

比較的厚肉の円筒殻における提灯座屈からダイヤモンド座屈への塑性分岐過程の解析

後藤芳顯¹・張崇厚²

¹正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科 (〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

²学生員 工修 名古屋工業大学大学院 社会開発工学専攻 (〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

軸圧縮力を受ける比較的厚肉の円筒殻は塑性域で最初、座屈モードの局所化により軸対称のいわゆる提灯座屈が生ずるが、変位制御で荷重を継続するとダイヤモンド座屈モードに変化することが実験的に観察されている。ここでは、厳密な塑性分岐解析によりこのような塑性座屈モードの変化の過程を解析した。解析結果として、ダイヤモンド座屈モードは、軸対称座屈モードの局所化による提灯座屈発生後に塑性分岐により生ずること、周方向の座屈波数は径厚比が大きいほど多いこと、さらに、ダイヤモンド型モードへの変化にともない局部的なひずみ集中度が大きく増加するため延性破壊による亀裂発生にもつながる可能性もあることなどが判明した。

Key Words: cylindrical shell, axial compression, plastic bifurcation, diamond buckling, elephant foot buckling

1. まえがき

軸圧縮力下の短い鋼製円筒殻の塑性座屈モードに関しては、数多くの実験により検討されている。これらの研究によると、厚肉円筒殻は軸対称座屈が生じ、薄肉円筒殻では非軸対称のダイヤモンド座屈モードが支配的になることが報告されている^{1),2)}。一方、土木・建築分野で用いられるような比較的厚肉の円筒殻では、最初、塑性座屈モードの局所化により軸対称のいわゆる提灯座屈が生ずるが、変位制御で荷重を継続するとダイヤモンド型の座屈モードに変化することが実験的に観察されている²⁾⁻⁹⁾。しかしながら、このような現象がいつ、どのようにして起こるかということ、さらに、部材の耐荷特性や変形能に与える影響についてはほとんど解明されていないのが現状である。このような問題を明らかにするには理論的なアプローチが不可欠である。

両端固定の比較的厚肉の円筒殻について、上記の座屈現象に特有な釣り合い経路を变形モードとともに模式的に図-1に示す。円筒殻に軸圧縮力を作用させると、両端が固定であることにより最初、円筒殻の上部と下部に軸対称な膨らみが現れる。荷重を増加させると、このような变形モードのまま塑性化が生じ最大荷重に到達する。最大荷重到達後、変位制御で荷重を続けると荷重減少領域で塑性分岐により座屈モードの局所化現象が発生し、上、下部い

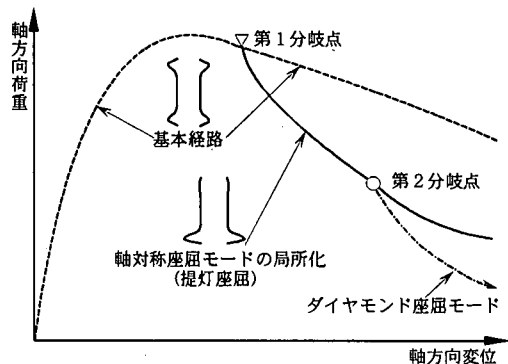


図-1 圧縮を受け両端固定の円筒殻のつり合い経路

れかの座屈波形が急激に成長し提灯座屈形状となる。さらに、変位制御で荷重を継続すると、二次分岐が発生し局所化した軸対称モードから周方向に周期的なダイヤモンド座屈モードに変化する。このような座屈現象をはじめに理論的に解析したのは、Tvergaard⁶⁾である。しかしながら、彼の研究では、提灯座屈が発生する軸対称座屈モードの局所化現象の解析では、初期不整を与えることによっており、厳密な塑性分岐解析が行われていない。また、ダイヤモンド座屈モードへの変化においてもその分岐点を特定しているだけで、ダイヤモンド型モードへの分岐経路とそれにとまなう変形形状がどのように推移するかについては全く解析されていない。すなわち、ダイヤモンド座屈モードへの変化により、円筒

殻の変形能や耐荷特性がどのように影響を受けるかについては明らかにされていない。著者らも⁷⁾、軸対称座屈モードの局所化現象については、すでに、有限要素法に基づく厳密な塑性分岐解析により力学特性を検討しているが、ダイヤモンド座屈モードへの変化過程の解析までには至っていない。

本論文では、著者らによる過去の研究をさらに押し進めて、軸対称の提灯座屈モードから、ダイヤモンド座屈モードへの変化の全過程を厳密な塑性分岐解析により正確に解析し、その力学挙動について検討することを目的とする。本解析では、軸対称座屈モードの局所化により提灯座屈の生ずる第一塑性分岐点の解析に続き、ダイヤモンド座屈モードへの変化の生ずる第二塑性分岐点の解析をいわゆるシェル要素を用いて行わねばならない。とくに、第二分岐点では、非軸対称のダイヤモンド型モードへの分岐を解析する必要があるため、通常、膨大な計算量が必要である。このため、数値上の誤差が生じやすく塑性分岐解析が困難な場合が多い。ここでは、第二分岐点でのダイヤモンド座屈モードが円筒殻の周方向に周期性を持っていることに着目し、自由度の低減をはかることで、第二分岐点での解析を可能としている。

2. 材料構成則

鋼製円筒殻の塑性構成則として、流れ則には J2 流れ則、硬化則としては Ziegler の移動硬化則と等方硬化則とを考慮した混合硬化則を用いている。このような塑性理論に基づく増分型の応力・ひずみ関係を次式で表す。

$$\Delta\sigma_i = E_{ij}\Delta\epsilon_j \quad (1)$$

式(1)の接線係数 E_{ij} は弾性域において

$$[E_{ij}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} = [E_{ij}^e] \quad (2)$$

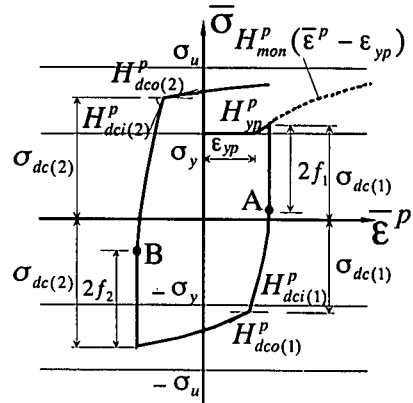
塑性域において

$$E_{ij} = E_{ij}^e - q \cdot E_{il}^e E_{kj}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_l} \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} = E_{ij}^{ep}$$

$$q = 1 / \left(h_K + h_l + \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} E_{kl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_l} \right) \quad (3a, b)$$

