

シミュレーション法による 構造化プロビットモデルの推定特性

屋井鉄雄¹・中川隆広²・石塚順一³

¹正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1)

²正会員 工修 東海旅客鉄道 建設工事部土木工事課 (〒450-0003 名古屋市中村区名駅南1-18-24)

³正会員 工修 茨城県 土木部道路建設課 (〒310-8555 水戸市三の丸1-5-38)

従来からパラメータ推定の煩雑さのためにプロビットモデルが交通需要予測に実務的に利用される機会は少なかった。しかし、近年シミュレーション法を利用した新たなパラメータ推定方法が複数提案され、プロビットモデルの利用が再び検討され始めている。プロビットモデルは、ロジットモデルとは異なり選択肢間の相関が高いケースにおいてもその適用が可能であり、今後の発展が期待されるが、パラメータ推定法の特性は十分に把握されていない。本研究では著者らがすでに提案した構造化プロビットモデルを対象に、パラメータ推定の安定性の把握と利用者便益の推計特性の把握とを試み、共に安定性を確保できる計算条件を明らかにしている。

Key Words : multinomial probit model, simulation method, parameter estimation, user benefit

1. はじめに

東京などの大都市圏では、複々線化工事、相互直通運行や新線建設が進んでおり、これが鉄道ネットワークの一層の高密化、及び利用者へのサービスの多様化を促している。高密度の鉄道ネットワークでは、同一の発着地に対して複数の鉄道路線が整備されている点、及びそれらの路線間に複数の乗換駅が存在する点が特徴である。そのため利用者は、最も早く目的地に到着できる経路、最も安い経路、乗換する必要のない経路など、個人の価値観によって異なる経路を選択することができる。これは鉄道ネットワークの粗さのために経路選択がほとんど存在しない地方部とは大きく異なっている。

従来から鉄道需要の予測、及び整備効果の分析方法は非集計ロジットモデルをベースに提案されてきたが、後述の理由によりその高密ネットワークへの適用は困難である。高密ネットワークにおいては、利用可能な経路相互の関係が次のように表現できる即ち、出発地から目的地まですべて異なる路線の場合もあり、郊外の出発地から都心付近までは同一の路線を利用し、都心に近い乗換駅で別の路線を選択

する様な極めて似通った場合もある。この様に経路間が完全に独立している場合と、逆に大半が重複している場合の経路相互の類似性には差異があると考えられる。しかし、非集計ロジットモデルでは、誤差項の仮定により利用可能経路はそれぞれ独立と見なされる。交通機関選択モデルや地方部の鉄道経路選択モデルであれば、一般に選択肢あるいは経路間が独立であると見なすことが可能であり、ロジットモデルの利用に大きな問題はなかった。しかし、先に述べたように大都市圏における鉄道経路選択を考える場合には、各選択肢間の類似性の相違を考慮しないロジットモデルでは問題があると言えよう。また、ロジットモデルを改良したネスティッドロジット(NL)モデルでは、各選択肢間の類似性を表現することは可能であるが、それは母集団で共通であり、個人ごとの類似性を表現できない。

この様な高密ネットワークにおいて、追加的な鉄道整備を行う上で、鉄道整備による広範囲の旅客需要の変化や経済的効果を的確に推計できる方法が必要とされている。本研究ではその方法としてプロビットモデルに着目する。

プロビットモデルは誤差項に相関を仮定することにより、選択肢間の類似性を表現することが可能で

あり、従来から国内外で多くのモデル化が行われてきたが、NL モデルと同様に選択肢間の類似性が母集団で共通である場合がほとんどである。この問題に対して、筆者らはプロビットモデルの誤差項を構造化することにより、個人ごとの類似性の表現が可能な構造化プロビットモデル(Multinomial Probit Model with Structured Covariance)を既に提案し、アンケート調査データを用いてモデルの特性及び有効性を示してきた¹⁾。従来からプロビットモデルの欠点として、選択肢が多数の場合のパラメータ推定の困難さと選択確率計算の煩雑さとが指摘されている。しかし、近年、パラメータ推定にシミュレーション法を取り入れた研究が進展しており、プロビットモデル適用に際しての選択肢数の問題は解消しつつある^{2),3)}。また、それに伴って本来柔軟なモデル構造を持つプロビットモデルの実用性は高くなってきたと考えられる^{4),5)}。

本研究では構造化プロビットモデルのパラメータ推定にシミュレーション法を導入し、その有効性を検討することが目的である。ここでの有効性としては、解の安定性、計算時間短縮効果を考える。また構造化プロビットモデルによる利用者便益の考え方と、その算出にシミュレーション法を活用した簡易な方法の提案を行うことにより、利用者便益の計測方法としての有用性を検討することも併せて目的としている。

2. プロビットモデルの構造化とパラメータ推定に関する従来の経緯

(1) 構造化に関する経緯

選択肢間の誤差の相関を表現可能である点がプロビットモデルの特徴であるが、多くのモデルにおいて、その相関が母集団に共通であることは既に述べた。この制約のため、プロビットモデルの適用が期待される選択問題の範囲は限られていたが、より高精度のモデル構築に向けて、個人ごとの類似性が表現可能であるモデルの提案が求められていた。その期待に応えたモデルとして、海外では Hausman and Wise⁶⁾や Bolduc⁷⁾などの研究が挙げられるが、彼らのモデル化のねらいは誤差項の一般的な構造化のみにあり、特定の交通現象に対応するモデル化を目指したものではない。また、Sheffi⁸⁾は Probit 型の交通量確率配分モデルを提案した。これは、誤差項を構造化するという本研究の位置づけとは異なるアプローチであるが、ドライバーのリンク知覚所要時間が正規分布に従うと仮定して、経路の選択確率を算出しており、経路間の知覚所要時間の相関を重複するリ

ンクの所要時間で与えている。一方、国内では鉄道ネットワークが密である地域における需要推計法として、屋井ほか⁹⁾が構造化プロビットモデルの原型を提案した。しかし、当初のモデルは選択肢間の類似性の表現に強い制約があったため、Yai et al¹⁰⁾ではそれを緩和して、個人ごとの類似性の表現をより一般化してきた。また、屋井・中川¹⁰⁾では鉄道経路選択ばかりではなく、目的地選択や交通手段選択などの他の交通選択への構造化プロビットモデルの適用可能性について広く論じている。

