

FDS を用いた開水路における流れの数値計算

大川秀典¹・清水康行²・森 明臣³

¹学生会員 北海道大学大学院工学研究科専攻(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

²正会員 工博 助教授 北海道大学工学部土木工学科(同上)

³正会員 工博 助手 北海道大学工学部土木工学科(同上)

衝撃波を含む計算法は、常射流混在流れ、ダム決壊、氾濫流などの河川学上非常に重要な現象に適用される。本研究では衝撃波を正確に計算する手法としてFDS法を開水路流れに適用することを試みる。FDS法は理論的にも計算アルゴリズム上においても明快であり取り扱いも易しい。したがって、多次元問題や、一般座標系への拡張も容易であり、より一般的な実河川の問題へ適用が可能と考えられる。本研究では、まず元々圧縮性流体を対象に構築されているFDS法の基礎式を開水路の2次元流れに対して適用可能なものへと再構築を行う。これを用いて計算モデルを開発し、1次元段波の理論と比較することによりモデルの検証を行う。次にこのモデルを常射流混在の条件で行われた固定床実験に適用しモデルの検証を行う。さらに、河床の一部が水面上に現れるような、非常に厳しい条件での実験の再現も試みることにする。

Key Words : shock capturing method, flux difference splitting, numerical flux, Roe's averaging, total variation diminishing, numerical flux limiter

1. はじめに

不連続を伴う流れの計算法は、常射流混在流れ、ダム決壊、氾濫流などの河川学上非常に重要な現象に適用される。特に、不連続な境界を有する河道や河道内構造物周辺の流れは、複雑かつ不連続となる場合が多く、このような条件における河道や構造物の設計に際しては、外力算定のためのより正確な計算法の開発が望まれている。

近年、開水路における衝撃波を正確に計算する手法としてMacCormack法や、これに計算の安定化のための人工粘性を附加した方法¹⁾などが頻繁に用いられるようになっている。さらに、より高精度の計算法として、MacCormack法の人工粘性にTVD(Total Variation Diminishing)の概念を導入したTVD MacCormack法の適用も試みられている^{2),3),4)}。MacCormack法自体は時間発展型の方程式を2次精度で計算するために開発されたものであるが、流体の本質的な特性である移流現象を高次精度で計算するためには、何らかの人工的な安定項を付け加える必要があり、その方法が必ずしも確立されているものではない。

これに対して、航空力学の分野等では圧縮性流れの計算法としてFDS法(Flux Difference Splitting scheme: 流束差分離法)⁵⁾が用いられている。FDS法は双曲型の方程式の本質的な特性である風上化という問題を、近似リーマン解法を用いて処理する方法である。このFDS法は理論的にも計算アルゴリズム上においても明快で

あり取り扱いも易しいため、多次元問題や、一般座標系への拡張も容易と考えられる。本研究においてはこのFDS法を2次元の開水路問題へ応用することを試みる。また、FDS法は、衝撃波の捕捉を目的に開発された手法であり、数値流束の概念を導入し、この数値流束の差を流れの特性の伝播方向に分割して配分を行う方法である。このため、流れの不連続部付近における数値振動を制御するための人工粘性等を経験的に導入する必要はなく、的確な数値粘性項により数値振動は解決される。

本論文では、まず元々圧縮性流体を対象に構築されているFDS法の基礎式を開水路の2次元流れに対して適用可能なものへと再構築を行なう。その際に将来の実河川への適用を考慮して、一般座標系を採用することとする。これを用いて計算モデルを開発し、1次元段波の理論と比較することによりモデルの検証を行う。次にこのモデルを跳水が存在する常射流混在の条件で行われた固定床実験に適用し2次元の流れにおけるモデルの検証を行なう。さらに、蛇行しながら水深が極端に変化し、局所的には砂州が水面上から露出するような厳しい条件における模型実験の条件にもモデルを適用し、その有効性を確かめる。

この結果、様々な条件においてモデルの有効性が確かめられ、河川工学における2次元流れの新しい高精度計算法が提案された。

2. 基礎式

2次元の連続式、浅水流式を保存型で表せば次式のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_a}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}_a}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_b}{\partial y} = \boldsymbol{\Omega} \quad (1)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_a = \begin{pmatrix} uh \\ u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \\ uvh \end{pmatrix}, \mathbf{F}_b = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{G}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \frac{\partial uh}{\partial x} \\ -\varepsilon \frac{\partial vh}{\partial x} \end{pmatrix}, \mathbf{G}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \frac{\partial uh}{\partial y} \\ -\varepsilon \frac{\partial vh}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{gn^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{gn^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで、 x および y は直交する座標軸であり、 u 、 v は x 、 y 方向の流速、 h は水深、 z_b は河床高、 n は Manning の粗度係数、 g は重力加速度、 ε は渦動粘性係数である。上記の (x, y) 座標における諸式を以下の関係を用いて一般座標系 (ξ, η) に変換する。いま x および y による 1 階偏微分は以下のように表せる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial_x}{\partial_y} \\ \frac{\partial_y}{\partial_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial_\xi}{\partial_\eta} \\ \frac{\partial_\eta}{\partial_\eta} \end{pmatrix} \quad (6)$$

ここで、 ξ_x は ξ の x による偏微分を意味する。 ξ_y 、 η_x 、 η_y も同様である。また、 $\frac{\partial_\xi}{\partial_\eta}$ 、 $\frac{\partial_\eta}{\partial_\eta}$ は ξ および η による偏微分演算子である。また、式(6)は以下の式(7)のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial_\xi}{\partial_\eta} \\ \frac{\partial_\eta}{\partial_\eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \eta_y & -\eta_x \\ -\xi_y & \xi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial_x}{\partial_y} \\ \frac{\partial_y}{\partial_y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

ここで、 J は座標変換による Jacobian,

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (8)$$

である。また、式(7)より以下の関係を得る。

$$\xi_\xi = \frac{\eta_y}{J}, \quad y_\xi = -\frac{\eta_x}{J}, \quad x_\eta = -\frac{\xi_y}{J}, \quad y_\eta = \frac{\xi_x}{J} \quad (9)$$

$$\xi_x = J y_\eta, \quad \xi_y = -J x_\eta, \quad \eta_x = -J y_\xi, \quad \eta_y = J x_\xi \quad (10)$$

したがって、(10)の関係を式(8)に用いることにより、

$$J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta} \quad (11)$$

と表される。これらの関係より式(1)は以下の式(12)ようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial F_a}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial F_a}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial F_b}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial F_b}{\partial \eta} \\ & + \xi_x \frac{\partial G_a}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial G_a}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial G_b}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial G_b}{\partial \eta} = \boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \quad (12)$$

また式(12)より、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} F_a + \frac{\xi_y}{J} F_b \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} F_a + \frac{\eta_y}{J} F_b \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} G_a + \frac{\xi_y}{J} G_b \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} G_a + \frac{\eta_y}{J} G_b \right) = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{J} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。これを書き換えると、

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_a}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_b}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_a}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}_b}{\partial \eta} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \quad (14)$$

ただし、式(14)中の記号 \tilde{Q} 、 \tilde{F}_a 、 \tilde{F}_b 、 \tilde{G}_a 、 \tilde{G}_b は以下に示す通りである。

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{J}, \quad \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{J},$$

$$\tilde{F}_a = \frac{\xi_x}{J} F_a + \frac{\xi_y}{J} F_b = m_x F_a + m_y F_b,$$

$$\tilde{F}_b = \frac{\eta_x}{J} F_a + \frac{\eta_y}{J} F_b = n_x F_a + n_y F_b, \quad (15)$$

$$\tilde{G}_a = \frac{\xi_x}{J} G_a + \frac{\xi_y}{J} G_b = m_x G_a + m_y G_b,$$

$$\tilde{G}_b = \frac{\eta_x}{J} G_a + \frac{\eta_y}{J} G_b = n_x G_a + n_y G_b$$

