

異方圧密粘土に対する特性線場の理論

勝山 克二¹・西原 晃²・太田 秀樹³

¹正会員 東洋建設株式会社 北陸支店 (〒920-0852 金沢市此花町6-10)

²正会員 工博 福山大学助教授 工学部土木工学科 (〒729-0292 広島県福山市東村町三蔵985)

³フェロー会員 工博 東京工業大学教授 工学部開発システム工学科
(〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1)

異方圧密された飽和粘土の平面ひずみ条件下での破壊時の応力場の検討を特性曲線法により行う。応力誘導異方性を表わすことのできる関口と太田による弾塑性モデルを用いて平面ひずみ条件下における非排水せん断強度を求め、有効応力で表された強度を破壊条件として特性線場の理論を展開する。間隙水圧を陽な形で変数として偏微分方程式を解くことにより、破壊時における場の間隙水圧、全応力、有効応力の分布を求める。

Key Words : *plasticity, characteristics line, slip-line, plane strain, stress field, effective stress, undrained strength, stress induced anisotropy*

1. はじめに

特性線場の理論(すべり線の理論)は、Kötterの式などで代表されるように土質力学の分野ではじめ展開されたが、その後、金属塑性論において大きな発展をとげ、応力場におけるHenkeyの式や速度場におけるGeiringerの式が有名である¹⁾。

現在の土質力学におけるすべり線理論は金属塑性論に負うところが多いが、土質力学に金属塑性論をそのまま用いることが困難なことが多い。金属材料とは違う土特有の性質、たとえば間隙水の存在や内部摩擦角・ダイレイタンスーなどによって、金属塑性論のそれよりは複雑で煩雑な定式化をおこなわなければならない。自重の影響や、強度の異方性などを考慮する必要もある。

一方、土の強度に対する異方圧密の影響については、Bjerrum(1972, 1973)^{2), 3)}やLadd and Foott(1974)⁴⁾が実験的に強調しているように、粘土の非排水せん断強度が応力履歴やせん断の仕方、せん断時の応力状態によって異なることが知られている。理論面では構成モデルのひとつである関口と太田(1977)⁵⁾によるモデルが、粘土の強度異方性を表現している弾塑性モデルとして各種の解析に用いられている⁶⁾。

本論文では、異方圧密された飽和粘土に対する平面ひずみ・非排水条件下での破壊時の応力場を特性曲線法を用いて解析した。粘土の非排水強度を考慮に入れ、破壊時の全応力状態だけでなく、破壊時の間隙水圧分布をも求めることができるような特性線場の理論を組み立てたので報告する。

2. 平面ひずみ問題の支配方程式

水平に x 軸、鉛直下向きに z 軸をとり、 y 方向のひずみを拘束する xz 平面での2次元平面ひずみ問題を考える。平面ひずみ問題の支配方程式は、全応力 $(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})$ のつり合い式、ひずみ増分 $(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_z, \dot{\gamma}_{xz})$ —変位増分 (\dot{u}_x, \dot{u}_z) 関係、有効応力の定義式、応力—ひずみ関係(流れ則)、破壊条件および平面ひずみ条件によって以下のように表される。

応力のつり合い式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho_x \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho_z \end{aligned} \quad (1)$$

ひずみ増分—変位増分関係

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= -\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_z = -\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \\ \dot{\gamma}_{xz} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

有効応力

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma'_x + p_w \\ \sigma_y &= \sigma'_y + p_w \\ \sigma_z &= \sigma'_z + p_w \end{aligned} \quad (3)$$