(2) パラメータ推定方法の経緯

プロビットモデルのパラメータの推定には一般に最尤推定法が用いられる。しかし、最尤推定法では選択確率の算出のために多重積分の計算が必要となる。さらに、尤度関数を最大化するためには、多重積分の計算を繰り返さなければならず、膨大な計算時間を必要としてきた。そこで、簡便な推定方法の開発が求められ、1980 年代までに級数近似法¹¹⁾や Clark の近似法¹²⁾が活用されてきた。しかし、前者は選択肢数が 4 以上では推定が困難であり、後者は近似精度に問題があり、実用的な方法とは見なされず、その後も普及していない。しかし、1980 年代後半から McFadden¹³⁾によりシミュレーション法を用いた近似解法の研究が再び進められ、その実用性が向上している。その中でも GHK 法などの確率近似法¹⁴⁾の有効性が明らかになりつつあり、本研究ではその検討が目的の 1 つになっている。

3. 構造化プロビットモデルの定式化

トリップメーカーが各選択肢から得る効用 U を、観測可能な部分(確定項) V と観測できない部分(誤差項) ε の線形和からなる以下の式で表現する。

$$U = V + \varepsilon \quad (1)$$

ここで、各選択肢の誤差項に正規分布を仮定することにより、プロビットモデルが導出され、その誤差項間の相関を表現することが可能である。 R 個の選択肢の中から選択肢 r を選ぶ確率 P_r は、以下の様に表される。

$$P_r = \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_r + \nu_r - \nu_1} \cdots \int_{\varepsilon_R=-\infty}^{\varepsilon_r} \cdots \int_{\varepsilon_R=-\infty}^{\varepsilon_r + \nu_r - \nu_R} \phi(\varepsilon) d\varepsilon_R \cdots d\varepsilon_1 \quad (2)$$

密度関数は、

$$\phi(\varepsilon) = (2\pi)^{-\frac{R}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon^\top \Sigma^{-1} \varepsilon\right) \quad (3)$$

であり、分散共分散行列は以下に示される。

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1R} \\ \sigma_{12} & \sigma_q^2 & \cdots & \sigma_{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1R} & \sigma_{2R} & \cdots & \sigma_R^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで、 σ_r^2 は選択肢 r の誤差の分散、 σ_{rq} は選択肢 r, q の誤差の共分散である。この時、式(4)の各要素を効用関数のパラメータと同時に推定するのが、従来のプロビットモデルである。しかし、式(4)は母集団で共通であり、個人ごとの類似性を表現できない。これを表現するためには、分散共分散項の構造化を行うことが必要となる。

今、経路 r に関する効用の誤差項を相互に独立な2つの項（経路の長さに依存する誤差 ε^1 と経路選択肢に固有の誤差 ε^0 ）に分離して考える。このとき誤差 ε 及びその分散共分散行列 Σ は以下の式で表現できる。

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^1 + \varepsilon_r^0 \quad r = 1, \dots, R \quad (5)$$

$$\Sigma = \Sigma^1 + \Sigma^0 \quad (6)$$

ここで、 ε_r^1 は単位長ごとに独立に発生すると仮定すれば、 ε_r^1 の分散は経路長に依存することになり、

$$Var(\varepsilon_r^1) = \sigma^2(x) + \dots + \sigma^2(x) = n_r(x)\sigma^2(x) \quad (7)$$

によって与えられる。ここで、 x は空間的または時間的な長さを表す単位であり、 $\sigma^2(x)$ は単位長さごとの分散、 $n_r(x)$ は単位数を示す。仮に $n_r(x)$ が距離に比例して算出されるとすれば、経路 r の路線長 L_r と単位距離当たりの分散 σ^2 を用いて式(7)は

$$Var(\varepsilon_r^1) = L_r \sigma^2 \quad (8)$$

と表すことができる。つまり、路線長が長い程、経路の効用の分散が大きくなると捉えられる。次に、重複区間を含む2経路 r, q 間の共分散について考えてみると、先の仮定により、

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_r^1, \varepsilon_q^1) &= E(\varepsilon_r^1 \varepsilon_q^1) \\ &= E(\varepsilon_r^{ov} + \varepsilon_r^{nov})(\varepsilon_q^{ov} + \varepsilon_q^{nov}) \\ &= E(\varepsilon_r^{ov} \varepsilon_q^{ov}) + E(\varepsilon_r^{ov} \varepsilon_q^{nov}) + E(\varepsilon_r^{nov} \varepsilon_q^{ov}) + E(\varepsilon_r^{nov} \varepsilon_q^{nov}) \\ &= E(\varepsilon_r^{ov})^2 \end{aligned} \quad (9)$$

と表せる。ここで ov は重複区間、 nov は非重複区間を表す。上式は共分散が重複区間の分散に等しいことを表しており、式(7)と同様に経路 r, q 間の重複区間での単位数 $n_{rq}(x)$ を用いれば

$$Cov(\varepsilon_r^1, \varepsilon_q^1) = n_{rq}(x)\sigma^2(x) \quad (10)$$

であり、 x を空間的距離として経路 r, q 間の重複区間長 L_{rq} を用いれば、式(8)と同様に

$$Cov(\varepsilon_r^1, \varepsilon_q^1) = L_{rq}\sigma^2 \quad (11)$$

と表せる。従って、重複区間が長い程、経路間の類似性が大きくなる傾向が共分散の大きさによって表現されることになる。

一方、経路固有の誤差 ε^0 は経路ごと独立に発生し、分散 σ_0^2 、共分散0の正規分布に従うと仮定することができる。

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_r^0, \varepsilon_q^0) &= \sigma_0^2, \quad q = r \\ &= 0, \quad q \neq r \end{aligned} \quad (12)$$

以上より、分散共分散行列は次のように表すことができる。

$$\Sigma = \sigma^2(x) \begin{pmatrix} n_1(x) & n_{12}(x) & \cdots & n_{1R}(x) \\ n_{12}(x) & n_2(x) & \cdots & n_{2R}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{1R}(x) & n_{2R}(x) & \cdots & n_R(x) \end{pmatrix} + \sigma_0^2 I \quad (13)$$

式(13)は、式(8),(11)を用いて、

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} L_1 & L_{12} & \cdots & L_{1R} \\ L_{12} & L_2 & \cdots & L_{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{1R} & L_{2R} & \cdots & L_R \end{pmatrix} + \sigma_0^2 I \quad (14)$$

