

# 非共軸項を付加したひずみ硬化弾塑性構成式 による2次元局所変形解析

石崎仁

正会員 工博 住友大阪セメント(株) セメント・コンクリート研究所 (〒551-0021 大阪市大正区南恩加島 7-1-55)

金属塑性力学で、分岐現象やせん断帯解析によく用いられる‘とがり点降伏曲面理論’、具体的にBudianskyの変形理論式を再検討し、非共軸項の持つ意味を明らかにする。次いで、Mohr-Coulomb 規準に従う弾塑性流れ理論式に非共軸項を付加し、圧縮性材料の変形理論式を誘導する。さらに、有限要素法による局所変形解析をするために、体積変形に対する柔軟性を維持しながらも、せん断変形に対しては鋭敏な特殊有限要素を提案する。上記構成式と特殊要素を用いて種々のシミュレーションを行い、連続体解析でも内部摩擦角およびダイレタンシー角とせん断帯の形成角度の関係を表現できることを示す。

**Key Words :** elastoplastic constitutive equation , non-coaxial component , strain hardening , Mohr-Coulomb's criterion , shear band , bifurcation , FEM analysis.

## 1. はじめに

金属材料の塑性加工は、材料に回復不能な変形(塑性変形)を与えて任意形状の構造物を作製することであるが、塑性変形を与えた後も構造物に必要な強度を持たせなければならない。実際の材料破壊は、構造物全体の変形はそれほど大きくないのに局所的な破壊状態を示す場合が多い。このような破壊は、狭い帯域に著しく大きなせん断変形、すなわち、せん断帯が生ずることによるものと考え、せん断帯の発生条件やその位置の予測に関する研究がなされた。せん断帯の発生条件は、最初Hillにより検討されたが、後にStören and Rice<sup>1)</sup>が応力速度に比例する塑性ひずみ速度を考慮することによって、より現実的な発生条件式を示した。そこで用いられた構成式は、関連流動則による塑性ひずみ速度に応力速度に比例する塑性ひずみ速度を加えたBudiansky<sup>2)</sup>の変形理論式を有限変形解析用に客観性応力速度で表したものである。その後の研究で、応力速度比例成分を加えた弾塑性構成式を用いれば、せん断帯発生による局所変形や分岐現象をよく説明できることが示された。

地盤材料分野においては、拘束圧に依存し、せん断にともなう体積変化(ダイレタンシー)を示す材料モデル、いわゆる圧縮性材料モデルに応力速度比例成分を加えた構成式を用いて、同様の解析がなされている。たとえば、Rundnicki and Rice<sup>3)</sup>はDrucker-Pragerモデルに応力速度比例成分を加えた構成式を提案し、Yatomi et al.<sup>4)</sup>はCam-clayモデルとDrucker-Pragerモデルの相似性を利用

して、Cam-clayモデル版の同様な構成式を誘導している。

本文では、まず、金属材料で用いられるBudianskyの変形理論式を考察し、ひずみ硬化弾塑性構成式でもせん断帯発生およびそれにもなうマクロな軟化現象を表現できる理由を説明する。次いで、地盤材料としてMohr-Coulomb規準に従う弾塑性構成式を変形理論式に拡張する。上述の構成式と圧縮性材料のせん断帯解析用に開発した特殊要素を用いて有限要素法解析を行い、せん断帯の形成条件と材料定数の関係について述べる。

## 2. 金属材料の変形理論式

現在、金属材料では、関連流動則による速度(増分)形の弾塑性構成式が一般に用いられているが、せん断帯発生や分岐現象を説明する場合には応力速度比例成分を加えた構成式が用いられる。関連流動則のみの構成式を‘流れ理論式’、それに応力速度比例成分を加えた構成式を‘変形理論式’と呼んでいるが、ここでは、Budiansky<sup>2)</sup>の変形理論式に限定して考察する。Budianskyの式は、次式の全ひずみ理論式の微分形から得られる。

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \cdot \sigma'_{ij} \quad (1)$$

ここに、 $\varepsilon_{ij}^p$  ; 塑性ひずみテンソル  
 $\sigma'_{ij}$  ; 偏差応力テンソル  
 $E$  ; 縦弾性係数

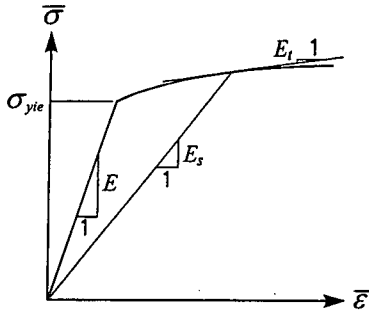


図-1 相当応力～相当ひずみ曲線と硬化係数

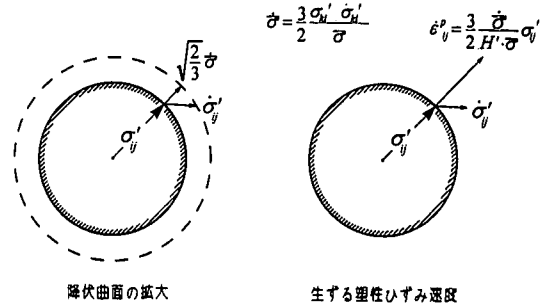


図-2 流れ理論における塑性ひずみの発生状況

$E_s$ ; 相当応力  $\bar{\sigma}$ ～相当ひずみ  $\bar{\varepsilon}$  曲線における割線硬化係数  $E_s = \bar{\sigma} / \bar{\varepsilon}$   
 $E$  や  $E_s$  は相当応力  $\bar{\sigma}$ ～相当ひずみ  $\bar{\varepsilon}$  曲線において、図-1のように定義される。式(1)を微分すると、速度形の応力～ひずみ関係が得られる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \cdot \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_s} \right) \cdot \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (2)$$

ここに、 $E_t$ ; 相当応力  $\bar{\sigma}$ ～相当ひずみ  $\bar{\varepsilon}$  曲線における接線硬化係数  $E_t = \dot{\bar{\sigma}} / \dot{\bar{\varepsilon}}$   
 式(2)で、右辺第1項は偏差応力速度  $\dot{\sigma}'_{ij}$  に、第2項は偏差応力  $\sigma'_{ij}$  に比例する塑性ひずみ速度を表している。式(2)は次式に変形できる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \cdot \left( \dot{\sigma}'_{ij} - \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \right) + \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \cdot \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (3)$$

式(3)の右辺第2項は流れ理論式(流れ則)による塑性ひずみ速度である。流れ理論式では、降伏負荷が継続する場合、図-2に示すように、偏差応力速度  $\dot{\sigma}'_{ij}$  がいかなる方向を向いても塑性ひずみ速度は降伏曲面の法線方向に生ずる。しかし、式(3)の変形理論式では、偏差応力  $\sigma'_{ij}$  と偏差応力速度  $\dot{\sigma}'_{ij}$  の方向がずれている場合は、塑性ひずみ速度は降伏曲面の法線、すなわち、偏差応力  $\sigma'_{ij}$  方向に一致しないので右辺第1項は非共軸項と呼ばれる。図-3より、右辺第1項の  $\dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\bar{\sigma}}/\bar{\sigma} \cdot \sigma'_{ij}$  は降伏面上の接線ベクトルになっており、 $1/h' = 3/2 \cdot (1/E_t - 1/E)$ 、 $1/h_s = 3/2 \cdot (1/E_s - 1/E)$  とおくと、右辺第1項は降伏曲面(Mises規準)上の接線ベクトルに比例する塑性ひずみ速度であることがわかる。すなわち、非共軸項は降伏面上の接線ひずみ成分を考慮するために、現れた項であると解釈できる。降