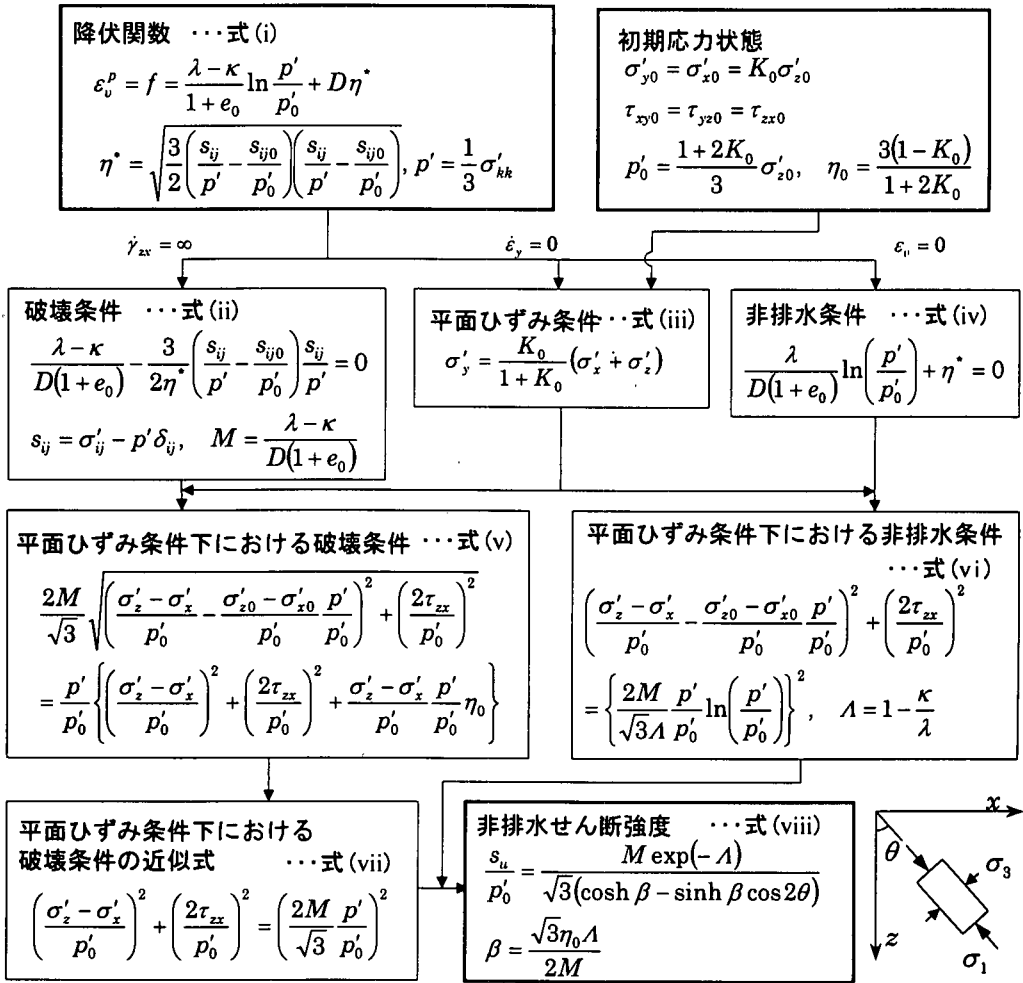


図-1 平面ひずみ条件下での異方圧密粘土の非排水せん断強度 (Ohta, Nishihara and Morita (1985) ⁹⁾ を修正・加筆)

応力-ひずみ関係 (流れ則)

$$\dot{\epsilon}_x = h \frac{\partial G}{\partial \sigma'_x}, \quad \dot{\epsilon}_z = h \frac{\partial G}{\partial \sigma'_z}$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} h \frac{\partial G}{\partial \tau_{zx}} \quad (4)$$

$$G = G(\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau_{zx})$$

破壊条件

$$F(\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau_{zx}) = 0 \quad (5)$$

平面ひずみ条件

$$\dot{\epsilon}_y = h \frac{\partial G}{\partial \sigma'_y} = 0 \quad (6)$$

ここに、 p_i が物体力の i 方向成分、 p_w が間隙水圧、 G が塑性ポテンシャル関数、 h が比例定数である。なお、上記の式ではひずみの弾性成分が無視されていることを付記しておく。

応力のつり合い式と破壊条件式に応力の適当な境界条件を与えることにより二次元問題の応力場が導かれる。応力のつり合い式に破壊条件を代入してして得られる方程式は、よく知られているように一階準線形双曲型2元連立偏微分方程式となり、2組の特性曲線群を定義することができる。

本論文では飽和粘土の破壊を取り扱うが、つり合い式を全応力、破壊条件を有効応力の関数で表すことにする。平面ひずみ問題では、破壊条件が全応力であれば求める未知数の数は全応力の応力成分 ($\sigma_x, \sigma_z, \tau_{zx}$) の3個である。それに対してつり合い式が2つと破壊条件式が1つの計3つの方程式があるので方程式と未知数の数がそろふ。破壊条件が有効応力で表される場合、間隙水圧 p_w が未知数として1つ増えてしまうことになるが、非排水条件を拘束条件として導入することにより方程式が1つ増え、問題を解くことができるようになる。

3. 平面ひずみ条件下における 非排水せん断強度

図-1に平面ひずみ条件下での異方圧密粘土の非排水せん断強度を求める際の式の流れを示す。図-1で使われているパラメータは以下の通りである。

λ, κ : 圧縮, 膨潤時における $e - \ln p'$ 曲線の勾配

$$\Lambda : \text{非可逆比} \quad \Lambda = 1 - \frac{\kappa}{\lambda} \quad (7)$$

K_0 : 静止土圧係数

D : 柴田によるダイレイタンス係数⁸⁾

e : 間隙比

$$p' : \text{平均有効主応力} \quad p' = \frac{1}{3} \sigma'_{kk} \quad (8)$$

$$s_{ij} : \text{偏差応力テンソル} \quad s_{ij} = \sigma'_{ij} - p' \delta_{ij} \quad (9)$$

δ_{ij} : クロネッカーのデルタ

η^* : 一般化された応力比⁷⁾

$$\eta^* = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{s_{ij}}{p'} - \frac{s_{ij0}}{p'_0} \right) \left(\frac{s_{ij}}{p'} - \frac{s_{ij0}}{p'_0} \right)} \quad (10)$$

$$\beta : \text{定数} \quad \beta = \frac{\sqrt{3} \eta_0 \Lambda}{2M} \quad (11)^7$$

$$\eta_0 : \text{定数} \quad \eta_0 = \frac{3(1 - K_0)}{1 + 2K_0} \quad (12)$$

M : 限界応力比 (critical state parameter)

$$M = \frac{\lambda - \kappa}{D(1 + e_0)} = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'} \quad (13)$$

ϕ' : 有効内部摩擦角

添え字0は K_0 圧密終了時の値であることを示す。

関口と太田によるモデルの降伏関数 f が、図-1の式(i)のように表される。圧密とダイレイタンスによって生じる体積ひずみを塑性的な体積ひずみと弾性的な体積ひずみの和と考え¹⁰⁾、塑性体積ひずみを硬化パラメータとして関連流れ則を適用することにより導かれたものである。

この降伏関数に中間主ひずみがゼロ、塑性体積ひずみ増分がゼロ (せん断ひずみが無限大)、体積ひずみがゼロという3つのひずみに関する条件を与えると、それぞれ、平面ひずみ条件、破壊条件、非排水条件を導くことができる。ここでいう非排水条件は土中の水の移動を全く許さないという拘束条件である。