と表せ、さらにこれを分散比で表現すれば、

$$\Sigma = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \eta L_1 + 1 & \eta L_{12} & \cdots & \eta L_{1R} \\ \eta L_{12} & \eta L_2 + 1 & \cdots & \eta L_{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta L_{1R} & \eta L_{2R} & \cdots & \eta L_R + 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\eta = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \quad (16)$$

と表現することができる。式(15)において分散共分散行列を定数倍する σ_0^2 は効用関数のパラメータベクトルと推定上は分離できず、推定により得られるパラメータ値は、 σ_0 で除された効用関数のパラメータと分散比 η とである。分散共分散行列内のパラメータは η の1つだけであり、 η は効用関数に含まれる各説明変数のパラメータとの同時推定が可能である。このように分散共分散行列の構造化を行った結果、経路の路線長、経路間の重複距離を直接用いることにより、個人ごとの選択肢間の類似性を表現することが可能となった。

4. パラメータ推定

(1) シミュレーション法

シミュレーション法とは、多数の乱数をもとに確率的に生成された値を効用関数の誤差項の値として用い、トリップメーカーの選択確率を近似する方法である。プロビットモデルは式(2)が示す通り多

表-1 シミュレーション法

選択確率算出	パラメータ推定
-Frequency Simulator (FS)	-Simulated Maximum Likelihood (SML)
-Kernel-Smoothed Frequency Simulator (KSFS)	-Method of Simulated Moments (MSM)
-GHK Recursive Simulator	

重積分が必要であり、計算が困難であるが、シミュレーション法の利用によりこれを軽減することができる。一般的に、選択モデルの推定では、サンプルごとの選択確率を算出し、サンプル全体の尤度を最大化するプロセスを経るが、シミュレーションを用いた推定の際も、同様に2種類のプロセスを行う必要がある。表-1は、従来から提案されているシミュレーション法を、選択確率算出プロセスと尤度関数算出プロセスに分類し示したものである¹⁴⁾。選択確率算出プロセスは、乱数を効用関数の確率項に入力する方法(FS,KSFS)と、効用差の確率項に代入する方法(GHK)が提案されているが、GHK法の推定精度が高いとの報告がある。パラメータ推定プロセスは、シミュレートされた選択確率を尤度関数に代入する方法(SML)と、モデルの選択確率と実績の選択確率の差を最小化するパラメータを導出する方法(MSM)が提案されており、SMLはMSMと異なり不偏推定量ではないが計算速度が速いことが知られている。本研究ではGHK法とSML法を組み合わせてパラメータの推定を行い、構造化プロビットモデルへの適用による解の特性の把握を試みる。

さて、GHK法について説明する。3肢選択のケースにおいて仮に選択肢1が選ばれるとすると、各選択肢の効用関数には、効用差が負であるという以下の関係が成立している。

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 - U_1 \\ U_3 - U_1 \end{pmatrix} = \Delta X \beta + \begin{pmatrix} w_{11} & 0 \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \leq 0 \quad (17)$$

$$WW' = M_1 \Sigma \Sigma' M_1' \quad (18)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

ここで、 ΔX は説明変数の差のベクトル、 θ はパラメータベクトル、 Σ は分散共分散行列である。式(17)の w は、式(18)の右辺をコレスキー分解した行列の各要素である。また ζ は標準正規分布に従う確率変数であり、設定方法については後述する。

GHK法による選択確率の算定プロセスは、ある確率変数 ζ に対する選択肢1の選択確率 $P_{1\zeta}$ が、多

重積分ではなく、以下の条件付確率の積で求められる所に特徴がある。

$$P_{1\zeta} = P(U_1 \leq 0, U_2 \leq 0) \\ = P(U_1 \leq 0) \times P(U_2 \leq 0 | U_1 \leq 0) \quad (20)$$

ここで、式(17)を展開すると、

$$U_1 \leq 0 \rightarrow \zeta_1 \leq -\frac{x_1 \beta}{w_{11}} = a_1 \\ U_2 \leq 0 \rightarrow \zeta_2 \leq -\frac{w_{21}\zeta_1 + x_2 \beta}{w_{22}} = a_2(\zeta_1) \quad (21)$$

となる。これを用いて式(20)を表現し直すと、

$$P_{1\zeta} = P(\zeta_1 \leq a_1) \\ \times P(\zeta_2 \leq a_2(\zeta_1) | \zeta_1 \leq a_1) \quad (22)$$

となる。ここで、 ζ_1 および ζ_2 は標準正規分布に従う確率変数であるから、標準正規分布関数を $\Phi(\zeta)$ とすると、式(22)は以下のように書き換えられ、選択確率が直接導ける。

$$P_{1\zeta} = \Phi(a_1) \Phi(a_2(\zeta_1)) \quad (23)$$

となる。式(23)では、 $\zeta_1 (\leq a_1)$ を与える必要があるが、区間[0,1]の一様乱数 u_1 を発生させ、以下の操作により正規乱数に変換し得られる。

$$\zeta_1 = \Phi^{-1}[u_1 \Phi(a_1)] \quad (24)$$

以上のプロセスでは、(選択されている)選択肢1の選択確率が乱数を1つ発生させることで算出できる。

次に、簡単な例を用いてGHK法の特徴を考察する。今、確定効用の等しい3つの交通機関が存在し、(i)選択肢が互いに独立のケース、(ii)選択肢2と3の類似性(相関)が非常に高いケースを想定する。誤差項の分散共分散行列はそれぞれ以下のように表現する。

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}$$

どちらのケースも選択肢1が選択されている場合、 W は以下のように計算される。

$$W' = \begin{pmatrix} 1.414 & 0 \\ 0.707 & 1.225 \end{pmatrix}, \quad W'' = \begin{pmatrix} 1.676 & 0 \\ 1.670 & 0.141 \end{pmatrix}$$

このように、選択肢2,3の相関が高くなるほど w_{21} が大きくなり、 w_{22} が小さくなる。どちらのケースも $\Phi(a_1)=0.5$ であり、ケース(ii)では u_1 の値にかかわらず $a_2(\zeta_1)$ が非常に大きくなり $\Phi(a_2(\zeta_1)) \approx 1$ とな

