

開水路流れにおける特異点近傍の水面形の時間的安定性

細田 尚

正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科 土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

開水路定常流の水面形は、支配断面から水面形方程式を追跡することで計算することができる。その際、水面形方程式の分母と分子が同時に0となる水深と位置が特異点である。水面形方程式を特異点の周りで線形化することで、特異点周辺の水面形が定性的に分類され、あらかじめ特異点を通る水面形の勾配を求めたのち、水面形解析が行われる。しかし、特異点周りの線形化方程式は、現実には存在しない射流から常流へ連続的に遷移する水面形を解として持つことが知られている。そこで本研究は、開水路非定常流の基礎式に基づき、特異点を通る定常な水面形からの擾乱を考え、擾乱を支配する式を導くとともにその時間的安定性について考察した。その結果擾乱は、鞍形点で常流から射流へ遷移する水面形以外、すべて時間的に不安定になり、現実的には存在しない可能性を示した。

Key Words: steady open channel flows, water surface profile analysis, stability analysis

1. はじめに

開水路定常流の水面形は、通常1次元解析法に基づいて導かれた水面形方程式を用いて記述され、支配断面から水面形を追跡することで計算することができる。水面形方程式の分子を0とする水深（擬似等流水深）と分母を0とする水深（限界水深）の交点は特異点であり、対象とする流れに特異点が存在する場合には、あらかじめその特性を調べた後、水面形解析が行われる。すなわち、水面形方程式を特異点の位置と水深の周りで線形化することで、特異点を鞍形点、結節点、渦状点の3通りに分類し、特異点を通る水面形の勾配を求める。

その際、線形化方程式の解として常流から射流に遷移する水面形だけでなく、現実的には存在しない射流から常流に連続的に遷移する水面形が存在することが指摘されているが、その理由は明らかにされていない¹⁾。

そこで本研究では、開水路非定常流の基礎式に基づき、特異点を通る定常な水面形からの擾乱を考え、擾乱を支配する式を導くとともにその時間的安定性について検討する。すなわち、分類された3通りの特異点を通る（渦状点の場合は特異点近傍）水面形の安定性を調べることで、射流から常流への連続的

な遷移が常に時間的に不安定になることを示す。

2. 基礎式

単位幅で考えた開水路非定常流の基礎式は式(1)および(2)で表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial uq}{\partial x} + gh \frac{\partial}{\partial x}(h + z_b) = -\frac{\tau_{bx}}{\rho} \quad (2)$$

ここに、 t : 時間、 x : 流れ方向を表す空間座標、 h : 水深、 q : 単位幅流量、 z_b : 基準水平面から測った路床高さ、 τ_{bx} : 底面せん断応力ベクトルの x 方向成分、 ρ : 水の密度、 g : 重力加速度である。また、運動量係数を1と仮定している。

底面せん断応力は、簡単のため定数の摩擦損失係数 f を用いて次式で評価する。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = fu^2 \quad (3)$$

水面形方程式は式(1)および(2)の定常解であり、定常解を $q_0 = \text{const.}$, $h = h_0(x)$ と表せば式(4)となる。

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{q_0^2}{h_0} \right) + gh_0 \frac{d}{dx} (h_0 + z_b) = -f \frac{q_0^2}{h_0^2} \quad (4)$$

非定常解を定常解と擾乱の和として式(5)で表す。
 $h = h_0(x) + h'$, $q = q_0 + q'$ (5)

式(5)を式(1)と(2)に代入し、擾乱が満たす式を導けば式(6)および(7)になる。

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\partial q'}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q'}{\partial t} - \frac{2q_0}{h_0} \frac{\partial h'}{\partial t} + \left\{ 2q_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h_0} \right) + \frac{2f q_0}{h_0^2} \right\} q' + \left(gh_0 - \frac{q_0^2}{h_0^2} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \left\{ \frac{2q_0^2}{h_0^3} \frac{dh_0}{dx} + g \frac{d}{dx} (h_0 + z_b) - \frac{2f q_0^2}{h_0^3} \right\} h' = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式(6)および(7)から q' を消去し、水深の擾乱 h' が満たす式を導く。

まず式(7)を x で微分し、式(4)と(6)を用いると次式が得られる。

$$q' \frac{d}{dx} \left\{ \frac{2gh_0}{q_0} \frac{d}{dx} (h_0 + z_b) \right\} = F(x, t) \quad (8)$$