ここに、 E 、 ν は Young 係数と Poisson 比。 h_K 、 h_l はそれぞれ移動硬化係数と等方硬化係数。 f は von Mises の降伏関数で降伏曲面の半径に相当する。

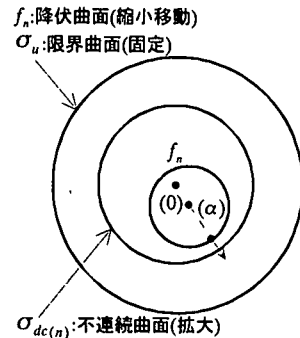
本解析では、塑性係数 $H_p = h_K + h_l$ の変化を著者



(point A: $n=1$; point B: $n=2$)

n : n 番目の塑性負荷開始点

(a) 相当応力-相当塑性ひずみ関係



(b) 多軸応力下の曲面

図-2 三曲面モデル

の一人により提案された三曲面モデル⁸⁾により評価する。なお、今回の単調載荷時の解析では、単調載荷曲線に基づく等方硬化則や移動硬化則⁸⁾でも扱えると考えられるが、今後の繰り返し挙動の解析への拡張を考慮して三曲面モデルを用いる。三曲面モデルは、鋼材に特有の降伏棚、繰り返しによる弾性域の縮小やひずみ硬化係数の変化などを正確に考慮しており、その妥当性は薄肉断面鋼製橋脚の耐荷力実験の解析により確認されている。三曲面モデルについては、すでに文献 8) に詳述しているがその概要を以下に簡単に述べる。

弾性域の縮小については、相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}_p$ の大きさに支配されると考え、降伏曲面の半径 f が次式で表されると仮定する。

$$f = f_b - (f_b - \sigma_y) e^{-\beta \bar{\epsilon}_p} \quad (4)$$

ここに、 σ_y は引っ張り試験により得られる降伏応力、 f_b は縮小した降伏曲面の収束値、 β は縮小係数。

降伏棚上では、塑性係数 H_p が一定であるとする。

ひずみ硬化領域では Dafalias と Popov の二曲面モデルの関数形

$$H^p = h_l + h_k = h\delta / (\delta_{in} - \delta) \quad (5)$$

を用いる。限界曲面の中心は原点に固定され、半径は鋼材の引っ張り強度 σ_u と等しい。硬化形状係数 h は応力点により変化させる。すなわち、図-2 に示すように、降伏曲面と限界曲面の間に等方硬化する不連続曲面を挿入し、この曲面の内外で硬化形状係数 h を不連続に変化させることで、より適切に塑性硬化係数の変化を表す。初期の不連続面は初期降伏面と一致しており、降伏棚の消失とともに、最大経験相当応力をその半径として等方硬化を開始している。塑性係数 H_p は、不連続曲面上の内外において、異なった値 H_{dc}^p 、 H_{doc}^p をとるものとする。

以上の三曲面モデルの材料定数は、Young 係数 E 、Poisson 比 ν 、降伏応力 σ_y 、引っ張り強度 σ_u 、降伏棚の長さ ε_{yp} 、単調引っ張り試験により得られる硬化係数 H_{mon}^p ($\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_{yp}$)、縮小した降伏曲面の収束値 f_b / σ_y 、降伏曲面の縮小係数 β 、不連続曲面上の外側の硬化係数 H_{doc}^p / E である。このうち、 f_b / σ_y は過去の繰返し載荷実験より明らかになっている。また、 β と H_{doc}^p / E は薄肉鋼柱の繰返し試験をもとに、キャリブレーションにより決定されており、鋼種によらず定数として扱えることも判明している。それ以外のパラメータは通常の素材試験により求める。以上のように、三曲面モデルの材料パラメータは基本的には通常の引っ張り試験によりすべて決定できる。

3. 変位制御下の塑性分岐解析

軸対称の提灯座屈モードから、ダイヤモンド座屈モードへの変化の全過程を解析するためには、軸対称座屈モードの局所化により提灯座屈が生ずる第一塑性分岐挙動とダイヤモンド座屈モードへの変化点となる第二塑性分岐挙動を解析しなければならない。いずれの分岐も荷重減少する釣り合い経路上で生ずるため変位制御下の塑性分岐解析を行う必要がある。このような塑性分岐解析法については有限要素法に基づくものが著者らにより提示されている^{7,9-11)}。本解析ではこの方法を用いるので簡単に説明する。

変位制御下の塑性分岐の条件を円筒殻の剛性方程式を用いて表示すると以下のようなになる。

表-1 主経路・分岐経路での除荷・負荷の組み合わせ

組み合わせ	主経路(f)	分岐経路(b)
I	L or N	L or N
II	L or N	U or N
III	U or N	U or N
IV	U or N	L or N

注：L: 負荷 N: 中立 U: 除荷

$$\Delta \Pi = (\Delta \bar{D}_i^b - \Delta \bar{D}_i^f) \Delta \bar{K}_{ij}^c (\Delta \bar{D}_j^b - \Delta \bar{D}_j^f) + \sum_{V_l} \int_{V_l} \Delta \mu dV = 0 \quad (6)$$

$$\Delta \mu = \left[(\Delta \varepsilon_i^b - \Delta \varepsilon_i^f) \left\{ (E_{ij}^c - E_{ij}^f) \Delta \varepsilon_j^f + (E_{ij}^b - E_{ij}^c) \Delta \varepsilon_j^b \right\} \right] \quad (7)$$

ここに、 $\{\Delta \bar{D}_j\}$ は変位制御されない増分節点変位成分、 $\{\Delta \varepsilon_j\}$ はひずみ成分、 E_{ij} は材料の接線剛性係数、 $[\bar{K}_{ij}]$ は円筒殻モデルの変位制御下の増分型剛性行列をそれぞれ表す。 $\int_{V_l} \Delta \mu dV$ は有限要素 l 全領域にわたりについて積分することを意味する。上添え字 c は Elastic comparison solids に関する諸量を表す。Elastic comparison solids では、塑性域にある応力点から除荷する場合も塑性剛性をとると仮定される。さらに、上添え字 f と b はそれぞれ、基本経路と、分岐経路上の諸量を表す。なお、第二分岐点での分岐を扱うときは、第一分岐経路が基本経路、第二分岐経路が分岐経路という扱いになる。

