

Kinematic Waveモデルと貯留型流出モデルの比較 -周波数特性と確率特性-

田中 岳¹・藤田睦博²・工藤睦信³・内島邦秀⁴

¹学生員 工修 北海道大学大学院 工学研究科 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

²フェロー会員 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科 (同上)

³正会員 日本国土開発(株) 東関東支店支店長 (〒260-8642 千葉市中央区富士見2-22-2)

⁴正会員 工博 北見工業大学助教授 土木開発工学科 (〒090-8507 北見市公園町165)

流出モデルは、分布型定数系モデルと集中型定数系モデルとに大別される。これまで、分布型定数系モデルを空間軸上で積分することで、集中型定数系モデルの貯留型流出モデルが誘導され、その集中化の手法により幾つもの貯留方程式が提案されており、それらの評価法が問題となっている。本論文では、基礎式として分布型定数系モデルにKinematic Waveモデルを採用し、これを集中化して得られる三つのタイプの貯留型流出モデルを評価するため、既存の評価法を一般化し、流出モデルの周波数特性及び降雨量が時間的に独立な確率過程である場合の流出量の確率特性を明らかにする。更に、流出量の1~4次モーメントを与える理論式から、その確率分布を推定する。

Key Words: kinematic wave model, storage function runoff model, frequency characteristics, stochastic characteristics

1. はじめに

周知のように流出モデルは、分布型定数系モデルと集中型定数系モデルに分類できる。歴史的には、これらの流出モデルは、独立に発展してきたと言える。1970年代後半になると、分布型定数系モデルの一つであるKinematic Waveモデルを基礎式として、永井・角屋¹⁾、平野・伊藤²⁾らによってその集中化過程が研究され、その後の平野³⁾、藤田⁴⁾、星・山岡⁵⁾らの研究へと発展している。また、浸透流式を基礎式とした集中化過程の研究が、高木・松林⁶⁾、谷^{7),8)}らによって行われ、更に松林・高木・吉田⁹⁾、Bodaghpur, Fujita and Shimizu¹⁰⁾、八田・藤田・山梨¹¹⁾らの研究が発表されている。いずれの集中化過程においても、分布型定数系モデルの連続式を空間軸上で積分することで貯留方程式を得ている。従って、

これまでに分布型定数系モデルを集中化して得られた流出モデルは、いずれの場合も貯留型流出モデルとなっている。貯留量と流出量の関係を表す貯留方程式をどのように設定するかにより、いくつかの貯留型流出モデルが提案され、貯留方程式の評価法が新たな問題となってきた。

これまでに採用されている評価法は、以下の二つの手法に大別できる。基礎式とした分布型定数系モデルと、集中化して得られた貯留型流出モデルに対して、

- (1) 降雨量を決定論的関数として計算された流出量を比較して、その適合度を判定する。
- (2) 降雨量を確率過程として流出量の二乗平均誤差まで比較して、その適合度を判定する。

当然ながら(1)の手法は、設定した降雨波形に対する適合度を評価しており、他の降雨波形にまでもこ

の結果を普遍化できるか否かという問題が残っている。一方、(2)の手法は、高棹・宝・楠橋¹²⁾らによつて試みられ、初めて確率論を用いた手法として注目される。(2)の手法において平均降雨量に対して平均流出量を考えると、この関係は、(1)の手法と同じ意味を持っている。

本論文は、これらの手法を一般化することを目的とし、次に示す二つの方法を採用した。

- (A) 非線形流出モデルにおける周波数特性(ゲイン特性)を求める。特定の降雨波形を対象としないので、上述(1)の手法の欠点を補正できる。
 (B) 降雨量を確率過程と考えて、流出量の1~4次モーメントを理論的に求める。これにより、流出量の確率密度関数の推定が可能になる。これは、上述(2)の手法を更に一般化しようとするものである。

2. Kinematic Wave と貯留型流出モデル

一様勾配斜面上のKinematic Wave式は、次式で表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad (1)$$

$$h = \epsilon q^p, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

$$s(t) = \int_0^l h(x,t) dx \quad (3)$$

h : 水深 q : 単位幅流出量 r : 有効降雨量

t : 時間 x : 斜面に沿った距離 ϵ, p : 定数

s : 単位幅貯留量 l : 斜面長

式(1),(2)を集中化して得られた貯留型流出モデルには、以下に示す三種類が発表されている。高棹・宝¹²⁾らの記述に従い、それらをモデルF・モデルP・モデルHと呼ぶことにする。

$$\frac{ds_h}{dt} + q_h = r \quad (4)$$

$$\text{モデルF: } s_h = k_1 q_h^{p_1} \quad (5)$$

$$\text{モデルP: } s_h = k_1 q_h^{p_1} + k_2 \frac{dq_h}{dt} \quad (6)$$

$$\text{モデルH: } s_h = k_1 q_h^{p_1} + k_2 \frac{dq_h^{p_2}}{dt} \quad (7)$$

p_1, p_2, k_1, k_2 : 定数

Kinematic Waveの貯留量・流出量は単位幅当たりの量で表示されるのに対し、貯留型流出モデルの場合

は貯留高・流出高表示があるので、これらを区別するため添え字に h を付けている。斜面長を l とすると、次の関係が成り立つ。

$$s_h = \frac{s}{l}, \quad q_h = \frac{q(l,t)}{l} = \frac{q}{l} \quad (8)$$

これから解析の都合上、

$$h = h_* H, \quad q = q_* Q, \quad r = r_* R, \quad t = t_* T, \quad x = x_* X \quad (9)$$

を式(1),(2)及び式(3)に代入し無次元化する。更に、式(4)~(7)を変形して無次元化すると以下のようになる。

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} = R \quad (10)$$

$$H = Q^p, \quad (0 \leq X \leq 1) \quad (11)$$

$$S = \int_0^1 H(X,T) dX \quad (12)$$

$$\frac{dS}{dT} + Q = R \quad (13)$$

$$\text{モデルF: } S = K_1 Q^{p_1} \quad (14)$$

$$\text{モデルP: } S = K_1 Q^{p_1} + K_{2P} \frac{dQ}{dT} \quad (15)$$

$$\text{モデルH: } S = K_1 Q^{p_1} + K_{2H} \frac{dQ^{p_2}}{dT} \quad (16)$$

大文字(H, Q, R, T, X)で表された変数は、小文字(h, q, r, t, x)で表された次元を有する変数に対する無次元変量である。無次元化基準量(添え字(*))として次式を採用した。

$$h_* = \epsilon(\bar{r})^p, \quad q_* = \bar{l}, \quad r_* = \bar{r}, \quad t_* = \epsilon \bar{r}^{p-1} / \bar{l}^p, \quad x_* = l \quad (17)$$

\bar{r} : 平均降雨量

尚、式(15),(16)の右辺第二項の貯留係数(K_{2P}, K_{2H})は高棹・宝¹²⁾らの表現法に従い記述した。矩形斜面の場合は、貯留係数(K_1, K_{2P}, K_{2H})と次元を有する貯留係数(k_1, k_2)とは次式で結ばれている。

$$k_1 = K_1 \epsilon l^{p_1} \quad (18)$$

$$\text{モデルPの場合, } k_2 = K_{2P} \epsilon^2 l^{2p_1} \bar{r}^{2(p_1-1)} \quad (19)$$

$$\text{モデルHの場合, } k_2 = K_{2H} \epsilon^2 l^{2p_1} \bar{r}^{2p_1-p_2-1} \quad (20)$$

以後、本論文が取り扱う変数は、特に記さない限り無次元変量である。

これまでに、藤田⁴⁾はモデルFの貯留係数 K_1 と貯留指数 p_1 を式(1),(2)より次式で与えている。

$$K_1 = \frac{1}{1+p_1}, \quad p_1 = p = \frac{1}{m} \quad (21)$$

式(21)は、降雨波形に依存することなくほぼ成立することが確認されている。モデルPはPrasadタイプ

の貯留型流出モデルである。高樟・宝¹²⁾らは、貯留係数 K_{2P} を m の関数と仮定して数値実験的に求めている。モデルHは星・山岡⁹⁾らによって提案された貯留型流出モデルである。貯留係数 K_{2H} と貯留指数 p_2 は、降雨波形により異なり、次のように与えられている。

矩形降雨の場合

$$K_{2H}=0.1p^{-0.2}, \quad p_2=p^{1.5} \quad (22)$$

三角形降雨の場合

$$K_{2H}=a_1e^{a_2\frac{T_p}{T_r}p-\sum_{i=1}^4b_i\left(\frac{T_p}{T_r}\right)^{i-1}}, \quad p_2=c_1e^{c_2\frac{T_p}{T_r}p-\sum_{i=1}^4d_i\left(\frac{T_p}{T_r}\right)^{i-1}} \quad (23)$$

T_p, T_r は降雨量のピーク時刻と降雨継続時間と示している。係数 a_i, b_i, c_i 及び d_i に関しては、原論文を参考にされたい。表-1は、高樟・宝¹²⁾らによって与えられた各係数の一覧表である。

表-1 降雨波形と係数の関係¹²⁾

降雨(T_p/T_r)	K_1	P_1	K_{2P}	K_{2H}	P_2
矩形	0.625	0.6	0.05950	0.11076	0.4648
三角形(0.2)	0.625	0.6	0.05418	0.07572	0.5537
三角形(0.5)	0.625	0.6	0.04327	0.09608	0.4509
三角形(0.8)	0.625	0.6	0.03643	0.10441	0.3586

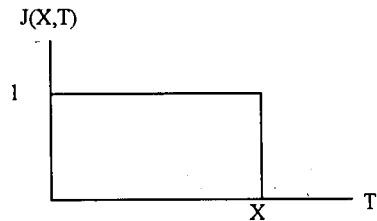


図-1 インパルス応答関数

3. 周波数応答¹³⁾

(1) ゲイン特性

式(10),(11)において $p=1$ のとき、容易に流出量を求めることができる。

$$Q(X,T)=\int_0^T R(\tau)J(X,T-\tau)d\tau \quad (24)$$

$J(X,T)$ は式(10),(11)のインパルス応答関数である。図-1は $J(X,T)$ を示している。式(24)より降雨量～流出量間のゲイン特性は、次式で与えられる。

$$G_K(X,\Omega)=\frac{1}{X\Omega}\sqrt{2(1-\cos(X\Omega))}, \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (25)$$