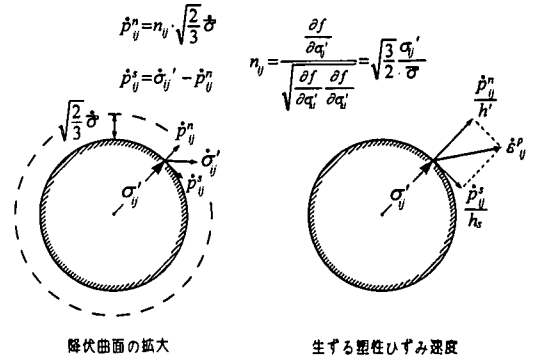


図-3 変形理論における塑性ひずみの発生状況

伏曲面の法線と塑性ひずみ速度の方向がずれても、あくまで塑性ひずみ速度に垂直な降伏曲面を考えようとする、降伏曲面は尖った点を持つ凸曲面となるため、変形理論式は‘尖り点降伏曲面理論(yield-vertex model)’とも呼ばれる。しかし、降伏曲面法線と塑性ひずみ速度のずれ角は任意に採れるものではなく、塑性仕事の非負性や降伏継続条件より、ずれ角の範囲が限られ、式(3)はその範囲内で適用できるものである。一方、Christoffersen and Hutchinson<sup>9)</sup>はずれ角が大きくなると滑らかに弾性除荷に移行するモデルを提案している。また、後藤<sup>10)</sup>は上述の変形理論式を発展させた実用モデルを幾つか提案しており、他にも多くの変形理論式が検討されている。式(2)に弾性ひずみ成分を加えると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \\ &= C_{ijkl} \cdot \dot{\sigma}_{kl} + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \cdot \dot{\sigma}'_{ij} \\ &\quad + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_s} \right) \cdot \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \end{aligned}$$

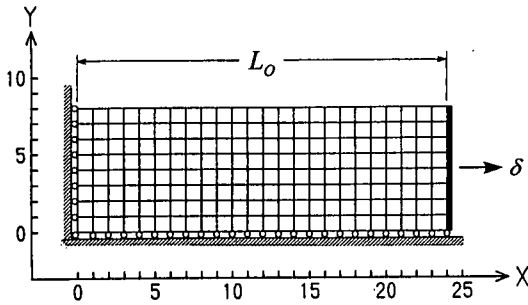


図-4 引張試験の有限要素分割図

$$= \left\{ C_{ijkl} + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right\} \cdot \dot{\sigma}_{kl} + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_s} \right) \cdot \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (4)$$

ここに、 $C_{ijkl}$ ；弾性コンプライアンス  
式(4)の右辺第1項は弾性コンプライアンスの修正を意味している。この修正された弾性コンプライアンスは縦弾性係数 $E \rightarrow E_s$ 、ポアソン比 $\nu$ は次式の $\nu_s$ に変更するだけでよい。

$$\frac{\nu_s}{E_s} = \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \quad (5)$$

ここで、具体的に硬化関数を導入して、修正された縦弾性係数 $E_s$ を計算してみる。硬化関数として、次式の $n$ 乗硬化則を用いる。

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{yie}} = \left( \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{yie}} \right)^n \quad (6)$$

ここに、 $\sigma_{yie}$ ；降伏応力

$\varepsilon_{yie}$ ； $\bar{\sigma} = \sigma_{yie}$ での相当ひずみ

すなわち、弾性限界ひずみであるから

$$\varepsilon_{yie} = \sigma_{yie} / E$$

$n$ ；材料定数、ひずみ硬化体では $0 \leq n < 1$

式(6)より、修正縦弾性係数 $E_s$ は次式で表される。

$$E_s = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} = \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{yie}} \right)^{1-\frac{1}{n}} \quad (7)$$

また、式(5)より、修正ポアソン比 $\nu_s$ は次式で表される。

$$\nu_s = \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \cdot \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{yie}} \right)^{1-\frac{1}{n}} \quad (8)$$

表-1 材料パラメータ

弾性係数 $E$	200
ポアソン比 $\nu$	0.3
降伏応力 $\sigma_{yie}$	$0.02 \times E$
硬化指数 $n$	0.0625

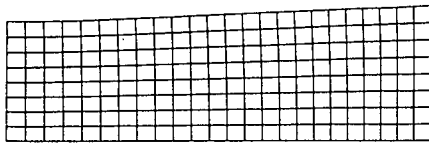
式(7)、(8)より、修正せん断弾性係数 $G_s$ は次式となる。

$$G_s = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} = G \cdot \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{yie}} \right)^{1-\frac{1}{n}} \cdot \left\{ 1 - \frac{1 + \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{yie}} \right)^{1-\frac{1}{n}}}{\frac{3}{1-2\nu} + \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{yie}} \right)^{1-\frac{1}{n}}} \right\} \quad (9)$$

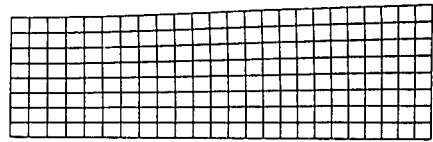
ひずみ硬化体は $0 \leq n < 1$ 、降伏中は $\bar{\sigma} / \sigma_{yie} \geq 1$ であるので、式(7)の修正縦弾性係数 $E_s$ は、本来の縦弾性係数 $E$ から降伏比 $\bar{\sigma} / \sigma_{yie}$ に応じて劣化することがわかる。同様に、修正せん断弾性係数 $G_s$ も降伏比 $\bar{\sigma} / \sigma_{yie}$ に応じて劣化するが、その劣化度は修正縦弾性係数 $E_s$ より大きい。両者の劣化度の違いは、せん断応力に対してより変形しやすい効果をもたらす。一方、流れ理論では、降伏負荷中の弾性係数およびポアソン比とも修正されない。変形理論の弾性係数の劣化は、せん断帯のような局所変形を発生・加速しやすくしていると考えられる。

以上述べた流れ理論と変形理論による相違を、金属材料の引張試験の有限要素解析により具体的に検証してみる。有限要素法は updated Lagrange 定式による有限変形解析とし、客観性応力速度として Jaumann 共回転応力速度を用いる<sup>7)</sup>。図-4は解析モデルの要素分割図で、用いた要素はせん断帯解析用に開発した特殊要素である。この特殊要素については、4. で詳しく述べる。各要素の初期応力および表面境界応力は0とし、材料パラメータを表-1に示す。なお、本文では、弾性係数および応力量は無次元として扱う。载荷条件はモデル右端のY方向変位を固定したまま、X方向に一樣な強制変位を与える形式とし、応力～変位場は平面ひずみ状態とする。

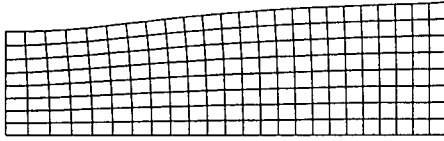
先に述べたように、Budianskyの式は応力と応力速度のずれ角が小さい範囲で適用できるものであるが、ずれ角の範囲は対象材料により種々異なるので、この解析では、ずれ角は $\pi/2$ まで許容する。すなわち、降伏曲面が膨張する(=相当応力 $\bar{\sigma}$ が増加する)限りは式(4)を用いて計算する。このことは、ずれ角が大きい場合の剛性を実際の材料に比べて低く評価することになるが、流れ理論と変形理論の違いを検討しようとする本解析の目的に影響しない。



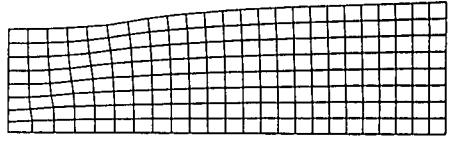
$\delta/L_0=0.083$



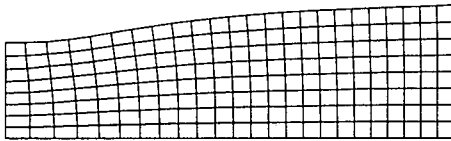
$\delta/L_0=0.083$



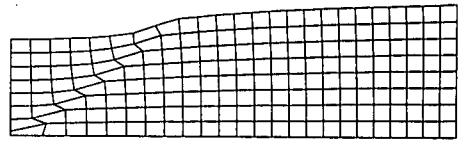
$\delta/L_0=0.125$



$\delta/L_0=0.125$



$\delta/L_0=0.146$



$\delta/L_0=0.146$

図-5 流れ理論における要素変形図

図-6 変形理論における要素変形図

図-5は流れ理論による変形結果で、公称引張ひずみ  $\delta/L_0=0.083, 0.125, 0.146$ における要素変形図である。ここに、 $\delta$ はモデル右端のX変位、 $L_0$ はモデルの初期長さである。図より、流れ理論では引張ひずみにともなってモデル左端の絞り込みが進んでいるが、モデル内の変位場は滑らかである。図-6は変形理論による同結果であり、引張ひずみ  $\delta/L_0=0.146$ ではモデル左端下から斜め上がりのせん断帯が明確に表れている。しかし、せん断帯以外の要素はあまり変形せず、モデル全体の引張変位はせん断帯の局所変形に吸収されていることがわかる。