式(14)を局所的に線形化する。疑似線形形は以下の式(16)のようになる:

$$\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial \xi} + B \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_a}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}_b}{\partial \eta} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \quad (16)$$

ここに、 A および B は Jacobian 行列であり以下のようく表される。

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial \tilde{F}_a}{\partial Q} \\ &= \frac{\partial}{\partial Q} (m_x F_a + m_y F_b) \\ &= m_x \frac{\partial F_a}{\partial Q} + m_y \frac{\partial F_b}{\partial Q} \end{aligned} \quad (17)$$

$$B = \frac{\partial \bar{F}_b}{\partial Q}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial Q} (n_x F_a + n_y F_b) \\ &= n_x \frac{\partial F_a}{\partial Q} + n_y \frac{\partial F_b}{\partial Q} \end{aligned} \quad (18)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ -uU_m + m_x gh & U_m + m_x u & -V_m + m_x v \\ -vU_m + m_y gh & V_m + m_y u & U_m + m_y v \end{pmatrix}$$

ただし, $U_m = m_x u + m_y v$, $V_m = m_x v - m_y u$, $U_n = n_x u + n_y v$, $V_n = n_x v - n_y u$ である。

行列 A , B は 3 行 3 列であるから固有値を 3 個もつ。 A の固有値を λ_a^k , B の固有値を λ_b^k ($k = 1 \sim 3$) とすれば λ_a^k , λ_b^k の値は, $|A - \lambda_a^k I| = 0$, $|B - \lambda_b^k I| = 0$ (I は単位行列) より求まる。これを解くと以下のようにになる。

$$\lambda_a^1 = U_m, \lambda_a^2 = U_m + cM, \lambda_a^3 = U_m - cM \quad (19)$$

$$\lambda_b^1 = U_n, \lambda_b^2 = U_n + cN, \lambda_b^3 = U_n - cN \quad (20)$$

これらは各波 (流れの特性の伝播) の特性速度を表す。ここで $M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$, $N = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$, $c = \sqrt{gh}$ である。

3 個の固有値 λ^k を対角要素に持つ行列を固有値行列 D と定義すれば以下のようなになる。

$$\begin{aligned} D_a &= \begin{pmatrix} \lambda_a^1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_a^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_m & 0 & 0 \\ 0 & U_m + cM & 0 \\ 0 & 0 & U_m - cM \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} D_b &= \begin{pmatrix} \lambda_b^1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_b^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_n & 0 & 0 \\ 0 & U_n + cN & 0 \\ 0 & 0 & U_n - cN \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

次に、3 個の固有値に対する固有ベクトルを求める。 A , B の右固有ベクトルを l_a^k , l_b^k ($l^k = (l_1^k, l_2^k, l_3^k)$) とすれば, $l_a^k A = \lambda_a^k A$, $l_b^k B = \lambda_b^k B$ を満たすよう l_a^k , l_b^k を決めると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} l_a^1 &= (V_m, m_y, -m_x) \\ l_a^2 &= (\lambda_a^3, -m_x, -m_y) \\ l_a^3 &= (\lambda_a^2, -m_x, -m_y) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} l_b^1 &= (V_n, n_y, -n_x) \\ l_b^2 &= (\lambda_b^3, -n_x, -n_y) \\ l_b^3 &= (\lambda_b^2, -n_x, -n_y) \end{aligned} \quad (24)$$

(23), (24) より左固有ベクトルの行列, 左固有値行列 L_a , L_b は,

$$L_a = \begin{pmatrix} l_a^1 \\ l_a^2 \\ l_a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_m & m_y & -m_x \\ U_m - cM & -m_x & -m_y \\ U_m + cM & -m_x & -m_y \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$L_b = \begin{pmatrix} l_b^1 \\ l_b^2 \\ l_b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_n & n_y & -n_x \\ U_n - cN & -n_x & -n_y \\ U_n + cN & -n_x & -n_y \end{pmatrix} \quad (26)$$

また、右固有値行列 R_a , R_b は、左固有値行列 L と右固有値行列 R が直交関係にあることより $R = L^{-1}$ の関係より求める。

$$\begin{aligned} R_a &= L_a^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2cM} & \frac{1}{2cM} \\ \frac{m_y}{M^2} & \frac{-m_x \lambda_a^2 + m_y V_m}{2cM^3} & \frac{m_x \lambda_a^3 - m_y V_m}{2cM^3} \\ -\frac{m_x}{M^2} & \frac{-m_y \lambda_a^2 - m_x V_m}{2cM^3} & \frac{m_y \lambda_a^3 + m_x V_m}{2cM^3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} R_b &= L_b^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2cN} & \frac{1}{2cN} \\ \frac{n_y}{N^2} & \frac{-n_x \lambda_b^2 + n_y V_n}{2cN^3} & \frac{n_x \lambda_b^3 - n_y V_n}{2cN^3} \\ -\frac{n_x}{N^2} & \frac{-n_y \lambda_b^2 - n_x V_n}{2cN^3} & \frac{n_y \lambda_b^3 + n_x V_n}{2cN^3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

これら行列 D , L , R について、次のような関係がある。

$$L_a A R_a = D_a, \quad A = R_a D_a L_a \quad (29)$$

$$L_b B R_b = D_b, \quad B = R_b D_b L_b \quad (30)$$

また、式 (31) で定義される特性変量 W を導入する。

$$\partial W = L \partial Q \quad (31)$$

$\partial W = (\partial w^1, \partial w^2, \partial w^3)^T$ は特性速度 λ^k で ∂w^k がそれぞれ独立に伝播することを示す。従って、式 (16) 中の移流項, $A \frac{\partial Q}{\partial \xi}$, $B \frac{\partial Q}{\partial \eta}$ は以下のように書き換えられる。

$$A \frac{\partial Q}{\partial \xi} = R_a D_a L_a \frac{\partial Q}{\partial \xi} = R_a D_a \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (32)$$

$$B \frac{\partial Q}{\partial \eta} = R_b D_b L_b \frac{\partial Q}{\partial \eta} = R_b D_b \frac{\partial W_b}{\partial \eta} \quad (33)$$

(32), (33) より式 (16) は以下の式 (34) のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} + R_a D_a \frac{\partial W_a}{\partial \xi} + R_b D_b \frac{\partial W_b}{\partial \eta} \\ & + \frac{\partial \tilde{G}_a}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}_b}{\partial \eta} = \tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (34)$$

式 (34) は ∂W が特性速度 D で伝播することを示している. また, 行列 D の対角要素である固有値については, その正負が波の向きを表す. 波の方向の判断が可能となることにより, 風上差分を式 (34) に導入することができる.

3. 計算法

(1) 膨張衝撃波

FDS 法を用いると, 常流から射流へ遷移する箇所において膨張衝撃波と呼ばれる不連続な解を捕らえてしまう. このような不連続な解は, 実現象下においては現象をより滑らかにする作用が働いているために現れることはない. つまり, 膨張衝撃波は数学的には正しいが物理的には認められない解である. また, 膨張衝撃波により計算中に数値振動が起きてしまう. この除去方法はいくつか提案されており, 本論文においては以下に示すように特性速度の評価方法でこれを考慮することとする.

(2) 差分式

保存型で記述されている式 (14) を (ξ, η) 平面において離散化すれば式 (35) のようになる(簡単のため粘性項, ソース項は省く).