塑性状態では、負荷・中立・除荷の基準は次式のように表される。

$$\begin{aligned} &> 0: \quad \text{負荷} \\ E_{kl}^c \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \Delta \varepsilon_l &= 0: \quad \text{中立} \\ &< 0: \quad \text{除荷} \end{aligned} \quad (8)$$

分岐点から、基本経路、分岐経路方向への増分に対して、分岐点で塑性状態にある応力点がそれぞれの経路方向に負荷するか、除荷するかに関しては 4 種類の組み合わせが存在する(表-1)。4 種類の組み合わせに対して、式(7)で与えられる $\Delta \mu$ は次のようになる。

I (基本経路方向で負荷あるいは中立、分岐経路方向で負荷あるいは中立)

$$\Delta \mu = 0 \quad (9a)$$

II (基本経路方向で負荷あるいは中立、分岐経路方向で除荷あるいは中立)

$$\Delta\mu = qE_{ij}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} (\Delta\varepsilon_i^b - \Delta\varepsilon_i^f) \quad (9b)$$

$$\times E_{kj}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \Delta\varepsilon_j^b \geq 0$$

Ⅲ (基本経路方向で除荷あるいは中立, 分岐経路方向で除荷あるいは中立)

$$\Delta\mu = qE_{ij}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} (\Delta\varepsilon_i^b - \Delta\varepsilon_i^f) \quad (9c)$$

$$\times E_{kj}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} (\Delta\varepsilon_j^b - \Delta\varepsilon_j^f) \geq 0$$

Ⅳ (基本経路方向で除荷あるいは中立, 分岐経路方向で負荷あるいは中立)

$$\Delta\mu = -qE_{ij}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} (\Delta\varepsilon_i^b - \Delta\varepsilon_i^f) \quad (9d)$$

$$\times E_{kj}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \Delta\varepsilon_j^f \geq 0$$

変位制御下では, 最大荷重点以降も, 第一分岐点までの基本経路上ならびに, 第一分岐点から第二分岐点に至る第一分岐経路上において接線剛性行列 $[\tilde{K}_{ij}^c]$ が正値定符号であり, 連続に変化すること, さらに, 式(9)より常に $\Delta\mu \geq 0$ で有ることを考慮すると, 分岐が可能になるのは, 式(6)の第1項と第2項とが同時に零になるときである。

第1項が零になる条件は

$$\det[\Delta\tilde{K}_{ij}^c] = 0; \Delta D_j^b - \Delta D_j^f = C\Delta D_j^m \quad (10a, b)$$

ここに, $\{\Delta D_j^m\}$ は $[\tilde{K}_{ij}^c]$ の零固有値に対する固有ベクトルである。

第2項が零になる条件は

$$\sum_{i=1}^n \int_{V_i} \Delta\mu dV = 0 \quad (11)$$

と表される。式(11)が成り立つためには式(9a,b)より分岐経路方向の増分に対して塑性状態にある応力点が負荷するか, 中立状態にあることが必要であり, 中立状態にある条件から式(10b)の定数 C を一般に定めることができる。

4. 円筒殻の塑性座屈挙動の解析

解析対象は図-3 に示すように両端固定の円筒殻である。ここでは, 圧縮荷重が剛体載荷板を介して軸方向に載荷された場合の挙動を解析する。載荷は変位制御で, 上載荷板の鉛直変位 δ_v を零から $\delta_v/L = 4.0 \times 10^{-2}$ まで単調に増加させる。

このような円筒殻の提灯座屈モードからダイヤモ

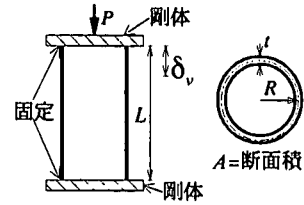


図-3 解析モデル

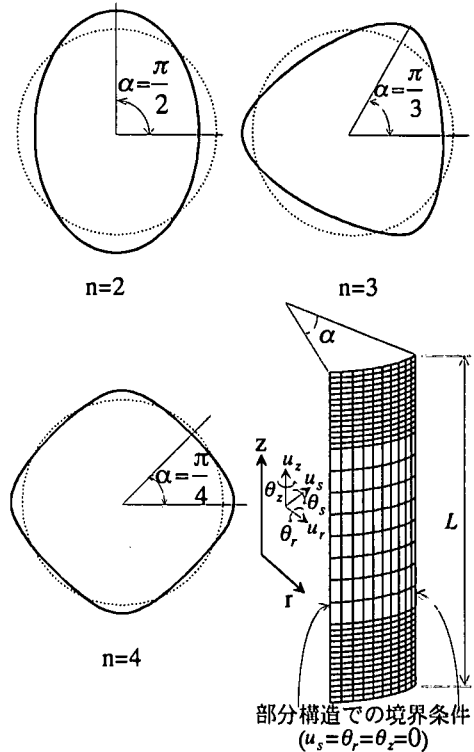


図-4 ダイヤモンド座屈モードにおける周方向座屈波形と周期性を利用した部分構造モデル

ンド座屈モードへの座屈挙動の変遷を解析する場合, 非軸対称弾塑性変形を解析する必要があるため, 軸対称モデルを用いることができず, 一般には全構造を対象に解析することになる。しかしながら, 全構造を対象として弾塑性解析を行うと, 有限要素分割にともなう自由度の増加により誤差が生じ, 第二分岐までの弾塑性分岐挙動を正確に解析するのが困難になる場合が多い。さらに, 円筒殻の塑性座屈解析では精度を確保するために, 十分細かい有限要素分割が必要となり, 多大な計算時間も必要となる。

ここでは, ダイヤモンド座屈モードが, 円筒の周方向に対して周期性を持っていることが既知であることを利用して上記のような問題点を回避する。すなわち, 解析モデルとしては, 図-4 に示すようなダイヤモンド座屈モードにおける周方向の周期波形の半波分に対応する部分構造を用いる。この半波分