図-7は降伏応力で正規化した引張応力  $\sigma_t/\sigma_{yie}$  と引張ひずみ  $\delta/L_0$  の関係である。ここに、引張応力  $\sigma_t$  は引張反力を右端断面積で除した平均応力である。 $\delta/L_0=0.1$  付近で、流れ理論 (図中実線) と変形理論 (図中破線) の応力～ひずみ曲線が別れ始める。これが局所せん断変形による分岐点であるが、せん断帯はこの分岐点をかなり過ぎてから明瞭になる。

図-8, 9は流れ理論および変形理論による各要素の応力比  $\sigma_{yie}/\bar{\sigma}$  の分布図である。 $\sigma_{yie}/\bar{\sigma} < 1$  は降伏応力を超えていることを意味する。流れ理論 (図-8) では、引張ひずみが大きくなると引張端 (モデル右端) 部の  $\sigma_{yie}/\bar{\sigma}$  が若干回復するものの、絞り込み (モデル左端) 部の  $\sigma_{yie}/\bar{\sigma}$  はほとんど変わらない。一方、変形理論 (図-9) では、引張ひずみにともなってせん断帯部分の  $\sigma_{yie}/\bar{\sigma}$  は低下するが、せん断帯外側、特に右方部分の  $\sigma_{yie}/\bar{\sigma}$  は著しく回復し、弾性域 ( $\sigma_{yie}/\bar{\sigma} > 1$ ) に移行している。弾性域の剛

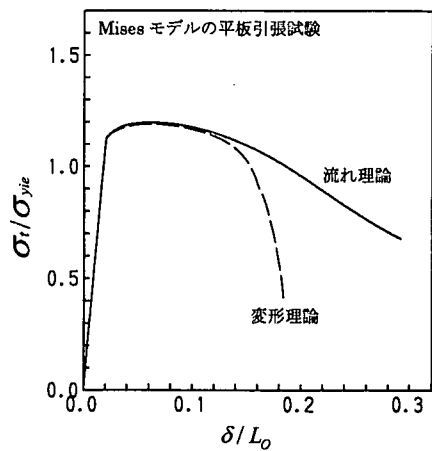


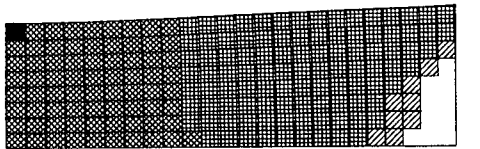
図-7 正規化引張応力～ひずみ関係

性は塑性域よりかなり大きいため、この弾性除荷はさらにせん断帯に変形を集中させることになる。

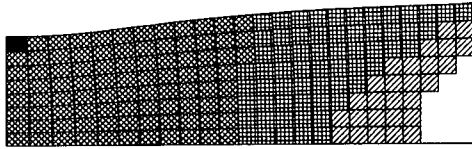
さて、変形理論の修正総弾性係数  $E_S$  (式(7)) を応力比  $\sigma_{yie}/\bar{\sigma}$  で表すと次式となる。

$$E_S = E \cdot \left( \sigma_{yie}/\bar{\sigma} \right)^{1-n} \quad (10)$$

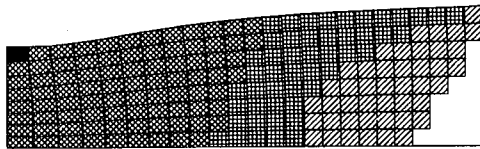
ひずみ硬化体では  $1-n > 0$  であるから、修正総弾性係数  $E_S$  は  $\sigma_{yie}/\bar{\sigma}$  が小さいほど劣化し、 $\sigma_{yie}/\bar{\sigma}$  の分布は修正弾性



$\delta / L_0 = 0.083$

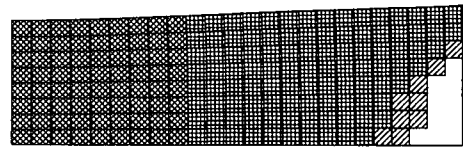


$\delta / L_0 = 0.125$

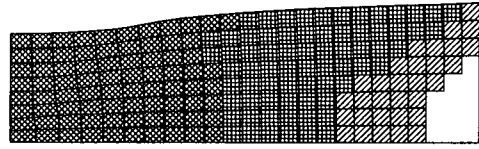


$\delta / L_0 = 0.146$

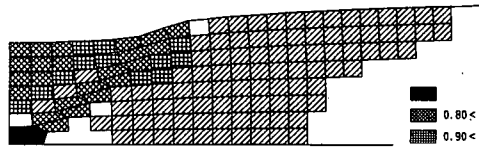
図-8 流れ理論における応力比  $\sigma_{yie}/\bar{\sigma}$  分布図



$\delta / L_0 = 0.083$



$\delta / L_0 = 0.125$



$\delta / L_0 = 0.146$

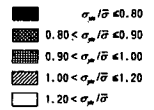
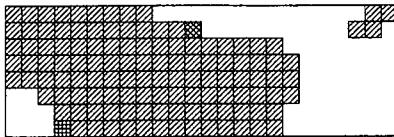
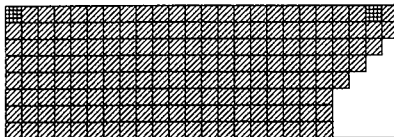


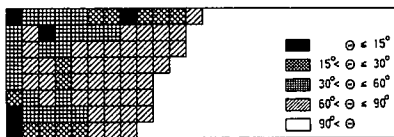
図-9 変形理論における応力比  $\sigma_{yie}/\bar{\sigma}$  分布図



$\delta / L_0 = 0.021$



$\delta / L_0 = 0.042$



$\delta / L_0 = 0.146$

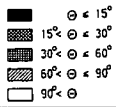
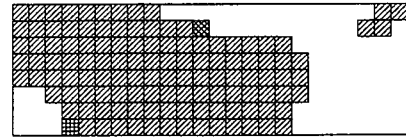
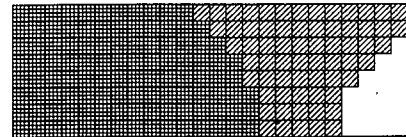


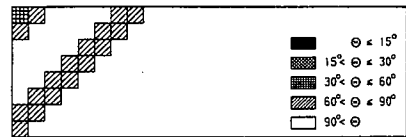
図-10 流れ理論におけるずれ角  $\Theta$  分布図



$\delta / L_0 = 0.021$



$\delta / L_0 = 0.042$



$\delta / L_0 = 0.146$

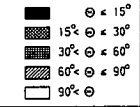


図-11 変形理論におけるずれ角  $\Theta$  分布図

係数  $E_S$  の分布, すなわち, 弾性係数の劣化分布と見ることが出来る。ただし, 流れ理論では, 塑性降伏しても弾性係数は変化しない。

図-10, 11は流れ理論および変形理論による各要素の偏差応力  $\sigma'_y$  と偏差応力速度  $\dot{\sigma}'_y$  のずれ角  $\Theta$  の分布図であるが, 比較し易くするために初期要素分割図に投影して

いる。  $\sigma'_y$  と  $\dot{\sigma}'_y$  のずれ角  $\Theta$  は次式で計算される。

$$\cos \Theta = \frac{\sigma'_{ij} \cdot \dot{\sigma}'_{ij}}{\sqrt{\sigma'_{mn} \cdot \sigma'_{mn}} \cdot \sqrt{\dot{\sigma}'_{mn} \cdot \dot{\sigma}'_{mn}}} \quad (11)$$

偏差応力速度は,  $\Theta = 0^\circ$  では降伏曲面に垂直であり,  $\Theta =$

90°では降伏曲面に接している。さらに、 $\Theta > 90^\circ$ では偏差応力速度は降伏曲面内部に向くため、弾性状態にある。図より、引張ひずみ  $\delta/L_0 = 0.021$ では流れ理論と変形理論のずれ角分布は同じであるが、引張ひずみがさらに大きくなると流れ理論(図-10)のずれ角は変形理論(図-11)より小さくなっている。流れ理論の塑性ひずみは降伏曲面に垂直な方向しか生じないから、塑性変形が効率よく継続するために、すなわち、少ない偏差応力速度で降伏曲面を膨張させるために、ずれ角  $\Theta$  は小さくなる必要がある。一方、変形理論のずれ角は流れ理論より大きく、引張ひずみ  $\delta/L_0 = 0.146$ におけるずれ角は、モデル左上隅およびせん断帯部分が90°以下で、その他の部分は90°以上である。元々、変形理論は降伏曲面上の接線方向の塑性変形を考慮しているため、ずれ角が大きいまでも変形が継続できる。このことは、逆に、わずかな偏差応力速度変化で、ずれ角が90°以上(弾性除荷)になりやすいことを意味しており、せん断帯周辺要素の急激な除荷がそれが原因と考えられる。変形理論を用いた有限要素解析で、せん断帯が生ずると、その周辺要素が弾性除荷するという報告がされている(たとえば、文献6)が、「偏差応力速度が降伏曲面の法線方向とずれたままでも塑性変形が継続し、せん断帯が生じた後、その周辺要素が速やかに弾性除荷できる」という過程は、図-11の考察によって初めて説明できる。ここで示した解析例は変位制御試験であるが、応力~ひずみ関係を介して生ずる応力変化により上記の現象が起こる。