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{i,j}^{n+1} &= \bar{Q}_{i,j}^n - J \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left(\bar{F}_{a,i+1/2,j}^n - \bar{F}_{a,i-1/2,j}^n \right) \\ &- J \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left(\bar{F}_{b,i,j+1/2}^n - \bar{F}_{b,i,j-1/2}^n \right) \end{aligned} \quad (35)$$

ここで, \bar{Q} は従属変数ベクトルであり, \bar{F}_a , \bar{F}_b は流束ベクトル \mathbf{F}_a , \mathbf{F}_b の線形結合によって表される. J は (x, y) 座標系から (ξ, η) 座標系への変換による Jacobian であり, 式 (11) によって与えられる. また, ベクトルの上付き添字 n は時間ステップ, 下付添字 (i, j) は格子点の番号, $\Delta \xi$, $\Delta \eta$ は一般座標 (ξ, η) 上の格子間隔であり, Δt は計算上の時間刻み幅で次式の CFL 条件を満たすように決定しなければならない.

$$\Delta t < \left[\frac{\min \{ \Delta \xi, \Delta \eta \}}{c + \sqrt{u^2 + v^2}} \right] \quad (36)$$

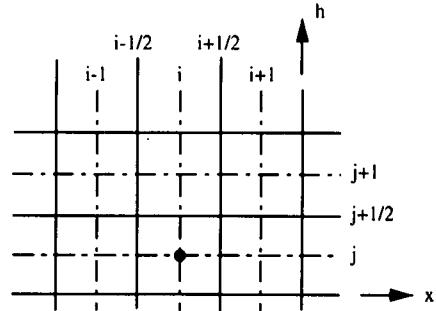


図-1 計算格子番号

式 (35) の時間ステップ n における, $\bar{F}_{a,i+1/2,j}$, $\bar{F}_{b,i,j+1/2}$ 等のコントロールボリュームの境界での一次精度の流束は以下の式 (37), (38) ように求める.

$$\begin{aligned} \bar{F}_{a,i+1/2,j} &= \frac{1}{2} (\bar{F}_{a,i,j} + \bar{F}_{a,i+1,j} \\ &- \delta F_{a,i+1/2,j}^+ + \delta F_{a,i+1/2,j}^-) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{b,i,j+1/2} &= \frac{1}{2} (\bar{F}_{b,i,j} + \bar{F}_{b,i,j+1} \\ &- \delta F_{b,i,j+1/2}^+ + \delta F_{b,i,j+1/2}^-) \end{aligned} \quad (38)$$

$\bar{F}_{a,i,j}$, $\bar{F}_{b,i,j}$ は (i, j) 点での流束であり式 (3), (15) より与えられる. $\delta F_{a,i+1/2,j}$, $\delta F_{a,i,j+1/2}$ はコントロールボリューム中心の流束と境界での流束との差を表す. 式 (16) で示したが, FDS 法では局所的に線形化, 實際問題としては各コントロールボリューム内において $A = const.$, $B = const.$ として線形化を行った. そのため, 以下の式 (39), (40) ように $\delta F_{a,i+1/2,j}$, $\delta F_{a,i,j+1/2}$ を書き換えることができる.

$$\begin{aligned} \delta F_{a,i+1/2,j}^+ &= R_{i+1/2,j} D_{i+1/2,j}^+ \delta W_{a,i+1/2,j} \\ \delta F_{a,i+1/2,j}^- &= R_{i+1/2,j} D_{i+1/2,j}^- \delta W_{a,i+1/2,j} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \delta F_{b,i,j+1/2}^+ &= R_{i,j+1/2} D_{i,j+1/2}^+ \delta W_{b,i,j+1/2} \\ \delta F_{b,i,j+1/2}^- &= R_{i,j+1/2} D_{i,j+1/2}^- \delta W_{b,i,j+1/2} \end{aligned} \quad (40)$$

ただし, 固有値行列 D の上付き添え字 $+$, $-$ は波の伝達方向(固有値の正負)を考慮して風上差分を導入していることを意味している. また, $\delta W_{a,i+1/2,j}$, $\delta W_{b,i,j+1/2}$ は以下の通りである.

$$\delta W_{a,i+1/2,j} = L_a \delta Q_{i+1/2,j} = L_a (Q_{i+1,j} - Q_{i,j}) \quad (41)$$

$$\delta W_{b,i,j+1/2} = L_b \delta Q_{i,j+1/2} = L_b (Q_{i,j+1} - Q_{i,j}) \quad (42)$$

式 (39), 式 (40)において計算点のコントロールボリュームの境界 $i+1/2$, $j+1/2$ での行列 R , D , L が必要となる. この行列を構成する要素について, 境界における $u_{i+1/2}, v_{i+1/2}, c_{i+1/2}$ および $u_{j+1/2}, v_{j+1/2}, c_{j+1/2}$ は左

右のデータを均等に用いる代数平均 ($u_{i+1/2} = (u_{i+1} + u_i)/2$ 等) で求めると、式(14)と式(16)は等価とならない。この問題を解決するために Roe は、線形のパラメータベクトルを用いて定義した値を提案している⁶⁾。以下の式(43), (44)は Roe の線形化により、Glaister が導いたものである⁷⁾。

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,j} &= \frac{\sqrt{h_{i,j}}u_{i,j} + \sqrt{h_{i+1,j}}u_{i+1,j}}{\sqrt{h_{i,j}} + \sqrt{h_{i+1,j}}} \\ v_{i+1/2,j} &= \frac{\sqrt{h_{i,j}}v_{i,j} + \sqrt{h_{i+1,j}}v_{i+1,j}}{\sqrt{h_{i,j}} + \sqrt{h_{i+1,j}}} \quad (43) \\ c_{i+1/2,j} &= \sqrt{g \frac{h_{i,j} + h_{i+1,j}}{2}} \\ u_{i,j+1/2} &= \frac{\sqrt{h_{i,j}}u_{i,j} + \sqrt{h_{i,j+1}}u_{i,j+1}}{\sqrt{h_{i,j}} + \sqrt{h_{i,j+1}}} \\ v_{i,j+1/2} &= \frac{\sqrt{h_{i,j}}v_{i,j} + \sqrt{h_{i,j+1}}v_{i,j+1}}{\sqrt{h_{i,j}} + \sqrt{h_{i,j+1}}} \quad (44) \end{aligned}$$

式(43), (44)を考慮することによって局所的に式(14), 式(16)を等価と置くことができる。また、パラメータベクトルの選択には自由度があるため式(43), (44)以外の形もあるが、西本ら⁸⁾によればパラメータベクトルの選択の違いによる計算への影響は見られないと報告されている。

次に、風上差分を導入するために以下のような定義をする。

$$\lambda_{i+1/2,j}^{k+} = \frac{1}{2} (\lambda_{i+1/2,j}^k + |\lambda_{i+1/2,j}^k|) \quad (45)$$

$$\lambda_{i+1/2,j}^{k-} = \frac{1}{2} (\lambda_{i+1/2,j}^k - |\lambda_{i+1/2,j}^k|)$$

$$\lambda_{i,j+1/2}^{k+} = \frac{1}{2} (\lambda_{i,j+1/2}^k + |\lambda_{i,j+1/2}^k|) \quad (46)$$

$$\lambda_{i,j+1/2}^{k-} = \frac{1}{2} (\lambda_{i,j+1/2}^k - |\lambda_{i,j+1/2}^k|)$$

上式(45), (46)は(39), (40)式中の固有値行列 D^+ , D^- の対角要素であり、上付き添え字 k は固有値の番号 (1 ~ 3) である。ただし上流点で常流、下流点で射流となるような条件下では膨張衝撃波が生じてしまう。この非現実的な現象を除去するために何らかの工夫が必要となるが、本論文では Chakravarthy, Sawada らの結果⁹⁾を参考にする。これは以下の通りである。 $\lambda_{i,j}^k < 0$

および $\lambda_{i+1,j}^k > 0$ が同時に起こる条件下では、式(45)は下式(47)に従う。

$$\begin{aligned} \lambda_{i+1/2,j}^{k+} &= \frac{1}{2} (\lambda_{i+1/2,j}^k + |\lambda_{i+1/2,j}^k|) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\lambda_{i+1,j}^k - \lambda_{i,j}^k) \\ \lambda_{i+1/2,j}^{k-} &= \frac{1}{2} (\lambda_{i+1/2,j}^k - |\lambda_{i+1/2,j}^k|) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\lambda_{i+1,j}^k - \lambda_{i,j}^k) \end{aligned} \quad (47)$$