Ω は、角速度である。次元を有する角速度 ω とは、次の関係式で結ばれている。

$$\Omega=t_*\omega \quad (26)$$

$p \neq 1$ のとき理論的にゲイン特性を求ることはできないが、ここでは、近似的にゲイン特性を求める。いま、式(10)の降雨量 R に次式を与える。

$$R(T)=\bar{R}+A\sin(\Omega T), \quad \bar{R} \geq A \quad (27)$$

\bar{R} : 平均降雨量

ここで、流出量 $Q(X,T)$ を次式のように仮定する。

$$Q(X,T)=\bar{R}X+f(X,T), \quad \bar{R}X \geq f(X,T) \quad (28)$$

$f(X,T)$ はこれから求める流出量の振動成分をなす未知関数である。式(28)を式(11)に代入し高次の微小項を無視すると、次式が得られる。

$$H \approx (\bar{R}X)^p \left\{ 1 + \frac{p}{\bar{R}X} f(X,T) \right\} \quad (29)$$

式(27),(28)を式(10)に代入する、

$$p(\bar{R}X)^{p-1} \frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial X} = A\sin(\Omega T) \quad (30)$$

これより、次の二つの式が得られる。

$$T=\bar{R}^{p-1}(X^p-X_0^p)+T_0 \quad (31)$$

$$f(X,T)=\int_{X_0}^X A\sin(\Omega(\bar{R}^{p-1}(Y^p-X_0^p)+T_0))dy+f(X_0,T_0) \quad (32)$$

(X_0, T_0) は特性曲線の起点を示す。ゲイン特性を求めるために充分に時間が経過したときの特性曲線(起点 $(0, T_0)$, $f(0, T_0)=0$)を考え、式(31),(32)を解く。ここでは、理論的に式(32)を解くことができないで、 y^p に次の近似を施す。

$$y^p=\sum_{i=1}^n (A_i y + B_i) \left\{ U\left(y-\frac{(i-1)X}{n}\right) - U\left(y-\frac{iX}{n}\right) \right\} \quad (33)$$

$n=(\geq 2)$: 分割数 $U(y)$: ステップ関数

$$A_i=(i^p-(i-1)^p)\left(\frac{X}{n}\right)^{p-1} \quad (34)$$

$$B_i=(A_{i-1}-A_i)\frac{(i-1)X}{n}+B_{i-1}, \quad B_1=0 \quad (35)$$

式(33)を用いて式(32)を n 個に分割して積分し、 $f=B\sin(\Omega T+\Theta)$ の形式に整理して、ゲイン特性($G_K(X,\Omega)=B/(XA)$)を求める。式(36)のようになる。

$$G_K(X,\Omega)=\frac{2}{X\bar{R}^{p-1}\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\sin^2(e_i\Omega)}{A_i^2} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\sin(e_i\Omega)\sin(e_j\Omega)\cos((f_i-f_j)\Omega)}{A_i A_j} \right\}^{0.5} \quad (36)$$

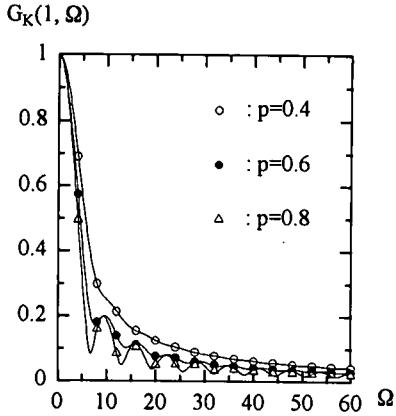


図-2 Kinematic Waveモデルのゲイン特性

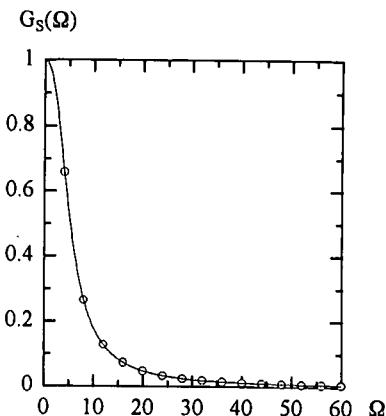


図-3 モデルHのゲイン特性

$$e_i = \frac{A X}{2n} R^{-p-1} \quad (37)$$

$$f_i = (B_i - X^p) R^{p-1} + (2i-1)e_i \quad (38)$$

式(36)において、 $p=1$ とし、分割数(n)を無限大にすると、式(36)は式(25)に一致することが確かめられる。

次に、式(13)～(16)の貯留型流出モデルについてゲイン特性を求めてみる。式(14),(15)は式(16)に含まれるので、式(13),(16)で表されるモデルHを解析の対象とする。藤田¹⁴⁾が式(4),(5)を用いてゲイン特性を求めた手法を用いて、次式が得られる。

$$G_S(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-K_2 P_2 \bar{R}^{P_2-1} \Omega^2)^2 + (K_1 P_1 \bar{R}^{P_1-1} \Omega)^2}} \quad (39)$$

$$\begin{cases} K_2 = K_{2P}, P_2 = 1 \\ K_2 = K_{2H}, P_2 \neq 1 \end{cases}$$

式(39)において $K_2=0$ とし、式(9),(17),(18)及び式(26)を用いて次元を有する変数で書き改めれば、藤田¹⁴⁾が求めた式に一致している。

式(36),(39)は、いずれも近似式であるので、その精度を次節で確認する。

(2) シミュレーション法による検討

a) Kinematic Waveモデルの場合

ここでは、式(36)を対象にし、その精度を確認する。式(36)は、分割数(n)の大きさに依存している近似式である。式(10)の降雨量に式(27)を代入する。式(10),(11)を数値計算し、 $Q = \bar{R}X + B_h \sin(\Omega T + \Theta)$ と近似できる時間帯でゲイン特性($G_K(X, \Omega) = B/(XA)$)を求める。図-2は、 p を変化させ、斜面末端($X=1$)における

計算結果を示している。式(36)の計算結果の安定性を考慮して、分割数(n)は500とした。実線が式(36)を示し、シンボル(○, ●, △)が式(10),(11)を数値計算し、直接ゲイン特性を求めた結果を示している。式(36)の近似度は良好である。図-2から、Kinematic Waveモデルのゲイン特性は、角速度 Ω の増加に伴い単調に減少するのではなく、振動している。その振動は、 p の値が大きくなると激しくなる。(これに関しては、後述する。)

b) モデルHの場合

ここでは、式(39)を用いて、その精度を確認する。式(13),(16)より次式が得られる。

$$K_1 \frac{dQ^{P_1}}{dT} + K_{2H} \frac{d^2 Q^{P_2}}{dT^2} + Q = R \quad (40)$$

式(40)の右辺に式(27)を与える、これを数値計算し充分な時間が経過した後、 $Q = \bar{R} + B_h \sin(\Omega T + \Theta)$ と整理して、ゲイン特性($G_S(\Omega) = B_h/A$)を求めた。使用したパラメータの値は、表-1の矩形降雨を採用し図-3にその結果を示す。実線が式(39)を示し、○印が式(40)を数値計算して得られたゲイン特性を示す。式(39)の近似度は良好である。

(3) ゲイン特性の比較

これで、Kinematic Waveモデルと貯留型流出モデルのゲイン特性が得られたことになる。次にこれらを比較する(図-4)。計算に用いた、モデルF・モデルHのパラメータは、式(21),(22)より、モデルPについては、高橋・宝¹²⁾らが数値実験的に求めた値より与えている。但し、高橋・宝¹²⁾らは、 $p=p_1 \geq 0.5$ の範囲でのみ数値実験を行っているので、図-4(a)及び図-4

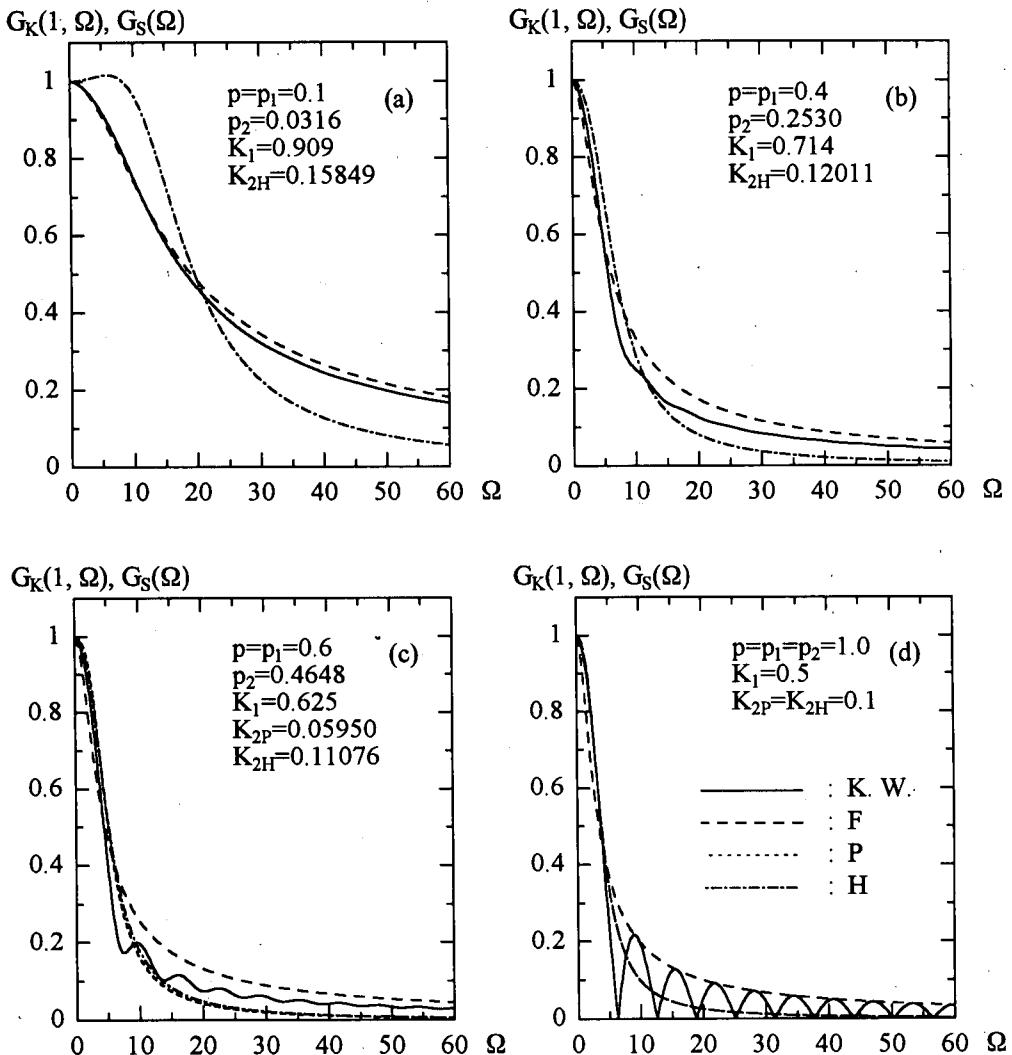


図4 ゲイン特性の比較

(b)には、モデルPを示さなかった。尚、Kinematic Waveモデルでは、斜面末端($X=1$)におけるゲイン特性を示している。図4から、Kinematic Waveモデルのゲイン特性を基準とした場合、どのタイプの貯留方程式が、類似した特性を示すかは、貯留指数 p_1 によって異なることがわかる。図4(a)で、モデルHのゲイン特性が、 $\Omega=10$ の近傍で1を超えていている。モデルHの基礎式が二階微分方程式なので、パラメータ (p, p_1) が、 $p=p_1=0.1$ のとき共振現象を起こしていることがわかる。又、図4に示されているように、パラメータ (p, p_1) が小さい図4(a)の場合を除いて、