### 3. 圧縮性材料の変形理論式

拘束応力に依存する圧縮性材料の変形理論式は、まず、Rundnickiら<sup>3)</sup>がDrucker-PragerモデルにBudianskyが導入した非共軸項(式(3)の右辺第一項)を付加したモデルを提案し、Mehrabadiら<sup>8)</sup>、Vardoulakis<sup>9)</sup>、Anand<sup>10)</sup>などはMohr-Coulombモデルに同様の非共軸項を付加した2次元モデルを用いている。本文でも、Mohr-Coulomb規準に従う流れ理論式に非共軸項を加えた2次元モデルを用いるが、上述の研究とは非共軸項が異なる。

まず、降伏関数  $f$  および塑性ポテンシャル  $g$  は次式で表される。

$$f = -\sin\phi + \sqrt{\eta_{ij} \cdot \eta_{ij}} \quad (12)$$

$$g = -\sin\psi \cdot p + q \quad (13)$$

ここに、 $\phi$ ; 内部摩擦角

$\psi$ ; ダイレタンシー角

$$q; \text{相当応力} \quad q = \sqrt{\sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij}} / 2$$

$$p; \text{平均主応力} \quad p = \sigma_{ii} / 2$$

$$\sigma'_{ij}; \text{偏差応力テンソル} \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p \cdot \delta_{ij}$$

$$\eta_{ij}; \text{偏差応力比テンソル} \quad \eta_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{\sqrt{2}p}$$

$$\eta; \text{相当応力比} \quad \eta = \frac{q}{p} = \sqrt{\eta_{ij} \cdot \eta_{ij}}$$

上式より、相当応力比  $\eta$ 、すなわち、降伏関数  $f$  は偏差応力比テンソル  $\eta_{ij}$  空間で球を形成しており、金属材料の降伏関数における偏差応力テンソル  $\sigma'_{ij}$  に対応するものである。このモデルは2次元平面応力場であるので、テンソル添字  $i, j$  は  $x, y$  である。また、この節以降、応力およびひずみは圧縮を正とする。

塑性ひずみ速度は流れ則による成分と非共軸項に比例する成分の和とし、次式で与えられると仮定する。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + \Lambda \cdot l_{ij} \quad (14)$$

ここに、 $\lambda$ ; 第一比例係数  $\lambda = f/H'$

$H'$ ; 接線硬化係数  $H = f/\epsilon^p$

$\Lambda$ ; 第二比例係数

$l_{ij}$ ; 非共軸項テンソル

非関連流動則では、非共軸項は塑性ポテンシャルの接線ベクトルで表されるとすると、降伏負荷速度  $\dot{f}$  の時の接線ベクトルは、次式で与えられる。

$$l_{ij} = \dot{\eta}_{ij} - \frac{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}}{\sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}}}} \cdot \dot{f}$$

$$= \dot{\eta}_{ij} - \sqrt{\frac{2}{1 + \sin^2 \psi}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \dot{f} \quad (15)$$

式(15)を式(14)に代入すると、次式が得られる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \left( \frac{1}{H'} - \frac{1}{H_s} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \dot{f}$$

$$+ \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \psi}{2}} \cdot \frac{1}{H_s} \dot{\eta}_{ij} \quad (16)$$

$$\text{ここに、} \Lambda = \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \psi}{2}} \cdot \frac{1}{H_s}$$

式(16)と式(2)を比較すると、 $H_s$  は  $E_s$  に対応するパラメータであることがわかる。ここでは、 $H_s$  は  $E_s$  と同様な次式で表されると仮定する。

$$H_s = \eta / \epsilon^p \quad (17)$$

すなわち、 $H_s$  は相当応力比  $\eta$  ~ 相当塑性ひずみ  $\bar{\epsilon}^p$  曲線の割線硬化係数である。

ここで誘導した式(16)の特徴は、非共軸項が偏差応力比速度  $\dot{\eta}_{ij}$  で表されている点にある。偏差応力比速度  $\dot{\eta}_{ij}$  を書き下すと、次式となる。

$$\dot{\eta}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}p} \cdot \left( \dot{\sigma}'_{ij} - \frac{\sigma'_{ij}}{p} \dot{p} \right) \quad (18)$$

式(18)より、偏差応力比速度  $\dot{\eta}_{ij}$  は偏差応力速度  $\dot{\sigma}'_{ij}$  と平均主応力速度に比例する項  $\sigma'_{ij} \cdot \dot{p}/p$  に影響されることがわかる。一方、Merhrabadi らほかの非共軸項は、偏差応力速度と相当応力速度に比例する式  $\dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij} \cdot \dot{q}/q$ 、すなわち、相当応力  $q$  曲面上の接線成分で表されているので、平均主応力の変化  $\dot{p}$  に影響を受けない。両者の違いは、降伏関数  $f$  が平均主応力  $p$  に影響されるか否かの点にある。さて、提案モデルにおいて、塑性体積ひずみが生ずる場合、すなわち、ダイラタンシー角  $\psi \neq 0^\circ$  の場合、式(15)の非共軸項は仕事をする。提案モデルの流れ成分では、塑性せん断ひずみに比例する塑性体積ひずみが生ずる。したがって、非共軸成分のせん断ひずみに比例する体積ひずみによって仕事が生ずると考えることができる。Rundnicki and Rice<sup>3)</sup>にも、非共軸ひずみに比例する体積ひずみを考慮した式示がある。上記二者の非共軸項の違いによる影響については、5.(3)で述べる。

#### 4. せん断帯解析用の有限要素

前述のRundnicki ら, Mehrabadi ら, Vardoulakis, Anandなどはせん断帯を薄層の一様応力場と考え、仮定した応力・変形の境界条件を満足する特性解によりせん断帯の発生条件や形成角度を予測している。これらの研究は理想的な応力・変形場を仮定しているが、実際問題は様々な材料形状や境界条件での予測が求められる。その場合、数値解析によらざるを得ず、本文では有限要素法によるせん断帯解析を試みる。

金属材料分野では、有限要素法によるせん断帯解析が盛んに行われており、幾つかの有用な知見を以下に示す。

- 1) updated Lagrange 定式による有限変形理論
- 2) 客観性のある応力速度を用いる。
- 3) 体積変化の過拘束による影響を防ぐ。
- 4) 要素分割や配列による影響が大きい。

上述の3)は構成式の性質に依存した問題である。金属材料は塑性体積変化を無視できるとして、偏差応力成分のみで塑性ひずみを表しており、非共軸項を付加した式(3)も同様である。このような変形理論式に対して、双一次要素(4節点セレンデピティ要素)を用いて計算してもせん断帯や分岐現象を表現できない。2次元問題では、双一次要

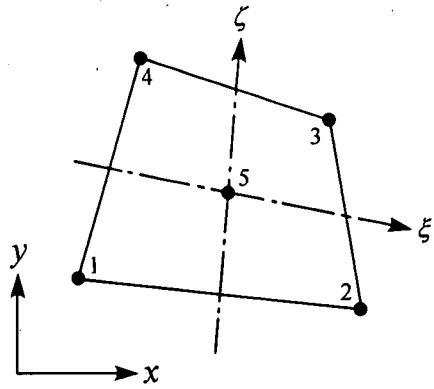


図-12 内部自由度を持つサブパラメトリック要素

素の剛性マトリックスは4点 Gauss-Legendre 積分で完全積分となるが、塑性体積ひずみを考慮できない構成式に対して完全積分を行うと、弾性体積ひずみに関する剛性がせん断剛性に比べて大きくなり過ぎて、せん断帯や分岐現象を表現できなくなる。選択低減積分要素(SRI要素)<sup>11)</sup>は、体積ひずみ剛性は1点積分、せん断剛性は4点積分して、体積ひずみ剛性の過拘束を防ぐために提案されたものであるが、体積ひずみ剛性が積分不足になっていることに注意が必要である。

