

# 動的な交通ネットワーク・フローと OD構造の関係に関する理論的考察

赤松 隆<sup>1</sup>・高松 望<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 正会員 工博 豊橋技術科学大学 知識情報工学系 (〒441-8580 愛知県豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1)

<sup>2</sup> 正会員 工修 日本電気株式会社 (〒108-8001 東京都港区芝五丁目 7-1)

本研究は、渋滞を考慮した動的な交通配分の枠組みでは、静的な配分の場合とは異なり、“フローの方向性”が、ネットワーク・フロー・パターンに本質的な影響を与えることを明らかにする。より具体的には、多起点1終点をもつネットワークと、その起終点およびリンクの向きを反転して得られる1起点多終点ネットワークの各々におけるフロー・パターンの比較を行う。静的配分では、両ネットワークにおけるフローパターンは全く同一である。しかし、動的配分では、両者は全く異なったものとなることが示される。さらに、その違いが端的に現れた例として、道路容量増量に関するある種のパラドクスを議論する。

**Key Words:** dynamic traffic assignment, network flow, OD pattern, incidence matrix, paradox

## 1. はじめに

静的な交通配分理論は、従来、交通計画における需要予測のみならず、混雑料金等の需要管理施策を論理的に考える際の基本的な枠組みとしての役割も果たしてきた。しかし、渋滞を明示的に考慮した動的な配分の枠組みで考えると、フロー・パターンの特性に関する結論が、静的な配分理論から得られる結論とは大きく異なることがある。その違いが顕著となる重要な例として、OD構造がフロー・パターンの特性に与える影響があげられる。

図-1.1 に示すような2種類のネットワークを考えてみよう。図-1.1a は、1つの起点と複数の終点を持つネットワーク(夕方のラッシュに相当)であり、図-1.1b は、その起点・終点およびリンクの向きを反転して得られる多起点1終点ネットワーク(同一道路網における朝のラッシュに相当)である。静的な配分では、両ネットワークにおけるリンク交通量パターンは全く同一となる。なぜなら、標準的な静的配分では、1起点多終点ネットワークの起終点間の各経路は、向きを逆にすれば、多起点1終点ネットワークの対応する経路と全く同一のコスト特性をもつからである。しかし、ネットワーク・フローの動学的特性を考慮すると、このことは自明ではない。実際、1起点多終点と多起点1終点問題の両者の間には、共通する性質もある一方、重要な性質の違いが存在する。

本稿は、その相違点を、動的利用者均衡配分問題に限定した上で、理論的に考察することを目的とする。より具体的には、多起点1終点をもつネットワークと、その起点・

夕方のラッシュ

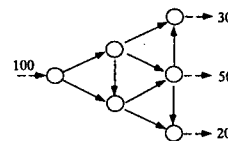


図-1.1a 1起点多終点道路網

朝のラッシュ

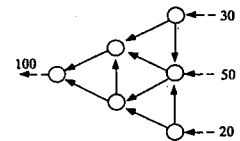


図-1.1b 多起点1終点道路網

終点およびリンクの向きを反転して得られる1起点多終点ネットワークの各々における動的均衡フロー・パターンの比較を行う。さらに、その違いが端的に現れた例として、静的な配分における“Braessのパラドクス”に似た道路容量増量に関するパラドクスを議論する。

本稿の構成は以下の通りである。第2章では動的な利用者均衡(DUE: Dynamic User Equilibrium)配分の定義・定式化およびその基本特性を、あとの議論に必要な最低限の予備知識に限定した上で簡潔に示す。第3、4章では、均衡解を具体的に導出することによって、1起点多終点と多起点1終点問題の構造の違いを比較する。第3章は経路選択のみの均衡解を扱い、第4章は経路と出発時刻の同時選択均衡解を扱う。第5章では、第3、4章の結果を用いて、“容量増強のパラドクス”を考察する。

## 2. 動的均衡配分とその分解表現

### (1) 交通ネットワークとその表現

本論文で示されるモデルは、 $L$ 個の要素を持つ方向付き

リンクの集合  $L$ ,  $N$  個の要素を持つノードの集合  $N$ , および OD ペアの集合  $W$  から構成される交通ネットワーク  $G[N, L]$  上で定義される。起点、終点は  $N$  の部分集合であり、それらの部分集合を各々  $R, S$  と書く。ただし、本研究では、1 起点多終点 ( $R$  の要素数は 1) か、あるいは、多起点 1 終点 ( $S$  の要素数は 1) のネットワークのみを対象とする。

集合  $N$  内の各ノードには  $1 \sim N$  までの整数の連番が振られているものとし、集合  $L$  内の各リンクは、そのリンクがノード  $i$  からノード  $j$  へ向かっている場合  $(i, j)$  と示される (なお、以下では、各リンクに  $1 \sim L$  までの整数の連番を振り、その番号でリンクを指定する記法も併用する)。また、ノード  $k$  へ流入するリンクの上流側ノードの集合を  $I_k$ , ノード  $k$  から流出するリンクの下流側ノードの集合を  $O_k$  と書く。

ネットワークの構造はノード・リンク接続行列  $A'$  で表現される。 $A'$  は  $N \times L$  行列で、その  $n$  行  $a$  列要素  $A_{na}$  は、ノード  $n$  がリンク  $a$  の始点であれば 1, 終点であれば -1, その他なら 0 である。この行列は、全ての列で行和がゼロであるから、その階数は  $N-1$  である。従って、フロー保存則等を表現する際には、任意の 1 つのノードに対応する行を除いた  $(N-1) \times L$  の既約接続行列  $A$  を用いる。また、以下では、その削除するノードを“基準点”と呼ぶ。

## (2) 渋滞の表現と動的均衡配分

本研究では、各リンクにおける車の通過と渋滞の様子を First-in-First-Out (FIFO) サービスの point queue モデルで表現する。すなわち、リンクに待ち行列が存在しない場合には、流入フローは自由走行時間  $m_{ij}$  の後に流入率と同一の流率で流出し、待ち行列が存在する場合には、流入順に最大流出率  $\bar{\mu}_{ij}$  で流出すると仮定する。従って、時刻  $t$  にリンクに流入する車がリンク  $(i, j)$  を通過するのに要する時間 (リンク旅行時間)  $C_{ij}(t)$  は、次式で与えられる：

$$C_{ij}(t) = \max. \{ X_{ij}(t) / \bar{\mu}_{ij}, m_{ij} \}$$

ここで、 $X_{ij}(t)$  は時刻  $t$  においてリンク  $(i, j)$  に存在する車 (待ち行列) の台数である。

ネットワーク・フローの配分原則 (利用者の経路選択) については、動的な利用者均衡 (DUE: Dynamic User Equilibrium) 配分を仮定する。この配分原則は、静的な利用者均衡配分を動的な場合へ自然に拡張したものである。すなわち、任意の時刻において、どの利用者も自分だけが経路を変更することによって自分の所要時間を改善できないような状態 (言いかえれば、全ての瞬間において、全ての利用者が選択した経路が、事後的に見ても、各自の真の最短経路となっているようなフロー・パターン) である。

## (3) 動的均衡配分の基本特性

赤松・桑原<sup>3)</sup>によって示されているように、DUE 状態では、起点を同一時刻に出発する利用者は、終点までに利用される各ノードへ (利用経路によらず) 同一時刻に到着する。この基本特性から、DUE 状態においては、起点出発時刻毎に、各ノードへの (利用経路によらない) 一意的な到着時刻を考えることができる。また、DUE 状態ならば、終点までに利用される各ノード  $i$  へ、起点出発時刻順に到着する。これらの特性とリンクでの待ち行列遅れ時間の性質から、1 起点多終点ネットワークでは、時刻  $s$  に起点を出発する利用者が経験する旅行時間は、 $s$  より後の時刻に起点を出発する利用者のフロー・パターンの影響を受けないことがわかる。つまり、起点出発時刻  $s$  に対応する DUE フロー・パターンは、時刻  $s$  以前 (時刻  $s$  を含む) に起点を出発するフローに関する情報のみから決定される。従って、1 起点多終点ネットワークにおける DUE 配分は、起点出発時刻別に問題を分解し、出発時刻に関して“前向き”に逐次計算してゆくことが可能である。また、これと全く同様の議論によって、多起点 1 終点ネットワークの場合には、終点到着時刻に関して問題の分解が可能であることがわかる。

動的な交通ネットワーク流を記述するための基本的な変数は、本来、時刻  $t$  までにリンク  $(i, j)$  へ流入する車の累積台数  $A_{ij}(t)$ , 累積流出台数  $L_{ij}(t)$ , 存在台数  $X_{ij}(t)$  である (詳細は、赤松<sup>1)</sup>, 赤松・桑原<sup>3)</sup>等を参照)。しかし、DUE 配分では、上記のような終点到着時刻別あるいは起点出発時刻別の分解に適した変数を用いることによって、より単純化された表現が可能となる。