破壊条件と非排水条件に平面ひずみ条件を代入することにより、平面ひずみ条件下における破壊条件式と非排水条件式を求め、このふたつの式を連立させて解くことにより、平面ひずみ非排水せん断強度を図-1の式(viii)のように求めることができる。

平面ひずみ破壊条件 (図-1の式(v)) は図-2で表されるような原点を頂点とする円錐形をしており、平面ひずみ非排水条件 (図-1の式(vi)) は図-3に示すような K_0 ライン上に尖点を持つひずんだ弾丸の

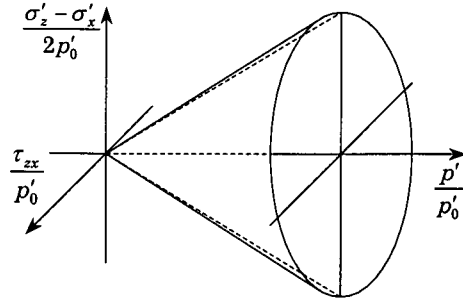


図-2 平面ひずみ破壊条件

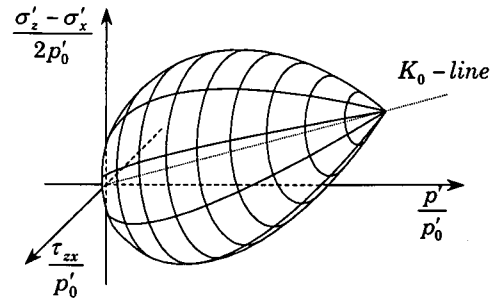


図-3 平面ひずみ非排水条件

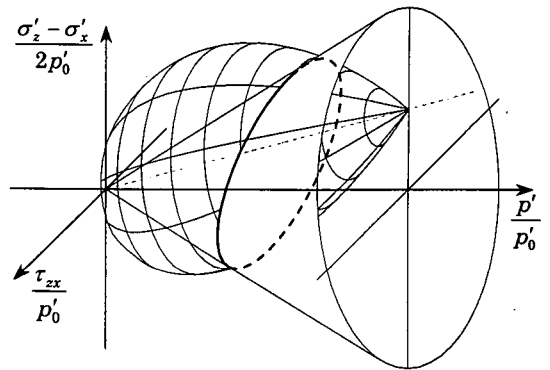


図-4 平面ひずみ条件下における
非排水状態曲面と破壊曲面の交線

ような形をしている。この2つの曲面の交線が平面ひずみ非排水せん断強度となり図-4で表される。破壊条件が主応力の回転により変化しないという近似 (図-1の式(vii)) と、この曲線が1つの平面上にあるという近似をするとこの曲線は図-1の式(viii)で表される。

図-1は正規状態での異方圧密粘土に対する式の流れであるが、これを過圧密粘土に拡張すると⁷⁾

$$\frac{s_{11}}{p'_i} = \frac{Mn^{\Lambda} \exp(-\Lambda)}{\sqrt{3} (\cosh \beta - \sinh \beta \cos 2\theta)} \quad (14)$$

但し, n は過圧密比で $n = p'_0/p'_i$, p'_i は過圧密状態での平均有効主応力である. 等方圧密 ($K_0 = 1$) の場合の平面ひずみ強度を \bar{s}_u とすれば, $\bar{s}_u = \frac{M}{\sqrt{3}} p'_i n^A \exp(-A)$ となり, 異方圧密粘土の平面ひずみ非排水強度は次のように表される.

$$s_u = \frac{\bar{s}_u}{\cosh \beta - \sinh \beta \cos 2\theta} \quad (15)$$

4. 応力場の支配方程式

応力のつりあい式は全応力でのつりあいである. 全応力を有効応力と過剰間隙水圧で表し, これを応力のつりあい式に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial p_w}{\partial x} &= \rho_x \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\partial p_w}{\partial z} &= \rho_z \end{aligned} \quad (16)$$

有効応力成分 $\sigma'_x, \sigma'_z, \tau_{xz}$ を次のように表現する.

$$\begin{cases} \sigma'_x \\ \sigma'_z \end{cases} = P \pm Q \cos 2\theta, \quad \tau_{xz} = Q \sin 2\theta \quad (17)$$

ここに, P, Q はそれぞれ有効応力表示でのモール円の中心と半径を表す. 破壊条件の近似式, 図-1の式(vii)を用いると,

$$q = \sigma'_1 - \sigma'_3 = 2s_u = \frac{2}{\sqrt{3}} Mp' \quad (18)$$

が得られる. 図-1の式(iii), 式(8)および式(18)より, P と Q を平均有効応力 p' で表すと次式のようなになる.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(\sigma'_x + \sigma'_z) = \frac{3(1+K_0)}{2(1+2K_0)} p' \\ Q &= \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) = \frac{M}{\sqrt{3}} p' \end{aligned} \quad (19)$$

また, 平均有効応力 p' は先の破壊条件との関係より次の様に表されるが, $\bar{s}_u \left(= \frac{M}{\sqrt{3}} p'_i n^A \exp(-A) \right)$ と β は定数であるから, p' が主応力の回転角 θ のみの関数で表されることになる.

$$p' = \frac{\sqrt{3}}{M} s_u = \frac{\sqrt{3}}{M} \frac{\bar{s}_u}{\cosh \beta - \sinh \beta \cos 2\theta} \quad (20)$$

したがって, P, Q は θ だけを変数とする関数であり, 結局, 全応力成分 $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ が主応力の回転角 θ と間隙水圧 p_w の関数として次のように表されたことになる.