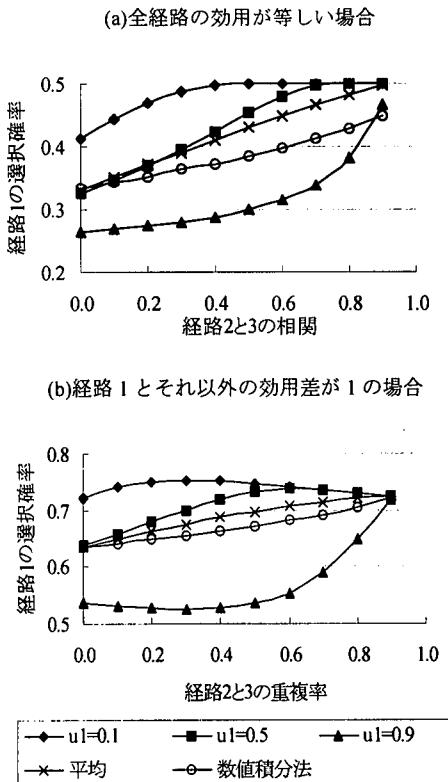


図-1 GHK法における選択確率の算出特性

る一方、ケース(i)では $u_1 = 0.5$ (乱数発生領域の中間値) の場合 $\Phi(a_2(\zeta_1)) = 0.65$ となる。即ち、ケース(i)は $P_{1\zeta} = 0.326$ 、ケース(ii)は $P_{1\zeta} = 0.5$ と求めることができる。また、第2,3 経路の相関と u_1 が変化したときの経路1の選択確率を図-1(a)に示す。ここで平均とは、 $u_1=0.1, 0.2, \dots, 0.9$ の9通りで得られた選択確率を平均したものであり、乱数発生回数を多くした場合のGHK法の選択確率算出値とほぼ同じであると考えられる。平均と数値積分法の比較では、経路の相関が大きくなるに従い、両者が乖離していく様子が見て取れる。図-1(b)は経路間の効用差がある場合の誤差の共分散と選択確率の関係を示すが、その乖離は大きくないことが分かる。本研究で対象とする鉄道経路選択では、全選択肢の効用が等しいケースは多くなく、選択確率の算定精度に与える影響は大きくないと考えられる。以上の例では、GHK法は選択肢2と3の確定効用値を小さくする作用があり、その大きさは乱数で決定されることになる。即ち、GHK法とは、選択肢間の相関の程度によって確定効用値を小さくすることで選択確率を補正する方法であると言い換えられる。

最後に SML 法について説明する。1サンプルに対して乱数を K 回発生させた場合、サンプルの選択確率を以下のように表現する。

$$E(P_i) = \frac{1}{K} \sum_k P_{ik} \quad (25)$$

これを尤度関数に代入し、パラメータ推定を行う。なお、GHK 法から算出される選択確率は連続変数であり、最尤推定における微分可能性は確保されている。

(2) 鉄道経路選択モデルへの適用

本研究で利用するデータは、大都市交通センサス(平成2年)のサンプルのうち、実際に選択された経路を特定でき、代替経路を2つ加えることができる1,074サンプルである。この3肢データを用いて、構造化プロビットモデルのパラメータの推定を行うが、通常の数値積分法によるパラメータ推定の他に、前節で説明したシミュレーション法を用いる。その際、選択確率算出のための乱数発生回数は25, 50, 100回とし、乱数発生回数と推定パラメータの安定性の関係を把握する。なお、パラメータ推定と次章で扱う便益計測にはGAUSS(Ver.3)を使用している。

表-2にこれら推定結果を示す。効用関数の説明変数は、ラインホール費用、混雑率等の9つのLOS変数と、分散共分散行列内の分散比 η の計10個である。ただし、混雑率はラインホール時間と合成して使用するため、これをラインホール区間の平均値としている。まず数値積分法による推定結果を考察するが、効用関数に関するパラメータに関しては、おおむね良好である。各種所要時間と費用のパラメータ間のトレードオフ比は従来の経路選択モデルと同等の値が得られている。なお、混雑率の t 値が低いが、その理由はサンプルが首都圏全域で取られているためであり、選択経路と代替経路の分岐地点が郊外であるサンプルや、各経路のアクセス駅が異なるサンプル等でセグメントを行いモデルを構築すれば、有意性を確保できる可能性がある。以下ではシミュレーション法の有効性を確認するため、有意水準を満たさない説明変数に関しても削除せず、分析を進めている。また、分散比 η に関しては統計的に十分有意とは言えないが、その推定可能性や安定性の把握に努めた。分散比に関しては、選択肢間の類似性が高いサンプルが含まれる場合に t 値が高くなる傾向があり、どのような場合に有意性が高くなるかはすでに一部検証されている¹⁵⁾。

次にシミュレーション法の推定可能性に関しては、乱数発生回数の差違によるパラメータの安定性につ

表-2 構造化プロビットモデルの推定結果

パラメータ推定方法	数値積分法	SIM 法(25 回)	SIM 法(50 回)	SIM 法(100 回)
ラインホール費用 (円)	$-5.83 \times 10^{-3}(5.22)$	$-5.91 \times 10^{-3}(5.21)$	$-5.94 \times 10^{-3}(5.23)$	$-5.94 \times 10^{-3}(5.19)$
アクセス時間 (分)	$-1.27 \times 10^{-1}(5.23)$	$-1.29 \times 10^{-1}(5.15)$	$-1.29 \times 10^{-1}(5.22)$	$-1.29 \times 10^{-1}(5.16)$
イグレス時間 (分)	$-1.51 \times 10^{-1}(5.45)$	$-1.52 \times 10^{-1}(5.45)$	$-1.53 \times 10^{-1}(5.49)$	$-1.52 \times 10^{-1}(5.43)$
ラインホール時間 (分)	$-6.95 \times 10^{-2}(5.80)$	$-7.05 \times 10^{-2}(5.70)$	$-7.04 \times 10^{-2}(5.77)$	$-7.03 \times 10^{-2}(5.68)$
乗換時間 (上り階段) (分)	$-3.35 \times 10^{-1}(2.44)$	$-3.43 \times 10^{-1}(2.42)$	$-3.33 \times 10^{-1}(2.42)$	$-3.35 \times 10^{-1}(2.42)$
乗換時間 (下り + 水平) (分)	$-1.16 \times 10^{-1}(5.21)$	$-1.17 \times 10^{-1}(5.24)$	$-1.17 \times 10^{-1}(5.19)$	$-1.18 \times 10^{-1}(5.17)$
待ち時間 (分)	$-1.18 \times 10^{-1}(3.90)$	$-1.19 \times 10^{-1}(3.86)$	$-1.19 \times 10^{-1}(3.89)$	$-1.20 \times 10^{-1}(3.88)$
乗換回数 (回)	$-3.82 \times 10^{-1}(3.92)$	$-3.91 \times 10^{-1}(3.93)$	$-3.92 \times 10^{-1}(3.99)$	$-3.87 \times 10^{-1}(3.92)$
混雑率 × ラインホール時間 (%² 分)	$-9.08 \times 10^{-8}(0.82)$	$-8.88 \times 10^{-8}(0.75)$	$-8.98 \times 10^{-8}(0.85)$	$-9.03 \times 10^{-8}(0.81)$
分散比 η	0.302(1.45)	0.338(1.45)	0.333(1.50)	0.334(1.46)
尤度比	0.182	0.184	0.184	0.184
パラメータ平均誤差 (%)	-	3.1	2.5	2.3
パラメータ最大誤差 (%)	-	13.0	9.9	10.0