## (4) 出発時刻別に分解された定式化 - 1 起点多終点

1 起点多終点のネットワークでの DUE 配分は、起点出発時刻別に問題を分解して定式化するのが自然である。唯一の起点  $o$  からの出発時刻  $s$  を、適当な単位で測った区間  $[0, T]$  の実数とする。起点出発時刻別に分解された定式化では、出発時刻  $s$  ごとに以下の様に定義された 2 種類の変数 ( $y_{ij}^s, \tau_i^s$ ) が中心的な役割をはたす。まず、DUE 状態において起点を時刻  $s$  に出発する車がノード  $i$  に最も早く到着する時刻を  $\tau_i^s$ , 起点  $o$  からノード  $i$  までの所要時間を  $\hat{\tau}_i^s \equiv \tau_i^s - s$  と書く。次に、起点出発時刻が  $s$  の車のリンク  $(i, j)$  への流入率を  $y_{ij}^s \equiv dA_{ij}(\tau_i^s) / ds$  と定義する。ただし、この  $y_{ij}^s$  は、あくまでも起点出発時刻  $s$  に関しての流率であり、通常の意味のリンク流入率  $\lambda_{ij}(\tau_i^s) \equiv dA(\tau_i^s) / d\tau_i^s$  とは異なるものである。具体的には、両者は以下の関係にある：

$$y_{ij}^s = \lambda_{ij}(\tau_i^s) \frac{d\tau_i^s}{ds}$$

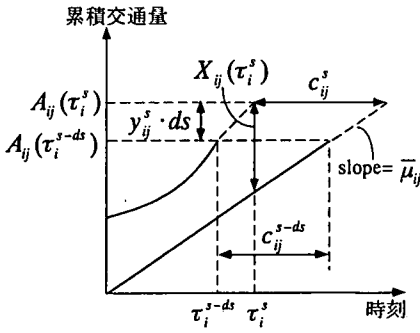


図-2.1 リンク旅行時間関数

また、終点が  $d$  で、起点  $o$  を時刻  $s$  までに出発する車の累積台数 (出発時刻ベースの累積 OD 交通量) を  $Q_{od}(s)$  と書く。

起点出発時刻別に分解された DUE 配分問題の定式化は、以下の a)~c) のようにまとめられる：

a) リンク旅行時間関数

本研究では、リンクでの待ち行列 (渋滞) は、point queue モデルで表現されると仮定する。このとき、起点出発時刻  $s$  の車両のリンク旅行時間  $c_{ij}^s \equiv C_{ij}(\tau_i^s)$  は、均衡状態では、以下の表現に帰着する (図-2.1 参照)：

$$c_{ij}^s = \max. [c_{ij}^{s-ds} + \{X_{ij}(\tau_i^s) - X_{ij}(\tau_i^{s-ds})\} / \bar{\mu}_{ij}, m_{ij}] \\ = \max. [c_{ij}^{s-ds} + y_{ij}^s \cdot ds / \bar{\mu}_{ij} - (\tau_i^s - \tau_i^{s-ds}), m_{ij}]$$

起点が唯一の場合の DUE 配分は起点出発時刻  $s$  ごとに分解し、 $s$  の昇順に逐次計算することができるので、時刻  $s$  の均衡フローを計算する際には、時刻  $s-ds$  に関する変数の値は全て求められていると考えることができる。従って、起点出発時刻  $s$  の車の旅行時間は、以下のような  $(y_{ij}^s, \tau_i^s)$  の関数とみなすことができる：

$$c_{ij}^s = \max. [\alpha_{ij} y_{ij}^s + \beta_{ij} - \tau_i^s, m_{ij}] \quad (2.1a)$$

$$\text{ここで、} \alpha_{ij} \equiv ds / \bar{\mu}_{ij}, \quad \beta_{ij} \equiv c_{ij}^{s-ds} + \tau_i^{s-ds}.$$

b) 最短経路選択原則

DUE 状態では、利用者は事後的にみても所要時間が最短となる経路のみを選択する。この条件は、

$$\begin{cases} c_{ij}^s + \hat{\tau}_i^s = \hat{\tau}_j^s & \text{if } y_{ij}^s > 0 \\ c_{ij}^s + \hat{\tau}_i^s \geq \hat{\tau}_j^s & \text{if } y_{ij}^s = 0 \end{cases} \quad \forall ij \in L, \forall s$$

あるいは等価的に、

$$\begin{cases} y_{ij}^s \cdot \{c_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s\} = 0 \\ c_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s \geq 0, y_{ij}^s \geq 0 \end{cases} \quad \forall ij \in L, \forall s \quad (2.2a)$$

と表現される。

c) フロー保存条件

1 起点多終点ネットワーク上のフローが流れているリンクでは、DUE 状態において、 $\tau_j^s = \tau_i^s + c_{ij}^s$  が成立している。その結果、各リンクでの FIFO 条件式と各ノードでのフロー保存条件は、以下のような  $y$  のみを利用した表現に帰着する (導出の詳細は、赤松・桑原<sup>3)</sup> を参照)：

$$\sum_{i \in I_k} y_{ik}^s - \sum_{j \in O_k} y_{kj}^s - \frac{dQ_{ok}(s)}{ds} = 0 \\ \forall k \in N, k \neq o \quad \forall s \quad (2.3a)$$

2.5 到着時刻別に分解された定式化—多起点1終点

多起点1終点のネットワークでは、終点到着時刻別に分解すれば、2.4 と全く同様の議論ができる。到着時刻別に分解された定式化では、到着時刻  $u$  ごとに以下の様に定義された2種類の変数  $(y_{ij}^u, \tau_i^u)$  が中心的な役割をはたす。

まず、均衡状態において終点到着時刻  $u$  に到着する車がノード  $i$  に最も早く到着する時刻を  $\tau_i^u$ 、ノード  $i$  から終点までの所要時間を  $\hat{\tau}_i^u \equiv u - \tau_i^u$  と書く。次に、終点到着時刻が  $u$  の車のリンク  $(ij)$  への流入率を  $y_{ij}^u \equiv dA_{ij}(\tau_i^u) / du$  と定義する。また、起点が  $o$  で、終点  $d$  に時刻  $u$  までに到着する車の累積台数 (到着時刻ベースの累積 OD 交通量) を  $Q_{od}(u)$  と書く。

終点到着時刻別に分解された問題の定式化は、2.3 と全く同様に、以下の a)~c) のようにまとめられる：

a) リンク旅行時間関数：

$$c_{ij}^u = \max. [\alpha_{ij} y_{ij}^u + \beta_{ij} - \tau_i^u, m_{ij}] \quad (2.1b)$$

$$\text{ここで、} \alpha_{ij} \equiv du / \bar{\mu}_{ij}, \quad \beta_{ij} \equiv c_{ij}^{u-du} + \tau_i^{u-du}.$$

b) 最短経路選択原則：

$$\begin{cases} c_{ij}^u + \hat{\tau}_j^u = \hat{\tau}_i^u & \text{if } y_{ij}^u > 0 \\ c_{ij}^u + \hat{\tau}_j^u \geq \hat{\tau}_i^u & \text{if } y_{ij}^u = 0 \end{cases} \quad \forall ij \in L, \forall u$$

あるいは等価的に、

$$\begin{cases} y_{ij}^u \cdot \{c_{ij}^u - \tau_j^u + \tau_i^u\} = 0 \\ c_{ij}^u - \tau_j^u + \tau_i^u \geq 0, y_{ij}^u \geq 0 \end{cases} \quad \forall ij \in L, \forall u \quad (2.2b)$$

c) フロー保存条件：

$$\sum_{j \in O_k} y_{kj}^u - \sum_{i \in I_k} y_{ik}^u - \frac{dQ_{ok}(u)}{du} = 0 \\ \forall k \in N, k \neq d \quad \forall u \quad (2.3b)$$

### 3. 渋滞ネットワークにおける均衡フローパターン

#### - 固定需要型の場合

前章で示された一般的なネットワークでのDUE配分の均衡解を解析的に求めることは不可能である。そこで、本章以降では、解析的に均衡解が得られる“渋滞ネットワーク”を対象として、動的な均衡フローパターンとOD構造との関係を探ってゆく。ここで、“渋滞ネットワーク”とは、以下の2条件が満たされたネットワークである：

- 全てのリンクでフローの流入がある、
- 全てのリンクで待ち行列が発生している。

最初の条件 a)は、フローの流入があるリンクの集合のみ（これは、事後的には必ずわかる）を分析対象として考えるとすれば、特に非現実的な条件ではない。条件 b)は、実際の道路網で常に満たされているとは言い難い。しかし、以下で示されるように、この仮定により、均衡解が解析的に得られ、動的ネットワーク・フローの定性的な特徴を容易に把握できるというメリットが得られる。

本章では、まず、1起点多終点ネットワークの均衡解の一般的な表現を導出し、次に、多起点1終点ネットワークの均衡解を検討する。

#### (1) 1起点多終点の渋滞ネットワークにおける均衡解

##### a) 定式化

1起点多終点構造をもつネットワークでの動的均衡配分は、起点出発時刻ごとに問題を分解することができる（2章を参照）。そこで、以下では、起点出発時刻が  $s$  以前のフローに対応したネットワークの状態は既知として、起点出発時刻が  $s \sim s+ds$  の車に対応した均衡解を求めることを考える。

均衡状態では、最短経路選択条件式 (2.2a) が成立している。さらに、渋滞ネットワークでは、各リンク  $(i,j)$  において  $y_{ij}^s > 0$  であるから、以下の関係が成立する：

$$c_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s = 0 \quad \forall s$$

これは任意の  $s$  について満たされているから、

$$\frac{dc_{ij}^s}{ds} + \frac{d\tau_i^s}{ds} - \frac{d\tau_j^s}{ds} = 0 \quad \forall s \quad (3.1)$$