また、 $\lambda_{i,j}^k < 0$ および $\lambda_{i,j+1}^k > 0$ が同時に起こる条件下では、式(46)は下式(48)に従う。

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j+1/2}^{k+} &= \frac{1}{2} (\lambda_{i,j+1/2}^k + |\lambda_{i,j+1/2}^k|) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\lambda_{i,j+1}^k - \lambda_{i,j}^k) \\ \lambda_{i,j+1/2}^{k-} &= \frac{1}{2} (\lambda_{i,j+1/2}^k - |\lambda_{i,j+1/2}^k|) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\lambda_{i,j+1}^k - \lambda_{i,j}^k) \end{aligned} \quad (48)$$

以上を考慮し、式(37), (38)で示した流束を求め、式(35)より計算を行う。

その他の項については通常の差分法に従う。粘性項はコントロールボリュームの境界での粘性流束を求め、中央差分を行う。ソース項の河床勾配についても中央差分を適用させる。これらの項を考慮すれば式(35)は下式(49)のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{i,j}^{n+1} &= \tilde{Q}_{i,j}^n \\ &\quad - J \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\tilde{F}_{a,i+1/2,j}^n - \tilde{F}_{a,i-1/2,j}^n) \\ &\quad - J \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\tilde{F}_{b,i,j+1/2}^n - \tilde{F}_{b,i,j-1/2}^n) \\ &\quad - J \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\tilde{G}_{a,i+1/2,j}^n - \tilde{G}_{a,i-1/2,j}^n) \\ &\quad - J \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\tilde{G}_{b,i,j+1/2}^n - \tilde{G}_{b,i,j-1/2}^n) \\ &\quad + \Delta t \Omega_{i,j}^n \end{aligned} \quad (49)$$

(3) 2次精度の補正項

先に説明した流束は1次精度の流束であり、2次精度にするためには、補正項を付加する必要がある。その付加項は流れの不連続部の前後においても非現実的な数

値振動を起こさないものでなければならない。そのために、minmod オペレーターと呼ばれる数値流束制限関数を導入する。いま以下のような定義をする。

$$\sigma^{k+} = \delta^{k+} \partial W^k, \quad \sigma^{k-} = \delta^{k-} \partial W^k \quad (50)$$

ここで右辺の上添え字 k は固有値の番号であり、 δW^k は以下の式 (51) に対応する。

$$\delta W^k = l^k Q \quad (51)$$

l^k については (23), (24) に示した通りである。これらより以下の計算を行う。

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{i+3/2,j}^{k-} &= \text{minmod}\{\sigma_{i+3/2,j}^{k-}, \beta\sigma_{i+1/2,j}^{k-}\} \\ \tilde{\sigma}_{i+1/2,j}^{k-} &= \text{minmod}\{\sigma_{i+1/2,j}^{k-}, \beta\sigma_{i+3/2,j}^{k-}\} \\ \tilde{\sigma}_{i+1/2,j}^{k+} &= \text{minmod}\{\sigma_{i+1/2,j}^{k+}, \beta\sigma_{i-1/2,j}^{k+}\} \\ \tilde{\sigma}_{i-1/2,j}^{k+} &= \text{minmod}\{\sigma_{i-1/2,j}^{k+}, \beta\sigma_{i+1/2,j}^{k+}\} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{i,j+3/2}^{k-} &= \text{minmod}\{\sigma_{i,j+3/2}^{k-}, \beta\sigma_{i,j+1/2}^{k-}\} \\ \tilde{\sigma}_{i,j+1/2}^{k-} &= \text{minmod}\{\sigma_{i,j+1/2}^{k-}, \beta\sigma_{i,j+3/2}^{k-}\} \\ \tilde{\sigma}_{i,j+1/2}^{k+} &= \text{minmod}\{\sigma_{i,j+1/2}^{k+}, \beta\sigma_{i,j-1/2}^{k+}\} \\ \tilde{\sigma}_{i,j-1/2}^{k+} &= \text{minmod}\{\sigma_{i,j-1/2}^{k+}, \beta\sigma_{i,j+1/2}^{k+}\} \end{aligned} \quad (53)$$

ここで、 $\sigma = \text{minmod}\{a, b\}$ は、 $ab < 0$ なら $\sigma = 0$ 、 $ab > 0$ なら $\sigma = \min(|a|, |b|)$ を意味する。 β は圧縮性因子と呼ばれ、以下の不等式 (54) を満たすものでなければならぬ¹⁰⁾。

$$1 < \beta \leq \frac{3-\phi}{1-\phi} \quad (54)$$

不等式 (54) 中の ϕ に関しては特別な制約はないが、 β は ϕ によって決まる最大許容値を使用するのが普通とされている。次に以下の制限値を定義する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i+3/2,j}^{kn-} &= \sum_{k=1}^3 \tilde{\sigma}_{i+3/2,j}^{k-} r_{i+3/2,j}^{kn} \\ \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i+1/2,j}^{kn-} &= \sum_{k=1}^3 \tilde{\sigma}_{i+1/2,j}^{k-} r_{i+1/2,j}^{kn} \\ \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i+1/2,j}^{kn+} &= \sum_{k=1}^3 \tilde{\sigma}_{i+1/2,j}^{k+} r_{i+1/2,j}^{kn} \\ \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i-1/2,j}^{kn+} &= \sum_{k=1}^3 \tilde{\sigma}_{i-1/2,j}^{k+} r_{i-1/2,j}^{kn} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i,j+3/2}^{kn-} &= \sum_{k=1}^3 \tilde{\sigma}_{i,j+3/2}^{k-} r_{i,j+3/2}^{kn} \\ \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i,j+1/2}^{kn-} &= \sum_{k=1}^3 \tilde{\sigma}_{i,j+1/2}^{k-} r_{i,j+1/2}^{kn} \\ \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i,j+1/2}^{kn+} &= \sum_{k=1}^3 \tilde{\sigma}_{i,j+1/2}^{k+} r_{i,j+1/2}^{kn} \\ \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i,j-1/2}^{kn+} &= \sum_{k=1}^3 \tilde{\sigma}_{i,j-1/2}^{k+} r_{i,j-1/2}^{kn} \end{aligned} \quad (56)$$

ここで r^{kn} は左固有値行列 R の要素で、 k は列番号、 n は行番号を示しており、(55), (56) は流束の跳びの量に対する制限値を意味する。

式 (39), (40) に示したコントロールボリューム境界での 1 次精度の流束に 2 次精度の補正項を加えた流束を下式 (57), (58) に示す。

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{a,i+1/2,j} &= \frac{1}{2}(\tilde{F}_{a,i,j} + \tilde{F}_{a,i+1,j} \\ &\quad - \delta F_{a,i+1/2,j}^{n+} + \delta F_{a,i+1/2,j}^{n-}) \\ &\quad - \frac{1-\phi}{4} \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i+3/2,j}^{kn-} - \frac{1+\phi}{4} \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i+1/2,j}^{kn-} \\ &\quad + \frac{1+\phi}{4} \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i+1/2,j}^{kn+} + \frac{1+\phi}{4} \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i-1/2,j}^{kn-} \\ \tilde{F}_{b,i,j+1/2} &= \frac{1}{2}(\tilde{F}_{b,i,j} + \tilde{F}_{b,i,j+1} \\ &\quad - \delta F_{b,i,j+1/2}^{n+} + \delta F_{b,i,j+1/2}^{n-}) \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} &\quad - \frac{1-\phi}{4} \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i,j+3/2}^{kn-} - \frac{1+\phi}{4} \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i,j+1/2}^{kn-} \\ &\quad + \frac{1+\phi}{4} \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i,j+1/2}^{kn+} + \frac{1+\phi}{4} \sum_{k=1}^3 \tilde{df}_{i,j-1/2}^{kn-} \end{aligned} \quad (58)$$