いての検討を試みた。まず、乱数の取り扱いについて説明する。例えば、サンプル数が 1,074 で、各サンプルに対して乱数を 100 回発生させる場合、1,074 行 100 列の乱数行列が必要となる。この時、計算途中で乱数行列を変更すると推定が困難となるため、本研究ではパラメータが収束するまで同一の乱数行列を利用している。

表-2 に、乱数発生回数が 25,50,100 回の 3 通りの推定結果を示す。なお、式(15)の分散比 η は、数値積分法と同様に効用関数のパラメータと一緒に推定している。表中の SIM 法とは、選択確率算出プロセスに GHK 法を、尤度算出プロセスに SML 法を用いたもので、カッコ内の回数は乱数の発生回数である。SIM 法では、異なる乱数行列を用いて 10 回の推定を行い、推定パラメータの平均値を求め、これと積分法で得られたパラメータの相対誤差が最も小さいモデルを表-2 に示している。またパラメータ平均誤差、最大誤差とは、数値積分法で得られたパラメータを真値と仮定して、10 回の推定で得られるパラメータの真値からのずれの割合を、10 個のパラメータで平均したものと、そのうちの最大値を指す。尤度比は 4 つのモデルでほぼ同じであり、パラメータの平均誤差は乱数発生回数が 25 回でも 3.1% であることから、シミュレーション法を利用してかなりの精度が確保できると考えられる。さらに、計算時間短縮の可能性を検討するために、少ない乱数発生回数での推定特性をチェックした。乱数発生回数 3 回でパラメータ推定を 5 回行った結果、パラメータごとの平均誤差は最大が 4.7%，最小が 3.4%，また最大誤差は 24.0% となった。これらは乱数発生回数 25 回以上と比較して大きいが、計算時間の短さを考慮すれば、この程度の乱数発生回数で

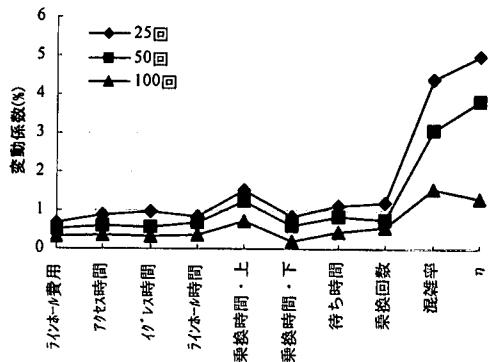


図-2 推定パラメータの変動係数

もラフな推定は可能であると考えられる。またパラメータのばらつきを表す指標として変動係数を計算した。変動係数とは、乱数発生（推定）回数分のパラメータの標準偏差を平均で除して 100 倍したものである。図-2 に示す通り、乱数発生回数 25 回では、特に混雑率と η とで変動が大きい（変動係数 5%）ものの、他の説明変数の変動係数は 1% 未満であることが見て取れる。乱数発生回数の増加に伴い変動は小さくなり、100 回ではほとんどの説明変数で変動係数は 0.5% 程度となり、混雑率、 η においても変動係数は 1.5% 程度になることが分かった。さらに、サンプル数による変動係数の相違も確認した。図-3 は、運賃及び η のパラメータの変動係数を、サンプル数と乱数発生回数の相違で表現したものである。なお、比較のために使用する 100,200,500 サンプルは、1,074 サンプルからネットワーク形態・距離構成が同一となるように再抽出したものである。サンプル数の増加、乱数発生回数の増加に応じて各

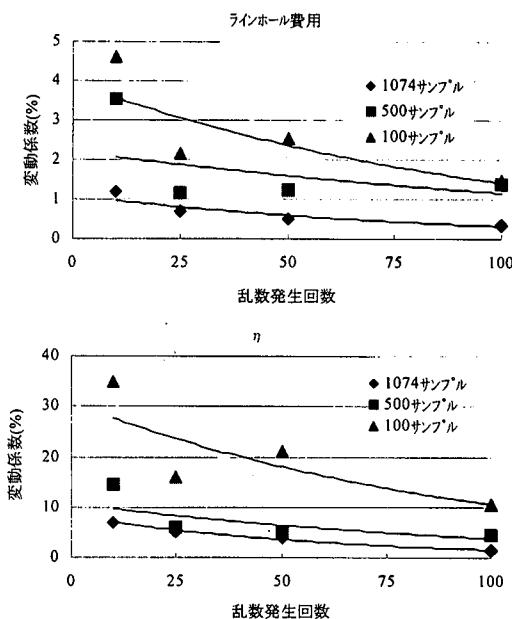


図-3 サンプル数と変動係数の関係

パラメータの変動係数が小さくなる傾向にある。運賃パラメータのような η 値の高いパラメータに関しては、100サンプル・乱数発生回数10の組み合わせにおいても変動係数が5%程度であるが、 η に関しては、変動係数5%を確保するためには500サンプルで乱数発生回数は50、100サンプルでは100回でも不十分である。通常は1,000サンプル程度の規模でモデル推定を行うことを考慮すれば、乱数発生回数25でも十分な精度を確保できることが分かる。

最後に、シミュレーション法導入の動機である計算速度について考察する。乱数発生回数が多くなる程、パラメータの変動が小さくなることは確認できたが、推定に要する時間は増加する。そのため、パラメータが十分な精度を確保できる乱数発生回数の見極めがシミュレーション法には必要となる。今回はデータが3肢選択であり、数値積分法でも2重積分で済むことから、乱数発生25回（シミュレーション法）よりも数値積分法の方が計算時間が短かった。しかし、本研究が対象とする高密ネットワークでは、選択肢数が3より多い場合がほとんどであり、この場合には数値積分法の適用が困難である。このようなケースではシミュレーション法の利点が生かされると考えられる。