表-2 円筒殻の諸元(R=100mm)

Type	L(mm)	t(mm)	L/R	R/t
C1	300	2.0	3	50
C2	600	2.0	6	50
C3	300	1.5	3	66.7
C4	600	1.5	6	66.7
C5	300	1.2	3	83.3
C6	600	1.2	6	83.3
C7	300	1.0	3	100
C8	300	0.9	3	111.1
C9	300	0.7	3	142.9
C10	300	0.6	3	166.7

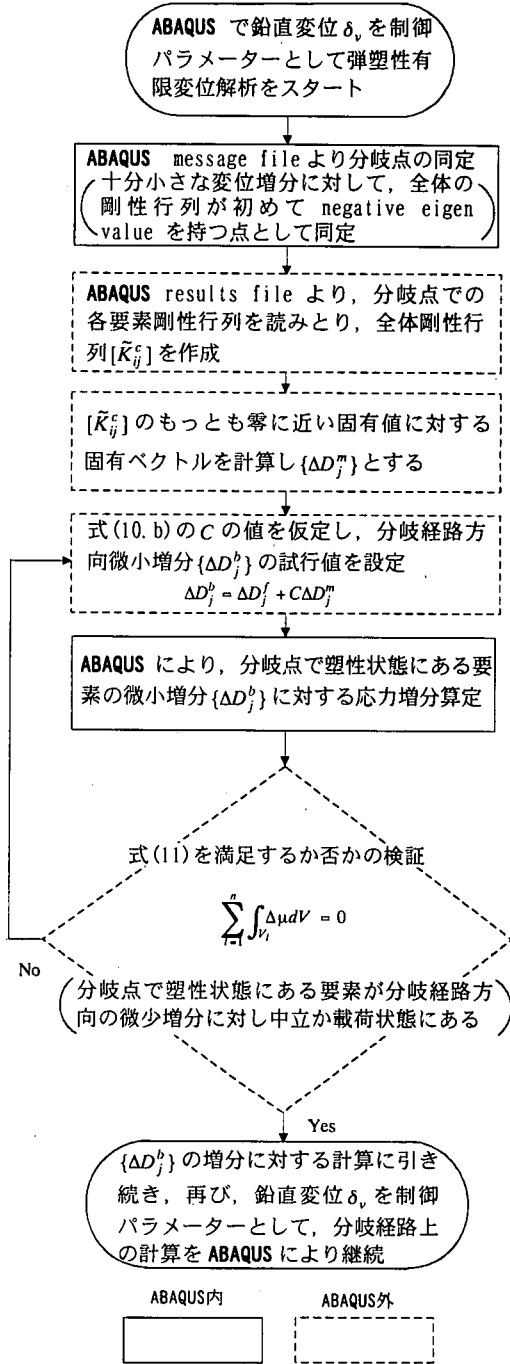


図-5 数値計算における塑性分岐解析の手続

は円筒殻の中心軸と $\alpha = \pi/n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) の角度をなすが、 n がいくらになるか未知である。したがって、 n を 2, 3, 4, \dots と変化した各部分構造に塑性分岐解析を実施し、最小の鉛直変位 δ_0 で分岐が生ずる部分構造を当該モデルとする。この手法では、ひとつの円筒殻に対して n の値を同定するために数

材料定数	
E	$= 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$
σ_y	$= 298.9 \text{ MPa}$
ν	$= 0.3, \sigma_u = 549.7 \text{ MPa}$
ϵ_{yp}	$= 0.012, H_{yp}^p = E/40$
H^p	$= E/500$ (降伏棚上)
H_{dci}^p	$= E/20, f_b = 0.65\sigma_y, \beta = 100$

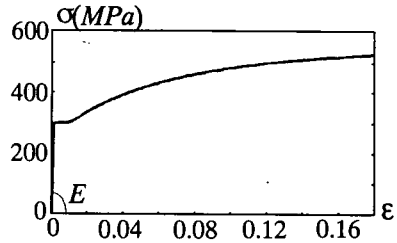


図-6 材料定数と一軸応力・ひずみ関係

回の解析が必要になるが、全体モデルを用いる解析に比べると精度、計算時間の両方において優れており、ほぼ確実に第二分岐までの挙動を解析できる。

シェル要素を用いた弾塑性有限変位解析は汎用プログラム ABAQUS¹²⁾ の S4R 要素による。計算の効率化のために、局部変形の大きい上下端のみ細かいメッシュを用いる。上述のモデルの精度は、全領域でメッシュをより細かくしたモデル(周方向 1.5 倍、軸方向約 2 倍)と比較することで確認している。三曲面モデルに基づく弾塑性構成則については User Subroutine を用いて同プログラムに組み込む⁸⁾。ただし、ABAQUS は分岐解析を行えないので、分岐点の同定ならびに分岐方向への増分量の決定は、ABAQUS の results file における要素剛性行列を取り出し、3. に示した分岐解析を別途実施することで対応する。分岐点では、この様に決定した分岐方向への増分量を変位制御量として ABAQUS に与える

表-3 両端固定の円筒殻の座屈挙動

Type	L/R	R/t	座屈モード	最終変位での周方向座屈波数 n
C1	3	50	E	1
C2	6	50	E	1
C3	3	66.7	E→D	3
C4	6	66.7	E→D	3
C5	3	83.3	E→D	4
C6	6	83.3	E→D	4
C7	3	100	E→D	4
C8	3	111.1	E→D	5
C9	3	142.9	E→D	6
C10	3	166.7	(E→)D	6

注： E: 提灯型 D: ダイヤモンド型
 →: 変化 (→): 見かけ上変化なし

ことで、分岐経路方向へ釣り合い経路のスイッチを行う。以上の手続きを図-5にまとめる。

解析対象とする両端固定の円筒殻の構造諸元を表-2にまとめる。これらの円筒殻では、構造パラメーターが座屈挙動に与える影響を調べるために、径厚比 R/t および長さ半径の比 L/R を変化させたモデルを設定している。鋼材の構成則としては STS35 の変圧配管用炭素鋼鋼管のデータをもとに、図-6に示すような、一軸の真応力・対数ひずみ関係と三曲面モデルのパラメーターを設定する。