制限関数の導入により、不連続面では界面における跳びの量が 1 次精度で計算され、精度を鈍らせることによって数値振動を抑制することができるとされている。

4. 不連続部を含む流れの数値計算

FDS 法は衝撃波の捕獲を目的に開発された手法であり、先に 2 次元開水路流れに対応できるよう再構築したモデルは、跳水、段波が発生する流れに容易に適用することができる。従来より用いられ、一定以上の成果を上げている MacCormack 法では跳水、段波といった流れの不連続部において、その前後の数値振動を粘性を付加することにより回避している。このため、粘性の与え方によっては解の変化が起きてしまう。これに対し FDS 法では、より正確に流れの情報の伝播方向を得て風上差分を適用させているために、十分に数値振動が数値粘性により排除される。また、この数値粘性は δW_a に作用し、その大きさは風上差分が自動的に決定する。したがって、FDS による数値粘性は、各波に対して数値粘性を与えるので、中心差分とともに利用される陽的な数値粘性に比べ小さくとどめることができる。解の変化

表-1 計算条件(1次元問題)

格子間隔 $dx, dy(m)$	初期水位(m)		粗度係数 n (m-s)	渦動粘性係数 ϵ (m^2/s)
	上流部	下流部		
0.5	0.8	0.05	0.0	0.0

表-2 理論値と計算値の比較(1次元問題)

	段波の伝播速度 (m/s)	段波部分の流速 (m/s)	段波部分の水深 (m)
一次精度	2.90	2.35	0.268
二次精度	2.90	2.35	0.268
理論値	2.90	2.36	0.268

引き起こす可能性のある数値粘性を抑えることができるためにより高い精度の結果が期待できるのである。そこで本章では、このFDS法をTVD化したスキームを行い、Dam-Breakの計算を行う。また、著者らが以前に行った一次精度のFDS法による計算結果¹¹⁾および理論値¹²⁾との比較により、計算精度について考察する。

(1) 一次元方向のみ変化が現れるDam-Break計算

特性帶の理論を用いているFDS法は一次元空間問題において大変優れた効果が期待できる。そこで一次元方向のみ水面形の変化があらわれる条件下のDam-Break計算を行う。計算の平面格子は直交格子とし、横断方向100m、縦断方向100mの仮想水路をそれぞれ0.2m間隔で分割する。境界条件は上下流端で流束の空間的な変化はなしとし、左右側岸については水路外側に仮想格子を加え、水路内側の最も側岸よりの格子上の流速と正負逆の値を与えることとする。これにより、計算スキームにおいて式(43), (44)で示したRoeの線形化により、側岸上の流速はなくなる。また、理論値を導き、比較することによりスキームの計算精度を確認するため、河床の粗度は与えず、粘性項も働くないようにしている。なお、計算においては全ての計算点でCFL数が0.9を越えないような Δt を用いている。

計算結果を図-2に、また、同条件において理論式¹²⁾より導いた段波の伝播速度等の理論値との比較を表-2に示す。理論値と計算値に違いは見られず、段波を正確に捕らえていることが分かる。表-2には比較のために二次精度の補正項を加えない一次精度の計算法による結果も示したが、この表に示した有効数字の範囲ではその差は無い。この場合、敢えて二次精度の計算を行わなくても一次精度でも十分に段波を表現可能であることがわかる。

(2) 2次元方向に変化が現れるDam-Break計算

横断方向の変化が現れるような条件下で計算を行う。計算条件は図-3(a)のように、 (x, y) 座標にそって分割

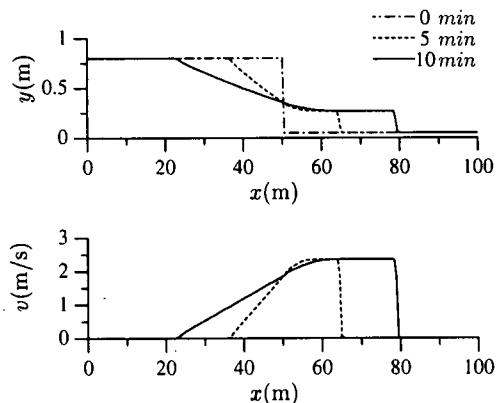


図-2 計算結果(上:水位、下:流速)

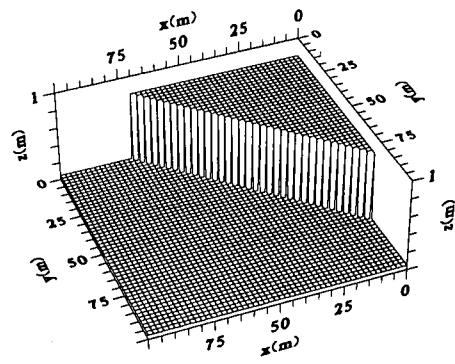


図-3 初期水面

表-3 理論値と計算値の比較(CFL数0.9)

	段波の伝播速度 (m/s)	段波部分の流速 (m/s)	段波部分の水深 (m)
一次精度	2.97	2.11	0.240
二次精度	2.90	2.35	0.261
理論値	2.90	2.36	0.268

表-4 理論値と計算値の比較(CFL数0.2)

	段波の伝播速度 (m/s)	段波部分の流速 (m/s)	段波部分の水深 (m)
一次精度	2.90	2.34	0.268
二次精度	2.90	2.36	0.268
理論値	2.90	2.36	0.268

を行った計算格子に対し、斜めに横切る段波が発生するように初期水位を与え、他の諸条件は先の1次元方向のみ変化が現れる計算と同様である。

10秒後の水面形の計算結果を図-4, 5に、理論値との比較を表-3, 4に示す。表-3, 4を表-2と比較すると、僅かではあるが計算精度の低下が見られる(一次精度と二次精度の違いは表-2同様ほとんど無い)。理由として、この計算モデルは1次元のFDS法を2次元に拡張したものであり、1次元的な考え方をそれぞれ各方向に適用したものである。そのため、この方法では1次元

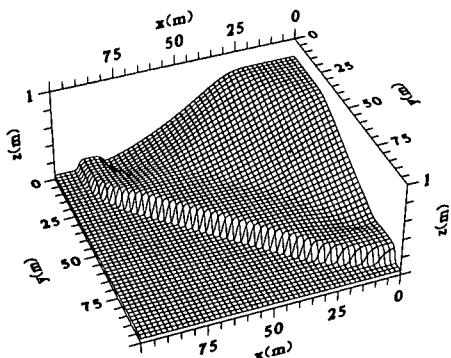


図-4 計算 10 秒後の水面形 (1 次精度, CFL 数 0.2)

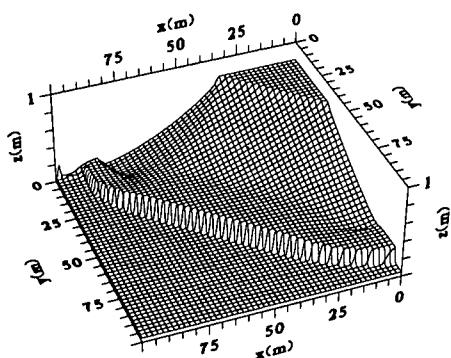


図-5 計算 10 秒後の水面形 (2 次精度, CFL 数 0.2)

から多次元への拡張は容易であるが、計算格子に対し段波、跳水などの不連続な流れが垂直方向に存在する場合と比較して、横切るような形で存在する場合では必ずしも同精度の結果が得られるとは限らないためである。また、時間ステップ Δt の取り方により一次精度および二次精度での計算結果に違いがあらわれた。表-3、4 に示すように、CFL 数を大きくとった場合 (CFL 数が最大点で 0.9 以下となるように Δt を決定)、一次精度では、二次精度と比較して、段波フロント部付近で大きく数値振動が発生し、計算精度の低下が見られた。CFL 数 (CFL 数が最大点で 0.2) を小さくとった場合では、高周波成分減衰の違いを除けば、両者に差異はあらわれなかつた。