5. 便益計測方法

(1) プロビットモデルにおける最大効用の特性

ランダム効用理論に基づく利用者便益の計測方法としては、一般に満足度関数と呼ぶ最大効用の期待値を利用する方法が既に提案されており^{1),16)}、従来から誤差項がガンベル分布に従う場合の定式化はログサム変数として広く活用されてきた。本研究では、この考え方を構造化プロビットモデルにも適用することを考え、まずプロビットモデルの最大効用の特性を明らかにすることを試みた。

効用関数を式(1)の様に考えれば、プロビットモデルの最大効用 U^* の分布関数は以下のように表される。

$$\begin{aligned} F(U^*) &= \text{Prob}(\max_i U_i \leq U^*) \\ &= \text{Prob}(U_1 \leq U^*, \dots, U_R \leq U^*) \\ &= \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{U^*-V_1} \cdots \int_{\varepsilon_R=-\infty}^{U^*-V_R} \phi(\varepsilon) d\varepsilon_R \cdots d\varepsilon_1 \end{aligned} \quad (26)$$

最大効用の密度関数は式(26)を U^* で微分して得られる。以下では2肢選択を例に最大効用の密度関数について考察する。

各選択肢が無相関の場合、密度関数 S は以下のように表される。

$$\begin{aligned} S(U^*) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\varepsilon_1+V_1-V_2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_1+V_1-V_2)^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (27) \\ U^* &= \varepsilon_1 + V_1 \end{aligned}$$

式(27)において、確定効用値の相違による関数型の相違をグラフ化したものが図-4である。確定項の差がない($V_1 = V_2 = 0$)場合は、最頻値と期待値は0.2程度ずれているが、差が大きい場合は最頻値と期待値はほぼ等しく、かつ正規分布と極めて似た分布型を示している。即ち、最大効用の密度関数は確定項の差が大きくなるにつれ正規分布に近づくと考えられる。また、選択肢間の相関が高い場合にも、正規分布に近づくことが同様に確認できる。このように、プロビットモデルの最大効用の密度関数は、ある条件では極めて正規分布に似た分布型であることが推察される。

さて、式(26)で表される最大効用の分布関数から期待値を算出するのは困難であるが、最頻値は次のように簡単に算出できる。最頻値 M は式(26)を U^* で2回微分して得られる。

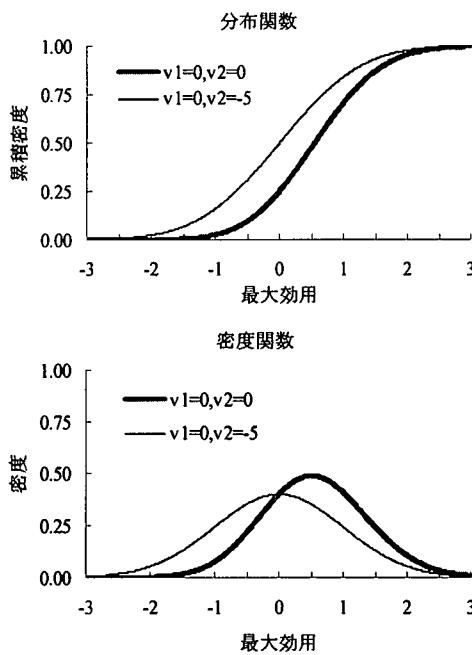


図-4 最大効用の分布・密度関数

$$\frac{\partial^2 F(U^*)}{\partial U^{*2}} \Big|_{U^*=M} = 0 \quad (28)$$

既に述べた通り、最大効用の密度関数が正規分布に近似できる可能性が高く、期待値の代わりに最頻値を使用しても問題は小さいと考えられる。従って、以下の便益計測には最頻値を用いることにした。

(2) プロピットモデルにおける利用者便益

1人あたりの利用者便益は、鉄道整備プロジェクト実施前の最大効用の密度関数の最頻値 M^0 と実施後の最頻値 M^1 の差を取ることにより得られる。ここで、 $M^0 = M(U^0)$ 、 $M^1 = M(U^1)$ と表せば、EV (Equivalent Variation) 形式の場合、下式の関係が得られる。

$$M^1 = M(U^0 + \beta \Delta C) \quad (29)$$

ここで ΔC は鉄道サービス改善に対する1人当たりの支払意思額、 β は改善された LOS のパラメータ値である。式(29)により、利用者便益を貨幣ターム ΔC で捉えることが可能となる。

次に、最大効用の最頻値の特性について述べる。各選択肢の確定効用が V 、この時の最大効用の最頻値を $M(V)$ とする。今、全ての選択肢に同レベルのサービス改善がなされたと仮定して、各確定効用が a だけ増加したとする。この時の最頻値を

$M(V+a)$ とする。この時、

$$M(V+a) = M(V) + a \quad (30)$$

の関係が成り立つ。つまり、最大効用の最頻値は一定増分に対する不变性が成立し、最頻値と各確定効用との差は各確定効用の値に依存しない。結局式(29)、(30)より、1人あたりの支払意思額 ΔC は、ラインホール費用パラメータ β_{LC} を用いて以下のように表される。

$$\Delta C = \frac{M^1 - M^0}{\beta_{LC}} \quad (31)$$

このように、支払意思額は整備前後の最大効用の最頻値の差を用いて簡便に算出可能となる。ある OD($i-j$)間の利用者全体の便益 UB_{ij} は、1人あたりの支払意思額 ΔC_{ij} とその OD 利用者数 T_{ij} を用いて

$$UB_{ij} = T_{ij} \Delta C \quad (32)$$

となる。全 OD では、

$$UB = \sum_j T_{ij} \Delta C_{ij} \quad (33)$$

となる。従って、整備効果の及ぶ範囲全ての各 OD について式(33)を適用することにより、整備による利用者便益を計測できる。また OD が整備前後で変化する場合は OD 選択確率を利用して同様に算出できる。

(3) 最頻値算出

式(28)の最頻値の算出方法では、式(26)の多重積分を行わなければならないが、選択肢数が多い場合は計算負荷が大きく、実用に向けて何らかの改良が必要となる。そこで、式(26)の GHK 法による近似を行った。

