較を図-7に示す。図中、変位は荷重ケースIで均質化法によって得られた自由端での最大変位(0.4545 mm)で正規

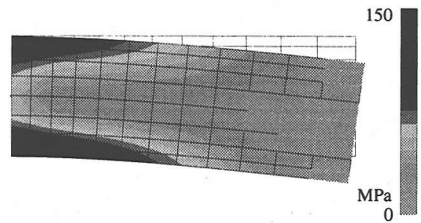


図-8 Global-Local 解析による全体構造物の変形と応力

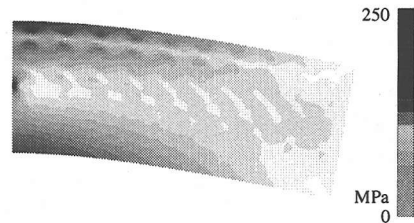
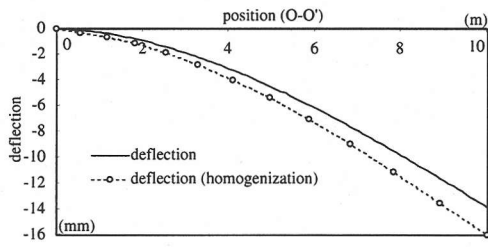


図-9 実際に亀裂を含む全体構造物の変形と応力

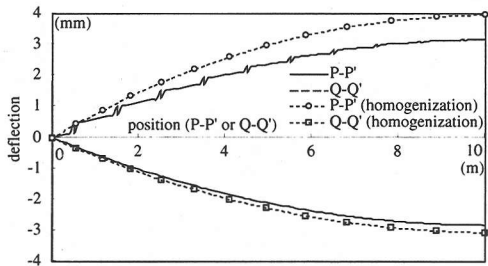
化してある。実際のモデルの引張りでは、不連続面における変位の跳躍がパルスのように現れている。実際のモデル(図-6)における周期構造単位が比較的小さいために引張りにおいて多少の誤差があるものの、図から分かるように両者はほぼ一致した変位を示す。2つの荷重ケースは方向が反対で異なる剛性の応答が得られるが、マルチスケール解析の結果はそれを正確に再現しているといえる。

上の結果から、本研究で開発した均質化法に基づくマルチスケール解析手法は、理論上は無限個の微視構造の存在を仮定しているにも関わらず、有限個しか存在しない微小な亀裂の影響を反映した全体構造物の変形を予測しうることがわかる。ここで、接触条件に起因する非線形から、線形弾性体に対する均質化法で行うような特性関数と巨視ひずみを分離することはできないため、次に示す例のように変形が一様でない場合は、等価均質体モデルの各サンプル点においてその都度微視スケールの解析を行うことが必要となる。理論上の仮定と異なり、このように計算上は微視構造の解析は有限個のGauss点でしか行われなくても関わらず、全体構造の挙動を予測しうるのは注目に値する。

上の例と同じく、図-2(b)の亀裂パターンAを有するユニットセルモデルを用いて、図-5に示した荷重ケースIIIについて行ったGlobal-Local連成解析の結果を図-8に示す。微視スケールの解析に与える巨視ひずみは、全体構造物の各Gauss点で評価したものである。したがって、一般的な双一次のアイソパラメトリック要素を用いた全体構造モデルの全要素内のGauss点について3節で示したアルゴリズムの反復計算を行った



(a) O-O' 上の y 軸方向変位



(b) P-P' および Q-Q' 上の x 軸方向変位

図-10 実際に亀裂を有する構造物の解析とGlobal-Local 解析における変形の比較

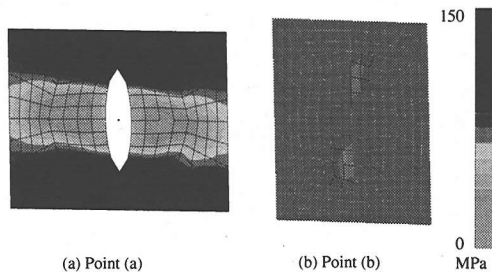


図-11 Global-Local 解析におけるユニットセルの変形と応力

ものである。

比較のために、先と同様の実際に亀裂を含むモデル(図-6)を用いた解析結果を図-9に示す。また、図-5中のO-O'上のy方向変位、P-P'およびQ-Q'上のx方向変位のGlobal-Local解析結果との比較を図-10に示す。均質化理論では、ユニットセルは全体構造物内に無限に存在することを前提しているが、亀裂の周期が無限度でない等価均質体モデルの平均的な挙動がよく近似できている。さらに、等価均質体モデルの解析において、図-5中に示した点(a)、(b)にあるユニットセルの変形および応力分布をそれぞれ図-11(a)、(b)に示す。得られた微視スケールの応力状態が、図-6の有限個の構造単位を含む構造系(実際のモデル)の解析結果(図-9)のそれと類似していることは興味深い。このことから、実際の構造物の局所的な幾何形状は有限