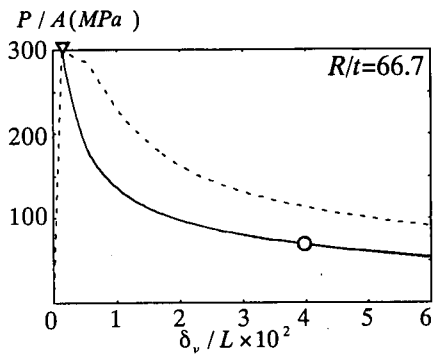
5. 両端固定の円筒殻の塑性座屈挙動

表-2に示した各種構造パラメーターを持つ円筒殻の解析結果について、塑性座屈モードの変化過程とダイヤモンド座屈モードでの周方向座屈波形の波数を表-3にまとめる。この表から肉厚のもっとも厚い C1, C2 type の円筒殻を除いて、他はすべて載荷された変位の範囲 ($0 \leq \delta_v/L \leq 4.0 \times 10^{-2}$) で、提灯座屈モードからダイヤモンド座屈モードへ変化するのがわかる。

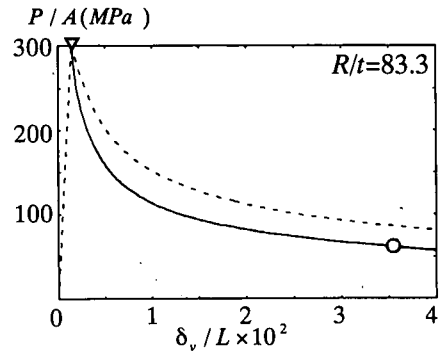
はじめに、径厚比 R/t が座屈モードの変化に与える影響を長さ半径の比 $L/R=3$ の円筒殻を対象に考察する。この目的のために、表-3に示した円筒殻のうちダイヤモンド座屈モードへの変化が生じたものについて荷重と上載荷板の鉛直変位との関係を図-7に示す。さらに、図-8には、図-7に対応して得られたそれぞれの円筒殻の提灯座屈モードからダイヤモンド座屈モードへの変化を示している。なお、前者としては第二分岐点での変形モード、また後者としては第二分岐経路上の最終変位

$\delta_v/L = 4.0 \times 10^{-2}$ での変形モードを選んで図示している。ただし、C3 type の円筒殻では提灯座屈モードを図示する第二分岐点は最終変位に非常に近いので、ダイヤモンド座屈モードとしては、変形モードの差異を明確に示すためにより大きな変位 $\delta_v/L = 6.0 \times 10^{-2}$ での変形形状を示している。図-7, 8から、図-1で説明したように、提灯座屈を生ずる第一分岐は荷重最高点に到達直後に発生すること、また、ダイヤモンド座屈モードへの変化は荷重が低下する第一分岐経路上における第二分岐点で発生することが確認できる。径厚比 R/t の影響としては、表-3と図-8より、この値が大きいくほどダイヤモンド座屈モードの周方向での波数が増加すること、また、図-7より、 R/t の値が大きいくほどダイヤモンド座屈モードへ変化する第二分岐が早く生ずることがわかる。とくに、もっとも薄い $R/t=166.7$ の円筒殻 C10 type では第二分岐点は第一分岐点とほとんど一致する。このことは、 R/t の値がさらに大きくなると、提灯座屈を生ずる本来の第一分岐点は消滅し、最初に分岐で直接、ダイヤモンド座屈が発生することを意味している。一方、 R/t の値が小さい C3 type ($R/t=66.7$) では、第二分岐はその発生が遅れ、設定した最終変位 $\delta_v/L = 4.0 \times 10^{-2}$ の近傍で初めて生ずる。さらに、 R/t の値がもっとも小さい C1 type ($R/t=50$) になると、載荷された変位の範囲で第二分岐は全く発生しなくなる。以上から、 $0 \leq \delta_v/L \leq 4.0 \times 10^{-2}$ の載荷変位内で、 $R/t \leq 65$ の円筒殻では提灯座屈のみ生じ、 $R/t \geq 170$ ではダイヤモンド座屈のみ生ずる。そして、載荷変位内で提灯座屈モードからダイヤモンド座屈モードへの変化が生じるのはほぼ $65 < R/t < 170$ の円筒殻であることがわかる。

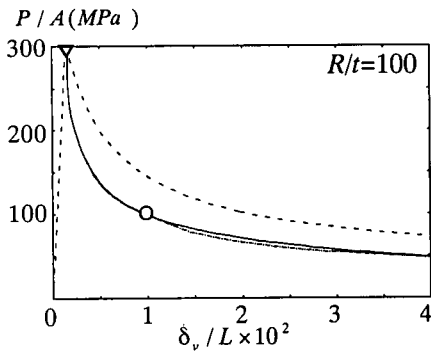
つぎに、長さ半径の比 L/R が座屈モードの変化に与える影響を考察する。この目的のために径厚比が同じで L/R が異なる三組の円筒殻 (C1type, C2type), (C3 type, C4 type) と (C5 type, C6 type) を検討対象とする。図-7, 8と同様に、ダイヤモンド座屈モードへの変化が生ずる $L/R=6$ の円筒殻 C4 type と C6 type について荷重と上載荷板の鉛直変位との関係を図-9にまた、提灯座屈からダイヤモンド座屈への座屈モードの変化を図-10に示している。図-7と図-9を比較してわかるように、 L/R が大きな円筒殻の方が、より小さな鉛直変位 δ_v でダイヤモンド座屈モードへの第二分岐が生ずることがわかる。なお、表-3からわかるように、 $R/t=50$ の円筒殻については $L/R=6$ 場合も $0 \leq \delta_v/L \leq 4.0 \times 10^{-2}$ の載荷変位内で第二分岐は発生しない。表-3から、