GHK 法を便益計測に応用する場合、式(26)を以下のように書き換え、確率算出の場合と同様のプロセスで便益を算出する。

$$\begin{pmatrix} V_1 - U^* \\ V_2 - U^* \\ V_3 - U^* \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} w_{11} & 0 & 0 \\ w_{21} & w_{22} & 0 \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$WW' = \Sigma \Sigma' \quad (35)$$

Σ は分散共分散行列であり、式(34)の w は、式(35)の右辺をコレスキー分解した行列の各要素である。なお、確率算出時(式(18))と異なり、 W 行列は 3 行 3 列である。この時、最大効用の分布関数は以下のように導出される。

$$F(U^*) = \Phi(a_1) \Phi(a_2(\zeta_1)) \Phi(a_3(\zeta_1, \zeta_2)) \quad (36)$$

$$a_1 = \frac{U^* - V_1}{w_{11}}$$

$$a_2(\zeta_1) = \frac{U^* - V_2 - w_{21}\zeta_1}{w_{22}}$$

$$a_3(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{U^* - V_3 - w_{31}\zeta_1 - w_{32}\zeta_2}{w_{33}}$$

$$\zeta_1 = \Phi^{-1}[u_1 \Phi(a_1)]$$

$$\zeta_2 = \Phi^{-1}[u_2 \Phi(a_2(\zeta_1))]$$

即ち、3肢選択のケースでは区間[0,1]の2つの一様乱数 u_1, u_2 が必要となる。この2つの乱数を以下では乱数セットと呼ぶ。式(36)では、1つの乱数セットに対して $F(U^*)$ の分布が1つ決定される。最頻値算出のアルゴリズムは、 $F(U^*)$ を差分し密度関数とした後、その最頻値を与える U^* を探索する方法を探っている。なお、後述の便益算定では乱数セットを複数発生させているが、最頻値探索時に各セットにおける $F(U^*)$ を式(36)を用いて算出し、これを合計してこれを新たに $F(U^*)$ としている。各ODに対して整備前後の最大効用の最頻値を上記の方法で算出し、式(31)により各ODに対する1人あたりの支払意思額が得られる。

GHK法では、選択確率算出の場合と同様に、最大効用の最頻値が確定効用差と選択肢間の相間に影響される。即ち、確定効用差が大きい（小さい）程、選択肢間の相間が高い（低い）程、乱数が算定値に及ぼす影響が大きい（小さい）ことが確認できる。この場合には、多くの乱数セット数を発生させて算定値の安定性を確保することが必要となる。その確認のために、パラメータ推定に使用したサンプルの一部を用いて、乱数セット数1~100における支払意思額の算定を行ってみたが、経路間の相間が高い（重複区間が長い）場合には数値積分法を用いた場合との差が大きくなる傾向が確認された。本研究は重複区間が長い選択肢を有するサンプルに対しても高精度の支払意思額を算定することが動機となっているため、その特性に注意を払う必要がある。

便益算定を首都圏鉄道網のような大規模ネットワークで行う場合、OD数が莫大であるため、計算時間の問題が生じる。そこで、GHK法を用いた場合の乱数発生回数と計算時間の関係を考える。今、各OD（全OD数をTとする）に対し乱数をNセット発生させる場合、選択肢数Rの時に必要な乱数の総数は、 $T \times N \times (R-1)$ となる。この時、Nを減らす工夫によってのみ計算時間の短縮が可能であるが、発生乱数セット数の減少に伴い算定値の精度が低下するため、できるだけ精度低下を引き起こさない方法を考える必要がある。今、0~1の領域をD個に

等分割し、各分割領域の中央値を乱数の代わりに利用することを考える。D=2では(0.25,0.75), D=5では(0.1,0.3,0.5,0.7,0.9)である。これら中央値を用いて以下のような行列 Γ を作成する(D=2, R=3の場合)。

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.75 & 0.75 \\ 0.25 & 0.75 & 0.25 & 0.75 \end{pmatrix} \quad (37)$$

ここで、1行目は ζ_1 、2行目は ζ_2 の値である。例えば第1列は、 ζ_1, ζ_2 が0.5未満の乱数であり、これらを0.25とみなしたケースであると考えられる。この方法では、乱数の発生領域全体を4通りに集約し、これらを4つの発生乱数セットとみなして便益算定を行うことになる。一般に、 Γ の列数Kは、

$$K = D^{R-1}$$

で与えられる。以上のように、発生乱数セット数を $T \times K$ に減らすことができる。また、Dを増加させることにより、算定値の偏りを軽減できると考えられる。

(4) 便益計測結果

図-5は様々なOD経路パターン（以下Pと記す）ごとに支払意思額を算出した結果の1例である。式(15)による構造化の利点はP1とP3の様に経路構成が異なる場合だけでなく、P3とP4の様に経路構成が同一でも経路長の違いによる類似性の相違も表現可能な点である。以下では、この4パターンにおいて、表-3に示すように7種類の方法で支払意思額の算定を行った。なお、サービス改善の設定内容について図-5に示す通りである。

ロジットモデルは、経路構成の差を反映できないため、支払意思額は全パターンで97円となる。逆にプロビットモデル(probit及びcase1~5)では、構造化によりパターンごとに支払意思額に差が生じている。probitではP1とP4で14.5円の差が生じている。シミュレーション法(case1~5)では、すべてのネットワークパターンにおいて、パラメータ推定における乱数発生回数、支払意思額算出における分割数Dの多い方がprobit（積分法）に近い支払意思額が得られる傾向にある。しかし、乱数発生回数及び分割数の少ないcase5でもcase1との差は最大2.2円であり、実用上十分な算定値が得られている。またP1,P2のような3経路全てが独立のパターンでは、最頻値計算の際に乱数の影響を受けないため、支払意思額の相違は推定パラメータの相違が原因と考えられる。