飯塚ら<sup>12)</sup>は圧縮性材料の変形理論式を用いて種々の要素タイプの解の安定性を検討し、SRI要素の優秀性を述べているが、この検討は単一要素における各変形モードの固有値解析であり、多数の要素でモデル分割し任意の境界条件という一般的なケースでの適性を調べているわけではない。実際、5.で検討する二軸圧縮試験をSRI要素を用いて解析すると、要素剛性の積分不足のために計算不能となってしまう。金属材料でSRI要素が成功したのは、構成式が体積変形よりせん断変形に鋭敏だからであって、ダイラタンシーを生ずる構成式には使えない。

以上より、圧縮性材料のせん断帯解析用の有限要素として、体積ひずみに関する剛性が柔らかく、全体の要素剛性は積分不足にならない2次元用の新しい要素を考える。ここで、要素剛性を柔らかくするために、図-12に示すような内部自由度を導入する<sup>13)</sup>。この場合、要素内の変位分布  $u(\xi, \zeta)$  は次式で表される。

$$u(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot u_i + N_5 \cdot u_5 \quad (19)$$

ここに、 $u_i$ ; 節点  $i$  の変位ベクトル

$N_i$ ; 節点  $i$  の変位内挿関数

$\xi, \zeta$ ; 要素局所座標

内挿関数  $N_1 \sim N_4$  は4節点セレンデピティ要素の形状関数とし、内部節点5の変位内挿関数  $N_5$  は次式とする。

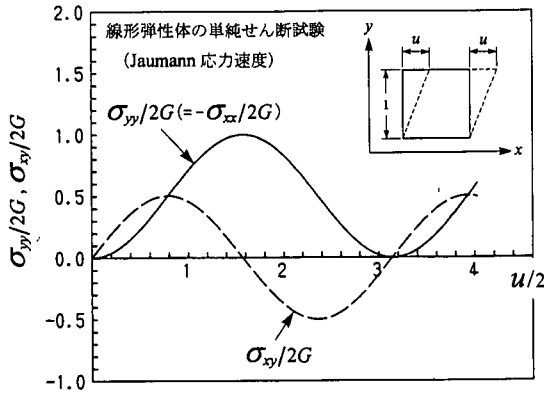


図-13 単純せん断試験の応力～変形結果(RL要素)

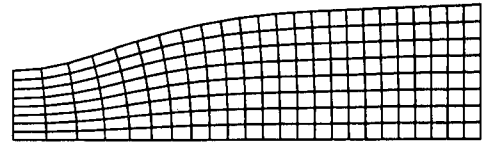
$$N_5 = (1 - \xi^2)(1 - \zeta^2) \quad (20)$$

Jacobian などの座標変換則は形状関数  $N_1 \sim N_4$  を用いて行われる。さて、垂直ひずみの剛性のみを柔らかくするために、以下の変位～ひずみ関係を仮定する。

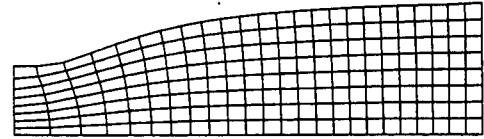
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{Bmatrix} B_{xx,i} \\ B_{yy,i} \\ B_{xy,i} \end{Bmatrix} \cdot u_i + \begin{Bmatrix} B_{xx,5} \\ B_{yy,5} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot u_5 \quad (21)$$

ここに、 $B_{xx,i} \sim B_{xy,i}$  は変位～ひずみマトリックスの成分である。式(21)で特徴的な点は、内部節点変位  $u_5$  は垂直ひずみ  $\varepsilon_{xx}$ 、 $\varepsilon_{yy}$  には影響するが、せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$  に全く寄与しないところにある。すなわち、せん断剛性は内部節点変位により柔らかくなることはない。従来の内部自由度をもつ要素は、内部節点変位はせん断ひずみにも影響する ( $B_{xy,5} \neq 0$ ) ので、せん断剛性も柔らかくなる。式(21)と応力～ひずみマトリックスより要素剛性マトリックスを計算した後、内部節点変位  $u_5$  を縮約すれば、取扱い上は4節点要素となる。要素剛性の積分は4点 Gauss-Legendre 積分で十分であり、応力は局所座標の原点  $(\xi, \zeta) = (0, 0)$ 、あるいは、積分点の応力を加重平均したものを用いる。

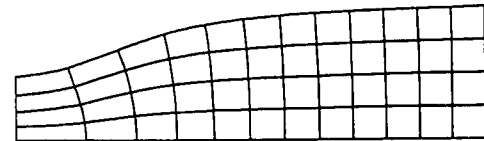
ここで提案した要素を“RL要素”と呼び、RL要素の妥当性を示そう。図-13は Jaumann 応力速度を用いた線形弾性体の単純せん断試験結果であるが、せん断弾性係数  $G$  で正規化した垂直応力  $\sigma_{yy}/G$ 、せん断応力  $\sigma_{xy}/G \sim$  せん断ひずみ  $u/2$  関係は理論値と全く一致している。RL要素の垂直剛性は柔らかくされているにも関わらず、せん断応答は正しく評価されている。なお、ポアソン比  $\nu=0.3$  で計算し、垂直応力  $\sigma_{yy}$  は圧縮を正として図示している。



(a) CT要素



(b) RL要素



(c) 8節点セレンデピティ要素

図-14 流れ理論による引張試験結果 ( $\delta/L_0=0.208$ )

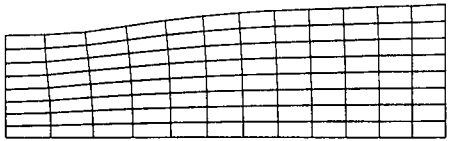
図-14は流れ理論による引張試験の  $\delta/L_0=0.208$  における変形図である。図中のCT要素(crossed triangle 要素)は定ひずみ三角形要素を4個組み合わせることで四角形を形成した後に内部節点変位を縮約した要素で、8節点セレンデピティ要素とともにせん断帯解析用に好んで用いられる要素である。図より、 $\delta/L_0=0.208$  という大変形時においても、RL要素の変形はCT要素と8節点セレンデピティ要素の中間的な形状であり、せん断帯が生成しない構成式では、RL要素は従来の要素とほぼ同じ結果を示す。

CT要素およびRL要素は4節点要素であり、両要素による引張試験(2.の計算例)のせん断帯および分岐現象はほぼ同じである(結果図省略)。図-15は横方向の要素分割を1/2(各要素の初期縦横比=1:2)とした場合のRL要素の要素変形図で、図-16はCT要素の同結果図である。両図より、RL要素ではせん断帯らしき局所変形が見られるのに対して、CT要素では局所変形は見られない。地盤工学の解析領域は広いため、すべてを正方形分割すると、節点および要素は多大な数になる。したがって、要素の縦横寸法がかなり異なる要素分割をせざるを得ず、その場合、RL要素は有用であるが、メッシュの粗細や配向性に関してはまだ改良すべき点がある。

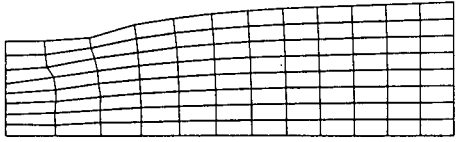
## 5. 有限要素法による圧縮性材料のせん断帯解析

RL要素を用いて、非共軸項を付加したMohr-Coulomb変形理論による有限要素解析を行い、せん断帯の形状・発生

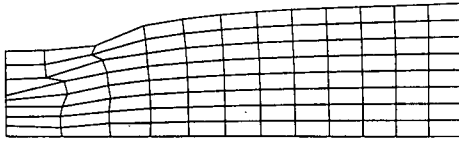




$\delta / L_0 = 0.125$

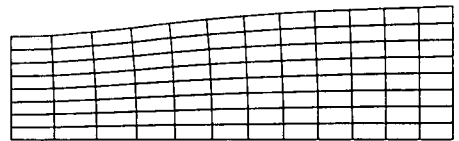


$\delta / L_0 = 0.146$

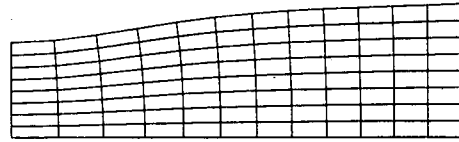


$\delta / L_0 = 0.167$

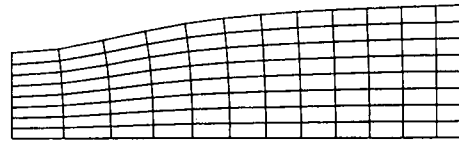
図-15 横長分割モデルの変形結果図(RL要素)