も成立する。また、渋滞リンクのコストは、式 (2.1a) より

$$c_{ij}^s = \alpha_{ij} y_{ij}^s + \beta_{ij} - \tau_i^s \quad \forall s$$

すなわち、

$$c_{ij}^s - c_{ij}^{s-ds} = (y_{ij}^s / \mu_{ij}) \cdot ds - (\tau_i^s - \tau_i^{s-ds}) \quad \forall s$$

であるから、リンクコストの  $s$  に関する変化率は、

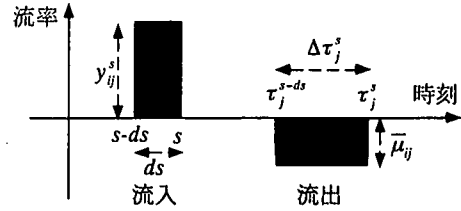


図-3.1 均衡状態の各リンクで成立するFIFO条件

$$\frac{dc_{ij}^s}{ds} = \frac{1}{\mu_{ij}} y_{ij}^s - \frac{d\tau_i^s}{ds} \quad \forall s \quad (3.2)$$

で与えられる。式 (3.2) を式 (3.1) に代入すれば、

$$y_{ij}^s = \mu_{ij} \frac{d\tau_j^s}{ds} \quad \forall s \quad (3.3a)$$

これは、均衡状態における各リンクでの流入交通量と流出交通量の関係を表している（図-3.1参照）。渋滞ネットワークでは、この関係式 (3.3a) が全リンクで成立しているから、まとめて書くと、

$$y(s) = -(\mathbf{MA}_-^T) \frac{d\tau(s)}{ds} \quad \forall s \quad (3.3b)$$

ここで  $\mathbf{A}_-$ ：既約接続行列  $\mathbf{A}$  の +1 要素を全て 0 とした  $(N-1) \times L$  行列 (i.e. その  $n$  行  $a$  列要素の値は、リンク  $a$  がノード  $n$  へ流入しているなら -1, そうでないなら 0),  $\mathbf{M}$ ：リンク最大流出率  $\mu_{ij}$  を対角要素とする  $L \times L$  対角行列,  $y(s)$ ：出発時刻別リンク流入率  $y_{ij}^s$  を要素とする  $L$  次元ベクトル,  $d\tau(s)/ds$ ：ノード到着時刻変化率  $d\tau_i^s/ds$  を要素とする  $(N-1)$  次元ベクトル。

一方、リンク流入率  $y$  は、各ノードでフロー保存条件 (2.3a) を満たさなければならない。これは、 $dQ_{od}(s)/ds$  (与件) を要素とする  $(N-1)$  次元ベクトルを  $dQ(s)/ds$  と書けば、以下のようにまとめて表現される：

$$\mathbf{A} y(s) = -\frac{dQ(s)}{ds} \quad (3.4)$$

式 (3.3b) を式 (3.4) に代入すると、

$$(\mathbf{AMA}_-^T) \frac{d\tau(s)}{ds} = \frac{dQ(s)}{ds} \quad (3.5)$$

従って、行列  $\mathbf{AMA}_-^T$  のランク (階数) が  $N-1$  ならば、式 (3.5) は一意的な均衡解  $d\tau(s)/ds$  を持つことがわかる。

##### b) 均衡解

行列  $\mathbf{AMA}_-^T$  の階数は、一般的に、基準点 (接続行列  $\mathbf{A}$  の冗長な 1 行に対応したノード) の選び方に依存する。1 起点多終点の場合、起点ではない任意のノードを基準点と

すると、 $\mathbf{AMA}^T$  の階数は  $N-1$  未満となりうる。しかし、起点を基準点とする場合には、その階数は必ず  $N-1$  となる。また、均衡状態での到着時刻変化率  $d\tau_i(s)/ds$  は、起点では常に 1 である (つまり起点の  $d\tau_i(s)/ds$  を未知変数とする必要はない) から、起点を基準点とすることは極めて自然な選択である。従って、起点を基準点とすれば、均衡解  $d\tau(s)/ds$  は次式によって得られる：

$$\frac{d\tau(s)}{ds} = (\mathbf{AMA}^T)^{-1} \frac{d\mathbf{Q}(s)}{ds}, \quad (3.6)$$

さらに、式 (3.6) を式 (3.3b) に代入すれば、均衡リンク流入率  $y(s)$  が求められる。

## (2) 多起点1終点の渋滞ネットワークにおける均衡解

### a) 定式化

多起点1終点構造をもつネットワークでの動的均衡配分は、終点到着時刻ごとに問題を分解することができる。そこで、以下では、終点到着時刻が  $u$  以前のフローに対応したネットワーク状態は既知として、終点到着時刻が  $u \rightarrow u+du$  の車に対応した均衡解を求めることを考える。

3.1 の場合と全く同様に、均衡状態にある渋滞ネットワークでは、式 (2.2b), (2.1b) から、各リンク  $(ij)$  において以下の関係：

$$\frac{dc_{ij}^u}{du} - \frac{d\tau_j^u}{du} + \frac{d\tau_i^u}{du} = 0 \quad \forall u \quad (3.7)$$

$$\frac{dc_{ij}^u}{du} = \frac{1}{\bar{\mu}_{ij}} y_{ij}^u - \frac{d\tau_j^u}{du} \quad \forall u \quad (3.8)$$

が成立している。従って、

$$y_{ij}^u = \bar{\mu}_{ij} \frac{d\tau_j^u}{du} \quad \forall u \quad (3.9a)$$

渋滞ネットワークでは、全リンクで関係式 (3.9a) が成立しているから、まとめて書くと、

$$\mathbf{y}(u) = -(\mathbf{MA}^T) \frac{d\boldsymbol{\tau}(u)}{du} \quad \forall u \quad (3.9b)$$

ここで  $\mathbf{y}(u)$ ：到着時刻別リンク流入率  $y_{ij}^u$  を要素とする  $L$  次元ベクトル、 $d\boldsymbol{\tau}(u)/du$ ：ノード到着時刻変化率  $d\tau_i^u/du$  を要素とする  $(N-1)$  次元ベクトル。

一方、リンク流入率  $y$  は、各ノードでフロー保存則 (2.3b) を満たさなければならない。これは、 $d\hat{Q}_{od}(u)/du$  (与件) を要素とする  $(N-1)$  次元ベクトルを  $d\mathbf{Q}(u)/du$  と書けば、以下のようにまとめて表現される：

$$\mathbf{A} \mathbf{y}(u) = \frac{d\mathbf{Q}(u)}{du} \quad (3.10)$$

式 (3.9) を式 (3.10) に代入すると

$$-(\mathbf{AMA}^T) \frac{d\boldsymbol{\tau}(u)}{du} = \frac{d\mathbf{Q}(u)}{du} \quad (3.11)$$

従って、行列  $\mathbf{AMA}^T$  の階数が  $N-1$  ならば、式 (3.11) は一意的な均衡解  $d\boldsymbol{\tau}(u)/du$  を持つことがわかる。

### b) 均衡解

任意の多起点1終点ネットワークは、全リンクの向きを反転すれば1起点多終点ネットワークとなる。従って、3.1 節での結果を “reverse” し、終点を基準点とすれば、 $\mathbf{AMA}^T$  の階数が  $N-1$  となることが期待される。しかし、実際には、終点を基準点としても、 $\mathbf{AMA}^T$  の階数は  $N-1$  未満となってしまう、 $d\boldsymbol{\tau}(u)/du$  を一意的に決定することはできない (さらに言えば、多起点1終点ネットワークにおいては、どのように基準点を選んでも、行列  $\mathbf{AMA}^T$  の階数は  $N-1$  未満となることが証明できる)。

行列  $\mathbf{AMA}^T$  の階数が  $N-1$  未満となってしまう原因は、通過ノードとはならない起点、すなわち、流入リンクを持たない起点 (以下では、“純湧き出し点” と呼ぶ) の存在にある；いま、 $\mathbf{A}^T \mathbf{MA}^T$  の  $i$  行  $j$  列要素を  $B_{ij}$  と書くと、一般に、

$$B_{ij} = \begin{cases} -\bar{\mu}_{ij} & \text{if } i \neq j \\ \sum_k \mu_{ki} & \text{if } i = j \end{cases}$$

であることが容易に確かめられる。従って、流入リンクを持たないノード (つまり純湧き出し点) に対応した  $\mathbf{AMA}^T$  の列ベクトルは必ずゼロベクトルとなり、その階数は純湧き出し点の個数ずつ減少するのである。

この事実の意味するところを、より具体的に見るために、ネットワークのノード集合  $N$  を、純湧き出し点の集合  $N_1$  とその他のノードの集合  $N_2$  の2つに分割しよう。そして、リンク・ノード接続行列  $\mathbf{A}$  とそれに対応した  $\mathbf{A}_-$ 、出発・到着時刻変化ベクトル  $d\boldsymbol{\tau}(u)/du$ 、OD流入率ベクトル  $d\mathbf{Q}(u)/du$  を、各々、 $N_1$  と  $N_2$  に対応した2つのブロックに分割する：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_- = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{2-} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}(u)}{du} = \begin{bmatrix} \frac{d\tau_1(u)}{du} \\ \frac{d\tau_2(u)}{du} \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{Q}(u)}{du} = \begin{bmatrix} \frac{dQ_1(u)}{du} \\ \frac{dQ_2(u)}{du} \end{bmatrix}$$