5. 跳水が現れる流れの数値計算

通常、不連続部を含む流れを精度よく解くことは難しく、特に、跳水が存在する流れでは計算精度を議論する以前に計算の安定した継続さえ難しい場合も多い。本章においては跳水が存在するような流れに計算モデルを適用し、その考察、検討を行なお、計算には二次精度のスキームを用い CFL 数が最大点で 0.9 以下となるように Δt を決定している。

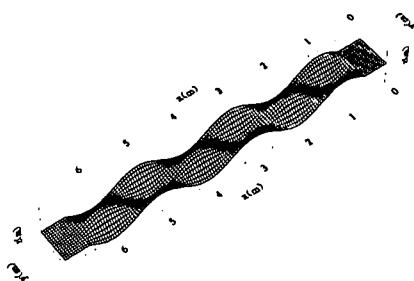


図-6 実験水路河床形状概略図 (3 波長 6m 分)

表-5 実験条件 (跳水)

実験ケース	Run1	Run2
流量 (l/s)	4.51	1.47
河床勾配	1/300	1/300
平均水深 (cm)	2.02	1.09
平均流速 (cm/s)	27.91	16.86
平均フルード数	0.63	0.52

表-6 計算条件 (跳水)

格子間隔 dz, dy (cm)	粗度係数 n (m-s)	渦動粘性係数 ϵ (m^2/s)
5.0	0.01	0.0001

(1) 実験について

実験は花田¹³⁾による複列砂州に関する実験を用いる。実験は全長 15m、幅 0.8m、勾配 1/300 の水路中央部に図-6 に示される複列砂州を模擬した河床形状を水路縦断方向に 3 波長 (6m) 分配配置して行われている。ここで河床形状については式 (59) で定義する。

$$\Delta z_b = -1.5 \cos\left(\frac{2\pi}{200}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{80}y\right) \quad (59)$$

ここで、 Δz_b (cm) は河床高の変化分であり、 x (cm) は水路上流端から 450cm 下流を原点とした縦断下流方向への距離、 y (cm) は側壁からの距離である。

河床には珪砂が用いられ、表面をセメントで固めて、固定床としている。計算との比較を行った実験ケースは河床全体が水面下となる Run1 と河床の一部が水面上に出る Run2 とし、それぞれの実験の平均水理量を表-5 に示す。

(2) 薄層流を考慮した粗度補正

本実験のように粗度が小さく、砂州上の水深が非常に浅い状態においては式 (5) における摩擦項の評価では実情に合わない。具体的には、水深が非常に浅くなった場合、摩擦抵抗も薄層流としての取り扱いが当然必要となる。ただ、本研究の主眼は薄層流の研究ではないので式 (59) に示すように便宜的に水深の非常に浅い地点 ($h < h_r$, h_r は粗度が変化すると仮定した水深、ここで

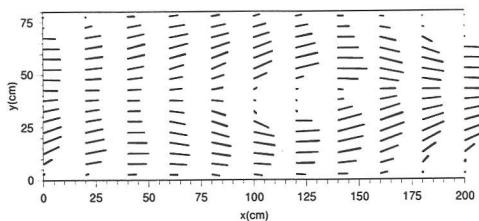


図-7 流速ベクトル比較図（左：計算結果、右：実測結果）

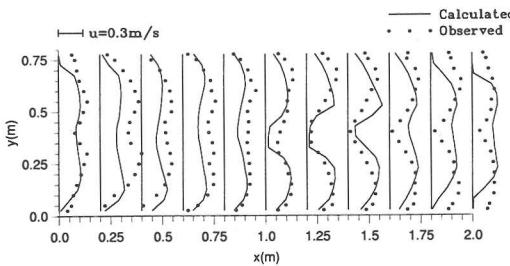
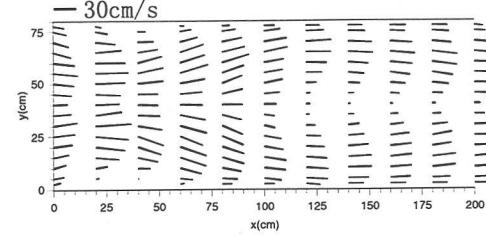


図-8 流速比較図（左：縦断方向、右：横断方向）

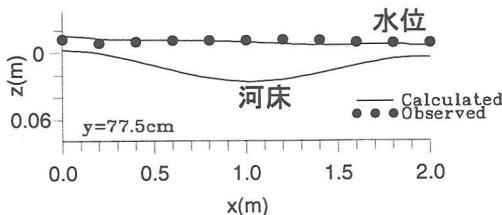
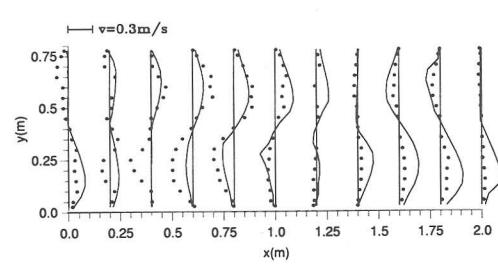


図-9 水位比較図（左：左岸縦断方向、右：中央縦断方向、図中下線は河床を示す）

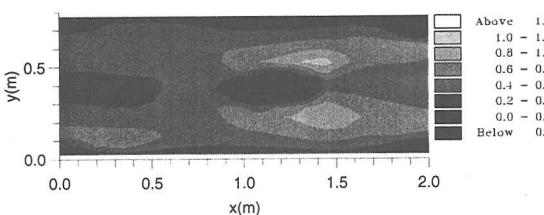
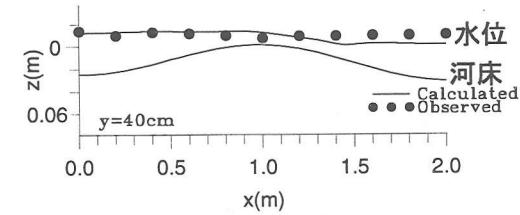


図-10 フルード数比較図（左：計算結果、右：実測結果）

は h_r を平均水深の 10%とした)で Manning の粗度係数を直線的に上げることとした。

$$n = (h_r - h_{min}) \times \alpha + n_0 \quad (60)$$

ここで、 h_{min} は計算中での最小水深 ($=0.1\text{mm}$)、 n_0 は $h > h_r$ での粗度係数 ($=0.01$)、 $\alpha (=100)$ は係数であり、計算結果が観測結果と最も等しくなるように決めた。

(3) Run1 の流況再現計算

実験 Run1 の特徴は、平均水理量では常流であるが、河床凸部では弱い射流となっていることである。射流から常流に遷移していく地点、すなわち図-7 等の $x=50(\text{cm})$ 近辺の両側壁から $x=120(\text{cm})$ 近辺の水路中央部分では

弱い跳水が起こっていると実験で報告されている。また、2 次流の存在も確認されている。計算では計算格子を直交座標に重なるように取り、5cm 間隔で分割し、表-6 の条件で数値計算を行う。結果を図-7～図-10 に示す。図に示した部分は図-6 に示す水路中の加工部 1 波長 (2m) であり。図中の中央部およびその四隅が河床凸部になっている。図-8 の流速比較図については実験の特徴を捕らえた計算結果が得られた。また、図-9 に示した水位の比較についても河床凸部近辺を除けば十分な精度の結果が得られた。図-7 の流速ベクトルの比較、図-10 のフルード数の分布比較を示す。水路実験では水路中央の河床凸部前で跳水が起り、流れが 2 つに別れて約 1m ほど下流で合流するような形となっている。