$\delta / L_0 = 0.125$



$\delta / L_0 = 0.146$



$\delta / L_0 = 0.167$

図-16 横長分割モデルの変形結果図(CT要素)

位置と材料パラメータの関係について考察する。構成式の弾性定数は表-1と同じであるが、非硬化体(接線硬化係数 $H'=0$ )とする。要素の初期応力( $\sigma_0=1$ )は等方とし、間隙水圧との連成は考慮しない。

### (1) 二軸圧縮試験

図-17は解析に用いた1/4モデルの要素分割である。土質試験における圧縮試験供試体の高さ・直径比は2~2.5であるので、モデルの縦横比は2.25とした。また、表面境界応力( $\sigma_n=1$ )が載荷板および供試体右側表面に垂直に作用する。載荷は供試体上面のX方向変位を拘束したまま、Y方向に一樣な強制圧縮変位を与える。

図-18は流れ理論による内部摩擦角 $\phi=30^\circ$ 、ダイレタンシー角 $\psi=0^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ における要素変形、図-19は初期解析モデル上に投影した相当ひずみ(弾性ひずみも含む)分布である。図-20, 21は変形理論による同結果である。なお、計算はいずれかの要素の平均主応力 $p \leq 0$ なる時点で打ち切った。流れ理論(図-18)では、ダイレタンシー角 $\psi$ によりモデル全体の變形形状は異なっているが、せん断帯のような局所變形は見られない。一方、變形理論(図-20)では、明らかにせん断帯が見られる。モデル内の相当ひずみ分布に注目すると、變形理論(図-21)の等高線の形状はせん断帯にまったく対応しており、等高線間隔も狭くシャープである。流れ理論(図-19)の等高線はモデル左下隅から右上方に伸びており、その方向は一般に観察されるすべり線( $45^\circ + \phi/2$ )に近い。しかし、図-18では局所變形は生じておらず、相当ひずみ分布をせ

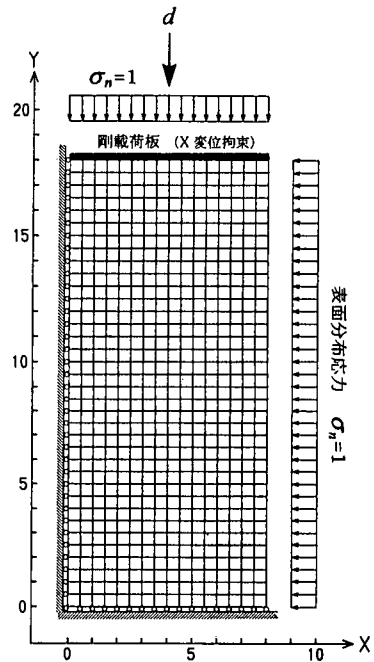


図-17 二軸圧縮試験の有限要素分割図

ん断帯と単純に結び付けることは早計である。

図-22は流れ理論および變形理論によるモデル全体の応力比 $(\sigma_y - \sigma_x) / \sigma_n$ ~公称圧縮ひずみ $d/H_0$ 関係である。

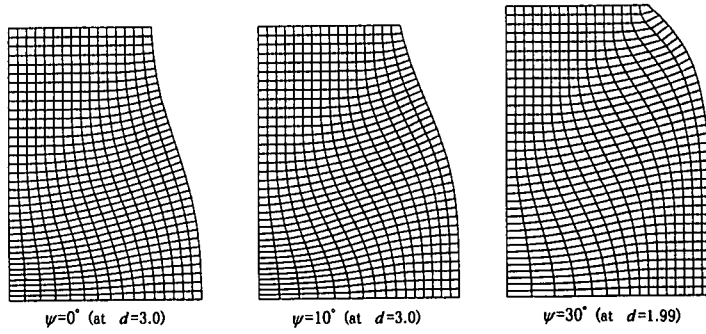


図-18 二軸圧縮試験の要素変形図 (流れ理論,  $\phi = 30^\circ$ )

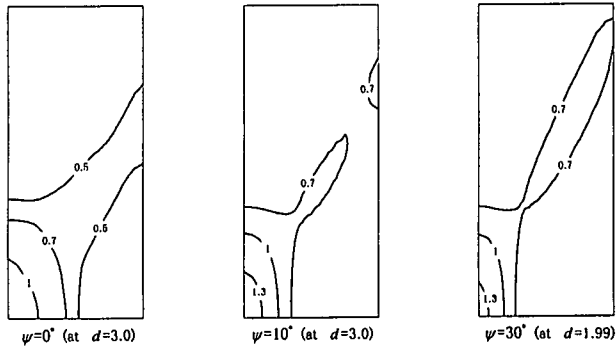


図-19 二軸圧縮試験の相当ひずみ分布図 (流れ理論,  $\phi = 30^\circ$ )

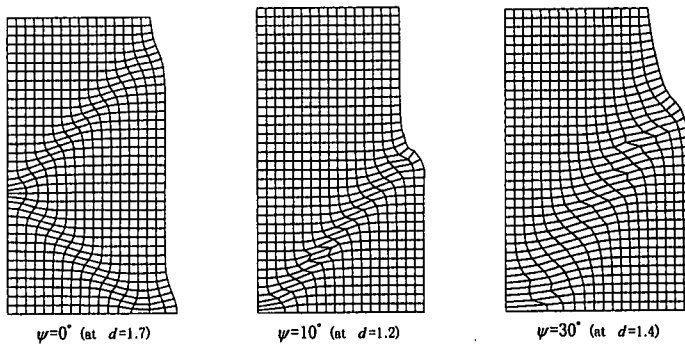


図-20 二軸圧縮試験の要素変形図 (変形理論,  $\phi = 30^\circ$ )

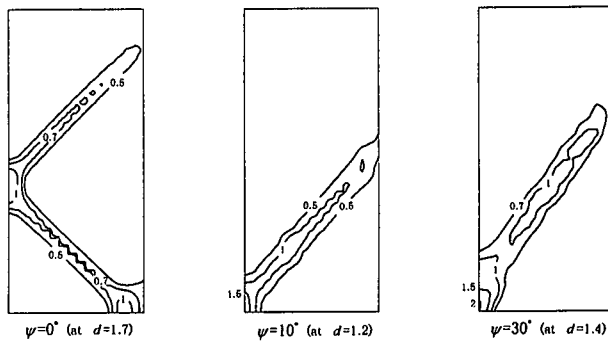
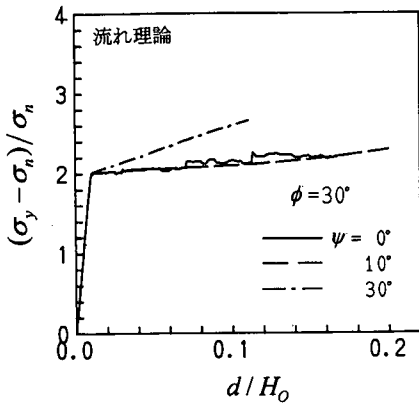
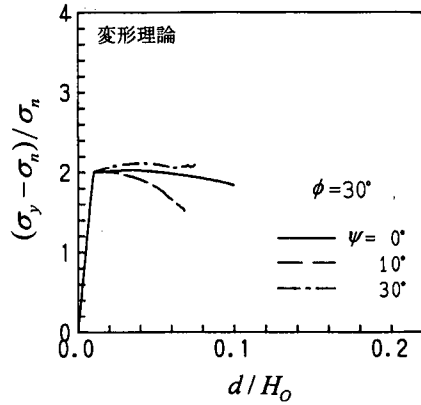


図-21 二軸圧縮試験の相当ひずみ分布図 (変形理論,  $\phi = 30^\circ$ )



(a) 流れ理論



(b) 変形理論

図-22 偏差応力比～ひずみ関係 ( $\phi = 30^\circ$ )

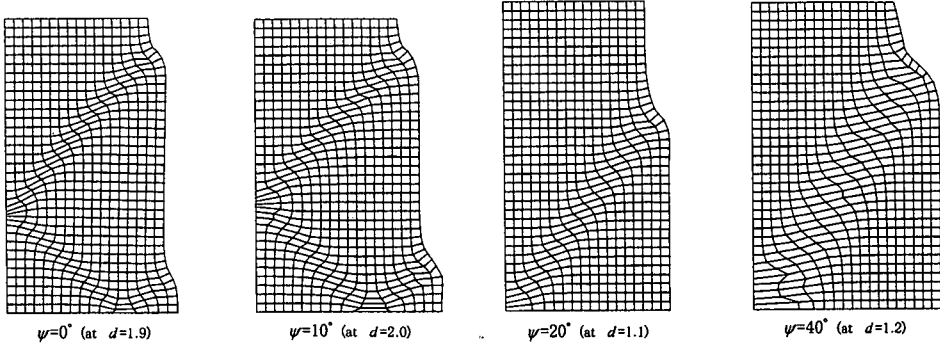


図-23 二軸圧縮試験の要素変形図 (変形理論,  $\phi = 40^\circ$ )