の大きさを持つが、均質化法はこの種の問題に対しても工学上有用なアプローチであるといえる。

以上の解析結果から、周期的に分布する無数の微視亀裂を有する弾性体に対する均質化法の定式と開発した数値解析法の妥当性が示された。亀裂端部では応力集中が発生し、十分な精度が得られないことが推察されるが、物性を評価する微視スケールと構造全体の挙動を記述する巨視的スケールにおける支配方程式を同時に解いて得られた力学挙動は、定性的には実際のそれをよく表しているといえる。

5. 結論

本研究では、均質化法の理論により、周期的に分布する微視亀裂を含む弾性体の微視(ミクロ)-巨視(マクロ)スケールの力学挙動を結びつけた解析、すなわちGlobal-Local解析の解析手法を確立することができた。変分不等式で記述される局所接触問題に対する均質化法の定式化を示し、定性的にはあるが簡単な数値解析例によって微視スケールと巨視スケールの連成挙動がマルチスケール解析の解として求められた。ここでは、微視構造の解析によってマクロ的に非線形な力学挙動が再現できた。用いたマルチスケール解析アルゴリズムは他に例を見ない独自のものであり、他種非線形問題へも拡張可能な方法である。

接触面がなめらかなであるという仮定は、本論文において本質的なものではない。現実の問題で考慮されるべき接触面における様々なメカニズムは、本論文で示した手法の枠組みに簡単に組み込むことができる。しかし、亀裂端部に生じる応力や摩擦の影響は未解決な部分も多く、現実の材料を扱う際には考慮すべき点であろう。また、本論文で用いたマルチスケール解析のアルゴリズムでは、マクロ構造体の数値モデルと数値解のとの関連が曖昧なため、誤差解析等による数値解の精度を検証する必要があるであろう。いずれも今後の課題である。

参考文献

- 1) Duvaut, G. and Lions, J.L.: *Inequalities in Mechanics and Physics*, New York, Springer-Verlag, 1976.
- 2) Luebenberger, D.G.: *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.
- 3) 菊池 昇: 変分不等式によるはりの接触問題, 土木学会論文報告集, Vol.294, pp.33-43, 1980.
- 4) Kikuchi, N and Oden, J.T.: *Contact Problem in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Philadelphia, SIAM, 1988.
- 5) Simo, J.C., Wriggers, P., and Taylor R.L.: A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems, *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 50, 163-180, 1985.

- 6) Fortin, M. and Glowinski, R.: *Augmented Lagrangian Methods: Application to the Numerical Solution of Boundary Value Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- 7) Zavarise, G., Wriggers, P. and Schrefler, B. A.: A Method for Solving Contact problems, *Int. J. Numer. Meths Engrg.*, Vol. 42, 473-498, 1998.
- 8) Zhong, Z.-H.: *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- 9) Sanchez-Palencia, E.: *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- 10) Bensoussan, A., Lions, J.L. and Papanicoulau, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Amsterdam-New York-Oxford; North-Holland, 1978.
- 11) Lions, J.-L.: *Asymptotic Calculus of Variations, Singular perturbations and asymptotics*, Academic Press: New York-London: pp.277-296, 1980.
- 12) 寺田賢二郎, 伊東 孝, 菊池 昇: 固体-液体混合体に対する均質化法の工学的考察, 土木学会論文集, No.591/1-43, pp.85-97, 1998.
- 13) Nemat-Nasser, S. and Yu, N.: Solids with Periodically Distributed Cracks, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.30, No.15, pp.2071-2095, 1993.

(1998.7.14受付)

METHOD OF MULTISCALE STRESS ANALYSIS FOR A MEDIUM WITH INFINITELY MANY FISSURES

Kenjiro TERADA and Takashi KYOYA

The purpose of this study is to develop the multiscale analysis method for heterogeneous media with periodically distributed fissures. The formulation of the homogenization based upon the method of two-scale asymptotic expansions provides the variational inequality which governs the microscopic mechanical behaviors while the homogenized structure yields the nonlinear elastic media without fissures. The numerical algorithm to solve the multiscale problem is presented using the mathematical notions and the computer program is developed to solve both the contact problem in a microscale and the nonlinear global behavior in a macroscale. Several numerical examples justify the current formulation and provide insight into various engineering applications.