$\Omega \leq 5$ の低周波数領域では四つの流出モデルのゲイン特性は類似している。(但し、図4-(b)は三つの流出モデルを比較している。)式(26)を用いて、次元を有する周波数に書き直すと、 $\omega \leq 5/t_*$ となる。式(17)により、 t_* は次元を有する平均降雨量 \bar{r} に対する到達時間として定義されているので、 $t_*=5(\text{hr})$ とすると、周期が $6.3 (=2\pi)$ 時間以上の降雨量成分に対して、四つの流出モデルの流出量は一致する。しかし、周期が 6.3 時間以内の降雨量成分に対しては、一致しない可能性がある。 $p=p_1=p_2=1.0$ (図4(d))の場合(線形流出系)、理論的にゲイン特性を計算できる。この

場合、Kinematic Waveモデルのゲイン特性は、式(25)で計算でき、貯留型流出モデルでは、式(39)で $p_1=p_2=1.0$ として、次式により計算できる。

$$G_s(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-K_2\Omega^2)^2+(K_1\Omega)^2}} \quad (41)$$

Kinematic Waveモデルで、パラメータ p が増加する（線形性が強くなる）と、ゲイン特性が振動しながら減衰する傾向は、式(25)より説明できる。全体的に、Kinematic Waveモデルのゲイン特性は、モデルFとモデルHの中間的値を取ることが見て取れる。尚、流出系が非線形になると、Kinematic Waveモデルも貯留型流出モデルでも、ゲイン特性に平均降雨量が関与していることを付記しておく。

4. Kinematic Wave モデルの確率応答

式(10)の降雨量 R が確率過程であるとき、流出量 Q もまた確率過程になる。理論式の展開上、これらを平均値($\bar{\cdot}$)とそれからの偏差($\tilde{\cdot}$)とに分けて取り扱う。

$$R=\bar{R}+\tilde{R}, E(\bar{R})=0 \quad (42)$$

$$Q=\bar{Q}+\tilde{Q}, E(\bar{Q})=0 \quad (43)$$

降雨量が時間的に独立な定常確率過程の場合、2～4次のキューメラント関数は、次式で表される。

$$E[\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)]=\sigma_R^2\delta(\tau_1-\tau_2) \quad (44)$$

$$E[\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)\tilde{R}(\tau_3)]=\mu_{R3}\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3) \quad (45)$$

$$\begin{aligned} E[\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)\tilde{R}(\tau_3)\tilde{R}(\tau_4)] &= (\mu_{R4}-3\sigma_R^4)\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3)\delta(\tau_3-\tau_4) \\ &+ \sigma_R^4((\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_3-\tau_4)+\delta(\tau_1-\tau_3)\delta(\tau_2-\tau_4) \\ &+ \delta(\tau_1-\tau_4)\delta(\tau_2-\tau_3)) \end{aligned} \quad (46)$$

$\sigma_R^2, \mu_{R3}, \mu_{R4}$ は、降雨量の2～4次モーメントを示している。

(1) 線形系の場合($p=1$)

式(11)において $p=1$ のとき、式(24)から容易に流出量を求めることができる。これに、式(42),(43)を代入すると次式が得られる。

$$\bar{Q}(X,T)=\int_0^T \bar{R}(\tau)J(X,T-\tau)d\tau \quad (47)$$

$$\tilde{Q}(X,T)=\int_0^T \tilde{R}(\tau)J(X,T-\tau)d\tau \quad (48)$$

式(48)の両辺を2～4乗して期待値を取ることにより、流出量の2～4次モーメントを得ることができる。

$$\sigma_Q^2 = \begin{cases} C\sigma_R^2 T, & 0 \leq T \leq X \\ C\sigma_R^2 X, & T \geq X \end{cases} \quad (49)$$

$$\mu_{Q3} = \begin{cases} C^2 \mu_{R3} T, & 0 \leq T \leq X \\ C^2 \mu_{R3} X, & T \geq X \end{cases} \quad (50)$$

$$\mu_{Q4} = \begin{cases} C^2(C(\mu_{R4}-3\sigma_R^4)+3\sigma_R^4 T)T, & 0 \leq T \leq X \\ C^2(C(\mu_{R4}-3\sigma_R^4)+3\sigma_R^4 X)X, & T \geq X \end{cases} \quad (51)$$

$$c=t_c C \quad (52)$$

c は大きさが 1 で時間の次元を有する定数である。式(49)～(51)を満足する微分方程式として次式を得る。

$$\frac{\partial \sigma_Q^2}{\partial T} + \frac{\partial \sigma_Q^2}{\partial X} = C\sigma_R^2 \quad (53)$$

$$\frac{\partial \mu_{Q3}}{\partial T} + \frac{\partial \mu_{Q3}}{\partial X} = C^2 \mu_{R3} \quad (54)$$

$$\frac{\partial \mu_{Q4}}{\partial T} + \frac{\partial \mu_{Q4}}{\partial X} = C^3(\mu_{R4}-3\sigma_R^4)+6\sigma_Q^2 C\sigma_R^2 \quad (55)$$

(2) 非線形系の場合($p \neq 1$)

$p \neq 1$ のとき式(11)の Q^p の項がネックとなり、特殊な R の場合を除いて式(24)のように流出量を求めることができない。ここでは、この指指数型の確率変数に対して次の近似式を用いる。

$$Q^p = A_1 \bar{Q} + B_1 \tilde{Q} \quad (56)$$

Bras and Georgakatos¹⁹らは、式(56)の両辺の誤差を 0 とし、誤差の2乗平均値を最小にする A_1, B_1 として次式を提案している。

$$\begin{aligned} A_1 = \bar{Q}^{p-1} &\left\{ 1 + \frac{1}{2} p(p-1) \frac{E(\tilde{Q}^2)}{\bar{Q}^2} \right. \\ &\left. + \frac{1}{6} p(p-1)(p-2) \frac{E(\tilde{Q}^3)}{\bar{Q}^3} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} B_1 = \frac{\bar{Q}^{p+1}}{E(\tilde{Q}^2)} &\left\{ p \frac{E(\tilde{Q}^2)}{\bar{Q}^2} + \frac{1}{2} p(p-1) \frac{E(\tilde{Q}^3)}{\bar{Q}^3} \right. \\ &\left. + \frac{1}{6} p(p-1)(p-2) \frac{E(\tilde{Q}^4)}{\bar{Q}^4} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (58)$$

式(42),(43)及び式(56)を式(10),(11)に代入して次式を得る。

$$\frac{\partial(A_1 \bar{Q} + B_1 \tilde{Q})}{\partial T} + \frac{\partial(\bar{Q} + \tilde{Q})}{\partial X} = \bar{R} + \tilde{R} \quad (59)$$

両辺の期待値を取れば、

$$\frac{\partial(A_1 \bar{Q})}{\partial T} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X} = \bar{R} \quad (60)$$

が得られ、式(59)から式(60)を差し引くと次式が導かれる。

$$\frac{\partial(B_1\tilde{Q})}{\partial T} + \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial X} = \tilde{R} \quad (61)$$

式(61)から流出量の2~4次モーメントに関する理論式を誘導することができる(付録1参照)。

$$\frac{\partial B_1^2 \sigma_Q^2}{\partial T} + B_1 \frac{\partial \sigma_Q^2}{\partial X} = C \sigma_R^2 \quad (62)$$

$$\frac{\partial B_1^3 \mu_{Q3}}{\partial T} + B_1^2 \frac{\partial \mu_{Q3}}{\partial X} = C^2 \mu_{R3} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1^4 \mu_{Q4}}{\partial T} + B_1^3 \frac{\partial \mu_{Q4}}{\partial X} &= C^3 (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) \\ &\quad + 6B_1^2 \sigma_Q^2 C \sigma_R^2 \end{aligned} \quad (64)$$

式(58)において、 $p=1$ とすると $B_1=1$ となるので、式(62)~(64)は、式(53)~(55)に一致している。

ここで、式(57),(58)において右辺第一項のみを探用し、 $\bar{R}, \sigma_R^2, \mu_{R3}, \mu_{R4}$ を一定値としたとき、流出量の1~4次モーメントは、式(60)及び式(62)~(64)から次式のように与えられる。

$$\bar{Q} = \begin{cases} (\bar{R}T)^{\frac{1}{p}}, & 0 \leq T \leq T_{cx} \\ \bar{R}X, & T \geq T_{cx} \end{cases} \quad (65)$$

$$\sigma_Q^2 = \begin{cases} \frac{1}{p^2} \bar{R}^{\frac{2(1-p)}{p}} C \sigma_R^2 T^{\frac{2-p}{p}}, & 0 \leq T \leq T_{cx} \\ \frac{\bar{R}^{1-p} X^{2-p}}{p(2-p)} C \sigma_R^2, & T \geq T_{cx} \end{cases} \quad (66)$$

$$\mu_{Q3} = \begin{cases} \frac{1}{p^3} \bar{R}^{\frac{3(1-p)}{p}} C^2 \mu_{R3} T^{\frac{3-2p}{p}}, & 0 \leq T \leq T_{cx} \\ \frac{\bar{R}^{2(1-p)} X^{3-2p}}{p^2(3-2p)} C^2 \mu_{R3}, & T \geq T_{cx} \end{cases} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \mu_{Q4} = & \frac{1}{p^4} \bar{R}^{\frac{4(1-p)}{p}} \left\{ C^3 (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) T^{\frac{4-3p}{p}} \right. \\ & \left. + 3C^2 \sigma_R^4 T^{\frac{4-2p}{p}} \right\}, \quad 0 \leq T \leq T_{cx} \\ & \frac{1}{p^2} \left\{ \frac{\bar{R}^{3(1-p)} X^{4-3p}}{p(4-3p)} C^3 (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) \right. \\ & \left. + \frac{3}{(2-p)^2} \bar{R}^{2(1-p)} X^{2(2-p)} C^2 \sigma_R^4 \right\}, \quad T \geq T_{cx} \end{aligned} \quad (68)$$

$$T_{cx} = X^p \bar{R}^{p-1}, \text{ 到達時間} \quad (69)$$

ここで、式(11),(56)から、

$$H = \bar{H} + \tilde{H} = (A_1 \bar{Q} + B_1 \tilde{Q}) \quad (70)$$

従って、水深 H の分散 σ_H^2 は次式で与えられる。

$$\sigma_H^2 = B_1^2 \sigma_Q^2 \quad (71)$$

式(66)の $T \geq T_{cx}$ の場合を用いると、

$$\sigma_H^2 = \frac{\bar{R}^{p-1} X^p}{2-p} C \sigma_R^2 \quad (72)$$

$X=1$ とすると、この式は高樟・椎葉¹⁶⁾らが導いた結果に一致する。また、式(66)の上式において $T=T_{cx}$ とすると次式が得られる。

$$\sigma_Q^2 = \frac{\bar{R}^{1-p} X^{2-p}}{p^2} C \sigma_R^2 \quad (73)$$

この式は、 $p=1$ の場合を除いて式(66)の下式に一致しておらず、流出量の分散は $T=T_{cx}$ で不連続になっていることを示している。3,4次モーメントに関しても同様のことが言える。