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_z \end{cases} = P \pm Q \cos 2\theta + p_w, \quad \tau_{xz} = Q \sin 2\theta \quad (21)$$

上式をつりあい式(式(16))に代入する.

$$\frac{\partial}{\partial x}(P - Q \cos 2\theta + p_w) + \frac{\partial}{\partial z}(Q \sin 2\theta) = \rho_x \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q \sin 2\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(P + Q \cos 2\theta + p_w) = \rho_z$$

$P = P(\theta), Q = Q(\theta)$ に注意して展開すると, 応力場の支配方程式が, 2つの独立変数 (x, z) と2つの従属変数 (θ, p_w) をもつ一階準線形の2元連立偏微分方程式となる.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial Q}{\partial \theta} \cos 2\theta + 2Q \sin 2\theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial p_w}{\partial x} \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \sin 2\theta + 2Q \cos 2\theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \rho_x \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \sin 2\theta + 2Q \cos 2\theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \cos 2\theta - 2Q \sin 2\theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial p_w}{\partial z} = \rho_z \end{aligned} \quad (23b)$$

5. 特性線方向と特性線に沿った微分関係

上述の応力場の支配方程式を行列の形⁹⁾で表す.

$$A_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \omega}{\partial z} = r \quad (24)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{pmatrix} \theta \\ p_w \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_z \end{pmatrix} \\ A_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial Q}{\partial \theta} \cos 2\theta + 2Q \sin 2\theta & 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} \sin 2\theta + 2Q \cos 2\theta & 0 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \sin 2\theta + 2Q \cos 2\theta & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \cos 2\theta - 2Q \sin 2\theta & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

より一般的な形で表すために係数行列 A_1^{-1} を両辺に左側からかける.

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + A \frac{\partial \omega}{\partial z} = r' \quad (26)$$

$$A = A_1^{-1} A_2, \quad r' = A_1^{-1} r \quad (27)$$

係数行列 A と r' は次のようになる.

$$A = \frac{-1}{Q_\theta \sin 2\theta + 2Q \cos 2\theta} \times \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (28)$$

ここに,

$$A_{11} = -P_\theta - Q_\theta \cos 2\theta + 2Q \sin 2\theta$$

$$A_{12} = -1$$

$$A_{21} = (P_\theta)^2 - (Q_\theta)^2 - (2Q)^2$$

$$A_{22} = P_\theta - Q_\theta \cos 2\theta + 2Q \sin 2\theta$$

また,

$$r' = \frac{-1}{Q_\theta \sin 2\theta + 2Q \cos 2\theta} \times \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

ここに,

$$\begin{aligned} r'_1 &= -\rho_z \\ r'_2 &= -(Q_\theta \sin 2\theta + 2Q \cos 2\theta) \rho_x \\ &\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial Q}{\partial \theta} \cos 2\theta + 2Q \sin 2\theta \right) \rho_z \end{aligned}$$

ただし, $P_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta}$, $Q_\theta = \frac{\partial Q}{\partial \theta}$ である.

ここで, 従属変数 ω の線形変換を考える.

$$\omega = B(x, z) \omega' \quad (30)$$

従属変数 ω の偏微分は,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = B \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} \omega', \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = B \frac{\partial \omega'}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial z} \omega' \quad (31)$$

これを式(24)に代入し, 整理すると,

$$B \frac{\partial \omega'}{\partial x} + AB \frac{\partial \omega'}{\partial z} = r' - \frac{\partial B}{\partial x} \omega' - A \frac{\partial B}{\partial z} \omega' \quad (32)$$

B^{-1} (付録) を両辺の左側からかけると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + B^{-1}AB \frac{\partial \omega'}{\partial z} &= r'' \\ r'' &= B^{-1} \left(r' - \frac{\partial B}{\partial x} \omega' - A \frac{\partial B}{\partial z} \omega' \right) \end{aligned} \quad (33)$$

行列 A の特性方程式

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (34)$$

を解くと相異なる実固有値 λ が

$$\lambda = \frac{(Q_\theta \cos 2\theta - 2Q \sin 2\theta) \pm \sqrt{(Q_\theta)^2 + (2Q)^2}}{Q_\theta \sin 2\theta + 2Q \cos 2\theta} \quad (35)$$

と求まる. ここに, I は単位行列.

したがって, 行列 A を対角化する行列 B を選ぶことができ,

$$B^{-1}AB = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

と表現できる. ここに, λ_1, λ_2 は行列 A の相異なる実固有値である.

行列 B はそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを列成分とする行列で, 各成分は次式で求める.

$$AB = BD \quad (37)$$

ここで, $B = (b_1, b_2)$ とすると,

$$Ab_1 = \lambda_1 b_1, \quad Ab_2 = \lambda_2 b_2 \quad (38)$$

したがって,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ P_\theta - \sqrt{(Q_\theta)^2 + (2Q)^2} & P_\theta + \sqrt{(Q_\theta)^2 + (2Q)^2} \end{pmatrix} \quad (39)$$

となる. 従って, その逆行列 B^{-1} は,

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} P_\theta + \sqrt{(Q_\theta)^2 + (2Q)^2} & 1 \\ -(P_\theta - \sqrt{(Q_\theta)^2 + (2Q)^2}) & -1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$|B| = -2\sqrt{(Q_\theta)^2 + (2Q)^2}$$

式(33)を成分で表すと,

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega'_1}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \omega'_1}{\partial z} = r''_1 \\ \frac{\partial \omega'_2}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \omega'_2}{\partial z} = r''_2 \end{cases} \quad (41)$$

但し,

$$\omega' = \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \theta \\ p_w \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} (P_\theta + \sqrt{(Q_\theta)^2 + (2Q)^2}) \cdot \theta + p_w \\ -(P_\theta - \sqrt{(Q_\theta)^2 + (2Q)^2}) \cdot \theta - p_w \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (42a)$$

$$\begin{aligned} r'' &= \begin{pmatrix} r''_1 \\ r''_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \left(r' - \frac{\partial B}{\partial x} \omega' - A \frac{\partial B}{\partial z} \omega' \right) \\ &= \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} dx \cdot \rho_x + dz \cdot \rho_z \\ -(dx \cdot \rho_x + dz \cdot \rho_z) \end{pmatrix} \\ &\quad - B^{-1} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \omega' + A \frac{\partial B}{\partial z} \omega' \right) \end{aligned} \quad (42b)$$

である.