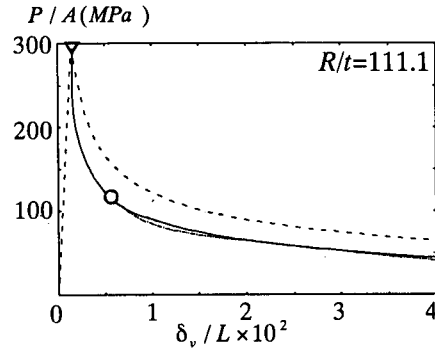
(a) C3 type



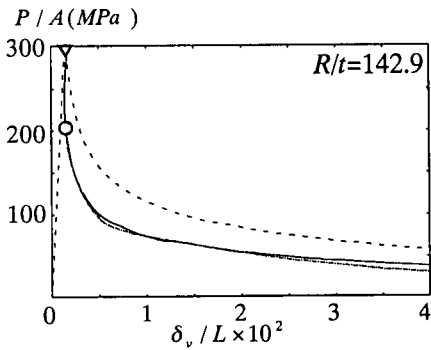
(b) C5 type



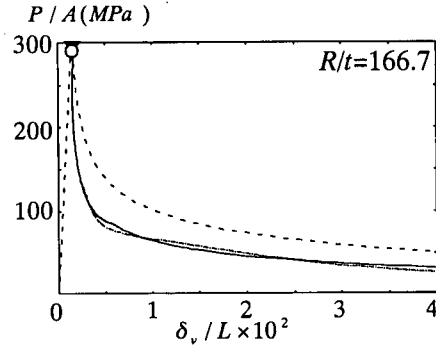
(c) C7 type



(d) C8 type



(e) C9 type



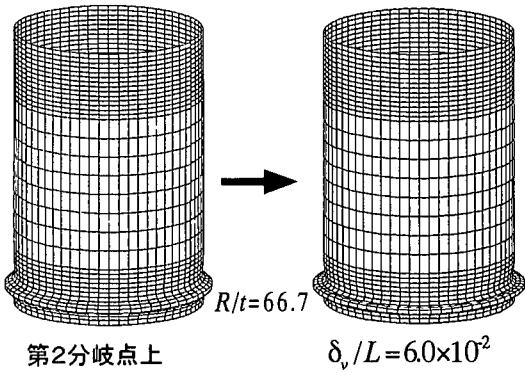
(f) C10 type

注: ▽ 第1分岐点 ○ 第2分岐点
 --- 基本経路 — 第1分岐経路(提灯座屈モード)
 — 第2分岐経路(ダイヤモンド座屈モード)

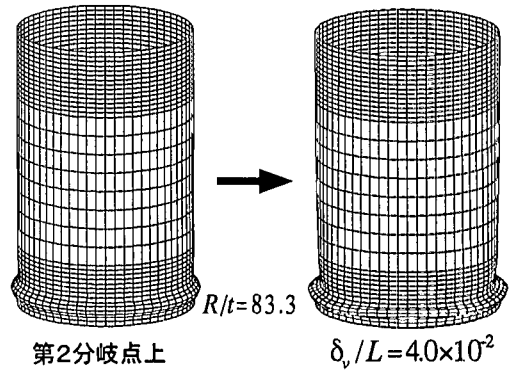
図-7 提灯座屈からダイヤモンド座屈モードへの変化挙動を示した円筒殻($L/R=3$)のつり合い経路

L/R によるダイヤモンド座屈モードでの周方向の波数の差異を見ると、 $R/t=66.7$ 、 $R/t=83.3$ いずれの場合も座屈波数は変化しないことがわかる。これより、提灯座屈からダイヤモンド座屈モードへの変化挙動に影響を与える構造パラメータとしては径厚比 R/t が長さとの比 L/R に比べ、より支配的であると言える。

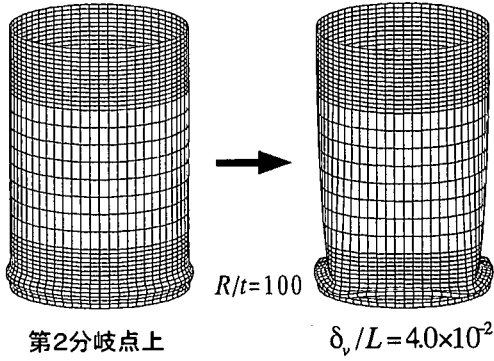
円筒殻の提灯座屈からダイヤモンド座屈モードへの変化は図-8、10 からわかるように、非常に劇的であるが提灯座屈に対応する第1分岐経路とダイヤモンド座屈に対応する第2分岐経路の差は図-7、9 に示すように非常に小さい。すなわち、見かけ上の変形能の変化はほとんどない。しかしながら、ダイ