ここに、 $F(x, t)$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} F(x, t) \equiv & -\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - \frac{2q_0}{h_0} \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + \left(gh_0 - \frac{q_0^2}{h_0^2} \right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \\ & + A(x) \frac{\partial h'}{\partial t} + B(x) \frac{\partial h'}{\partial x} + 3gh' \frac{d^2}{dx^2} (h_0 + z_b) \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)中、 $A(x)$ および $B(x)$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} A(x) &= -2q_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h_0} \right) + \frac{2gh_0}{q_0} \frac{d}{dx} (h_0 + z_b) \\ B(x) &= \frac{d}{dx} \left(gh_0 - \frac{q_0^2}{h_0} \right) + 3g \frac{d}{dx} (h_0 + z_b) \end{aligned}$$

式(8)を x で偏微分し、式(6)を用いると式(10)となる。

$$q' \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{2gh_0}{q_0} \frac{d}{dx} (h_0 + z_b) \right) - \frac{\partial h'}{\partial x} \frac{d}{dx} \left(\frac{2gh_0}{q_0} \frac{d}{dx} (h_0 + z_b) \right) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad (10)$$

式(8)と(10)を用いて q' を消去すれば、次式が得られる。

$$F(x, t) \frac{d^2 C(x)}{dx^2} - \frac{\partial h'}{\partial t} \left(\frac{dC(x)}{dx} \right)^2 - \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \frac{dC(x)}{dx} = 0 \quad (11)$$

ここに、 $C(x)$ は次式で定義される。

$$C(x) \equiv \frac{2gh_0}{q_0} \frac{d}{dx} (h_0 + z_b)$$

3. 特異点理論の概要

擾乱の安定解析を行う前に、式(4)の特異点の分類について述べる。

式(4)を書き直せば式(12)となる。

$$\frac{dh_0}{dx} = \frac{-\frac{dz_b}{dx} - f \frac{q_0^2}{gh_0^3}}{1 - \frac{q_0^2}{gh_0^3}} \quad (12)$$

擬似等流水深と限界水深はそれぞれ次式で定義される。

(擬似等流水深)

$$-\frac{dz_b}{dx} - f \frac{q_0^2}{gh_0^3} = 0 \quad (13)$$

(限界水深)

$$\frac{q_0^2}{gh_0^3} = 1 \quad (14)$$

式(13)と式(14)の交点が特異点であり、両式より特異点では次式が成立する。

$$f = -\left(\frac{dz_b}{dx} \right)_S \quad (15)$$

ここに、下添え字 S は特異点の値であることを示す。

式(12)を特異点の周りで線形化すれば式(16)となる。

$$\frac{d\delta h}{dx'} = \frac{a\delta h + bx'}{c\delta h + dx'}, x' = x - x_S, \delta h = h - h_S \quad (16)$$

ここに、 $a \sim d$ は次式で定義される。

$$a = \frac{3f}{h_S}, b = -\left(\frac{d^2 z_b}{dx'^2} \right)_S, c = \frac{3}{h_S}, d = 0$$

特異点は式(16)の係数行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の固有値によって以下のように分類される。

(a) 鞍形点：二つの固有値が実数で異符号
条件は

$$\left(\frac{d^2 z_b}{dx'^2} \right)_S < 0 \quad (17)$$

であり、特異点を通る式(16)の解として、式(18)の水面勾配を有する二つの直線が存在し、一つは常流から射流に、いま一つは射流から常流に遷移する解である（図-1(a)参照）。

$$\left(\frac{d\delta h}{dx'} \right)_S = \frac{3f \pm \sqrt{9f^2 - 12h_S(d^2 z_b / dx'^2)_S}}{6} \quad (18)$$

(b) 結節点：二つの固有値が実数で同符号
条件は式(19)となる。

$$\left(\frac{d^2 z_b}{dx'^2} \right)_S > 0, \quad 9f^2 - 12h_S \left(\frac{d^2 z_b}{dx'^2} \right)_S > 0 \quad (19)$$

また、特異点を通る解は、式(18)の複合のうち、負（マイナス）で示される勾配を持つ一本の直線であり（水面勾配の値は正）¹⁾、射流から常流への遷移を表している（図-1(b)参照）。