この2つの独立した変数 ω'_1, ω'_2 に対する一階偏微分方程式を次のように連立の常微分方程式に書き直すことができる¹⁰⁾.

$$\begin{cases} \frac{dx}{1} = \frac{dz}{\lambda_1} = \frac{d\omega'_1}{r''_1} \\ \frac{dx}{1} = \frac{dz}{\lambda_2} = \frac{d\omega'_2}{r''_2} \end{cases} \quad (43)$$

前半部分を見ると $dz/dx = \lambda_i$ ($i=1,2$) となり, 行列 A の固有値 λ_i がそれぞれ2つの特性曲線群の傾きを表すことがわかる. 後半部分と前半部分を連立させて解くと次のように特性方向に沿った微分関係を求めることができる.

$$\frac{d\omega'_i}{dx} = r''_i \quad (i=1,2) \quad (44)$$

結果として, 特性方向および特性方向に沿った微分関係は以下ようになる.

新たな変数 φ を次のように導入する. 但し, φ は摩擦角とは全く無関係な変数である.

$$\tan 2\varphi = \frac{Q_\theta \cos 2\theta - 2Q \sin 2\theta}{Q_\theta \sin 2\theta + 2Q \cos 2\theta} \quad (45)$$

すると, 特性方向が,

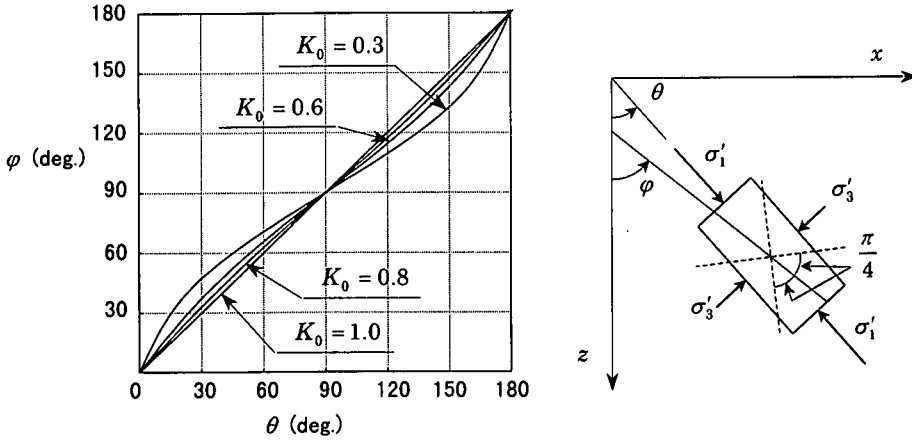


図-5 主応力の回転角と特性曲線の方向の関係

$$\frac{dz}{dx} = \lambda_i = \tan 2\varphi \pm \frac{1}{\cos 2\varphi} = \tan\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right) \quad (46)$$

となり、2つの特性曲線は互いに直交することになる。特性曲線の方向に摩擦角の項がないことに注意を要する。

ここで、具体的に $Q_0 = \frac{\partial Q}{\partial \theta}$ を式(19)、(20)より計算してみると、

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \frac{2\bar{s}_u \sinh \beta \cos 2\theta}{(\cosh \beta - \sinh \beta \cos 2\theta)^2} \quad (47)$$

θ と φ の関係を図-5に示す。初期応力状態が等方圧密状態 ($K_0 = 1$, Cam-Clayモデル) の場合は、

$\beta = 0$ 、すなわち $\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0$ より $\theta = \varphi$ となり、特性曲線の方向は主応力の方向から $\pm \pi/4$ の向きとなる。異方圧密状態 ($K_0 \neq 1$) の場合、特性曲線の方向 $\varphi \pm \pi/4$ は主応力の回転に伴い、最大主応力の方向から $\pm \pi/4$ の向きとは少しずれることがわかる。

また、特性方向に沿った微分関係は、 dz/dx を代入して整理すると次式で表される。

$$\left[\frac{\partial P}{\partial \theta} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)^2 + (2Q)^2} \right] d\theta + dp_w = dx \cdot \rho_x + dz \cdot \rho_z \quad (48)$$

$\frac{\partial P}{\partial \theta}$ は主応力の回転に伴って有効応力のモールの円の

の中心が移動することを表し、 $\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)^2 + (2Q)^2}$ は主応力の回転に伴う全応力の変化率を表す。

式(19)、(20)より、 $\frac{\partial P}{\partial \theta}$ は次のようになる。

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{2\bar{s}_u}{\cosh \beta - \sinh \beta \cos 2\theta} \times \left(\frac{3\sqrt{3}(1+K_0) \sinh \beta \sin 2\theta}{2M(1+2K_0) \cosh \beta - \sinh \beta \cos 2\theta} \right) \quad (49)$$

従って、 $d\theta$ の係数 $\frac{\partial P}{\partial \theta} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)^2 + (2Q)^2}$ は、以下のように表される。