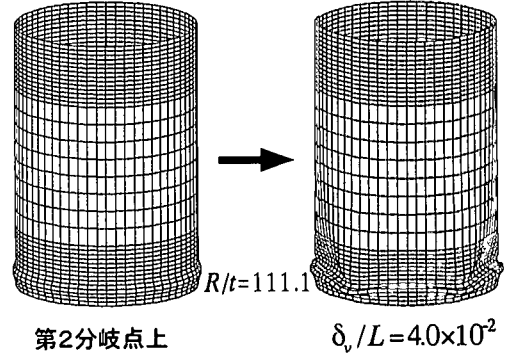
(a) C3 type



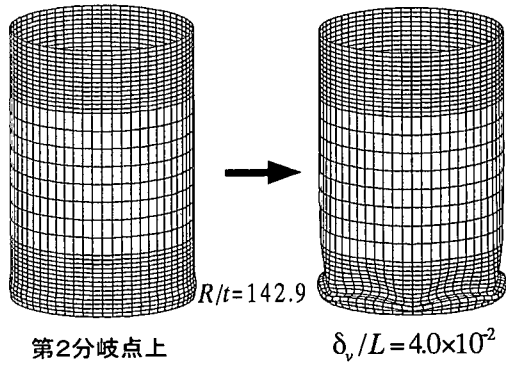
(b) C5 type



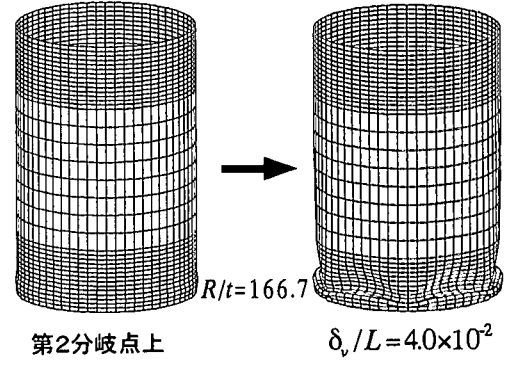
(c) C7 type



(d) C8 type

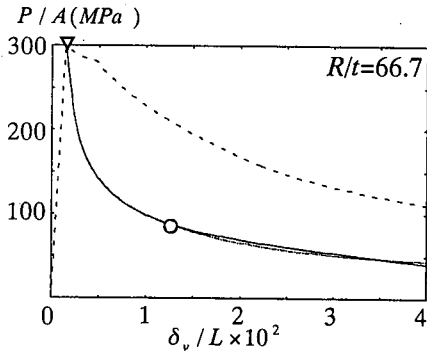


(e) C9 type

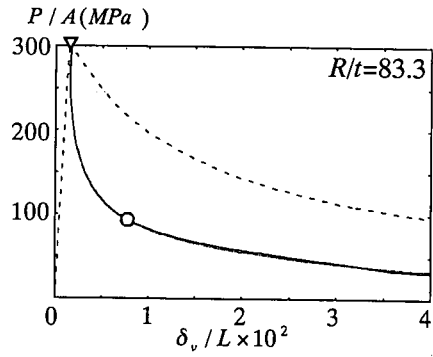


(f) C10 type

図-8 円筒殻 ($L/R=3$) の提灯座屈からダイヤモンド座屈モードへの変化



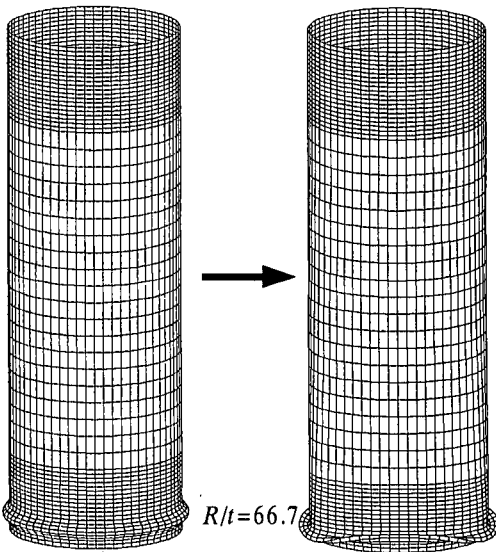
(a) C4 type



(b) C6 type

注: ∇ 第1分岐点 \circ 第2分岐点
 --- 基本経路 — 第1分岐経路(提灯座屈モード)
 — 第2分岐経路(ダイヤモンド座屈モード)

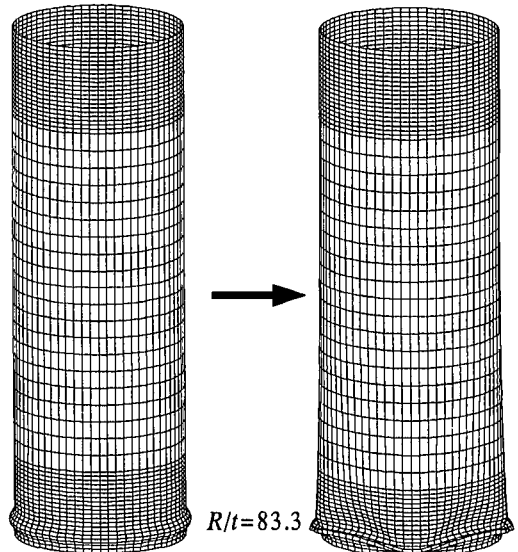
図-9 提灯座屈からダイヤモンド座屈モードへの変化挙動を示した円筒殻($L/R=6$)のつり合い経路



第2分岐点上

$\delta_v/L = 4.0 \times 10^{-2}$

(a) C4 type



第2分岐点上

$\delta_v/L = 4.0 \times 10^{-2}$

(b) C6 type

図-10 円筒殻 ($L/R=6$) の提灯座屈からダイヤモンド座屈モードへの変化

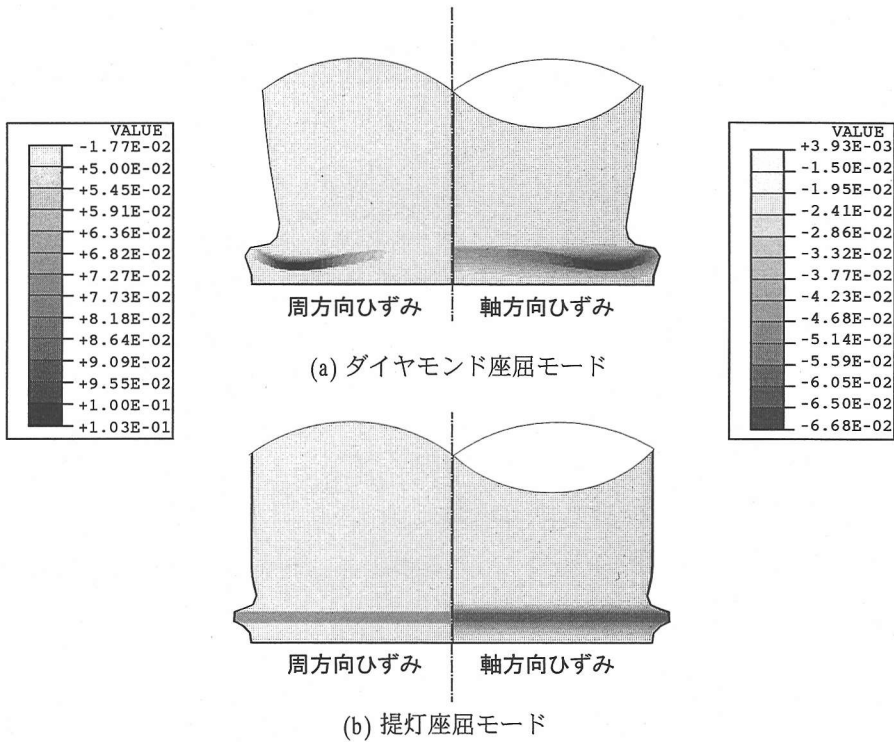


図-11 円筒殻C7 typeのひずみ分布

ダイヤモンド座屈モードでは、周方向での極端な非一様変形のため局所的なひずみ集中が大きくなる。図-11には、 $\delta_r/L = 4.0 \times 10^{-2}$ でのC7 typeの周方向ひずみと軸方向ひずみを提灯座屈モードとダイヤモンド座屈モードについて示している。ここで、提灯座屈モードの変形は図-7に示す第一分岐経路に沿って計算されたものである。図-11より、ダイヤモンド座屈モードでの周方向ひずみと軸方向ひずみの最大値はそれぞれ10.3%、-6.7%、提灯座屈モードではそれぞれ7.1%、-4.8%となる。このように、ダイヤモンド座屈モードでは局所的なひずみ集中のためより延性破壊が生じやすいと言える。