ここで、 $dQ_2(u)/du$  の  $i$  番目要素は、 $i$  が終点の場合は  $-\sum_o \{dQ_{od}(u)/du\} = -\sum_k \mu_{ki}$ 、起点の場合は  $dQ_{id}(u)/du$ 、その他の場合は 0；である。また、純湧き出し点の定義が

ら、 $A_1$  の  $N_1$  に対応したブロック  $A_{1-}$  は恒等的に  $0$  となることに注意しよう。これらの変数を用いて式 (3.9) を書き直すと、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dQ_1(u)}{du} \\ \frac{dQ_2(u)}{du} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 0 & A_{2-}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\tau_1(u)}{du} \\ \frac{d\tau_2(u)}{du} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -A_1 M A_{2-}^T \\ 0 & -A_2 M A_{2-}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\tau_1(u)}{du} \\ \frac{d\tau_2(u)}{du} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

すなわち、

$$\frac{dQ_1(u)}{du} = -A_1 M A_{2-}^T \frac{d\tau_2(u)}{du} \quad (3.13a)$$

$$\frac{dQ_2(u)}{du} = -A_2 M A_{2-}^T \frac{d\tau_2(u)}{du} \quad (3.13b)$$

である。つまり、通過点の到着時刻変化率  $d\tau_2/du$  は、

$$\frac{d\tau_2(u)}{du} = -(A_2 M A_{2-}^T)^{-1} \frac{dQ_2(u)}{du} \quad (3.14)$$

と求められるが、純湧き出し点の到着時刻変化率  $d\tau_1/du$  を決定するための条件は均衡条件式 (3.9) に含まれないことがわかる。

純湧き出し点の到着時刻変化率  $d\tau_1/du$  を決定するためには、均衡条件式 (3.9) に加え、何らかの適当な条件を与えることが必要である。そのための条件の一例としては、純湧き出し点となっている起点に対しては、終点で測定した OD 交通流率  $q_{od}(u) \equiv dQ_{od}(u)/du$  ではなく、起点で測定した OD 交通流率：

$$\hat{q}_{od}(u) \equiv dQ_{od}(u)/d\tau_o(u)$$

を与件とする方法が考えられる（純湧き出し点ではない起点に対しては  $dQ_2(u)/du$ 、つまり、終点で測定した OD 交通流率  $q_{od}(u) \equiv dQ_{od}(u)/du$  を与える）。

この場合、まず通過ノードの到着時刻変化率  $d\tau_2/du$  が式 (3.14) によって求められる。これに式 (3.13a) を組み合わせると、純湧き出し点の OD 交通流率  $q_{od}(u)$  は

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1(u)}{du} &= - (A_1 M A_{2-}^T) \frac{d\tau_2(u)}{du} \\ &= (A_1 M A_{2-}^T) (A_2 M A_{2-}^T)^{-1} \frac{dQ_2(u)}{du} \end{aligned} \quad (3.15)$$

と求められる。一方、 $q_{od}(u)$  と  $\hat{q}_{od}(u)$  の間には、次の関係式：

$$q_{od}(u) \equiv \frac{dQ_{od}(u)}{du} = \frac{dQ_{od}(u)}{d\tau_o(u)} \frac{d\tau_o(u)}{du}$$

$$= \hat{q}_{od}(u) \cdot d\tau_o(u)/du \quad (3.16)$$

が成立している。従って、純湧き出し点の到着時刻変化率  $d\tau_1/du$  は、式 (3.15) で得られる  $q_{od}(u)$  と与件である  $\hat{q}_{od}(u)$  との比：

$$\frac{d\tau_o(u)}{du} = q_{od}(u)/\hat{q}_{od}(u) \quad (3.17a)$$

あるいは、ベクトル表記をすれば、

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_1(u)}{du} &= \left( \frac{dQ_1(u)}{d\tau} \right)^{-1} (A_1 M A_{2-}^T) \\ &\quad (A_2 M A_{2-}^T)^{-1} \frac{dQ_2(u)}{du} \end{aligned} \quad (3.17b)$$

$$\text{ここで } \frac{dQ_1(u)}{d\tau} = \begin{bmatrix} \ddots & & & 0 \\ & \frac{dQ_{od}(u)}{d\tau_{od}(u)} & & \\ 0 & & \ddots & \end{bmatrix},$$

として求められる。

以上 (3.1 と 3.2) でみたように、(OD 構造によらず) 均衡解を特徴づけるのは、行列  $AMA^T$  である。しかし、その性質は ( $A_-$  というリンクの方向性を反映した行列を含んでいるため) 1 起点多終点と多起点 1 終点の両ケースで本質的な相違がある。その結果、均衡解の基本特性も OD 構造によって大幅に異なってくるのである。

#### 4. 渋滞ネットワークにおける均衡フローパターン - 弾性需要型の場合

前章では、時刻別 OD 需要は与件とし、利用者の経路選択行動のみに着目した動的均衡状態を考え、その均衡解と OD 構造の関係を解析した。本章では、利用者の出発時刻と経路の同時選択を考慮することによって時刻別の OD 需要を内生化した動的均衡状態（“弾性需要型 DUE”）を考え、それを基に、前章と同様の解析を行う。

本章で解析する弾性需要型 DUE モデルは、基本的には、Vickerey<sup>9)</sup>、Hendrikson and Kocur<sup>4)</sup> と同様の出発時刻選択に関する動的均衡モデルと前章までで述べた経路選択に関する動的均衡モデルを整合的に統合したものである。ただし、本稿は、均衡解と OD 構造の関係を見ることに主眼を置くため、簡略化のためのいくつかの仮定をおく：

- 1) 同一 OD ペアの利用者は、同一の不効用関数と同一の希望到着時刻をもつ。
- 2) “遅刻者”（希望到着時刻より後に到着する利用者）は存在しない<sup>1)</sup>。

<sup>1)</sup> これは、単に、場合分けによる表現の煩雑さを避けるための仮定であり、本章の解析を遅刻者の存在を許す場合へ拡張することは極めて容易である。

3) 1起点多終点ネットワーク(起点出発時刻を基準に考える場合)では、終点が $d$ で、起点 $o$ を時刻 $s$ に出発する利用者の不効用 $V_{od}(s)$ は、起点から終点までの所要時間 $\tau_d(s) - s$ と schedule delay  $t_d - \tau_d(s)$ の線形和で与えられる:

$$V_{od}(s) = a_1\{\tau_d(s) - s\} + a_2\{t_d - \tau_d(s)\} \quad (4.1)$$

ここで $a_1, a_2$ は関係 $a_1 > a_2$ を満たす正值パラメータ、 $\tau_d(s)$ は起点を時刻 $s$ に出発する利用者の終点( $d$ )到着時刻、 $t_d$ は終点 $d$ 利用者の希望到着時刻。

4) 多起点1終点ネットワーク(終点到着時刻を基準に考える場合)では、起点が $o$ で、終点 $d$ に時刻 $u$ に到着する利用者の不効用 $V_{od}(u)$ は、次式で与えられる:

$$V_{od}(u) = a_1\{u - \tau_o(u)\} + a_2\{t_d - u\} \quad (4.2)$$

ここで、 $\tau_o(u)$ は終点に時刻 $u$ に到着する利用者の起点( $o$ )出発時刻。

5) 前章と同様、ネットワークは、常に“渋滞ネットワーク”状態にある。

### (1) 1起点多終点の渋滞ネットワークにおける均衡解

#### a) 定式化

以下では、唯一の起点を除く他のノードは全て終点である(つまり、起点にも終点にもなっていない純粋な通過点は存在しない。もちろん、終点かつ通過点であるノードは存在してよい)1起点多終点ネットワークを考える。これは、単に数式の表現上の煩雑さをさけるための便宜である。純粋な通過点がある場合への拡張は、ノード集合を適宜分割して考えれば、容易に行える。

本章で考える弾性需要型 DUE は、誰も自分だけが経路あるいは出発時刻を変更することによって不効用を改善することはできないような状態である。そこで、まず、ある起点出発時刻 $s$ を選択した利用者を考えよう。すると、それらの利用者の経路選択に関する(渋滞ネットワークでの)均衡条件は、以下の微分方程式によって表現される(前章を参照):

$$\left(AMA^T\right) \frac{d\tau(s)}{ds} = \frac{dQ(s)}{ds} \quad (4.3)$$

次に、起点出発時刻に関する均衡条件は、

$$\frac{dV_{od}(s)}{ds} = 0 \quad \forall s, \forall d \quad (4.4)$$

と表現される。これに式(4.1)の不効用関数を代入すれば、終点の到着時刻変化率は、

$$\frac{d\tau_d(s)}{ds} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \quad \forall s, \forall d \quad (4.5)$$