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)^2 + (2Q)^2} = \frac{2\bar{s}_u}{\cosh \beta - \sinh \beta \cos 2\theta} \times \left[\frac{3\sqrt{3}(1+K_0) \sinh \beta \sin 2\theta}{2M(1+2K_0) \cosh \beta - \sinh \beta \cos 2\theta} \pm \frac{\sqrt{\cosh 2\beta - \sinh 2\beta \cos 2\theta}}{\cosh \beta - \sinh \beta \cos 2\theta} \right] \quad (50)$$

6. 数値計算

自重がない $\rho_x = \rho_z = 0$ の場合を考えて、数値計算を行う。

特性方向に沿った微分関係の式(48)を差分表示し、特性曲線に沿って積分をする。

$$\Delta p_w + \left[\frac{\partial P}{\partial \theta} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)^2 + (2Q)^2} \right] \Delta \theta = 0 \quad (51)$$

応力場の境界値問題は、Riemannの問題・Cauchyの問題・Cauchyの逆問題・混合境界値問題の4種類に分類される。Riemannの問題は互いに交わる2つの特性曲線の位置と応力が与えられる場合、Cauchyの問題は特性曲線でない曲線に沿って応力値が与えられる場合、Cauchyの逆問題は1本の特性曲線と特性曲線ではない曲線の応力条件が与えられてその形状を決定する問題、混合境界値問題は1本の特性曲

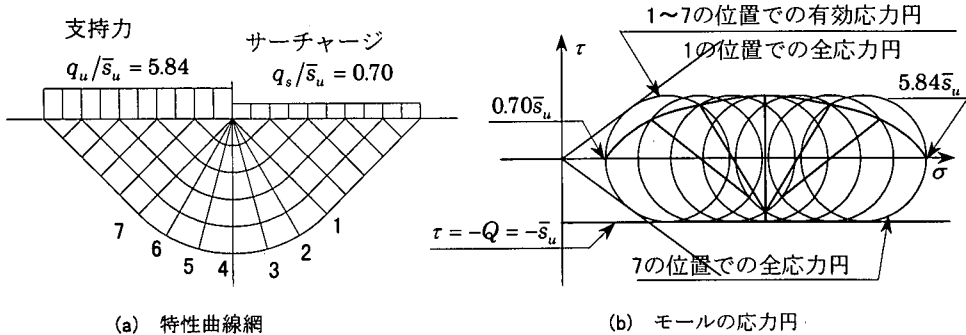


図-6 特性曲線網とモールの応力円 $K_0 = 1$

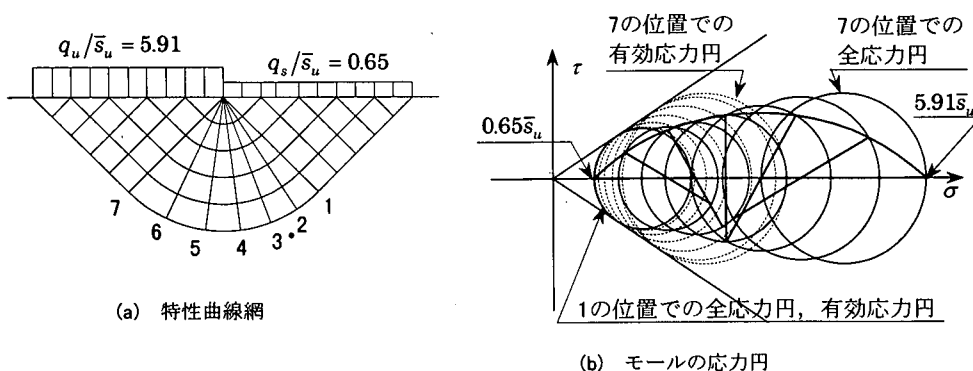


図-7 特性曲線網とモールの応力円 $K_0 = 0.6$

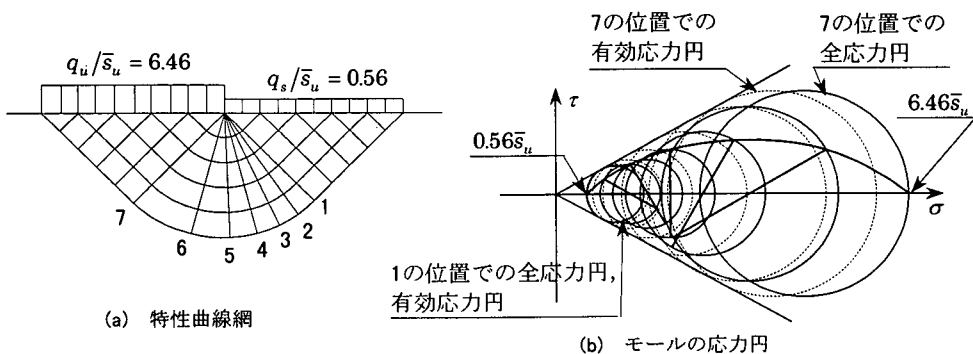


図-8 特性曲線網とモールの応力円 $K_0 = 0.3$

線と特性曲線ではない曲線とそれに沿った特性曲線の傾き角が与えられる場合の問題である。

図-6～図-8に、上式を使って浅い基礎の支持力問題を解いた計算結果を示す。計算に用いた物性値を表-1に示す。過圧密比は $n=1$ 、 p'_0 は地盤内で一定とした。