また、 R のスペクトル密度を $S_R(\Omega)$ とすると、流出量 Q のスペクトル密度 $S_Q(\Omega)$ は、ゲイン特性 G を用いると、

$$S_Q(\Omega) = G^2 S_R(\Omega) \quad (74)$$

と表すことができる。 R が時間的に独立な定常確率過程であるので、そのスペクトル密度は次式となる。

$$S_R(\Omega) = \frac{C \sigma_R^2}{2\pi} \quad (75)$$

式(74),(75)を用いると流出量の定常状態における分散 $\sigma_Q^2(\infty)$ は、次式によって与えられる。

$$\sigma_Q^2(\infty) = \frac{C \sigma_R^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^2 d\Omega \quad (76)$$

G として、式(36)を用いて分割数(n)を無限大にすると次式が得られる。

$$\sigma_Q^2(\infty) = \frac{\bar{R}^{1-p} X^{-p}}{p(2-p)} C \sigma_R^2 \quad (77)$$

式(77)は、式(66)の下式と一致している。 G として、式(39)を用いると次式が得られる。

$$\sigma_Q^2(\infty) = \frac{C \sigma_R^2}{2 K_1 p_1 \bar{R}^{p_1-1}} \quad (78)$$

流出量の定常状態における分散が、係数(K_1, p_1)に依存しないことがわかる。

(3) シミュレーション法による理論解の検討

流出量の1~4次モーメントを与える微分方程式、式(60)及び式(62)~(64)をシミュレーション法を用いて、その妥当性を検討する。シミュレーション法で与える平均降雨量として、矩形降雨波形と三角形降雨波形(0.5)を採用した。計算機で模擬的に降雨量を発生させ、式(10),(11)を数値計算して、斜面末端($X=1$)での流出量 $Q(1,T)$ の各時刻ごとにおける1~

4次モーメントを求めた。

次元を有する実測降雨量 $r_d(t)$ は、実際の時間的に連続な降雨量 $r(t)$ より式(79)で計算される離散的な時系列である。

$$\begin{cases} r_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} r(\tau) d\tau \\ r_d(t) = \sum_i r_i [U(t-(i-1)\Delta t) - U(t-i\Delta t)] \end{cases} \quad (79)$$

Δt : 実測降雨量の時間間隔

従って、数値計算に用いる無次元の降雨量も図-5に示すような離散的な時系列としている。この無次元の離散的な降雨量(以後、離散的降雨量と呼ぶ。)を無次元の連続的な降雨量 $R(T)$ (以後、連続的降雨量と呼ぶ。)と区別するため $R_d(T)$ と置く。藤田¹⁴⁾は、実際の時間的に独立な降雨量に関して、次元を有する離散的降雨量と連続的降雨量の1~4次モーメント間の関係式を与えており、これを無次元の降雨量に適応すれば、次式が得られる。

$$\bar{R}_d = \bar{R} \quad (80)$$

$$\sigma_{R_d}^2 = \frac{C \sigma_R^2}{\Delta T} \quad (81)$$

$$\mu_{R_d 3} = \frac{C^2 \mu_{R 3}}{\Delta T^2} \quad (82)$$

$$\mu_{R_d 4} = \frac{C^3 (\mu_{R 4} - 3 \sigma_R^4)}{\Delta T^3} + \frac{3 C^2 \sigma_R^4}{\Delta T^2} \quad (83)$$

ΔT : 時間間隔

$\bar{R}_d, \sigma_{R_d}^2, \mu_{R_d 3}, \mu_{R_d 4}$ は、離散的降雨量の1~4次モーメントを示す。

次に、離散的降雨量の確率変動成分 $\tilde{R}_d(T)$ として、どのような確率密度関数に従う確率変数を与えるかが問題となる。藤田¹⁴⁾は、次元を有する離散的降雨量の確率変動成分 \tilde{r}_d として、指數分布を仮定している。

$$f(\tilde{r}_d) = \begin{cases} \lambda \exp\left\{-\lambda\left(\tilde{r}_d + \frac{1}{\lambda}\right)\right\} & \tilde{r}_d \geq -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (84)$$

従って、次元を有する離散的降雨量 $r_d(t)$ の1~4次モーメントは次式で与えられる。

$$E(r_d) = \bar{r}_d, \sigma_{r_d}^2 = \frac{1}{\lambda}, \mu_{r_d 3} = \frac{3}{\lambda^2}, \mu_{r_d 4} = \frac{9}{\lambda^4} \quad (85)$$

本論文でも、離散的降雨量の確率変動成分 $\tilde{R}_d(T)$ もまた式(84)の指數分布($\lambda=2$)を満足しているものとして、降雨時系列を与えた。図-6,7は、シミュレーションの結果を示している。実線が式(10),(11)を数

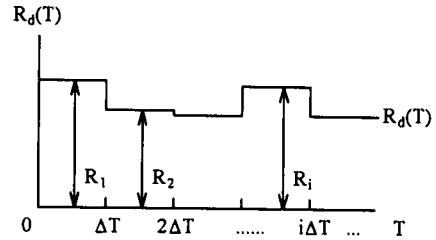


図-5 無次元の離散的降雨量の例

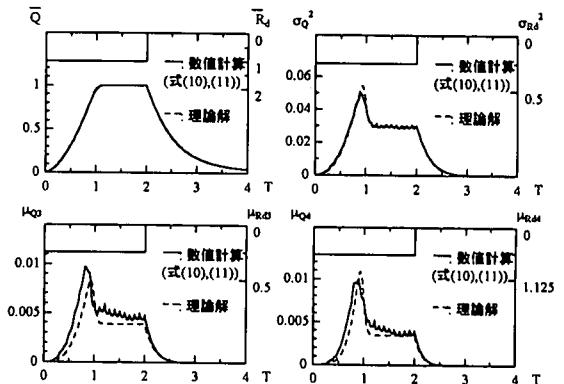


図-6 シミュレーション結果(矩形波形)($T_{ci}=1.00$)

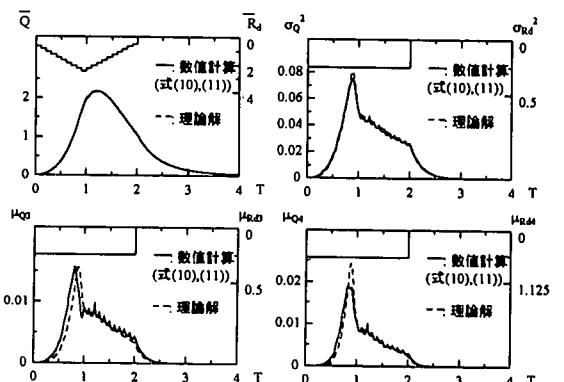


図-7 シミュレーション結果(三角形波形)($T_{ci}=0.99$)

値計算した結果を、破線が式(60)及び式(62)~(64)の解を示している。また、 $\Delta T=0.1$ を採用した。平均降雨量が矩形波形、三角形波形のいずれの場合も、理論解と数値計算結果との適合度は良好である。また、2~4次モーメントには、 T_{ci} (平均降雨量を用いたときの到達時間)の近傍にピークを生じている。

5. 貯留型流出モデルの確率応答

(1) モデルFの確率応答

式(4),(5)で表されるモデルFの確率応答に関しては、既に藤田¹⁴⁾らが発表しているので、無次元変量で表された式(13),(14)に適応すれば、次式が得られる。

$$\frac{d\bar{S}}{dT} + \left(\frac{1}{K_1}\right)^m A_2 \bar{S} = \bar{R}, \quad D_1 = \left(\frac{1}{K_1}\right)^m, \quad m = \frac{1}{p_1} \quad (86)$$

$$\frac{d\sigma_s^2}{dT} + 2D_1 B_2 \sigma_s^2 = C \sigma_R^2 \quad (87)$$

$$\frac{d\mu_{S3}}{dT} + 3D_1 B_2 \mu_{S3} = C^2 \mu_{R3} \quad (88)$$

$$\frac{d\mu_{S4}}{dT} + 4D_1 B_2 \mu_{S4} = C^3 (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) + 6\sigma_s^2 C \sigma_R^2 \quad (89)$$

$$\bar{Q} = D_1 A_2 \bar{S} \quad (90)$$

$$\sigma_Q^2 = D_1^2 B_2^2 \sigma_s^2 \quad (91)$$

$$\mu_{Q3} = D_1^3 B_2^3 \mu_{S3} \quad (92)$$

$$\mu_{Q4} = D_1^4 B_2^4 \mu_{S4} \quad (93)$$

$\bar{S}, \sigma_s^2, \mu_{S3}, \mu_{S4}$ は、貯留量の1～4次モーメントを示している。また、 A_2, B_2 は式(57),(58)において、 \bar{Q}, \tilde{Q}, p をそれぞれ平均貯留量 \bar{S} とそれからの偏差 \tilde{S} 及び m に置き換えたものである。

(2) モデルHの確率応答

式(13),(15)で表されるモデルPは、式(13),(16)で表されるモデルHで $p_2=1$ としたものである。ここでは、後者のモデルHを解析の対象とする。

式(40)において、 $K_{2H}=K_2$ とおけば次式が得られる。

$$K_1 \frac{dQ^{p_1}}{dT} + K_2 \frac{d^2 Q^{p_2}}{dT^2} + Q = R \quad (94)$$

$p_1 \neq 1$ または $p_2 \neq 1$ となると、解を陽形式に表示できない。 Q^{p_1}, Q^{p_2} に関して、式(56)と同様な近似式を用いる。

$$Q^{p_1} \approx A_3 \bar{Q} + B_3 \tilde{Q} \quad (95)$$

$$Q^{p_2} \approx A_4 \bar{Q} + B_4 \tilde{Q} \quad (96)$$

式(95),(96)を式(94)に代入し、確率変数をそれぞれ平均値とそれからを偏差で表す。

$$K_1 \frac{d(A_3 \bar{Q} + B_3 \tilde{Q})}{dT} + K_2 \frac{d^2(A_4 \bar{Q} + B_4 \tilde{Q})}{dT^2} + \bar{Q} + \tilde{Q} = \bar{R} + \tilde{R} \quad (97)$$