(c) 湍状点：二つの固有値が共役複素数

条件は式(20)で表される。

$$9f^2 - 12h_S \left(\frac{d^2 z_b}{dx'^2} \right)_S < 0 \quad (20)$$

この場合の係数行列の固有値は式(21)となる。

$$\lambda = \lambda_r + i\lambda_i = \frac{a}{2} + i\frac{\sqrt{-a^2 - 4bc}}{2} \quad (21)$$

λ_r, λ_i およびパラメータ σ を用いて解を表せば式(22)となる（図-1(c)参照）。

$$\delta h = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} r_0 \exp(\lambda_r \sigma) \sin(\theta_0 - \lambda_i \sigma) \quad (22-a)$$

$$x' = r_0 \exp(\lambda_r \sigma) \cos(\theta_0 - \lambda_i \sigma) \quad (22-b)$$

ここに、 r_0, θ_0 は水面形追跡の出発点を表すパラメータであり、 α, β は次式で定義される。

$$\alpha = \frac{\lambda_r - a}{c}, \quad \beta = \frac{\lambda_i}{c} \quad (23)$$

式(22)より、特異点位置 $x' = 0$ での水面勾配は次式となる。

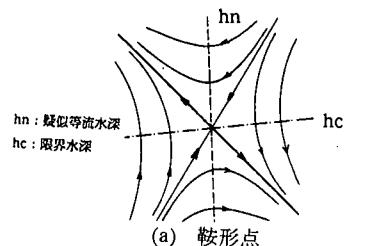
$$\left(\frac{d\delta h}{dx'} \right)_{x'=0} = \frac{a}{c} = f \quad (24)$$

4. 安定解析

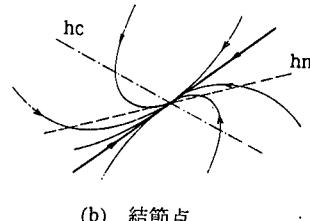
定常解である特異点を通る水面形は、式(4)を満たす必要がある。前節で述べたことから、鞍形点と結節点の場合、下記の式(25)は式(4)を x' のオーダーで満たす。（簡単のため x' の'を省略する。）

$$h_0 = h_S + \left(\frac{dh}{dx} \right)_S x, \quad z_b = z_{bS} + \left(\frac{dz_b}{dx} \right)_S x + \left(\frac{d^2 z_b}{dx^2} \right)_S \frac{x^2}{2} \quad (25)$$

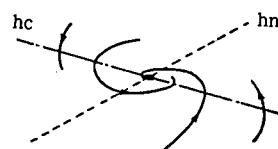
従来の特異点近傍の水面形に関する研究では、路床の曲率（2階微分）までを考慮することで、水工学で対象としている流れの水面形の分類が行われている¹⁾。そこで本研究でも、式(25)において、特異点近傍で路床の2階微分と、それに対応する水面勾配までを考慮している。



(a) 鞍形点



(b) 結節点



(c) 渦状点

図-1 特異点の分類と解の定性的な形状

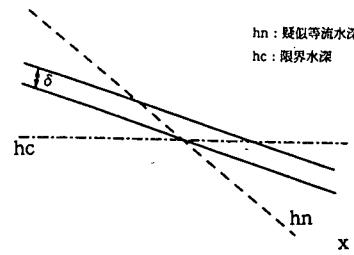


図-2 時間的安定性を考える擾乱

そこで、 h_0 を式(25)とし、直線である式(25)の第1式から平行移動した擾乱を考える（図-2参照）。

$$\Delta h = \delta(t) \quad (26-a)$$

上式は、擾乱の形を特異点位置のまわりでテイラ展開した式の第1項を表している。（渦状点については後述する。）より高次の近似として、 Δh を式(26-b)で表し、 $\delta_0(t), \delta_1(t), \delta_2(t)$ の安定性を連立して解析することが考えられる。しかし、非常に複雑になるため、本研究では主要項と考えられる $\delta_0(t)$ の安定性のみ考察する。

$$\Delta h = \delta_0(t) + \delta_1(t)x + \delta_2(t)x^2 + \dots \quad (26-b)$$

式(26-a)を式(9)に代入すれば式(27)となる。

$$F(x, t) = -\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + A(x)\frac{d\delta(t)}{dt} + 3g\delta(t)\frac{d^2}{dx^2}(h_0 + z_b) \quad (27)$$