表-1 計算に用いた物性値

M	1.022 ($\phi' = 26.9^\circ$)		
D	0.074		
A	0.584		
K_0	1.0	0.6	0.3

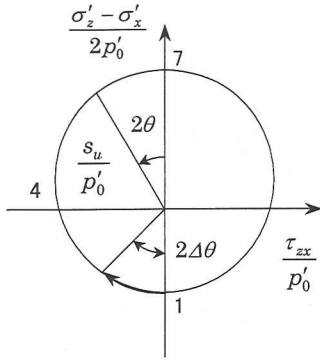


図-9 非排水せん断強度の

$$\frac{\sigma'_z - \sigma'_x}{2p'_0} - \frac{\tau_{zx}}{p'_0} \text{ 面への投影}$$

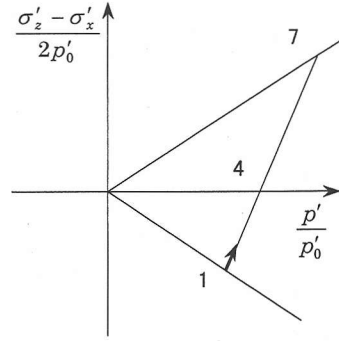


図-10 非排水せん断強度の

$$\frac{\sigma'_z - \sigma'_x}{2p'_0} - \frac{p'}{p'_0} \text{ 面への投影}$$

図-6は初期状態が等方圧密 ($K_0 = 1$, Cam-Clayモデル) の場合、図-7、図-8がそれぞれ初期状態が異方圧密の場合で $K_0 = 0.6$, $K_0 = 0.3$ の結果である。各図の(a)が特性曲線網、(b)がいろいろな場所における応力状態をモールの応力円で表した図である。破線で表された円が有効応力、実線の円が全応力の応力円である。

各図の(a)を比べると、特性曲線網の扇型遷移部分における放射状特性曲線の間隔が等方圧密の場合には等間隔になるが、異方圧密の場合等間隔にはならず、载荷されている側が広く自由境界側が狭くなる。これは前述のごとく、最大主応力の回転に伴い、特性曲線の方 $\varphi \pm \pi/4$ が主応力の方 $\pm \pi/4$ からずれるために起こるものである。

また、各図の(b)を比べてみると、等方圧密 $K_0 = 1$ の場合は有効応力の応力円が1つで全応力の増分が間隙水圧の増分であることがわかる。異方圧密 $K_0 \neq 1$ の場合は、最大主応力の向きが水平から鉛直へと変化していくのに伴い、有効応力の応力円が大きくなっていき、有効応力の応力円の中心も移動しているのがわかる。応力円の中心の移動量は式(51)の中の $\frac{\partial P}{\partial \theta} \cdot \Delta \theta$ で表される。

図-9と図-10は立体的に描かれた図-4の2つの平面に非排水せん断強度の線を投影した図である。最大主応力が水平から鉛直に変化するのに伴って図-9の最下点から最上端へ円弧に沿ってせん断強度 Q (原点から円弧までの距離) が増加していく。図-10でも同様に主応力が水平から鉛直に変化するのに伴って最下点から最上端へ応力点は移動するが、 p'/p'_0 軸と非排水せん断強度を表す直線がある角度で交差しているため θ が変化することによって平均有効応力 p' 、ひいてはモールの中心位置が $\frac{\partial P}{\partial \theta} \cdot \Delta \theta$ だけ変化することになる。 $K_0 = 1$ の場合は

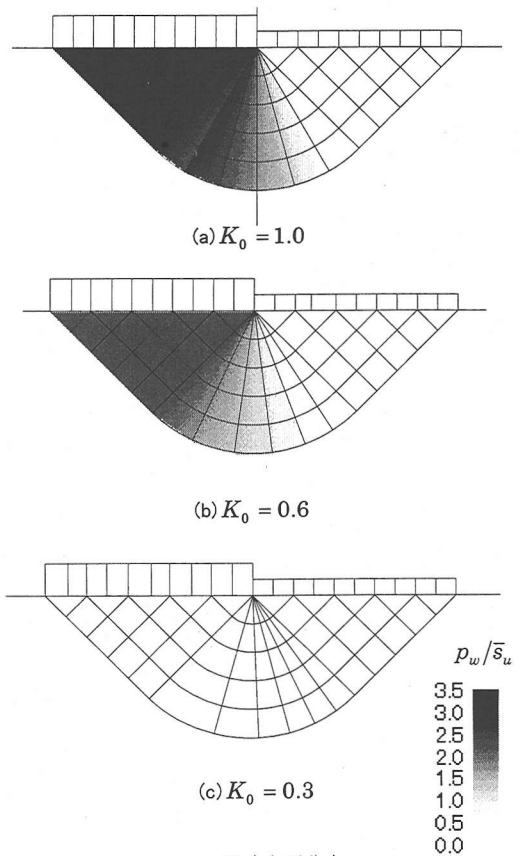


図-11 間隙水圧分布

p'/p'_0 軸と非排水せん断強度を表す直線が直交するため、 $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$ となり、モールの中心が動かない。また、 $K_0 = 1$ の場合は図-9の円が原点を中心とした

円となるため、モール円の半径が変化しない。

前述のように、 $\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)^2 + (2Q)^2} \Delta \theta$ で全応力の増分が表され、初期状態が等方圧密 $K_0 = 1$ の場合は、 $\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0$ なので、全応力増分が $2Q \cdot \Delta \theta$ となる。これは、半径 Q の円の中心角 $2\Delta \theta$ 分の円弧の長さであり、半径 Q の円が $\sigma - \tau$ 平面上で $\tau = -Q$ の線上をすべらずに $2\Delta \theta$ だけ回転したときの円の移動距離を表す量である。異方圧密 ($K_0 \neq 1$) の場合も同様に考える事ができるが、 $\frac{\partial Q}{\partial \theta} \neq 0$ となるため、回転とともに半径が増加あるいは減少しながら $\sigma - \tau$ 平面の $\tau = -Q$ の線上を回転移動する。このとき $\tau = -Q$ の線も円の半径と一緒に上下する。