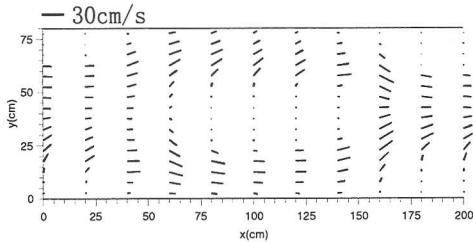


図-11 流速ベクトル比較図（左：計算結果、右：実測結果）

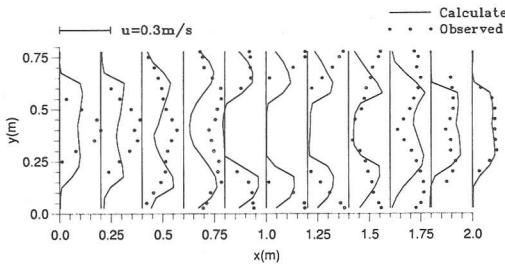


図-12 流速比較図（左：縦断方向、右：横断方向）

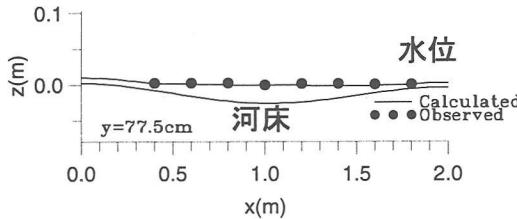


図-13 水位比較図（左：左岸縦断方向、右：中央縦断方向、図中下線は河床を示す）

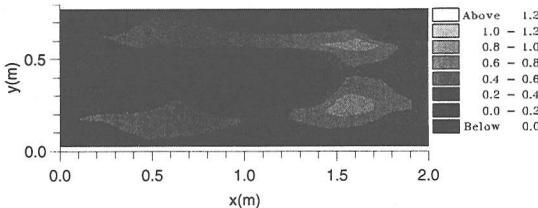
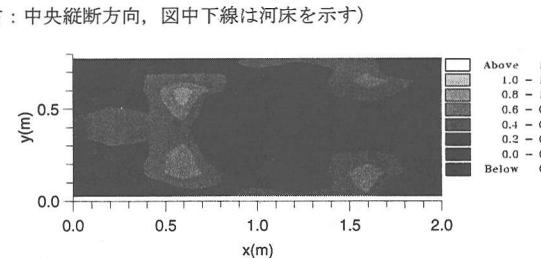
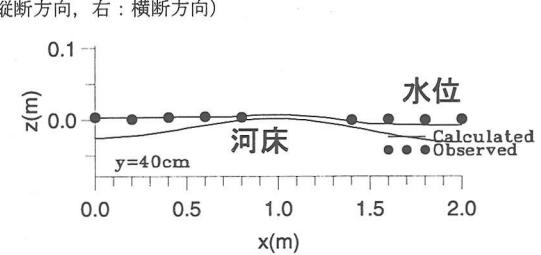
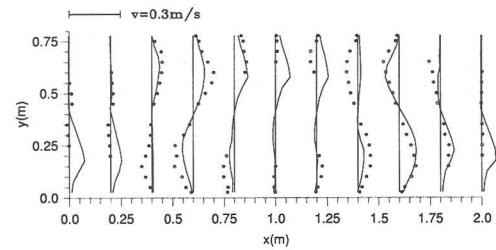
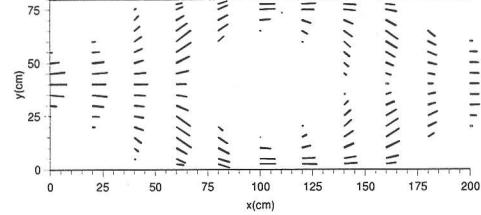


図-14 フルード数比較図（左：計算結果、右：実測結果）

計算では実測以上に流れが別れるような結果となっている。これは、先に示した摩擦項の評価および跳水の影響を完全に捕らえることができなかったためであると考えられる。

(4) Run2 の流況再現計算

Run2 は Run1 の流量をおよそ $1/3$ に減らして行った実験であり、図-11 に示すように河床の凸部先端は水面上に現れている。また、実験での流速測定は水深 1.5cm 以上の地点だけで行ったため、一部データの無い地点があり、そのような部分は流速、水深等のデータは無としている。このため、図-11 等の実験結果の図は実際の実験より多少広範囲の部分が水面上に現れているよう



な表現となっている。数値計算では水深を厳密に 0 とはできないため、前もって最小の水深 h_{min} ($=1\text{mm}$) を決め、計算中に水深が h_{min} 以下となれば、水深は h_{min} とし、流速は流下方向および横断方向共に 0 と置き換えることとした。数値計算結果は図-11 および図-12 に示すように河床凸部中央では流下方向の流速は無く、流速、水深もほとんどゼロとなっている。図-13 の水位の計算結果も良好である。しかしながら、図-14 のフルード数の分布結果は完全に実験結果を再現するには至っていない。これは、実験ケース Run1 と同様に摩擦項、跳水の影響のためである。

このような水路床の一部が水面上に低く現れる場合の計算を安定に行うことが可能である。

表-7 実験条件(蛇行)

流量 Q (l/s)	1.5
初期水路勾配 I	1/161
初期水路最大蛇行角 θ (deg)	28.662
初期水路蛇行長 L (m)	4.71

表-8 計算条件(蛇行)

粗度係数 n (m-s)	0.005
渦動粘性係数 ϵ (m ² /s)	0.0001

6. 一般座標系による数値計算

本計算モデルは一般座標系を採用しており、平面的に幾何形状が複雑であったり急激な変化を伴う流れにも適用できる。そこで、自由蛇行の模型実験^{14),15)}を用い、河岸侵食の進んだ状況下での流況計算を行う。

(1) 実験および計算条件

実験装置は長さ 25m、幅 3m の可傾斜架台を用い、架台上に概ね 17cm 厚で砂を敷き詰めた。河床砂は珪砂 3 号、珪砂 5 号および珪砂特 8 号からなる混合砂を用いている(平均粒径 0.9mm)。混合砂の配合比は北海道の一級河川の河床材料調査による単列交互砂州河道の粒度分布を参考にしている¹⁵⁾。この架台上に初期水路を作成し、通水を行った。初期水路平面形状については、実際の蛇行河川を近似的に再現できる Sine-generated Curve を用い、水路の最大蛇行角、蛇行波長、流量等は、北海道開発局土木研究所で行われた一連の固定壁蛇行水路実験¹⁶⁾の中から、交互砂州が発達し停止するような実験を参考にし、この実験の条件を今回の実験に用いることとした。また、観測地点を水路下流とすることにより、水路上流側の側岸侵食による給砂で十分であると思われた。そのため流砂の循環、給砂等は行っていない。本実験では合計通水時間を、前もって行った予備実験より 360 分間とし、通水中に水位、流速測定を行い、通水終了時ごとに、水路平面形状の写真撮影および観測区間の河床形状測定を行った。

計算には通水時間 360 分の河床形状を用い、計算範囲は実験中に河床測定を行った実験水路上流より 11.193m 地点から 20.613m 地点までとする。これは実験水路初期平面形状の 2 波長であり、今回は固定床として扱う。計算に用いるメッシュは図-15 のようにし、流下方向 51 分割、横断方向 15 分割である。境界条件は計算格子上下端で流束の空間的な変化は無とし、左右岸については水路外側に仮想格子を加え、水路内側のもつとも側岸よりの格子上の流速と正負逆の値を与える。また、CFL 数が最大点で 0.9 以下となるように Δt を決定する。ここで、計算に用いた粗度係数は河床材料の粒径と比較すると若干小さめではあるが、水面形状を最も良く再現するために下表に示す値を採用した。

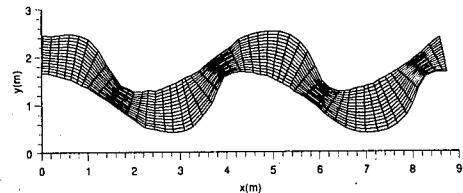


図-15 計算格子図(2 波長)