両辺の期待値を取ると、

$$K_1 \frac{d(A_3 \bar{Q})}{dT} + K_2 \frac{d^2(A_4 \bar{Q})}{dT^2} + \bar{Q} = \bar{R} \quad (98)$$

更に、式(97)から式(98)を引くと、

$$K_1 \frac{d(B_3 \tilde{Q})}{dT} + K_2 \frac{d^2(B_4 \tilde{Q})}{dT^2} + \tilde{Q} = \tilde{R} \quad (99)$$

これから次の数式展開を容易にするため、次式により変数の変換を施す。

$$\bar{V} = K_2 A_4 \bar{Q} \quad (100)$$

$$\tilde{V} = K_2 B_4 \tilde{Q} \quad (101)$$

式(98),(99)を書き直して次式を得る。

$$\frac{d^2 \bar{V}}{dT^2} + f_1(T) \frac{d\bar{V}}{dT} + g_1(T) \bar{V} = \bar{R} \quad (102)$$

$$f_1(T) = \frac{K_1 A_3}{K_2 A_4} \quad (103)$$

$$g_1(T) = \frac{1}{K_2} \left\{ K_1 \frac{d}{dT} \left(\frac{A_3}{A_4} \right) + \frac{1}{A_4} \right\} \quad (104)$$

$$\frac{d^2 \tilde{V}}{dT^2} + f_2(T) \frac{d\tilde{V}}{dT} + g_2(T) \tilde{V} = \tilde{R} \quad (105)$$

$$f_2(T) = \frac{K_1 B_3}{K_2 B_4} \quad (106)$$

$$g_2(T) = \frac{1}{K_2} \left\{ K_1 \frac{d}{dT} \left(\frac{B_3}{B_4} \right) + \frac{1}{B_4} \right\} \quad (107)$$

式(105)を \tilde{V} について解き、2～4乗して期待値を求めると、流出量の2～4次モーメントが得られる。結果的に、連続的降雨量が時間的に互いに独立な場合には、式(108)～(111)を解くことにより、流出量の2～4次モーメントを計算することができる。(誘導過程の詳細は、付録2を参照。)

$$\frac{dH_h(T)}{dT} + [f_2(T) - H_h(T)] H_h(T) = g_2(T) - I_h(T)^2 \quad (108)$$

$$\frac{dI_h(T)}{dT} + [f_2(T) - 2H_h(T)] I_h(T) = 0 \quad (109)$$

$$F_h(T) = f_2(T) - H_h(T) \quad (110)$$

$$G_h(T) = -I_h(T) \quad (111)$$

$$\frac{dC_1}{dT} = -I_h S_1, \quad C_1(0) = 1 \quad (112)$$

$$\frac{dS_1}{dT} = I_h C_1, \quad S_1(0) = 0 \quad (113)$$

$$W_5(T) = C_1(T)^2 - S_1(T)^2 \quad (114)$$

$$W_6(T) = 2C_1(T)S_1(T) \quad (115)$$

$$\sigma_V^2 = E[(C_1(T)W_1(T) + S_1(T)W_2(T))^2] \quad (116)$$

$$\mu_{V3} = E[(C_1(T)W_1(T) + S_1(T)W_2(T))^3] \quad (117)$$

$$\mu_{V4} = E[(C_1(T)W_1(T) + S_1(T)W_2(T))^4] \quad (118)$$

$\sigma_V^2, \mu_{V3}, \mu_{V4}; Vの2\sim4次モーメント$

式(101)から、 $Vの2\sim4次モーメントと流出量Qの2\sim4次モーメントとの関係は、$

$$\sigma_V^2 = (K_2 B_4)^2 \sigma_Q^2 \quad (119)$$

$$\mu_{V3} = (K_2 B_4)^3 \mu_{Q3} \quad (120)$$

$$\mu_{V4} = (K_2 B_4)^4 \mu_{Q4} \quad (121)$$

式(116)～(118)を解くための $E(W_1^m W_2^n)$ (m, n :整数)に関する微分方程式は、次式のように与えられる。

$$\frac{dU_{i+1}}{dT} + 2F_h U_{i+1} = C \sigma_R^2 C_1(T)^{2-i} S_1(T)^i, \quad i=0\sim2 \quad (122)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+3}}{dT} + (F_h + H_h) U_{i+3} = W_5 U_i + W_6 U_{i+1} \\ \frac{dU_{i+5}}{dT} + (F_h + H_h) U_{i+5} = W_6 U_i - W_5 U_{i+1} \end{cases} \quad (123)$$

, $i=1, 2$

$$\frac{dE(W_1^2)}{dT} + 2H_h E(W_1^2) = 2W_5 U_4 + 2W_6 U_5 \quad (124)$$

$$\frac{dE(W_1 W_2)}{dT} + 2H_h E(W_1 W_2) = W_5(U_6 - U_5) + W_6(U_7 + U_4) \quad (125)$$

$$\frac{dE(W_2^2)}{dT} + 2H_h E(W_2^2) = 2W_6 U_6 - 2W_5 U_7 \quad (126)$$

$$\frac{dU_{i+8}}{dT} + 3F_h U_{i+8} = C^2 \mu_{R3} C_1(T)^{3-i} S_1(T)^i, \quad i=0\sim3 \quad (127)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+11}}{dT} + (2F_h + H_h) U_{i+11} = W_5 U_{i+7} + W_6 U_{i+8} \\ \frac{dU_{i+14}}{dT} + (2F_h + H_h) U_{i+14} = W_6 U_{i+7} - W_5 U_{i+8} \end{cases} \quad (128)$$

, $i=1\sim3$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+17}}{dT} + (F_h + 2H_h) U_{i+17} = 2W_5 U_{i+11} + 2W_6 U_{i+12} \\ \frac{dU_{i+19}}{dT} + (F_h + 2H_h) U_{i+19} = 2W_6 U_{i+14} - 2W_5 U_{i+15} \end{cases} \quad (129)$$

, $i=1, 2$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+22}}{dT} + (F_h + 2H_h) U_{i+22} = W_5(U_{i+15} - U_{i+13}) + W_6(U_{i+16} + U_{i+12}) \\ , i=0, 1 \end{cases} \quad (130)$$

$$\frac{dE(W_1^3)}{dT} + 3H_h E(W_1^3) = 3W_5 U_{18} + 3W_6 U_{19} \quad (131)$$

$$\begin{cases} \frac{dE(W_1^2 W_2)}{dT} + 3H_h E(W_1^2 W_2) = W_5(2U_{22} - U_{19}) \\ + W_6(2U_{23} + U_{18}) \end{cases} \quad (132)$$

$$\begin{cases} \frac{dE(W_1 W_2^2)}{dT} + 3H_h E(W_1 W_2^2) = W_5(U_{20} - 2U_{23}) \\ + W_6(U_{21} + 2U_{22}) \end{cases} \quad (133)$$

$$\frac{dE(W_2^3)}{dT} + 3H_h E(W_2^3) = 3W_6 U_{20} - 3W_5 U_{21} \quad (134)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{24}}{dT} + 4F_h U_{24} = C^3 (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) C_1(T)^4 \\ + 6C\sigma_R^2 U_1 C_1(T)^2 \end{cases} \quad (135)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{25}}{dT} + 4F_h U_{25} = C^3 (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) C_1(T)^3 S_1(T) \\ + 3C\sigma_R^2 (U_2 C_1(T)^2 + U_1 C_1(T) S_1(T)) \end{cases} \quad (136)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{26}}{dT} + 4F_h U_{26} = C^3 (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) C_1(T)^2 S_1(T)^2 \\ + C\sigma_R^2 (U_3 C_1(T)^2 + 4U_2 C_1(T) S_1(T) + U_1 S_1(T)^2) \end{cases} \quad (137)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{27}}{dT} + 4F_h U_{27} = C^3 (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) C_1(T) S_1(T)^3 \\ + 3C\sigma_R^2 (U_3 C_1(T) S_1(T) + U_2 S_1(T)^2) \end{cases} \quad (138)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{28}}{dT} + 4F_h U_{28} = C^3 (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) S_1(T)^4 \\ + 6C\sigma_R^2 U_3 S_1(T)^2 \end{cases} \quad (139)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+28}}{dT} + (3F_h + H_h) U_{i+28} = W_5 U_{i+23} + W_6 U_{i+24} \\ \frac{dU_{i+32}}{dT} + (3F_h + H_h) U_{i+32} = W_6 U_{i+23} - W_5 U_{i+24} \end{cases} \quad (140)$$

, $i=1\sim4$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+36}}{dT} + 2(F_h + H_h) U_{i+36} = 2W_5 U_{i+28} + 2W_6 U_{i+29} \\ \frac{dU_{i+39}}{dT} + 2(F_h + H_h) U_{i+39} = 2W_6 U_{i+32} - 2W_5 U_{i+33} \end{cases} \quad (141)$$

, $i=1\sim3$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+43}}{dT} + 2(F_h + H_h) U_{i+43} = W_5(U_{i+33} - U_{i+30}) + W_6(U_{i+34} + U_{i+29}) \end{cases} \quad (142)$$

, $i=0\sim2$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+45}}{dT} + (F_h + 3H_h) U_{i+45} = 3W_5 U_{i+36} + 3W_6 U_{i+37} \\ \frac{dU_{i+47}}{dT} + (F_h + 3H_h) U_{i+47} = 3W_6 U_{i+39} - 3W_5 U_{i+40} \end{cases} \quad (143)$$