で与えられる(なお、ここでは、各時刻が渋滞ネットワークとして扱うことができ、さらに、全ての起終点間の OD 交通が発生している時間帯のみを対象としている<sup>2)</sup> これらを、まとめて表現すれば、弾性需要型 DUE 条件は、以下の連立微分方程式として表現される:

$$\begin{cases} \frac{d\tau(s)}{ds} = E \frac{a_1}{a_1 - a_2} \\ \frac{dQ(s)}{ds} = (AMA^T) \frac{d\tau(s)}{ds} \end{cases} \quad (4.6)$$

ここで、 $E$ は全要素が1の $(N-1)$ 次元列ベクトルである。

#### b) 均衡解

式(4.6)の微分方程式に適当な境界条件を与えて解けば、均衡解 $(\tau(s), Q(s))$ が求められる。特に、任意の時間帯で渋滞ネットワークとなっているような場合には、各 OD ペアについて全時間帯を通じた総 OD 交通量の値を与えれば良い(その場合、各 OD ペアのフローが発生し始める時刻も内生的に決めることができる)。しかし、そのような状況が生じるのは極めて特殊な場合に限られる。そこで、ここでは、渋滞ネットワークとみなせる時間帯のみが“分析対象時間帯”として観測された場合を考える。すなわち、まず、起点出発時刻でみた分析対象時間帯の開始時刻 $\hat{s}_i$ を与件とする。そして、時刻 $\hat{s}_i$ までの累積 OD 交通量、および、終点 $d$ に最後に到着する利用者に対応した累積 OD 交通量の値を(観測された)与件情報とした境界条件を設定する:

$$Q_{od}(\hat{s}_i) = \underline{Q}_{od} = \text{given} \quad \forall d \quad (4.7a)$$

$$Q_{od}(s(t_d)) = \bar{Q}_{od} = \text{given} \quad \forall d \quad (4.7b)$$

ここで、 $s(t_d)$ は終点の最終到着時刻 $t_d$ に対応する起点出発時刻(この時刻自体は明示的に与える必要はない)。

式(4.6)の第2式を積分し、式(4.7a)の条件を用いると、時刻 $s$ に対応した OD 交通量が、

$$Q(s) = \underline{Q} + (AMA^T) E \frac{a_1}{a_1 - a_2} (s - \hat{s}_i) \quad (4.8)$$

と決まる。ここで、 $\underline{Q}$ は $\underline{Q}_{od}$ を要素とする $(N-1)$ 次元ベクトルである。式(4.8)に式(4.7b)の条件を用いると、各 OD ペアの時刻 $\hat{s}_i$ から最終時刻までの時間帯の長さが、

<sup>2)</sup> 実際には、(1)全ての OD ペアで OD フローが発生する時間帯、(2)ある OD ペアでは OD フローが発生しない時間帯(その終点は通過点として存在することになる)の2つの時間帯について定式化・解析を行う必要がある。ただし、(2)の場合も、本章で示す解析に適切な場合分けを施せば、同様の結果が得られる。

$$s(t_d) - \hat{s}_s = \frac{a_1 - a_2}{a_1} \frac{\hat{Q}_{od}}{a_d} \quad \forall d \quad (4.9)$$

と決まる。ここで、 $\hat{Q}_{od} \equiv \bar{Q}_{od} - Q_{od}$ 、 $a_d$  は列ベクトル  $(\mathbf{AMA}^T)\mathbf{E}$  の要素。次に、式 (4.6) の第 1 式を時刻  $\hat{s}_s$  から  $s(t_d)$  まで積分すると

$$t_d - \tau_d(\hat{s}_s) = \frac{a_1}{a_1 - a_2} (s(t_d) - \hat{s}_s) \quad \forall d \quad (4.10)$$

となる。これに、式 (4.9) を代入すると、時刻  $\hat{s}_s$  に対応した各終点の到着時刻が、

$$\tau_d(\hat{s}_s) = t_d - \frac{\hat{Q}_{od}}{a_d} \quad \forall d \quad (4.11)$$

と決まる。以上より、均衡解は以下のように求められる：

$$\begin{cases} \tau_d(s) = \left( t_d - \frac{\hat{Q}_{od}}{a_d} \right) + \frac{a_1}{a_1 - a_2} (s - \hat{s}_s) \\ Q_{od}(s) = \underline{Q}_{od} + a_d \frac{a_1}{a_1 - a_2} (s - \hat{s}_s) \end{cases} \quad \forall d, \forall s \quad (4.12)$$

また、均衡不効用は、 $\tau_d(s)$  を不効用関数に代入することにより以下のように与えられる：

$$\rho_d = a_1(t_d - \hat{s}_s) + (a_1 - a_2) \frac{\hat{Q}_{od}}{a_d} \quad \forall d. \quad (4.13)$$

## (2) 多起点1終点渋滞ネットワークにおける均衡解

### a) 定式化

以下では、唯一の終点を除く他のノードは全て起点である（つまり、起点にも終点にもなっていない純粋な通過点は存在しない。もちろん、起点かつ通過点であるノードは存在してよい）多起点1終点ネットワークを考える。また、以下では、起点（通過点でもありうる）の集合を  $N_1$ 、終点の集合（要素は1つ）を  $N_2$  と書き、接続行列  $\mathbf{A}$ 、出発/到着到着時刻変化率ベクトル  $d\tau(u)/du$ 、OD 交通量ベクトル  $d\mathbf{Q}(u)/du$  の各々を、 $N_1$  と  $N_2$  に対応した2つのブロックに分割する：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\tau(u)}{du} = \begin{bmatrix} \frac{d\tau_1(u)}{du} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\frac{d\mathbf{Q}(u)}{du} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Q}_1(u)}{du} \\ -\mu_d \end{bmatrix}.$$

ここで、 $\mathbf{A}_1$  は起点に対応した  $(N-1) \times L$  行列、 $\mathbf{A}_2$  は終点に対応した  $L$  次元行ベクトル、 $d\mathbf{Q}_1(u)/du$  は

$dQ_{od}(u)/du$  を要素に持つ  $(N-1)$  次元列ベクトル、 $\mu_d = \sum_{i \in L_d} \mu_{ij}$  である。

まず、ある終点到着時刻  $u$  を選択した利用者を考える、それに対応するフローの経路選択に関する均衡条件は、以下の微分方程式によって表現される：

$$\frac{d\mathbf{Q}(u)}{du} = -(\mathbf{AMA}^T) \frac{d\tau(u)}{du} \quad (4.15)$$

これは、(4.14) で定義した変数を用いて表現すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{Q}_1(u)}{du} \\ -\mu_d \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\tau_1(u)}{du} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{M} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_1 \mathbf{M} \mathbf{A}_2^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \mathbf{M} \mathbf{A}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\tau_1(u)}{du} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

次に、終点到着時刻に関する均衡条件は、

$$\frac{dV_{od}(u)}{du} = 0 \quad \forall u, \forall o. \quad (4.17)$$

と表現される。これに式 (4.2) の不効用関数を代入すれば、終点の到着時刻変化率は、

$$\frac{d\tau_o(u)}{du} = \frac{a_1 - a_2}{a_1} \quad \forall u, \forall o \quad (4.18)$$

で与えられる。これらをまとめて表せば、弾性需要型 DUE 条件は、以下の連立微分方程式として表現される：

$$\begin{cases} \frac{d\tau_1(u)}{du} = \mathbf{E} \frac{a_1 - a_2}{a_1} \\ \frac{d\mathbf{Q}_1(u)}{du} = - \left\{ (\mathbf{A}_1 \mathbf{M} \mathbf{A}_1^T) \mathbf{E} \frac{d\tau_1(u)}{du} - (\mathbf{A}_1 \mathbf{M} \mathbf{A}_2^T) \right\} \end{cases} \quad (4.19)$$

### b) 均衡解

式 (4.19) の微分方程式に適切な境界条件を与えて解けば、均衡解  $(\tau(u), \mathbf{Q}(u))$  が求められる。ここでは、まず、4.1 と同様に、全ての起終点間で OD 交通が発生している任意の時刻  $\hat{u}_s$  を与え、時刻  $\hat{u}_s$  から最終時刻（希望到着時刻  $t$ ）までの時刻帯を分析対象とする。そして、時刻  $\hat{u}_s$  までの累積 OD 交通量、および、終点  $d$  に最後に到着する利用者に対応した累積 OD 交通量の値を与件として境界条件を設定してみよう：

$$Q_{od}(\hat{u}_s) = \underline{Q}_{od} = \text{given} \quad \forall o \quad (4.20a)$$

$$Q_{od}(t_d) = \bar{Q}_{od} = \text{given} \quad \forall o \quad (4.20b)$$

これらの条件は、式(4.19)と組み合わせるとき、 $\mathbf{Q}(u)$  を決定することはできるが、 $\tau(u)$  を一意的に決定するには十



分でない。そこで、新たな境界条件として、時刻 $\hat{u}_s$ における各起終点間の所要時間を与えることにしよう：

$$\hat{u}_s - \tau_o(\hat{u}_s) = r_{od} = \text{given} \quad \forall o \quad (4.20c)$$

式(4.19)の第2式を時刻 $u$ から $t_d$ まで積分し、境界条件(4.20c)を用いると、時刻 $\hat{u}_s$ におけるOD交通量は

$$Q_1(u) = \hat{Q} + \left\{ (A_1 MA_1^T) E \frac{a_1 - a_2}{a_1} + (A_1 MA_2^T) \right\} (t_d - u) \quad (4.21)$$