以上の簡便な試算より、シミュレーション法は最も推定法に対して若干の誤差が生じるが、ロジットモデルを用いた場合のバイアスに比べ極めて小さ

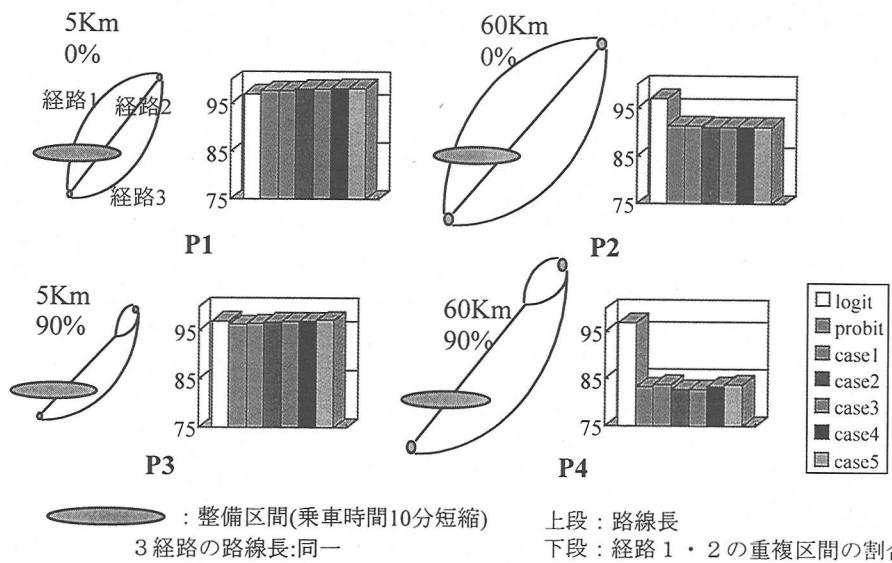


図-5 ネットワークパターンと支払意思額

表-3 支払意思額の算定方法

	パラメータ推定	支払意思額算定
Logit	-	-
Probit	多重積分	多重積分
Case1	多重積分	領域分割数 5
Case2	乱数発生 100 回	多重積分
Case3	乱数発生 100 回	領域分割数 5
Case4	乱数発生 25 回	領域分割数 5
Case5	乱数発生 25 回	領域分割数 2

いことが確認できた。また、支払意思額の算定法については、領域分割数が 2 でも満足のいく精度が確保できることが確認できた。以上により、プロビットモデルを用いた便益計測におけるシミュレーション法の有効性が確認できたと考える。

6. まとめ

本研究では、筆者らが提案した構造化プロビットモデルのシミュレーション法によるパラメータ推定と便益算定について検討を行ったものであり、成果は次の 2 点である。

第一に、シミュレーション法によるモデル推定と便益計算の有効性を示したことであり、第二は最大効用の特性を踏まえ、簡便な支払意思額の算出法を提案し、かつその適用性の高さを確認できたことである。プロビットモデルはシミュレーション法の発展及び適用、さらにはコンピュータの進歩により大幅に実用性が増している。今後、対象とする選択

肢数を増すなどの工夫によって本研究の成果をより一般化し、構造化プロビットモデルの適用性の高さを検証することが必要と考える。

謝辞：本研究の遂行に当たり、東京工業大学工学部土木工学科助手清水哲夫氏の協力を得た。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 屋井鉄雄, 岩倉成志, 伊東誠 : 鉄道ネットワークの需要と余剰の推計法について, 土木計画学研究・論文集, No. 11, pp.81~88, 1993.
- 2) Pakes, A. and Pollard, D. : Simulation and the Asymptotics of Optimization Estimators, *Econometrica*, Vol.57, pp.1027~1057, 1989.
- 3) Bunch, D. S. : Estimability in the Multinomial Probit Model, *Transportation Research B*, Vol.25, pp.1~12, 1991.
- 4) Horowitz, J. L. : Reconsidering the Multinomial Probit Model, *Transportation Research B*, Vol.25, pp.433~438, 1991.
- 5) Bolduc, D. and Ben-Akiva, M. E. : A Multinomial Probit Formulation for Large Choice Set, 6th International Conference on Travel Behavior, pp.244~258, 1991.
- 6) Hausman, J. A. and Wise, D. A. : A conditional probit model for qualitative choice : discrete decisions recognizing interdependence and heterogeneous preferences, *Econometrica*, Vol.46, No2, pp.403~427, 1978.
- 7) Bolduc, D. : Estimation of Multinomial Probit Models

- Using Maximum Simulated Likelihood with Analytical Derivatives and GHK Choice Probability Simulators, Working paper, University of Laval, Canada, 1993.
- 8) Sheffi, Y. : Urban Transportation Networks, Prentice-Hall, 1985
- 9) Yai, T., Iwakura, S. and Morichi, S. : Multinomial Probit Model with Structured Covariance Matrix for Route Choice Behavior, Transportation Research B, Vol. 31, No. 3, pp.195 ~207, 1997.
- 10)屋井鉄雄, 中川隆広 : 構造化プロビットモデルの発展性, 土木計画学研究・論文集, No. 13, pp.563~570, 1996.
- 11)佐野紳也 : 質的選択分析 -理論と応用-, (財)三菱経済研究所, p.76, 1990.
- 12)Clark, E. C. : The Greatest of a Finite Set of Random Variables, Operations Research, 1961.
- 13)McFadden, D. : A Method of Simulated Moments for Estimation of Discrete Response Models without Numerical Integration, Econometrica, Vol.57, No5, pp.995 ~ 1026, 1989.
- 14)Geweke, J., Keane, M. and Runkle, D. : Alternative Computational Approaches to Inference in the Multinomial Probit Model, The Review of Economics and Statistics, pp.609~632, 1994.
- 15)Yai, T. and Iwakura, S. : Route Choice Modeling and Investment Effects in Metropolitan Rail Network, Conference Preprints of 7 International Conference on Travel Behavior, Vol. 1, pp.363~373, 1994.
- 16)Daganzo, C. : Multinomial Probit -The Theory and its Application to Demand Forecasting-, Academic Press, 1979.

(1997.1.20 受付)

ESTIMATION OF MULTINOMIAL PROBIT MODEL WITH STRUCTURED COVARIANCE USING SIMULATION METHOD

Tetsuo YAI, Takahiro NAKAGAWA and Jun-ichi ISHITSUKA

The complexity of the computational process has deterred applications of the multinomial probit model, compared to the wide use of the logit models. However, recent improvements of both the estimation algorithms using simulation methods and the covariance matrix simplification may be a motivation to apply probit models broadly in the transportation field because they are fundamentally more flexible than the logit models. We proposed another version of the multinomial probit model with a structured covariance matrix to represent any overlapped relation between route alternatives. In this paper, we examined the parameter estimability and the stability of choice probabilities and user benefits by the simulation method.