, $i=1, 2$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+50}}{dT} + (F_h + 3H_h)U_{i+50} = W_5(2U_{i+43} - U_{i+38}) \\ \quad + W_6(2U_{i+44} + U_{i+37}) \\ \frac{dU_{i+52}}{dT} + (F_h + 3H_h)U_{i+52} = W_5(U_{i+40} - 2U_{i+44}) \\ \quad + W_6(U_{i+41} + 2U_{i+43}) \end{cases}, i=0, 1 \quad (144)$$

$$\frac{dE(W_1^4)}{dT} + 4H_h E(W_1^4) = 4W_5 U_{46} + 4W_6 U_{47} \quad (145)$$

$$\frac{dE(W_1^3 W_2)}{dT} + 4H_h E(W_1^3 W_2) = W_5(3U_{50} - U_{47}) \\ + W_6(3U_{51} + U_{46}) \quad (146)$$

$$\frac{dE(W_1^2 W_2^2)}{dT} + 4H_h E(W_1^2 W_2^2) = 2W_5(U_{52} - U_{51}) \\ + 2W_6(2U_{53} + U_{50}) \quad (147)$$

$$\frac{dE(W_1 W_2^3)}{dT} + 4H_h E(W_1 W_2^3) = W_5(U_{48} - 3U_{53}) \\ + W_6(U_{49} + 3U_{52}) \quad (148)$$

$$\frac{dE(W_2^4)}{dT} + 4H_h E(W_2^4) = 4W_6 U_{48} - 4W_5 U_{49} \quad (149)$$

また、式(116),(122)～(126)をまとめると、 V の分散 σ_V^2 を与える微分方程式が以下のように得られる。

$$\frac{d^4\sigma_V^2}{dT^4} + v_1 \frac{d^3\sigma_V^2}{dT^3} + v_2 \frac{d^2\sigma_V^2}{dT^2} + v_3 \frac{d\sigma_V^2}{dT} + v_4 \sigma_V^2 = v_5 \quad (150)$$

$$v_1(T) = w_1 + w_3 \quad (151)$$

$$v_2(T) = 2 \frac{dw_1}{dT} + w_1 w_3 + w_2 + w_4 \quad (152)$$

$$v_3(T) = \frac{d^2w_1}{dT^2} + \frac{dw_1}{dT} w_3 + w_1 w_4 + 2 \frac{dw_2}{dT} + w_2 w_3 \quad (153)$$

$$v_4(T) = \frac{d^2w_2}{dT^2} + \frac{dw_2}{dT} w_3 + w_2 w_4 \quad (154)$$

$$v_5(T) = 2(3F_h - H_h)C\sigma_R^2 \quad (155)$$

$$w_1(T) = f_2 + 2H_h \quad (156)$$

$$w_2(T) = 2(g_2 + H_h^2 - I_h^2) \quad (157)$$

$$w_3(T) = 5F_h - H_h \quad (158)$$

$$w_4(T) = 2 \left\{ \frac{df_2}{dT} - g_2 + 3(F_h^2 + I_h^2) \right\} \quad (159)$$

ここで、連続的降雨量が時間的に互いに独立な定常確率過程の場合の $T \rightarrow \infty$ における流出量の平均値 $\bar{Q}(\infty)$ 及び分散 $\sigma_Q^2(\infty)$ を考える。 $T \rightarrow \infty$ においては、流出量の平均値や分散を求めるための基礎式(102),(105)が、定数係数の微分方程式と見なせると考える。係数 $(A_3,$

$B_3, A_4, B_4)$ に関しては、式(57),(58)と同じように与えられる。ここでは、第一項のみを採用して次式として与えている。

$$A_3 = \bar{Q}^{p_1-1}, B_3 = p_1 \bar{Q}^{p_1-1}, A_4 = \bar{Q}^{p_2-1}, B_4 = p_2 \bar{Q}^{p_2-1} \quad (160)$$

$T \rightarrow \infty$ において次式が成り立つとする。

$$\frac{d^n \bar{V}}{dT^n} = 0, \quad n=1, 2 \quad (161)$$

式(100)及び式(102)～(104)より、定常状態における流出量の平均値は次式で与えられる。

$$\bar{Q}(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{Q} = \bar{R} \quad (162)$$

従って、 $T \rightarrow \infty$ において $f_1(T), g_1(T), f_2(T), g_2(T)$ は以下のように収束する。

$$f_1 = \frac{K_1}{K_2} \bar{R}^{p_1-p_2}, g_1 = \frac{\bar{R}^{1-p_2}}{K_2}, f_2 = \frac{p_1}{p_2} f_1, g_2 = \frac{1}{p_2} g_1 \quad (163)$$

これらの定数を用いると、 $T \rightarrow \infty$ で基礎式は定数係数の微分方程式と考えることができる。式(119), (150)に以下の条件式を代入すると $\sigma_Q^2(\infty)$ が与えられる。

$$\frac{d^n \sigma_Q^2}{dT^n} = 0, \quad n=1 \sim 4$$

$$D_s < 0 \text{ のとき}, \quad H_h = \frac{f_2}{2}, \quad I_h = \pm \frac{\sqrt{4g_2 - f_2^2}}{2}$$

$$D_s = 0 \text{ のとき}, \quad H_h = \frac{f_2}{2}, \quad I_h = 0$$

$$D_s > 0 \text{ のとき}, \quad H_h = \frac{f_2 \pm \sqrt{f_2^2 - 4g_2}}{2}, I_h = 0$$

$$D_s = f_2^2 - 4g_2$$

$$\sigma_Q^2(\infty) = \frac{C\sigma_R^2}{2K_1 p_1 \bar{R}^{p_1-1}} \quad (164)$$

式(164)から、定常状態における流出量の分散は、係数 (K_1, p_1) の値には依存しないことがわかる。これは、4章で与えた式(78)と一致している。

(3) シミュレーション法による理論解の検討

4章(3)と同様なシミュレーション法により、流出量 Q の1～4次モーメントを与える方程式(100), (102)～(104)及び式(106)～(149)の妥当性を検討する。シミュレーション法に用いたパラメータは、4章(3)と同じものを用いた。図-8,9はその結果を表し、実線が式(94)を数値計算することから得られた流出量の1～4次モーメントを、破線が本論文で提案した

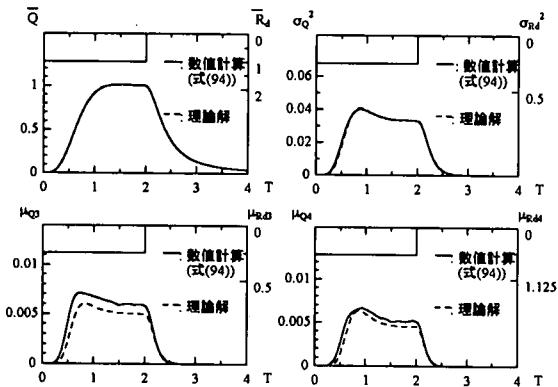


図-8 シミュレーション結果(矩形波形)

方程式より得られる流出量の1～4次モーメントを示している。図-8,9は全体的に両者の適合度が良好である。

6. 高次モーメントの比較と確率分布の推定

表-1で与えられるパラメータを用いて、Kinematic Waveモデルと三つの貯留型流出モデルについて、流出量の1～4次モーメントを比較した結果を図-10～13に示す($p=p_1=0.6$ の場合)。平均値に関しては、Kinematic Waveモデルと、各貯留型流出モデルのそれとは、よく類似していることがわかる。三つの貯留型流出モデルの2～4次モーメントは、Kinematic Waveモデルのそれらとの間に差異が確認される。また、図-11～13から、離散的降雨量の2～4次モーメントが一定値を取っても、平均降雨量が変動すると、流出量の2～4次モーメントもそれに伴って変動する。つまり、平均降雨量が流出量の2～4次モーメントに関与していることがわかる。Kinematic Waveモデルの場合、到達時間の近傍で2～4次モーメントが最大値をとっている。この理由は、以下のように説明できる。図-14は、 $X \sim T$ 平面上における特性曲線を模式的に示したものである。降雨量が確率変数であることを考慮すると、 $X=1$ の点で T 時刻に到達する特性曲線の経路はさまざまある。 $T=T_1 \ll T_{cl}$ では、ほとんどの特性曲線は、 X 軸上を起点としている。従って、水深 $H(1, T)$ は、次式で与えられる。

$$H(1, T_1) = \int_0^{T=T_1} R_d(\tau) d\tau \quad (165)$$

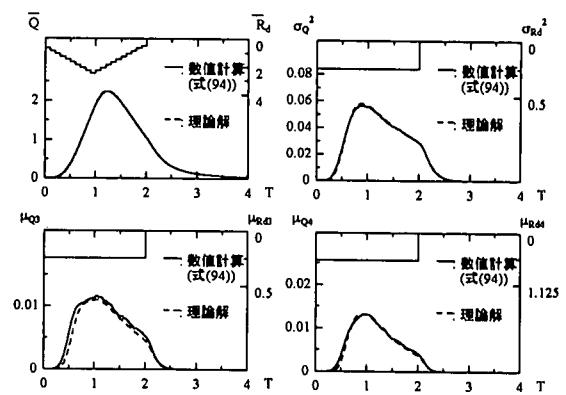


図-9 シミュレーション結果(三角形波形)

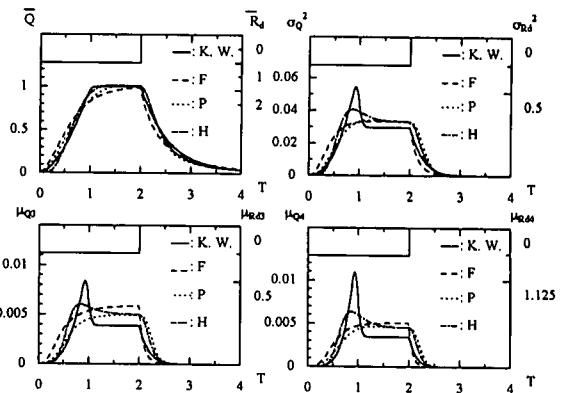


図-10 流出量確率特性の比較(矩形)($T_{cl}=1.00$)

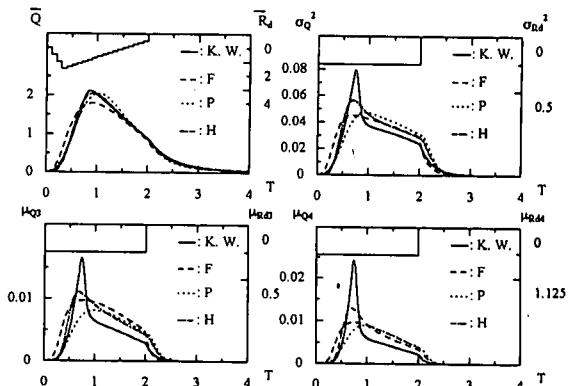


図-11 流出量確率特性の比較(三角形(0.2))($T_{cl}=0.95$)

$T=T_{cl}$ 時刻になると、特性曲線の起点は、 X 軸・ T 軸の両軸上にあり、 $H(1, T_{cl})$ は、次式で与えられる。

$$H(1, T_{cl}) = \begin{cases} \int_0^{T=T_{cl}} R_d(\tau) d\tau \\ \text{or} \\ \int_{T_0}^{T=T_{cl}} R_d(\tau) d\tau \end{cases} \quad (166)$$