ここに、 $\sigma_y$  ; 圧縮端面の圧縮応力,  $d$  ; 圧縮変位,  $H_0$  ; 供試体初期高さである。両図より、流れ理論の応力比～ひずみ関係は降伏後もほぼ単調増加しているが、変形理論は降伏後にピークがありその後軟化している。構成式が非硬化あるいはひずみ硬化、すなわち、接線硬化係数  $H' \geq 0$  であって、圧縮試験のように供試体中央部が膨らむ(樽状になる)変形様式での軟化挙動はせん断帯生成によるものと考えられる。

図-23 は変形理論による内部摩擦角  $\phi = 40^\circ$ 、ダイレタンシー角  $\psi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 40^\circ$  における要素変形で、この場合も明らかにせん断帯が生じている。

図-20, 23 より、内部摩擦角とダイレタンシー角の差  $\phi - \psi > 20^\circ$  ではせん断帯は折れ曲がった形状を示し、角度差  $\phi - \psi \leq 20^\circ$  ではモデル左下隅より斜め上方に伸びている。解析は  $1/4$  モデルで行っているので、全象限モデルで見ると、角度差  $\phi - \psi > 20^\circ$  の場合の折れ曲がったせん断帯は2つの 'X' が重なった形状を、 $\phi - \psi \leq 20^\circ$  のせん断帯はモデル中心部に1つの 'X' 状を示す。角度差  $\phi - \psi \leq 20^\circ$  の場合に注目すると、内部摩擦角  $\phi$  が同じならばダイレタンシー角  $\psi$  が大きいほどせん断帯の角度が立ってくる。

Arthur ら<sup>14)</sup>や Vardoulakis<sup>9)</sup>は実験より、最小主応力とせん断帯のなす角度  $\theta$  を次式で与えた。

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi + \psi}{4} \quad (22)$$

上式は一様応力場の直線せん断帯に対するアコースティックテンソルの行列式特性解の近似解でもある。せん断帯の角度  $\theta$  は図中のせん断帯と水平軸のなす角度で表され、その角度  $\theta$  は式(22)より小さめであるが、 $\phi$  および  $\psi$  が大きいほど角度  $\theta$  が大きくなるという傾向は一致している。また、式(22)によると、 $\phi + \psi = \text{const.}$  であれば角度  $\theta$  も同じになるが、図-20 ( $\phi = 30^\circ, \psi = 30^\circ$ ) と図-23 ( $\phi = 40^\circ, \psi = 20^\circ$ ) の要素変形を比較すると、( $\phi = 40^\circ, \psi = 20^\circ$ ) のせん断帯角度の方がやや大きい。解析では、内部摩擦角  $\phi$  の重みはダイレタンシー角  $\psi$  より大きいことになるが、このことは  $\phi + \psi = \text{const.}$  で、 $\phi$  と  $\psi$  が異なる材料の実験結果より検証されるべきである。

計算は  $p \leq 0$  の時点で終了しているが、その時の圧縮変位  $d$  は内部摩擦角およびダイレタンシー角でばらついていく。これは用いた単調繰返し増分法による累積誤差の

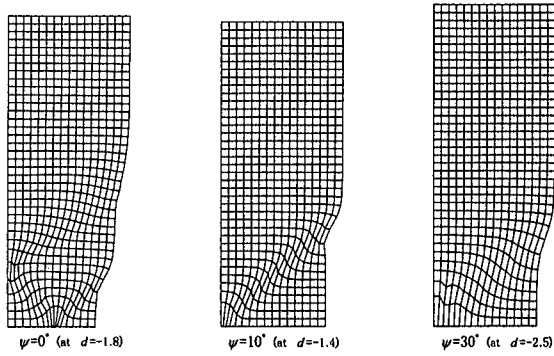


図-24 二軸伸張試験の要素変形図 (変形理論,  $\phi = 30^\circ$ )

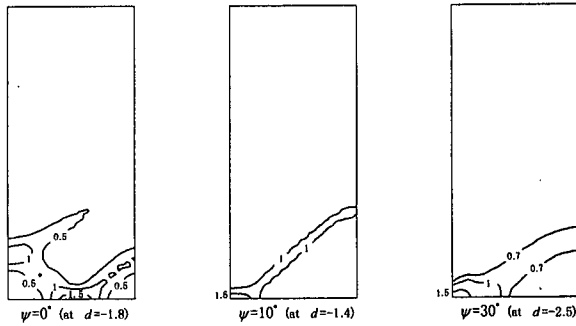


図-25 二軸伸張試験の相当ひずみ分布図 (変形理論,  $\phi = 30^\circ$ )

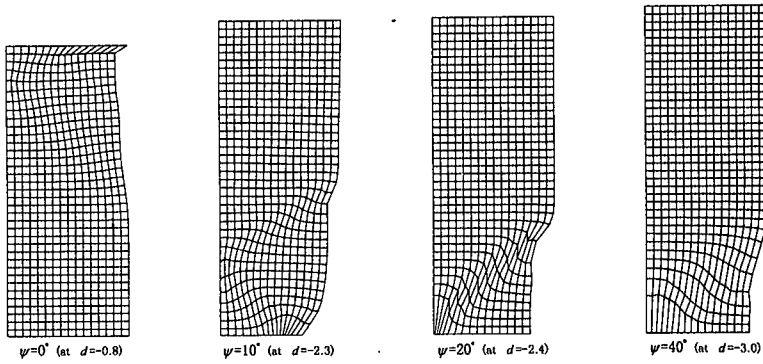


図-26 二軸伸張試験の要素変形図 (変形理論,  $\phi = 40^\circ$ )

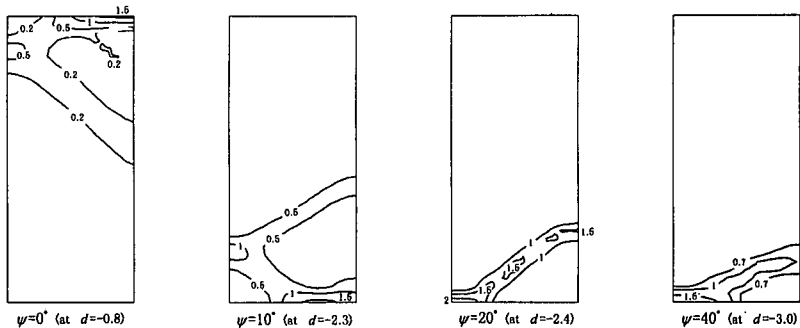


図-27 二軸伸張試験の相当ひずみ分布図 (変形理論,  $\phi = 40^\circ$ )

ためと思われ、さらに計算ロジックの改良が必要である。また、ダイレタンシー角が大きくなると体積膨張量も大きくなり、要素形状の歪みにより平衡条件が満足されなくなる。その場合、Remeshing 処理などが有用である。

前述の Arthur らや Vardoulakis は X 線撮影により、せん断帯の幅は土粒子の平均粒径  $d_{50}$  の 10~20 倍程度であると報告している。龍岡ら<sup>15)</sup>や吉田ら<sup>16)</sup>の大型供試体による実験においても、せん断帯幅に関して同様の結果を示しているが、せん断帯外側はかなりの範囲で大変形を生じており、その状況は図-20, 23 の結果と似ている。提案している変形理論では、特性長などのせん断帯を表現するためだけに導入された物理量は考慮していない。変形理論でも、非共軸項の選択および有限要素特性の改良により、局所変形解析の精度をさらに向上できることを示唆していると言える。

## (2) 二軸伸張試験

解析モデルは二軸圧縮試験と同じとし、Y 方向の強制伸張変位を与えて計算する。ここでは、変形理論による結果について述べる。

図-24 は内部摩擦角  $\phi=30^\circ$  でダイレタンシー角  $\psi=0^\circ, 10^\circ, 30^\circ$  における要素変形、図-25 は相当ひずみ分布で、図-26, 27 は  $\phi=40^\circ$  で  $\psi=0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 40^\circ$  における同結果である。図より、内部摩擦角とダイレタンシー角の差  $\phi-\psi$  が  $20^\circ$  前後で、せん断帯の形状が異なる現象は二軸圧縮試験と同じである。二軸伸張試験では供試体側面が最大主応力面になるから、せん断帯と水平軸のなす角度  $\theta_{ext}$  は次式で与えられる。

$$\theta_{ext} = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi + \psi}{4} \quad (23)$$