6. まとめ

圧縮を受ける円筒殻における提灯座屈モードからダイヤモンド座屈モードへの変化過程を厳密な弾塑性分岐解析により解析した。本論文で得られた結果を以下にまとめる。

- (1) 提灯座屈からダイヤモンド座屈モードへの座屈挙動の変化を解析する場合、円筒殻の非軸対称弾塑性変形を解析する必要があるため、通常、全構造を対象に解析することになる。このため、

- 有限要素分割にともなう自由度の増加により誤差が生じ、第二分岐までの弾塑性分岐挙動を正確に解析するのが困難な場合が多い。ここでは、ダイヤモンド座屈モードが、円筒の周方向に対して周期性を持っていることを利用し、自由度の低減を計ることで、第二分岐までの弾塑性分岐挙動を精度良く解析することに成功した。
- (2) 解析より、提灯座屈モードからダイヤモンド座屈モードへの変化は、提灯座屈発生後の第二塑性分岐点の存在により発生することが確認された。
- (3) 座屈モードの変化挙動に影響を与える構造パラメーターとしては径厚比 R/t が長さ L と半径 R の比 L/R に較べ、より支配的である。そして、ここで検討した円筒殻については、ほぼ $65 < R/t < 170$ の範囲で、提灯座屈モードからダイヤモンド座屈モードへの変化が発生する。また、 $R/t \leq 65$ 、 $R/t \geq 170$ では、それぞれ、提灯座屈モード、ダイヤモンド座屈モードのみ発生する。座屈モードの変化が生ずる $65 < R/t < 170$ の領域では、 R/t の増加にともない、ダイヤモンド座屈へ変化する第二分岐が早く発生するようになり、 $R/t = 166.7$ ではほぼ第一分岐点と第二分岐点とが一致する。それ以上 R/t が増加す

ると、本来の第一分岐点は消失し、最初の分岐でダイヤモンド座屈が発生する。ダイヤモンド座屈での周方向座屈波数は R/t が大きいほど多い。

- (4) 円筒殻の提灯座屈モードからダイヤモンド座屈モードへの変化は非常に劇的であるが提灯座屈に対応する第一分岐経路とダイヤモンド座屈に対応する第二分岐経路の差は非常に小さい。すなわち、両座屈モード間の見かけ上の変形能の差はほとんどない。しかしながら、ダイヤモンド座屈モードでは、周方向での非一様変形のため局部的なひずみ集中が大きくなる。

参考文献

- 1) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M.: *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- 2) Bushnell, D.: Buckling of Shells--Pitfall for Designers, *AIAA Journal*, Vol.19, No.9, pp.1183-1226, 1981.
- 3) Horton, W.H., Baily, S.C. and Edwards, A.M: Non-symmetric Buckle Patterns in Progressing Plastic Buckling, *Experimental Mechanics*, Vol.23, No.2, pp.433-444, 1966.
- 4) 加藤勉, 秋山宏, 鈴木弘之: 軸圧縮力を受ける鋼管の塑性局部座屈耐力, 日本建築会論文集, 第 204 号, 1973 年 2 月.
- 5) 都井裕, 井根達比古: 構造要素の衝突圧壊強度に関する基礎的研究(その 5) - 軸荷重を受ける円筒鋼

- 管の軸対称圧壊実験と有限要素解析 -, 日本造船学会論文集, 第 164 号, pp.406-419, 1988.
- 6) Tvergaard, V.: On the transition from a Diamond Mode to an Axisymmetric Mode of Collapse in Cylindrical Shell, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.19, No.10, pp.845-856, 1983.
 - 7) 後藤芳顯, 鳥羽保行, 小野聖久, 小畑誠: 円筒殻の軸対称座屈モードの局所化と繰り返し荷重下の挙動, 土木学会論文集, No.543/I-36, pp.41-53, 1996.
 - 8) 後藤芳顯, 王慶雲, 高橋宣男, 小畑誠: 繰り返し荷重下の鋼製橋脚の有限要素法による解析と材料構成則, 土木学会論文集, No.591/I-43, pp.189-206, 1998.
 - 9) 後藤芳顯, 川西直樹, 鳥羽保行, 小畑誠: 構造物の塑性座屈モードの局所化による変形能の低下と繰り返し荷重下の挙動, 土木学会論文集, No.483/I-26, pp.87-96, 1994.
 - 10) Goto, Y., Toba, Y. and Matsuoka, H.: Localization of Plastic Buckling Patterns under Cyclic Loading, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.121, No.4, pp.493-501, 1995.
 - 11) 後藤芳顯, 王慶雲, 小畑誠: 塑性分岐解析に基づく圧縮板の座屈モードの局所化現象の解析, 土木学会論文集, No.543/I-36, pp.55-70, 1996.
 - 12) ABAQUS/Standard User's Manual, Ver. 5.5, HKS, 1995.

(1998. 2. 23 受付)

ANALYSIS OF PLASTIC BIFURCATION FROM AXISYMMETRIC BUCKLING MODE TO DIAMOND BUCKLING MODE IN MODERATELY THICK CYLINDRICAL SHELLS

Yoshiaki GOTO and Chonghou ZHANG

Moderately thick perfect cylindrical shells under axial compression first exhibit axisymmetric deformation patterns, where a localization of buckling patterns, i. e. an elephant foot bulge, occurs at the first plastic bifurcation. However, the transition from the axisymmetric buckling mode to a diamond buckling mode may occur due to the next bifurcation if we continue the loading under displacement control. Herein, this phenomenon is examined based on a rigorous plastic bifurcation analysis. As a result, it is observed that the circumferential wave number of the diamond buckling mode increases with the decrease of the wall thickness. It is also found that the strain concentration is intensified for the diamond buckling mode, compared with the axisymmetric buckling mode.