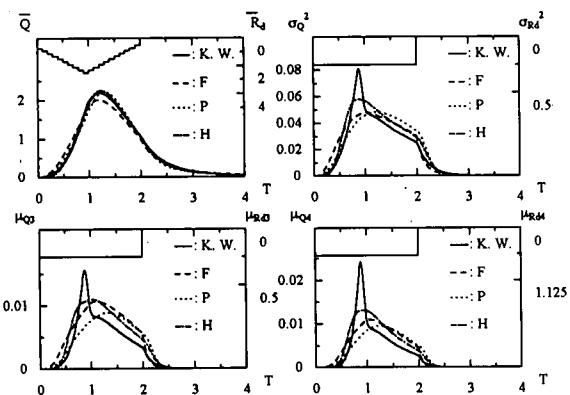


図-12 流出量確率特性の比較(三角形(0.5))($T_{ci}=0.99$)

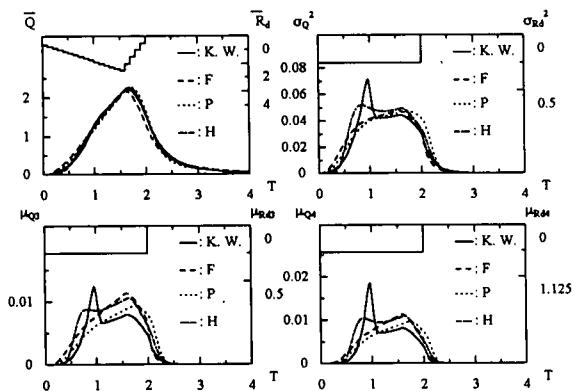


図-13 流出量確率特性の比較(三角形(0.8))($T_{ci}=1.01$)

$T=T_2 \gg T_{ci}$ 時刻になると、水深は次のようになる。

$$H(1, T_2) = \int_{T_0}^{T=T_2 \gg T_{ci}} R_d(\tau) d\tau \quad (167)$$

従って、 $T=T_{ci}$ 時刻近傍では、 $H(1, T_{ci})$ のバラツキが大きく、結果として流出量の2~4次モーメントが最大値をとることが説明できる。

流出量の1~4次モーメントが得られたので、次式で定義されたパラメータ(β_{d1} , β_{d2})を用いて、流出量の確率密度関数を推定できる。

$$(\beta_{d1}, \beta_{d2}) = \left(\frac{\mu_{Q3}^2}{\sigma_Q^6}, \frac{\mu_{Q4}^2}{\sigma_Q^4} \right) \quad (168)$$

流出量の1~4次モーメントは時間の関数であり、従って、パラメータ(β_{d1} , β_{d2})も時間の関数となる。図-15, 16は、それぞれ図-10, 12の計算結果を用いて、パラメータ(β_{d1} , β_{d2})の時間変化を図示したものである。モデルPを除いて流出量の上昇期には、ガンマ分布に近似でき、下降期には、ガンマ分布もしくはこれに非常に近い対数正規分布であることがわか

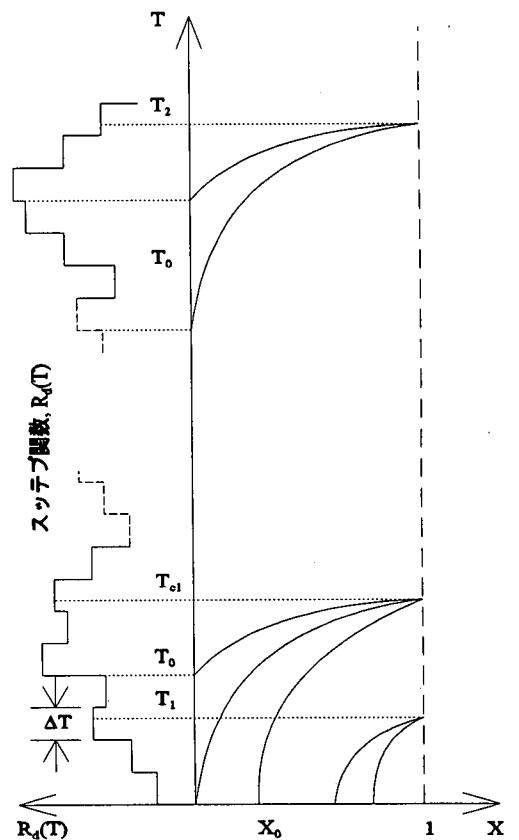


図-14 降雨量がステップ関数の場合の特性曲線

る。特に、平均流出量のピーク時刻近傍では、モデルFは対数正規分布、その他の流出モデルはガンマ分布とみなせるであろう。図-11, 13の場合にも同様な結果を得た。(紙面の都合上省略。)

7. おわりに

本論文では、分布型定数系モデルのKinematic Waveモデルと、このモデルを集中化して得られる三つのタイプの貯留型流出モデルに対して、

1. ゲイン特性式の誘導。
 2. 流出量の確率特性(1~4次モーメント)を与える理論式の誘導。
- を行なっている。

本来、周波数応答法は線形物理システムに対して適用される。これを非線形システムに拡張し、Kinematic Waveモデル及びモデルHのゲイン特性を

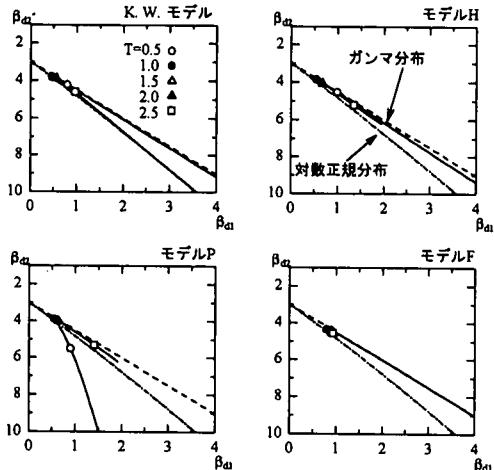


図-15 分布型の時間変化(図-10の場合)

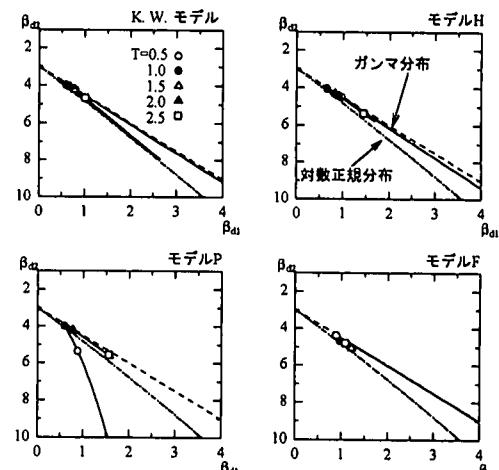


図-16 分布型の時間変化(図-12の場合)

明らかにした(3章). 無次元変量で表された流出モデルのゲイン特性を比較し、以下のが明らかとなつた。

- 1) 流出解析上の実用的範囲($p=p_1 \geq 0.5$)で、低周波領域($\Omega \leq 5$)での四つの流出モデルのゲイン特性が類似していることが明らかとなつた。
- 2) Kinematic Waveモデルのゲイン特性は、モデルFとモデルHの中間的値を取ることが明らかとなつた。斜面流出に、Manning型の表面流を適用する場合($p=p_1=0.6$)、モデルHのゲイン特性がKinematic Waveモデルのそれに最も類似していることがわかつた(図-4(c))。
- 次に、 $p=p_1=0.6$ の場合の流出量の1~4次モーメントを比較し、更に確率分布の推定を行なつた。その結果は、以下の通りである。
- 3) 平均降雨量が流出量の2~4次モーメントに関与していることがわかつた。
- 4) Kinematic Waveモデルの流出量の2~4次モーメントは、無次元の降雨到達時間近傍で最大値をとり、値そのものに差違はあるがモデルHも同様な傾向を示していることが明らかとなつた。
- 5) 流出量の2~4次モーメントを用いて、その確率分布を推定した結果、平均流出量の上昇期では、ガンマ分布に近似でき、下降期には、ガンマ分布もしくはこれに非常に近い対数正規分布であることが明らかとなり、平均流出量のピーク時刻の近傍では、モデルFは対数正規分布、他の流出モデルはガンマ分布とみなせることがわかつた。

従つて、本論文で比較した三つのタイプの貯留型流出モデルに関して言うと、 $p=p_1=0.6$ の場合に限れば、モデルHが最もよくKinematic Waveモデルの周波数特性・確率特性をとらえた流出モデルであると推測される。

付録 1

式(61)より、次の特性方程式がえられる。

$$\frac{d\tilde{Q}}{dT} + \frac{1}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial T} \tilde{Q} = \frac{\tilde{R}}{B_1} \quad (A1-1)$$

$$\frac{dX}{dT} = \frac{1}{B_1} \quad (A1-2)$$

式(A1-1)を解くと、

$$\tilde{Q} = e^{-\int_{T_0}^T D(\tau_1) d\tau_1} \int_{T_0}^T \frac{1}{B_1(\tau_2)} \tilde{R}(\tau_2) e^{\int_{\tau_2}^{T_0} D(\tau_3) d\tau_3} d\tau_2 \quad (A1-3)$$

$$D(T) = \frac{1}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial T}$$

式(A1-3)を2~4乗して期待値を取ることで、次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d\sigma_Q^2}{dT} + \frac{2}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial T} \sigma_Q^2 = \frac{1}{B_1^2} C \sigma_R^2 \quad (A1-4)$$

$$\frac{d\mu_Q}{dT} + \frac{3}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial T} \mu_Q = \frac{1}{B_1^3} C^2 \mu_{R3} \quad (A1-5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{Q4}}{dT} + \frac{4}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial T} \mu_{Q4} &= \frac{1}{B_1^4} C^3 (\mu_{R4} - 3\sigma_R^4) \\ &+ \frac{6}{B_1^2} \sigma_Q^2 C \sigma_R^2 \end{aligned} \quad (A1-6)$$