と決まる。また、式(4.19)の第1式を時刻 $\hat{u}_s$ から $u$ まで積分し、境界条件(4.20c)を用いると、均衡到着時刻は

$$\tau_1(u) = E \left\{ \frac{a_2}{a_1} \hat{u}_s + \frac{a_1 - a_2}{a_1} u \right\} - r \quad (4.22)$$

と求められる。さらに、これを不効用関数に代入することにより、均衡不効用 $\rho$ は以下のように与えられる：

$$\rho = a_2 E(t - \hat{u}_s) + a_1 r \quad (4.23)$$

## 5. パラドクス

本章では、1起点多終点と多起点1終点の各ネットワークにおけるフローパターンの特性の違いが端的に現れたと考えられる“容量増強のパラドクス”を議論する。ここで考える“パラドクス”とは、リンク容量の増強が、かえって、ネットワーク全体の状態を悪化させるという事態である。これは、静的なネットワーク均衡問題においてよく知られた“Braessのパラドクス”(Murchland<sup>6)</sup>参照<sup>3</sup>)を動的な均衡フローパターンの場合に拡張したものである。以下では、ネットワークが“渋滞ネットワーク”状態にあると仮定した上で、第4、5章の結果を用いて、1起点多終点と多起点1終点の両ネットワークにおけるパラドクス生起条件の相違を調べてゆく。

### (1) 1起点多終点の渋滞ネットワークにおけるパラドクス

以下では、図-5.1のようなネットワークを用いて、固定需要型DUE(経路選択のみの均衡)と弾性需要型DUE(出発時刻と経路選択の同時均衡)の双方におけるパラドクスを考察する。ここで、起点はノード1、終点はノード2と3(つまり、1起点2終点ネットワーク)であり、リンク $a$  ( $a=1,2,3$ )の最大流出容量は $\mu_a$ である。

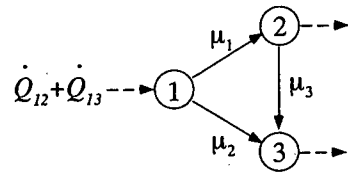


図-5.1 1起点2終点ネットワーク

なお、本節では記号の簡便化のために、上付きドットで起点出発時刻 $s$ に関する時間微分を表すこととする(e.g.  $\dot{\tau}_1(s) \equiv d\tau_1(s)/ds$ ,  $\dot{Q}_{od}(s) \equiv dQ_{od}(s)/ds$ ).

#### a) 固定需要型問題の場合

図-5.1のネットワークでは、起点1を基準点とすれば、接続行列 $A$ 、既約接続行列 $A_-$ 、および $A_-$ は、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_- = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_- = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

であるから、

$$AMA_-^T = \begin{bmatrix} \mu_1 & -\mu_3 \\ 0 & \mu_2 + \mu_3 \end{bmatrix},$$

$$(AMA_-^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu_3}{\mu_1(\mu_2 + \mu_3)} \\ \mu_1 & \frac{1}{\mu_2 + \mu_3} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

起点出発時刻 $s$ に対応したDUE状態は、第3章の結果を用いて計算できる。まず、到着時刻変化率は、式(3.6)より、

$$\dot{\tau}_2(s) = \frac{1}{\mu_1} \dot{Q}_{12}(s) + \frac{\mu_3}{\mu_1(\mu_2 + \mu_3)} \dot{Q}_{13}(s)$$

$$\dot{\tau}_3(s) = \frac{1}{\mu_2 + \mu_3} \dot{Q}_{13}(s) \quad (5.3)$$

と求められる。また、各リンクの(起点出発時刻別)流入率 $y_a(s)$ は、式(3.3)より、

$$y_1(s) = \dot{Q}_{12}(s) + \frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} \dot{Q}_{13}(s) = \dot{Q}_{12}(s) + y_3(s)$$

$$y_2(s) = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3} \dot{Q}_{13}(s), \quad y_3(s) = \frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} \dot{Q}_{13}(s) \quad (5.4)$$

となる。さらに、各リンクの均衡コスト変化率 $\dot{c}_a(s)$ は、

<sup>3</sup> “Braessのパラドクス”は、リンクの容量増強ではなく、新たなリンクを追加した場合に、ネットワーク全体の総走行費用が増加しうことを示したものである。正確に言えば、本章で考える“リンク容量増強のパラドクス”に対応する静的な問題は“Smithのパラドクス”<sup>7)</sup>である。

式 (3.2) より、以下のように求められる：

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(s) &= \frac{1}{\mu_1} \dot{Q}_{12}(s) + \frac{\mu_3}{\mu_1(\mu_2 + \mu_3)} \dot{Q}_{13}(s) - 1 \\ \dot{c}_2(s) &= \frac{1}{\mu_2 + \mu_3} \dot{Q}_{13}(s) - 1 \\ \dot{c}_3(s) &= \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1(\mu_2 + \mu_3)} \dot{Q}_{13}(s) - \frac{1}{\mu_1} \dot{Q}_{12}(s). \end{aligned} \quad (5.6)$$

次に、“容量増強のパラドクス”を議論するために、ネットワーク全体の利用状況の効率性を測る指標として、起点を時刻  $0 \sim T$  に出発した利用者の総走行費用：

$$\begin{aligned} TC &= \sum_0^T \int_0^T y_a(s) c_a(s) ds \\ &= \sum_0^T \int_0^T \dot{Q}_{od}(s) (\tau_a(s) - s) ds \end{aligned} \quad (5.7)$$

を考える。そして、適当なリンクの容量  $\mu_a$  を増加したにもかかわらず、 $TC$  が増大する（つまり  $dTC/d\mu_{ij} > 0$ ）事態を、“容量増強のパラドクス”と呼ぶことにする。

図-5.1のネットワークで、このパラドクスが生じるか否かを確認してみよう。まず、 $TC$  は、式 (5.3) (あるいは式 (5.4) と (5.6)) を式 (5.7) に代入して、

$$\begin{aligned} TC &= \int_0^T \left[ \dot{Q}_{12}(s) \left\{ \frac{Q_{12}(s)}{\mu_1} + \frac{\mu_3 Q_{13}(s)}{\mu_1(\mu_2 + \mu_3)} + \tau_2(0) - s \right\} \right. \\ &\quad \left. + \dot{Q}_{13}(s) \left\{ \frac{Q_{13}(s)}{\mu_2 + \mu_3} + \tau_3(0) - s \right\} \right] ds \end{aligned} \quad (5.8)$$

と求められる。この式から、リンク 1, 2 の容量  $\mu_1, \mu_2$  を増加した場合は、 $(\mu_1, \mu_2$  は  $TC$  の分母にしか現れないから)  $TC$  は必ず減少する、つまりパラドクスは生じないことがわかる。しかし、リンク 3 の容量  $\mu_3$  を増強する場合には、パラドクスが起りうる。なぜなら、

$$\begin{aligned} \frac{dTC}{d\mu_3} &= \left[ \mu_2 \int_0^T \dot{Q}_{12}(s) Q_{13}(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \mu_1 \int_0^T \dot{Q}_{13}(s) Q_{13}(s) ds \right] \frac{1}{\mu_1(\mu_2 + \mu_3)^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

であるから、もし、

$$\frac{\int_0^T \dot{Q}_{12}(s) Q_{13}(s) ds}{\mu_1} > \frac{\int_0^T \dot{Q}_{13}(s) Q_{13}(s) ds}{\mu_2} \quad (5.10)$$

が成立しているなら、 $dTC/d\mu_3 > 0$ 、すなわちパラドクスが生じるのである。

式 (5.10) は、ある適当な分析対象時間帯  $0 \sim T$  を考えた場合のパラドクス生起条件である。この結果から、どのように時間帯を選んでもパラドクスが生起するための条

件も導くことができる。その条件は、任意の  $T$  に対して式 (5.10) が成立する条件を考えればよいから、

$$\dot{Q}_{12}(s)/\mu_1 > \dot{Q}_{13}(s)/\mu_2 \quad (5.11)$$

である。この式の意味するところは単純である。ある出発時刻  $s$  において、終点が 3 でリンク 3 を通る利用者 (=  $y_3$ ) が 1 増えたとしよう (式 (5.4) より  $\mu_3$  が増えると  $y_3$  も必ず増える)。すると、終点が 2 の利用者全体のコストは、 $\dot{Q}_{12}(s)/\mu_1$  増加する一方で、終点が 3 の利用者全体のコストは、リンク 2 の利用者が 1 減るため、 $\dot{Q}_{13}(s)/\mu_2$  だけ減少する。つまり、式 (5.11) は、 $y_3$  の増加に対する終点 2, 3 の利用者の純損失 (損失 - 便益) 合計が増加するための条件を意味しているのである。

b) 弾性需要型問題の場合

出発時刻・経路の同時選択 DUE 状態を想定する場合、図-5.1のネットワークの均衡解は、第4章の結果を用いて簡単に計算できる。まず、均衡到着時刻と OD 交通量は、式 (4.12) により、以下のように求められる：

$$\begin{aligned} \tau_2(s) &= \frac{a_1}{a_1 - a_2} (s - \hat{s}_s) + \left( t_2 - \frac{1}{\mu_1 - \mu_3} \hat{Q}_{12} \right) \\ \tau_3(s) &= \frac{a_1}{a_1 - a_2} (s - \hat{s}_s) + \left( t_3 - \frac{1}{\mu_2 + \mu_3} \hat{Q}_{13} \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} Q_{12}(s) &= Q_{12}(\hat{s}_s) + (\mu_1 - \mu_3) \frac{a_1}{a_1 - a_2} (s - \hat{s}_s) \\ Q_{13}(s) &= Q_{13}(\hat{s}_s) + \mu_2 \frac{a_1}{a_1 - a_2} (s - \hat{s}_s) \end{aligned} \quad (5.13)$$