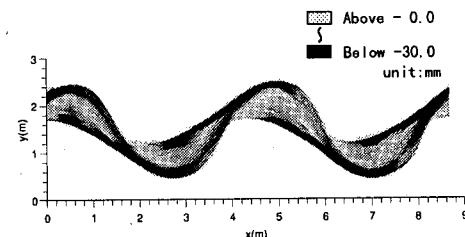


図-16 河床形状図(通水 360 分時)

(2) 計算結果

図-16 および図-17 は蛇行実験・通水時間 360 分時ににおける測定区間の河床形状図および実測の流速ベクトル図である。河岸の侵食、流砂の堆積等により蛇行が発達し、蛇行内岸側付近の砂州上の水深は浅い所で数 mm 以下となっており、このような地点ではほぼ流速は無くなっている。実験での流速の測定方法は直径 4mm 程の発泡スチロール製の玉を水面上に流し、これを水路上部より写真撮影を行って流速を求めた。その結果、図-17 の流速ベクトルの値は 20 ~ 30% の誤差を含んでいる。図-18 は同条件下における流況計算結果である。前章で述べた粗度の補正を行うことにより実験結果と同様に蛇行内岸側の流速は小さく、外岸側が主流となっており、蛇行部の外岸から次の蛇行部の外岸へ向かう流れが再現できている。図-19 は水路中央部の水位を縦断方向に沿って示したものである。実測の水位と比較して、水深の深い地点では完全には一致していないが全体として十分な精度の計算結果が得られている。

このような小規模水路での砂州が発達した条件下での流況再現計算を安定して行うことができた。

7. おわりに

本研究においては、航空流体力学の分野で衝撃波捕獲法の一つとして多用されている、FDS 法、およびより高精度である TVD スキームを開水路の 2 次元流れへと適用すべく、数値計算モデルの開発を行った。モデル

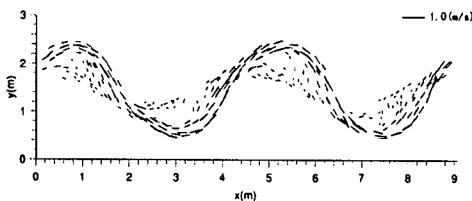


図-17 流速ベクトル図（実測値、通水 360 分時）

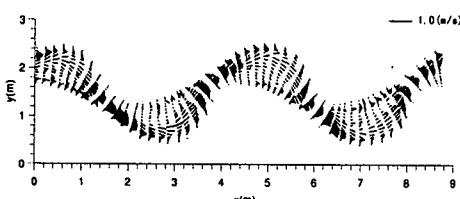


図-18 流速ベクトル図（計算値、通水 360 分時）

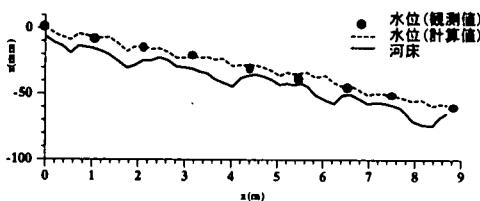


図-19 水位比較図（水路中央部、縦断方向）

には実河川問題等への適応を考慮して一般座標系を採用した。計算モデルの検証は、理論値の明らかな条件での Dam-Break の計算および跳水を含む常射流混在流れの状態における固定床の模型実験を用いて行われた。Dam-Break の計算では一方向、つまり計算格子上に段波等が発生する条件では各格子上の CFL 数に関わらず一次精度のスキームを用いても十分な結果が得られた。計算格子に対し段波等が横切る条件では CFL 数の制限の与えかたによって計算結果に影響が表れ、特に一次精度では顕著に精度の低下が見られた。実際問題においては計算対象により、的確な精度のスキームを選択することによって、さらに効率的な計算が行えるだろう。自由蛇行の模型実験では、発達した砂州上の水深の浅いような計算を行うに際し、非常に困難な部分をおいても、容易に計算を進める事ができた。また、保存則を満たし、個々の波の特性方向に応じた風上化を導入する FDS では、TVD 化を行わずとも多様な流れに対応できることも示された。今後は、流砂の連続式を加え、河床変動計算モデルへの拡張を行う予定である。

本研究を推進するにあたり、北海道大学工学部土木工学科、長谷川和義先生には水路実験等の貴重な資料をご提供して頂いた。ここに記して深謝します。

参考文献

- 1) 例えば、山下恭正、清水康行、荒井信行、三谷紀一：1 次元保存則差分法による常射流混在流れの計算法、2 次元数値計算法による都市域急流河川の安全度評価システムの開発、平成 7 年度科学研究費補助金 [試験研究 (B)(1)] 報告書、研究代表者 板倉忠興, pp.121-126, 1996.
- 2) 岡部健士、山下秀基、天野裕仁：常射流が混在する 2 次元浅水流の数値計算法、第 39 回水工学論文集, pp.403-408, 1995.
- 3) 河村三郎、中谷剛：TVD-MacCORMACK 法による常射流混在流れの数値計算法、第 37 回水工学論文集, pp.763-768, 1993.
- 4) 増田尚弥、田中祐一朗、中谷剛：水制工周辺に射流域を生じる流れの数値計算に関する研究、第 39 回水工学論文集, pp.551-556, 1995.
- 5) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法、東京大学出版会, 1994.
- 6) Roe, P.L.: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 43, pp.357-372, 1981.
- 7) 森明巨：最近の衝撃波捕捉理論の話題・AUSM と CIP, 2 次元数値計算法による都市域急流河川の安全度評価システムの開発、平成 7 年度科学研究費補助金 [試験研究 (B)(1)] 報告書、研究代表者 板倉忠興, pp.45-57, 1996.
- 8) 西本直史：FDS による開水路流れの数値解析、2 次元数値計算法による都市域急流河川の安全度評価システムの開発、平成 7 年度科学研究費補助金 [試験研究 (B)(1)] 報告書、研究代表者 板倉忠興, pp.133-143, 1996.
- 9) 八田夏夫：流れの計算、森北出版株式会社, 1994.
- 10) 数値流体力学編集委員会編：数値流体力学シリーズ 2 圧縮性流体解析、東京大学出版会, 1995.
- 11) 大川秀典、清水康行、藤田睦博：FDS を用いた開水路における流れの数値計算、第 41 回水工学論文集, pp.611-616, 1997.
- 12) 本間 仁、安芸的一編：物部水理学、岩波書店, 1962.
- 13) 花田紀明：複列砂州上の流れに関する基礎的研究、北海道大学学士論文, 1988.
- 14) 烏谷部寿人、渡邊康玄、清水康行、長谷川和義、大川秀典：浸食河岸による蛇行水路実験、土木学会北海道支部論文報告集 第 52 号 (B), pp.212-217, 1996.
- 15) 大川秀典、清水康行、長谷川和義、烏谷部寿人：蛇行河川の流路変動に関する研究、土木学会北海道支部論文報告集 第 52 号 (B), pp.206-211, 1996.
- 16) 清水康行、渡邊康玄、烏谷部寿人：直線および蛇行河川の安定河床形状に関する研究、土木学会論文集, No.716 pp.1-11, 1995.

(1997. 6. 2 受付)

NUMERICAL COMPUTATION OF OPEN CHANNEL FLOW WITH SHOCK WAVE USING FDS METHOD

Hidenori OKAWA, Yasuyuki SHIMIZU and Akio MORI

Numerical modeling of flow including the calculation of hydraulic transitions is a useful tool when planning river engineering works. The Flux Difference Splitting Scheme, FDS, has been developed to simulate flow with shock waves in numerous aerodynamic applications. FDS incorporates the theory of nonlinear characteristic waves and the concept of numerical flux. This method can also be applied to open channel flow, thus producing a robust algorithm capable of calculating flow at supercritical, subcritical, and transitional Froude numbers. In this paper, an FDS model for two-dimensional open channel flow is developed and applied to several different hydraulic conditions. Comparison of calculated results with theoretical and experimental results is favorable.