全応力の支持力 (q_u) からサーチャージ (q_s) を差し引いた値、すなわち、モールの応力円の 1 の位置での最小主応力から 7 の位置での最大主応力までの距離を $q = q_u - q_s = \bar{s}_u N_c$ として見てみる (図-8 参照)。 $K_0 = 1.0$ の場合、支持力係数 N_c はよく知られた値 $N_c = 5.14$ となる。 $K_0 = 0.6, 0.3$ の場合はそれぞれ、 $N_c = 5.26$ 、 $N_c = 5.90$ となり、地盤の異方性を考慮することにより、支持力係数が $N_c = 5.14$ からずれてくることがわかる。これは、Ohta, et al. (1985) が別途に導いている結果⁷⁾と整合している。

全応力の応力円から有効応力の応力円までの距離が間隙水圧の増分となる。 $K_0 = 1.0, 0.6, 0.3$ の 3 つのケースで破壊時の間隙水圧分布の分布がどのように違ってくるかを図示したのが図-11 (a) (b) (c) である。間隙水圧を陽な変数として取り込んだ理論展開を行うことによって、このような間隙水圧分布を得ることができる。

7. まとめ

全応力で表されたつり合い式に有効応力で表された破壊条件を代入し、主応力の回転角と間隙水圧を未知量として応力場の偏微分方程式をたて、特性曲線法により数値解を求めた。

今まで、特性曲線法では全応力でのみ議論されていた応力場における応力の変化を、間隙水圧を未知量にとったことにより、破壊時の間隙水圧分布を陽な形で求めることができるようになった。

Cam-Clayモデルでは、非排水条件の場合、全応力の増分がすべて間隙水圧の増分となるが、土の異方性を表現する関口と太田によるモデルを用いたことにより、有効応力が主応力の回転により変化するため、 K_0 の値によって間隙水圧や有効応力の分布が大きく違ってくるということが分かった。

謝辞：本研究を遂行するに当たり、神戸大学工学部の飯塚助教授にご指導と貴重なご意見を頂いたことを記し、ここに深甚の謝意を表します。

また、本研究は文部省平成10年度科学研究費補助金 (基盤研究(C), 課題番号: No. 10650480), 平成9年度科学研究費補助金 (基盤研究(C), 課題番号: No. 08650571) の補助を受けた。関係各位に謝意を表します。

付録

式(15)より、 $Q = 0$ の場合は考えないので、

$$\det B = -2\sqrt{(Q_\theta)^2 + (2Q)^2} \neq 0$$

よって、 B^{-1} が存在する。

参考文献

- 1) 山口 柏樹：第7章 土の塑性力学、土質力学 最上武雄編、技報堂、1969。
- 2) Bjerrum, L.: Embankments on soft ground, *Performance of Earth and Earth-Supported Structures, ASCE Specialty Conf.*, Vol.2, pp.1-54, 1972.
- 3) Bjerrum, L.: Problems of soil mechanics and construction on soft clays, *State-of-the-Art Report, Session 4, Proc. 8th ICSMFE, Moscow*, Vol.3, pp.109-159, 1973.
- 4) Ladd, C.C. and Foott, R.: New design procedure for stability of soft clays, *Proc. ASCE*, Vol.100, GT7, pp.763-786, 1974.
- 5) Sekiguchi, H. & Ohta, H.: Induced anisotropy and time dependency in clays, *Constitutive equations of soils, Proc. Specialty Session 9, 9th Int. Conf. Soil Mechanics & Foundation Engineering, Tokyo*, pp.229-238, 1977.
- 6) Duncan, J.M.: The role of advanced constitutive relations in practical applications, *States-of-the-Art Report, Session A, Proc. 13th ICSMFE*, Vol.5, pp.31-48, 1994.
- 7) Ohta, H., Nishihara, A. and Morita, Y.: Undrained stability of Ko-consolidated clays, *Proc. 11th Int. Conf. Soil Mech. & Foundation Engrg, San Francisco*, Vol.2, pp.613-616, 1985.
- 8) 柴田 徹：粘土のダイラタンシーについて、京都大学防災研究年報、第6号、pp.128-134, 1963.
- 9) 田村 武：4.3すべり線解析、粒状体の力学、(社)土質工学会、pp.244-250, 1993.
- 10) Zachmanoglou, E.C. and Thoe, D.W.: *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*, Dover, 1986.
- 11) 太田 秀樹：Analysis of deformations of soils based on theory of plasticity and its application to settlement of embankments, Dr. Eng. Thesis Kyoto Univ. 1971.
- 12) Schofield, A. N. and Wroth, C.P.: *Critical State Soil Mechanics*, McGraw-Hill, London, 1968.

(1998. 7. 13 受付)

THE THEORY OF CHARACTERISTIC-LINE FIELD FOR ANISOTROPICALLY CONSOLIDATED CLAY

Katsuji KATSUYAMA, Akira NISHIHARA and Hideki OHTA

This paper describes the stress field of characteristic-line method for anisotropically consolidated saturated clays under plane strain condition at failure state. The undrained shear strength under plane strain condition is obtained from the elasto-plastic constitutive model proposed by Sekiguchi & Ohta which can represent the stress induced anisotropy, and thus obtained shear strength in terms of effective stresses is employed in the theory of characteristic-line field as failure conditions. By solving the partial differential equations with the pore water pressure as an explicit variable, we obtain the distributions of total stress, effective stress and pore water pressure at the failure state.