式(A1-2)と式(A1-4)～(A1-6)より、流出量の2～4次モーメントに関する理論式(式(62)～(64))を誘導することができる。

付録 2

定数係数の二階微分方程式と異なり、式(105)の \tilde{V} を陽形式に表現できない。ここで、式(105)を二つの一階微分方程式に分解するが、この際、一般性を確保するために複素関数を導入する。

$$\frac{d\tilde{V}_1}{dT} + f_3(T)\tilde{V}_1 = \tilde{R} \quad (\text{A2-1})$$

$$\frac{d\tilde{V}}{dT} + g_3(T)\tilde{V} = \tilde{V}_1 \quad (\text{A2-2})$$

$$f_3(T) = F_h(T) + jG_h(T) \quad (\text{A2-3})$$

$$g_3(T) = H_h(T) + jI_h(T) \quad (\text{A2-4})$$

j : 虚数単位, $j = \sqrt{-1}$

式(105)と式(A2-1),(A2-2)を比較することにより、式(108)～(111)が得られる。

\tilde{V}_1 と \tilde{V} は共に複素関数である。ここでは、これらを実部 $R_e[\cdot]$ と虚部 $I_m[\cdot]$ に分離し、以下のように表す。

$$\tilde{V}_1 = R_e[\tilde{V}_1] + jI_m[\tilde{V}_1] \quad (\text{A2-5})$$

$$\tilde{V} = R_e[\tilde{V}] + jI_m[\tilde{V}] \quad (\text{A2-6})$$

式(A2-2)を解いて、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= [C_1(T) - jS_1(T)]e^{-\int^T H_h(\tau_1)d\tau_1} \\ &\times \int_0^T [R_e[\tilde{V}_1(\tau_2)] + jI_m[\tilde{V}_1(\tau_2)]] [C_1(\tau_2) + jS_1(\tau_2)] \\ &\times e^{\int^{\tau_2} H_h(\tau_3)d\tau_3} d\tau_2 \end{aligned} \quad (\text{A2-7})$$

$$C_1(T) = \cos\left(\int^T I_h(\tau)d\tau\right) \quad (\text{A2-8})$$

$$S_1(T) = \sin\left(\int^T I_h(\tau)d\tau\right) \quad (\text{A2-9})$$

式(A2-8),(A2-9)から、式(112),(113)が与えられる。更に、式(A2-7)の \tilde{V} を実部と虚部に分離する。

$$R_e[\tilde{V}] = C_1(T)W_1(T) + S_1(T)W_2(T) \quad (\text{A2-10})$$

$$I_m[\tilde{V}] = -S_1(T)W_1(T) + C_1(T)W_2(T) \quad (\text{A2-11})$$

$$\begin{aligned} W_1 &= e^{-\int^T H_h(\tau_1)d\tau_1} \int_0^T [R_e[\tilde{V}_1(\tau_2)]C_1(\tau_2) \\ &- I_m[\tilde{V}_1(\tau_2)]S_1(\tau_2)]e^{\int^{\tau_2} H_h(\tau_3)d\tau_3} d\tau_2 \end{aligned} \quad (\text{A2-12})$$

$$\begin{aligned} W_2 &= e^{-\int^T H_h(\tau_1)d\tau_1} \int_0^T [R_e[\tilde{V}_1(\tau_2)]S_1(\tau_2) \\ &+ I_m[\tilde{V}_1(\tau_2)]C_1(\tau_2)]e^{\int^{\tau_2} H_h(\tau_3)d\tau_3} d\tau_2 \end{aligned} \quad (\text{A2-13})$$

一方、式(A2-1)を解けば、

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 &= [C_2(T) - jS_2(T)]e^{-\int^T F_h(\tau_1)d\tau_1} \\ &\times \int_0^T \tilde{R}(\tau_2)[C_2(\tau_2) + jS_2(\tau_2)]e^{\int^{\tau_2} F_h(\tau_3)d\tau_3} d\tau_2 \end{aligned} \quad (\text{A2-14})$$

$$C_2(T) = \cos\left(\int^T G_h(\tau)d\tau\right) \quad (\text{A2-15})$$

$$S_2(T) = \sin\left(\int^T G_h(\tau)d\tau\right) \quad (\text{A2-16})$$

式(111),(A2-8),(A2-9),(A2-15)及び式(A2-16)から次の関係式が得られる。

$$C_1(T) = C_2(T) \quad (\text{A2-17})$$

$$S_1(T) = -S_2(T) \quad (\text{A2-18})$$

式(A2-7)の \tilde{V} と同様に、式(A2-14)の \tilde{V}_1 も実部と虚部に分離する。

$$R_e[\tilde{V}_1] = C_1(T)W_3(T) + S_1(T)W_4(T) \quad (\text{A2-19})$$

$$I_m[\tilde{V}_1] = S_1(T)W_3(T) - C_1(T)W_4(T) \quad (\text{A2-20})$$

$$W_3 = e^{-\int^T F_h(\tau_1)d\tau_1} \int_0^T C_1(\tau_2)\tilde{R}(\tau_2)e^{\int^{\tau_2} F_h(\tau_3)d\tau_3} d\tau_2 \quad (\text{A2-21})$$

$$W_4 = e^{-\int^T F_h(\tau_1)d\tau_1} \int_0^T S_1(\tau_2)\tilde{R}(\tau_2)e^{\int^{\tau_2} F_h(\tau_3)d\tau_3} d\tau_2 \quad (\text{A2-22})$$

式(A2-19),(A2-20)を式(A2-12),(A2-13)に代入すると次式が得られる。 $W_5(T), W_6(T)$ は、それぞれ式(114),(115)で表される。

$$\begin{aligned} W_1 &= e^{-\int^T H_h(\tau_1)d\tau_1} \int_0^T [W_5(\tau_2)W_3(\tau_2) \\ &+ W_6(\tau_2)W_4(\tau_2)]e^{\int^{\tau_2} H_h(\tau_3)d\tau_3} d\tau_2 \end{aligned} \quad (\text{A2-23})$$

$$\begin{aligned} W_2 &= e^{-\int^T H_h(\tau_1)d\tau_1} \int_0^T [W_6(\tau_2)W_3(\tau_2) \\ &- W_5(\tau_2)W_4(\tau_2)]e^{\int^{\tau_2} H_h(\tau_3)d\tau_3} d\tau_2 \end{aligned} \quad (\text{A2-24})$$

Q は、実数値関数であるので、 V の実部のみを考えればよい。式(A2-10)から V の2～4次モーメントが、式(116)～(118)のように得られる。 V の2～4次モーメントと流出量 Q の2～4次モーメントとの関係は、式(101)から式(119)～(121)のようになる。

以上で、流出量の高次モーメントを得ることが可能となる。式(116)～(118)の $C_1(T)$ や $S_1(T)$ は決定論的関数であり、 $W_1(T)$ や $W_2(T)$ は確率変数である。従って、式(116)～(118)から得られる $E[W_1^m W_2^n]$ (m, n :整数)で表される関数を求めるとき、流出量の高次モーメントを求めるのに都合がよい。そこで、式(A2-21)～(A2-24)を T に関して微分すると次式が導かれる。

$$\frac{dW_1}{dT} + H_h W_1 = W_5 W_3 + W_6 W_4 \quad (\text{A2-25})$$

$$\frac{dW_2}{dT} + H_h W_2 = W_6 W_3 - W_5 W_4 \quad (\text{A2-26})$$

$$\frac{dW_3}{dT} + F_h W_3 = C_1(T) \tilde{R}(T) \quad (\text{A2-27})$$

$$\frac{dW_4}{dT} + F_h W_4 = S_1(T) \tilde{R}(T) \quad (\text{A2-28})$$

式(A2-25)～(A2-28)を用いて、 $E(W_1'' W_2'')$ に関する微分方程式を導くのだが、その際に無次元の連続的降雨量 R の2～4次のキューモラント関数($E(\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2))$, $E(\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)\tilde{R}(\tau_3))$, $E(\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)\tilde{R}(\tau_3)\tilde{R}(\tau_4))$)が必要となる。ここでは、式(44)～(46)を採用する。結果的に、式(122)～(149)が誘導される。

参考文献

- 1) 永井明博, 角屋睦: 洪水流出モデルの比較 -丘陵山地流域及び市街地流域を対象として-, 京都大学防災研究所年報, 第21号, pp. 235-249, 1978.
- 2) 平野宗夫, 伊藤尚規: 到達時間の分布を考慮した流出解析, 第22回水理講演会論文集, pp. 197-202, 1978.
- 3) 平野宗夫: 山地河川における流出過程について, 土木学会論文報告集, 第308号, pp. 69-76, 1981.
- 4) 藤田睦博: 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第314号, pp. 75-86, 1981.
- 5) 星清, 山岡勲: 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第26回水理講演会論文報告集, pp. 273-278, 1982.
- 6) 高木不折, 松林宇一郎: 流域内での流出特性の平均化過程と流出モデル, 土木学会論文報告集, 第312号, pp. 73-81, 1981.
- 7) 谷誠: 一次元鉛直不飽和浸透流によって生じる水面上昇の特性, 日本林学会誌, No. 64, pp. 409-418, 1982.
- 8) 谷誠: 山地流域の流出特性を考慮した一元鉛直不飽和浸透流の解析, 日本林学会誌, No. 67, pp. 449-460, 1985.
- 9) 松林宇一郎, 高木不折, 吉田直: 不飽和浸透流理論に基づく斜面流出の集中化について, 土木学会論文集, No. 497-II-28, pp. 11-20, 1994.
- 10) Budaghian, S., Fujita, M. and Shimizu, Y.: Lumping Process Based on Unsaturated Infiltration Theory, *Annual J. of Hydraulic Eng.*, JSCE, Vol. 39, pp. 209-266, 1995.
- 11) 八田茂実, 藤田睦博, 山梨光訓: 損失を考慮した卧報は浸透流理論の集中化, 土木学会論文集, No. 600-II-44, pp. 11-21, 1998.
- 12) 高棹琢馬, 宝馨, 橋橋康広: 洪水流出モデルの確率過程の評価に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第28号B-2, pp. 221-235, 1985.
- 13) 田中岳, 藤田睦博, Luai Hamouda, 工藤睦信: 拡張された周波数応答法の流出システムへの応用, 水工学論文集, 第42巻, pp. 181-186, 1998.
- 14) 藤田睦博, 工藤睦信, 中尾隆, 橋本職秀: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究 -降雨量が時間的に独立な確率過程の場合-, 土木学会論文集, No. 515-II-31, pp. 1-11, 1995.
- 15) Bras, R. L. and Georgakakos, K. P.: Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting -A Statistical Linearization Approach-, *Third International Symposium on Stochastic Hydraulics*, pp. 95-105, 1980.
- 16) 高棹琢馬, 椎葉充晴: 状態空間法による流出予測 -kinematic wave法を中心として-, 京都大学防災研究所年報, 第23号B-2, pp. 211-226, 1980.

(1998. 2. 5 受付)

COMPARISON BETWEEN THE KINEMATIC WAVE MODEL AND THE STORAGE FUNCTION RUNOFF MODEL - FREQUENCY CHARACTERISTIC AND STOCHASTIC CHARACTERISTIC -

Gaku TANAKA, Mutsuhiro FUJITA, Mutsunobu KUDO and Kunihide UCHIJIMA

Runoff models can be divided into two groups: distributed parameter models and lumped parameter models. These two groups of models have been developed independently. The relationships between these two models were studied in the early 1970's. Since then, many types of storage function runoff models have been derived from the Kinematic Wave model and the unsaturated flow model. However, the characteristics of the various storage function runoff models have not been evaluated sufficiently. This paper focuses on the Kinematic Wave model and three storage function runoff models derived from the Kinematic Wave model and shows the evaluation method based on the frequency response and the stochastic response.