そして、各 OD (起点) の均衡不効用は、式 (4.13) より、

$$\begin{aligned} \rho_2 &= a_1(t_2 - \hat{s}_s) + (a_1 - a_2) \frac{1}{\mu_1 - \mu_3} \hat{Q}_{12} \\ \rho_3 &= a_1(t_3 - \hat{s}_s) + (a_1 - a_2) \frac{1}{\mu_2 + \mu_3} \hat{Q}_{13}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

次に、ネットワーク全体の総不効用  $TC$  を

$$TC \equiv \sum_0^T \rho_d \hat{Q}_{od} \quad (5.15)$$

と定義すると、図-5.1のネットワークの  $TC$  は

$$\begin{aligned} TC &= a_1 \left\{ (t_2 - \hat{s}_s) \hat{Q}_{12} + (t_3 - \hat{s}_s) \hat{Q}_{13} \right\} \\ &\quad + (a_1 - a_2) \left( \frac{\hat{Q}_{12}^2}{\mu_1 - \mu_3} + \frac{\hat{Q}_{13}^2}{\mu_2 + \mu_3} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

となる。ここで、(1)の場合と同様、リンク 3 に着目し

$dTC/d\mu_3$  を計算すると、

$$\frac{dTC}{d\mu_3} = \left( \frac{\hat{Q}_{12}}{\mu_1 - \mu_3} \right)^2 - \left( \frac{\hat{Q}_{13}}{\mu_2 + \mu_3} \right)^2 \quad (5.17)$$

一方、式 (5.13) の第2式において  $Q_{12}(s) - Q_{12}(\hat{s}_1) > 0$  であるため、 $\mu_1 > \mu_3$  が成り立つ。従って、以下の条件：

$$\hat{Q}_{12}/(\mu_1 - \mu_3) > \hat{Q}_{13}/(\mu_2 + \mu_3) \quad (5.18a)$$

が成立するとき  $dTC/d\mu_3 > 0$ 、つまり、リンク3の容量増強によりパラドクスが生じる。さらに、この条件が、任意の  $\mu_3$  において成立するための条件は、

$$\hat{Q}_{12}/\mu_1 > \hat{Q}_{13}/\mu_2 \quad (5.18b)$$

であり、(1)で求めた条件式 (5.11) と同形式となる。

## (2) 多起点1終点の渋滞ネットワークにおけるパラドクス

以下では、図-5.2のようなネットワーク（前節のネットワークの各リンクを逆向きにしたネットワーク）を用いて、固定需要型と弾性需要型の双方におけるパラドクスを考察する。ここで、起点はノード2, 3、終点はノード1（つまり、2起点1終点ネットワーク）であり、リンク  $a$  ( $a=1,2,3$ ) の最大流出容量は  $\mu_a$  である。

なお、本節では記号の簡便化のために、上付きドットで終点到着時刻  $u$  に関する微分を表すこととする (e.g.  $\dot{\tau}_i(u) \equiv d\tau_i(u)/du$ ,  $\dot{Q}_{od}(u) \equiv dQ_{od}(u)/du$ )。

### a) 固定需要型問題の場合

図-5.2のネットワークでは、ノード3が純湧き出し点であるので、接続行列  $A$  とそれに対応した  $A_+$ 、OD交通流率ベクトルを分解表現すると、

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{1-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{2-} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ dQ_1(u)/du &= [\dot{Q}_{31}(u)] \\ dQ_2(u)/du &= \begin{bmatrix} -(\mu_1 + \mu_2) \\ \dot{Q}_{21}(u) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.19)$$

である。従って、

$$\begin{aligned} AMA_+^T &= \begin{bmatrix} 0 & A_1MA_+^T \\ 0 & A_2MA_+^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_2 & -\mu_3 \\ 0 & \mu_1 + \mu_2 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & \mu_3 \end{bmatrix}, \\ (A_2MA_+^T)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)\mu_3} & \frac{1}{\mu_3} \end{bmatrix} \begin{matrix} (node\ 1) \\ (node\ 2) \end{matrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

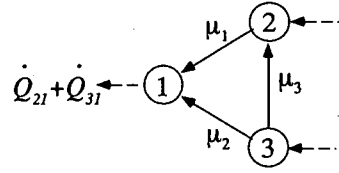


図-5.2 2起点1終点ネットワーク

終点到着時刻  $u$  に対応した DUE 状態は、第3章の結果を用いて計算できる。まず、ノード1と2の到着時刻変化率は、式 (3.14) を適用すると、

$$\dot{\tau}_1(u) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = 1, \quad \dot{\tau}_2(u) = \frac{\mu_1 - \dot{Q}_{21}(u)}{\mu_3} \quad (5.21)$$

純湧き出し点であるノード3の到着時刻変化率は、なんらかの追加的条件が与えられなければ決定できない。ここでは、ノード3については、起点で測定した OD 交通流率  $\hat{q}_{31} \equiv dQ_{31}(u)/d\tau_3(u) = \dot{Q}_{31}(u)/\dot{\tau}_3(u)$  が与えられているとする。このとき、終点で測定した OD 交通流率  $q_{31} \equiv \dot{Q}_{31}(u)$  は、式 (3.15) より、

$$\dot{Q}_{31}(u) = \mu_1 + \mu_2 - \dot{Q}_{21}(u) \quad (5.22)$$

と内生的に決まる（与件として与える必要は無い）。従って、ノード3の到着時刻変化率は、式 (3.17) より、

$$\dot{\tau}_3(u) = \frac{\dot{Q}_{31}(u)}{\hat{q}_{31}(u)} = \frac{\mu_1 + \mu_2 - \dot{Q}_{21}(u)}{\hat{q}_{31}(u)} \quad (5.23)$$

また、各リンクの（終点到着時刻別）均衡流入率  $y_a(u)$  は、式 (3.9) より

$$y_1(u) = \mu_1, \quad y_2(u) = \mu_2, \quad y_3(u) = \mu_1 - \dot{Q}_{21}(u) \quad (5.24)$$

となる（このフロパターンは、式 (5.4) で示された1起点多終点の場合の結果とは全く異なることに注意しよう）。さらに、各リンクの均衡コスト変化率  $\dot{c}_a(s)$  は、式 (3.8) より、以下のように求められる：

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(u) &= 1 - \frac{\mu_1 - \dot{Q}_{21}(u)}{\mu_3}, \quad \dot{c}_2(u) = 1 - \frac{\mu_2 + \mu_3 - \dot{Q}_{21}(u)}{\hat{q}_{31}(u)} \\ \dot{c}_3(u) &= \frac{\mu_1 - \dot{Q}_{21}(u)}{\mu_3} - \frac{\mu_1 + \mu_2 - \dot{Q}_{21}(u)}{\hat{q}_{31}(u)} \end{aligned} \quad (5.26)$$

次に、ネットワーク全体の利用効率性を測る指標として、終点到時刻  $0 \sim T$  に到着する利用者の総走行費用：

$$\begin{aligned} TC &= \sum_a \int_0^T y_a(u) c_a(u) du \\ &= \sum_a \int_0^T \dot{Q}_{od}(s) \{u - \tau_a(u)\} ds \end{aligned} \quad (5.27)$$

を考え、図-5.2のネットワークで、パラドクスが生じるか否かを確認してみよう。図-5.2のネットワークでのTCは、式(5.21)、(5.23)（あるいは式(5.24)と(5.26)）を式(5.27)に代入して、

$$TC = \int_0^T \left[ \dot{Q}_{21}(u) \left\{ u - \frac{\mu_1 u - Q_{21}(u)}{\mu_3} - \tau_2(0) \right\} + \dot{Q}_{31}(u) \left\{ u - \frac{(\mu_1 + \mu_2)u - Q_{21}(u)}{\dot{Q}_{31}} - \tau_3(0) \right\} \right] du \quad (5.28)$$

ここで、 $\hat{Q}_{31}(u) \equiv \int_0^T \hat{q}_{od}(u) du$ 。この式から、リンク1,2の容量 $\mu_1, \mu_2$ を増加した場合は、TCは必ず減少する、つまりパラドクスは生じないことがわかる。しかし、リンク3の容量を増強する場合には、無条件にパラドクスが起こる。これは以下のように確認できる。まず、 $dTC/d\mu_3$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{dTC}{d\mu_3} &= \int_0^T \dot{Q}_{21}(u) \frac{\mu_1 u - Q_{21}(u)}{\mu_3^2} du \\ &= \frac{1}{\mu_3^2} \int_0^T \left\{ \dot{Q}_{21}(u) \int_0^u \dot{\tau}_2(t) dt \right\} du \end{aligned} \quad (5.29)$$