式(27)を式(11)に代入し、整理すれば次式が得られる。

$$P\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + Q\frac{d\delta(t)}{dt} + R\delta(t) = 0 \quad (28)$$

ここに、 P, Q, R は次式で定義される。

$$P = -\frac{d^2C}{dx^2}, Q = A(x)\frac{d^2C}{dx^2} - \left(\frac{dC}{dx}\right)^2 - \frac{dA}{dx}\frac{dC}{dx},$$

$$R = 3g\left\{\frac{d^2C}{dx^2}\frac{d^2}{dx^2}(h_0 + z_b) - \frac{dC}{dx}\frac{d^3}{dx^3}(h_0 + z_b)\right\} \quad (29)$$

式(28)に $\delta(t) = \exp(\gamma t)$ を代入すると

$$\gamma = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} \quad (30)$$

となる。擾乱が不安定となる条件は、式(30)の少なくとも一つが $\text{Real}(\gamma) > 0$ となることであり、安定と不安定の条件を整理すれば以下のようになる。

[擾乱の安定・不安定の分類]

$PR < 0$ の場合：異符号の 2 実根－不安定

$PR > 0$ かつ $Q^2 > 4PR$ の場合：

$PQ > 0$ のとき負の 2 実根－安定

$PQ < 0$ のとき正の 2 実根－不安定

$PR > 0$ かつ $Q^2 < 4PR$ の場合：

根は共役複素数で

$PQ > 0$ のとき実部が負－安定

$PQ < 0$ のとき実部が正－不安定

以下に、特異点の分類に対応した擾乱の安定と不安定の分類を行う。

(1) 鞍形点の場合

式(18)に示すように、複合の-に対応する常流から射流に遷移する場合と、+に対応する射流から常流に遷移する場合がある。それぞれの安定性を示せば以下になる。

(-の場合)

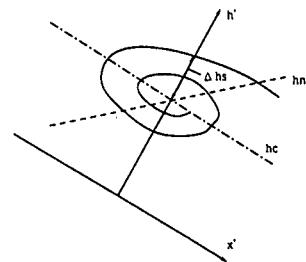


図-3 漪状点の場合に考える擾乱

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_S < 0, \left(\frac{d^2z_b}{dx^2}\right)_S < 0, \text{ および}$$

式(15)と式(18)から導かれる

$$\left(\frac{d^2z_b}{dx^2}\right)_S = -\frac{3}{h_S} \left(\frac{dh}{dx}\right)_S \left(\frac{dh}{dx} - f\right)_S \quad (31)$$

を考慮すれば

$$P = -\frac{4g}{q_0} \frac{dh}{dx} \frac{d^2z_b}{dx^2} = \frac{12q_0}{h_0^4} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 \left(\frac{dh}{dx} - f\right) < 0$$

$$Q = -40 \frac{q_0^2}{h^6} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 \left(\frac{dh}{dx} - f\right) \left(3 \frac{dh}{dx} - 2f\right) < 0$$

$$R = 3g \frac{d^2C}{dx^2} \frac{d^2z_b}{dx^2} = 108 \frac{q_0^3}{h_0^8} \left(\frac{dh}{dx}\right)^3 \left(\frac{dh}{dx} - f\right)^2 < 0$$

となる。よって、 $PR > 0, PQ > 0$ となり、安定であることがわかる。簡単のため、以後下添え字 S を省略する。

(+の場合)

$\frac{dh}{dx} > 0, \frac{d^2z_b}{dx^2} < 0$ および式(30)から $\frac{dh}{dx} - f > 0$ であり、 $P > 0, Q < 0, R > 0$ となるので不安定。