である。一方、起点2の出発時刻変化率 $\dot{\tau}_2(u)$ が負になることは、DUE状態ではありえない。なぜなら、もし、 $\dot{\tau}_2(u)$ が負になれば、後の時刻に出発した利用者が先に終点に到着することになり、DUEの定義に矛盾するからである。従って、 $dTC/d\mu_3 > 0$ が常に成立し、無条件にパラドクスが起こることがわかる。

## (2) 弾性需要型問題の場合

出発時刻・経路の同時選択 DUE 状態を想定する場合、均衡解は、第4章の結果を用いて簡単に計算できる。まず、式(4.11)に対応する接続行列等の分割を行うと、図-5.2のネットワークに対応する $A_1 MA_{1-}^T$ 、 $A_2 MA_{2-}^T$ は

$$A_1 MA_{1-}^T = \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 \\ -\mu_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 MA_{2-}^T = \begin{bmatrix} -\mu_1 & \\ & -\mu_2 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

そして、均衡到着時刻とOD交通量は、式(4.22)により、以下のように求められる：

$$\tau_2(u) = \frac{a_1 - a_2}{a_1} u + \frac{a_2}{a_1} \left\{ \hat{u}_s - \frac{a_1}{a_2} r_{21}(\hat{u}_s) \right\} \quad (5.31)$$

$$\tau_3(u) = \frac{a_1 - a_2}{a_1} u + \frac{a_2}{a_1} \left\{ \hat{u}_s - \frac{a_1}{a_2} r_{31}(\hat{u}_s) \right\}$$

$$Q_{21}(u) = \bar{Q}_{21} + \frac{(a_1 - a_2)\mu_3 - a_1\mu_1}{a_1} (t - u) \quad (5.32)$$

$$Q_{31}(u) = \bar{Q}_{31} - \frac{(a_1 - a_2)\mu_3 + a_1\mu_2}{a_1} (t - u)$$

また、各OD(終点)の均衡不効用は式(4.23)より

$$\begin{aligned} \rho_2 &= a_2(t - \hat{u}_s) + a_1 r_{21}(\hat{u}_s) \\ \rho_3 &= a_2(t - \hat{u}_s) + a_1 r_{31}(\hat{u}_s). \end{aligned} \quad (5.33)$$

次に、ネットワーク全体での総不効用TCを

$$TC = \sum_{od} \rho_{od} \hat{Q}_{od} \quad (5.34)$$

と定義すると、図-5.2のネットワークのTCは：

$$\begin{aligned} TC &= \rho_2 (\bar{Q}_{21} - Q_{21}(\hat{u}_s)) + \rho_3 (\bar{Q}_{31} - Q_{31}(\hat{u}_s)) \\ &= - \left\{ a_2(t - \hat{u}_s) + a_1 r_{21}(\hat{u}_s) \right\} \left\{ \frac{(a_1 - a_2)\mu_3 - a_1\mu_1}{a_1} (t - \hat{u}_s) \right\} \\ &\quad + \left\{ a_2(t - \hat{u}_s) + a_1 r_{31}(\hat{u}_s) \right\} \left\{ \frac{(a_1 - a_2)\mu_3 + a_1\mu_2}{a_1} (t - \hat{u}_s) \right\} \end{aligned} \quad (5.35)$$

となる。(1)と同様、リンク3に着目し、 $dTC/d\mu_3$ を計算すると

$$\frac{dTC}{d\mu_3} = a_1(a_1 - a_2)(t - \hat{u}_s) \{ r_{31}(\hat{u}_s) - r_{21}(\hat{u}_s) \}. \quad (5.36)$$

ここで、図-5.2のネットワークが、渋滞ネットワーク状態にあると考えるなら

$$r_{31}(\hat{u}_s) > r_{21}(\hat{u}_s) \quad (5.37)$$

あるいは、等価的に、

$$\tau_2(\hat{u}_s) > \tau_3(\hat{u}_s) \quad (5.38)$$

が成立しなければならない。なぜなら、もし、式(5.38)が成立しなければ、終点に $\hat{u}_s$ に到着する起点2,3の利用者U2とU3がいる時に、U2がU3よりも先に起点を出発することになり、それは、渋滞ネットワーク状態の仮定に矛盾するからである。従って、 $dTC/d\mu_3 > 0$ は渋滞ネットワークでは常に成立し、リンク3の容量増強により必ずパラドクスが生じることがわかる。

以上(5.1と5.2)で示されたように、OD需要を内生化する／しないに関わらず、1起点多終点ネットワークでは、ある条件の下でのみパラドクスが生じる。それに対し、多起点1終点の場合には対応するパラドクスが必ず生じる。これは、静的ネットワークフローでは起こり得ない非対称な結果であり、動的ネットワークフロー特有の性質である。

## 6. おわりに

本稿では、動的な配分モデルでは、静的なモデルとは異なり、“フローの方向性”がネットワーク・フロー・パターンを考える際に極めて重要であることが示された。

より具体的には、まず、多起点1終点（朝のラッシュに相当）をもつネットワーク（以下、“M-net”と呼ぶ）と、その起点・終点およびリンクの向きを反転して得られる1起点多終点（同一道路網における夕方のラッシュに相当）ネットワーク（以下、“E-net”と呼ぶ）の各々における動的均衡解を解析的に導出した。その比較の結果、動的な配分では、両者は本質的に異なった特性を持つことが理論的に示された。静的な配分理論では両者のフローパターンが異なることはありえないことを考えると、これは、高速道路のランプ制御や混雑料金制をはじめとする各種交通管理施策を検討する際にも注意すべき結果である。

以上の一般的な解析の後、M-net と E-net の特性の違いがさらに明白に現れる例として、ある種の“パラドクス”を考察した。このパラドクスは、ネットワーク上の適当なリンクの容量の増強によって、かえってネットワーク全体の総走行費用が増大するという事態である（静的な均衡モデルにおいてよく知られた“ブラッセのパラドクス”の動的フロー版）。簡単なネットワークにおける具体的な解析の結果、このパラドクスが、E-net では、ある条件が満たされた場合にのみ起こるのに対し、M-net では、無条件に（必ず）起こるといふ非対称的な結果を得た。これもまた、静的な枠組の理論からは起こり得ない結論であり、交通現象を動的に正しく捉えようと、空間的構造がフロー・パターンに本質的な影響を与えることを端的に示していると言える。

本研究で得た結論は、Point Queue モデル、動的利用者均衡原則、“渋滞ネットワーク”などの、やや限定的な仮定に基づいたものである。しかし、M-net と E-net では本質的に特性が異なるという定性的な結論は、他の渋滞表現モデ

ルや利用者行動原則の下でも成立すると思われる。その方向でのより進んだ検討は、今後の重要な課題である。また、本研究では、パラドクス生起条件については、特定の簡単なネットワークにおいてのみ議論した。しかし、本研究の結果を発展させれば、一般的構造のネットワークにおいてパラドクスが生じるリンクを（具体的に均衡解を計算することなく）知るための一般的方法を得ることが可能と思われる。これについては、現在検討中であり、稿をあらためて報告したい。

## 参考文献

- 1) 赤松隆：交通流の予測・誘導・制御と動的なネットワーク配分理論，土木計画学研究・論文集，Vol. 13, pp.23-48, 1996.
- 2) Akamatsu, T.: A Dynamic Traffic Equilibrium Assignment Paradox, submitted to *Transportation Research*, 1998.
- 3) 赤松隆・桑原雅夫：渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分—多起点・1終点/1起点・多終点の場合，土木学会論文集，No. 488, pp.21-30, 1994.
- 4) Hendrikson, C. and Kocur, G.: Schedule Delay and Departure Time Decisions in a Deterministic Model, *Transportation Science* Vol. 15, pp.62-77, 1981.
- 5) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic Equilibrium Assignment with Queues for a One-to-Many OD Pattern, In C. Daganzo (Ed.) *Proceedings of the 12th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, pp.185-204, Elsevier, Berkeley, 1993.
- 6) Murchland, J.D.: Braess's Paradox of Traffic Flow, *Transportation Research* Vol. 4, pp.391-394, 1970.
- 7) Smith, M.J.: In a Road Network, Increasing Delay Locally Can Reduce Delay Globally, *Transportation Research* Vol.12B, pp.419-422, 1978.
- 8) Vickrey, W.S.: Congestion Theory and Transportation Investment, *American Economic Review* Vol. 59, 1969.

(1998. 3. 31 受付)

## DYNAMIC TRAFFIC ASSIGNMENT AND ORIGIN-DESTINATION PATTERNS

Takashi AKAMATSU and Nozomu TAKAMATSU

This paper compares the dynamic flow patterns on two symmetrical networks: “Evening-network” which is a network with a one-to-many OD pattern; “Morning-network” which is one with a many-to-one OD pattern that can be obtained by reversing the direction of links, an origin and destinations of the Evening-network. Although the conventional static traffic assignment produces exactly the same flow pattern for both of the networks, we nevertheless find that such a simple conclusion does not hold for dynamic assignment models. As an example demonstrating the essential difference between the two dynamic flow patterns, a capacity increasing paradox (dynamic version of Braess’s paradox) is also discussed