(2) 結節点の場合

前述のように、特異点を通る解は式(18)の複合の内、マイナスの場合の一本だけであり、

$$\frac{d^2z_b}{dx^2} > 0, 3f^2 > 4h \frac{d^2z_b}{dx^2}$$

から

$$0 < \frac{dh}{dx} < \frac{f}{2}$$

となる。よって、 $P < 0, Q < 0, R > 0$ となるので不安定。

(3) 漪状点の場合

渪状点の場合、特異点を通る直線の線形定常解がないため、式(25)を用いることができない。すなわち、図-3に示したように、渪状点の解曲線が

$x = x_S$ を通過する点の近傍では、解曲線は次式で表される。

$$h_0 = (h_S + \Delta h_S) + \left(\frac{dh}{dx} \right)_S x + \left(\frac{d^2 h}{dx^2} \right)_S \frac{x^2}{2},$$

$$z_b = z_{bS} + \left(\frac{dz_b}{dx} \right)_S x + \left(\frac{d^2 z_b}{dx^2} \right)_S \frac{x^2}{2}, \quad (32)$$

上式中、 Δh_S は特異点からの任意の微小な水深偏差であり、式(32)第1式は、定常な水面形を $h_S + \Delta h_S$ 周りのテイラー展開で表したものである。

式中の $(dh/dx)_S$ は式(24)で与えられる。

式(32)を式(4)に代入し、式(15)と式(24)を用いれば次式が得られる。

$$\left(\frac{d^2 h}{dx^2} \right)_S = -\frac{h^2}{3\Delta h_S} \left(\frac{d^2 z_b}{dx^2} \right)_S \quad (33)$$

ただし、特異点の近傍を考えているので、 Δh_S の2次以上の項を無視している。

式(15)、式(24)および式(33)を用いて、 $x = x_S$ での P, Q, R を求めれば次式となる。

$$P = -\frac{4g}{q_0} f \frac{d^2 z_b}{dx^2} \left(1 - \frac{h_S}{3\Delta h_S} \right)$$

$$Q = -\frac{4g}{h_0} \left(\frac{d^2 z_b}{dx^2} \right)^2 \left(1 - \frac{h_S}{3\Delta h_S} \right) \left(1 - \frac{h_S}{\Delta h_S} \right)$$

$$R = \frac{12g^2}{q_0} f \left\{ \frac{d^2 z_b}{dx^2} \left(1 - \frac{h_S}{3\Delta h_S} \right) \right\}^2 > 0$$

R は常に正であり、 P, Q の符号は Δh_S の正負に応じて変化する。 $(\Delta h_S > 0)$ は特異点の上、 $\Delta h_S < 0$

は下を意味する。)

$\Delta h_S > 0$ のとき、 $|\Delta h_S/h_S| \ll 1$ より $P > 0, R > 0, Q < 0$ となり不安定、 $\Delta h_S < 0$ のときも $P < 0, R > 0, Q < 0$ で不安定となる。

以上述べたことより、擾乱の0次項のみ考慮した安定解析では、特異点近傍の水面形は、鞍形点を通り常流から射流に遷移する水面形以外、時間的に不安定になることが示された。

5. おわりに

定常な開水路流れの水面形解析では、水面形方程式の特異点近傍の解析によって、現実には存在しない射流から常流に連続的に遷移する解が存在することが知られている。そこで本研究では、開水路非定常流の基礎式に基づき、特異点を通る定常な解からの擾乱を考え、擾乱を支配する式を導くとともにその時間的安定性について検討した。

その結果、擾乱の0次項のみ考慮した安定解析結果では、鞍形点を通り常流から射流に遷移する水面形以外、擾乱は時間的に不安定になることが示された。

参考文献

- 1) 石原藤次郎編：水工水理学 2. 漸変流の水理とその応用、丸善、1972,

(1998. 3. 12 受付)

STABILITY ANALYSIS OF WATER SURFACE PROFILE IN OPEN CHANNEL FLOWS NEAR A SINGULAR POINT

Takashi HOSODA

The water surface profile analysis in open channel flows is carried out to predict the water depth of rivers and artificial channels by using the steady one-dimensional flow equation. If a singular point, which is defined as the intersection of the quasi-normal depth and the critical depth, exists in a flow, the classification of a singular point is done and then the water surface profile is calculated from the control section. It is known that the singular point analysis predicts the transitional profile from the high velocity flow ($Fr > 1$) to the normal flow ($Fr < 1$) through a singular point, which is never realized in actual flows. Using the unsteady flow equations, the stability analysis of the water surface profile near a singular point with respect to time is carried out. It is proved that the transition from the normal flow to the high velocity flow through the saddle point is stable and the other types of transitions are unstable and are never realized.