図-24~27 より、角度差  $\phi-\psi \leq 20^\circ$  でのせん断帯角度  $\theta_{ext}$  は  $\phi$  および  $\psi$  が大きいほど小さくなっており、解析結果は式(23)と対応している。角度差  $\phi-\psi > 20^\circ$  では、折れ曲がったせん断帯が生じているが、内部摩擦角  $\phi=40^\circ$ 、ダイレタンシー角  $\psi=0^\circ$  の引張端面における necking は特徴的である。

二軸圧縮および伸張試験とも、角度差  $\phi-\psi > 20^\circ$  でせん断帯が折れ曲がった形状を示しているが、これは非関連流動則(non associated flow rule)の特性によるものと考えられる。今、流れ理論に限定すると、 $\phi \neq \psi$  の場合は非関連流動則となり、最大塑性仕事の原理があらゆる降伏負荷で成立するとは限らない。すなわち、解の唯一性が保証されないため分岐が生ずる可能性があり<sup>17)</sup>、角度差  $\phi-\psi$  が大きいほどその可能性も大きくなる。変形理論の分岐現象には、流れ成分における上述の非関連流動則によるものと非共軸項によるものが複合されている。変形理論による分岐現象の相違を考察するためには、有

限要素法では剛性マトリックスの固有値特性を調べる方法があるが、本文の目的を離れるのでここでは触れない。ただし、関連流動則( $\phi=\psi$ )における分岐現象は純粋に非共軸項の効果によるものである。

検討している構成式の流れ成分、すなわち、塑性ポテンシャル関数は降伏関数と勾配が違うだけなので、非関連流動性に着目した考察ができるが、塑性ポテンシャル関数と降伏関数に相似性がない場合には、せん断帯生成および分岐現象のメカニズムはさらに複雑なものになる。

## (3) 非共軸項の違いによる影響

ここでは、非共軸項の違いによる影響を前節の二軸圧縮および伸張試験により調べる。比較する非共軸項として、式(18)および同式の括弧内を  $\dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij} \cdot \dot{q}/q$  としたものを取り上げる。地盤材料の変形理論も多く提案されているが、その非共軸項は文献(3), (8), (9), (10) に代表されるように、Budiansky により誘導された  $\dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij} \cdot \dot{q}/q$  を用いている。

せん断帯の角度・形状およびモデル全体の応力~ひずみ関係に着目すると、二軸圧縮試験では両非共軸項による差はほとんどないが、二軸伸張試験では幾つかの違いが見られる。図-28, 29 は非共軸項  $\dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij} \cdot \dot{q}/q$  の場合の二軸伸張試験の要素変形である。図-28 は内部摩擦角  $\phi=30^\circ$  の結果であるが、ダイレタンシー角  $\psi=0^\circ$  でのせん断帯は一本のみ、 $\psi=10^\circ$  ではつづら折れ状のせん断帯が見られる。図-29 は  $\phi=40^\circ$  で  $\psi=0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 40^\circ$  における同結果であるが、式(18)による結果(図-24, 26)とかなり異なる形状のせん断帯が生じている。

伸張試験における詳細な実測値が少ないので、どちらの非共軸項が妥当であるかという判断はできないが、変形理論を用いる限り非共軸項の選択は重要である。

従来の非共軸項の塑性仕事速度  $\dot{W}^p = \sigma'_{ij} (\dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij} \cdot \dot{q}/q) / 2H_s p$  は 0、すなわち、work-less であるので、非共軸項を付加した式全体の塑性仕事速度は流れ成分による塑性仕事速度と同じである。一方、本文で提案している非共軸項を付加した式(16)の塑性仕事速度は次式で表せる。

$$\begin{aligned} \dot{W}^p &= \sigma'_{ij} \cdot \dot{\epsilon}'_{ij} \\ &= \frac{\dot{\eta}}{H} (q - \sin \psi \cdot p) \\ &\quad + \frac{\dot{\eta}}{H_s} \left\{ \left( \sqrt{1 + \sin^2 \psi} - 1 \right) \cdot q + \sin \psi \cdot p \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

上式の右辺第 1 項は流れ成分、第 2 項は非共軸成分による塑性仕事速度であるが、ダイレタンシー角  $\psi=0^\circ$  では、非共軸項成分は 0 となる。ひずみ硬化 ( $H' > 0$ ) では、降伏するかぎり  $\dot{\eta} > 0$  であるから、式(24)は流れ理論の塑性仕事速度より大きくなるが、降伏条件と塑性仕事速度

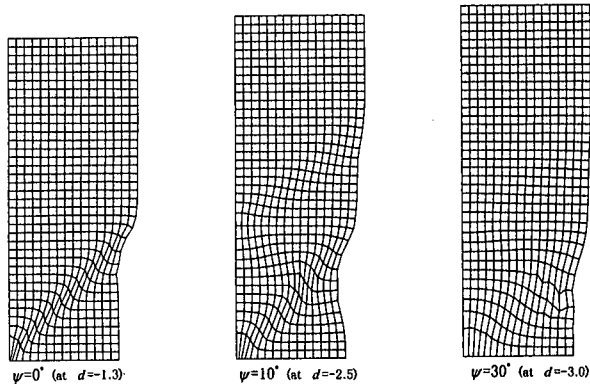


図-28 非共軸項  $\dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij} \cdot \dot{q}/q$  による要素変形図 ( $\phi = 30^\circ$ )

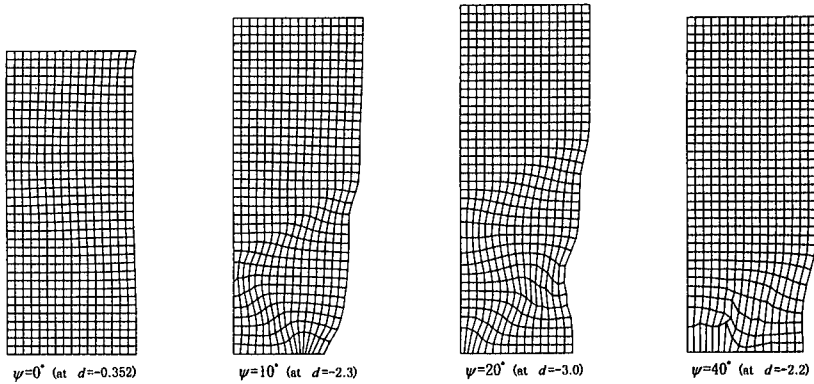


図-29 非共軸項  $\dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij} \cdot \dot{q}/q$  による要素変形図 ( $\phi = 40^\circ$ )

は常に正である。逆に、ひずみ軟化 ( $H' < 0$ ) では、降伏条件  $\dot{\eta} < 0$  であるので、非共軸成分は負となり、塑性仕事速度の正值性は保証されない。

式(24)が流れ理論の塑性仕事速度と一致するためには、接線硬化係数  $H'$  を修正しなければならぬ。しかし、非硬化 ( $H' = 0$ ) では、降伏条件  $\dot{\eta} = 0$  であるので、非共軸成分の塑性仕事速度は0となり、接線硬化係数を修正する必要はない。本解析において、非硬化 ( $H' = 0$ ) としたのは上記の理由によるものである。

## 6. 結論

本文では、変形理論を用いて有限要素法によるせん断帯解析を行った。それらをまとめると以下のようである。

- 1) Budiansky の変形理論式がせん断帯を表現できるのは、非共軸項による弾性係数劣化とひずみ速度と降伏曲面法線の方向がずれても塑性降伏が継続できることによる。
- 2) Mohr-Coulomb モデルに塑性ポテンシャルの接線成分

を付加した非共軸ひずみ硬化型モデルを誘導した。

- 3) 圧縮性材料のせん断帯解析用に、垂直剛性を柔らかくしたサブパラメトリック要素を提案した。

4) 側圧一定の二軸圧縮・伸張解析では、内部摩擦角  $\phi$  とダイランシー角  $\psi$  の角度差  $\phi - \psi$  が  $20^\circ$  前後で、せん断帯の形状が異なる。角度差  $\phi - \psi < 20^\circ$  の場合、せん断帯と最小主応力方向のなす角度  $\theta$  は Arthur らの式(本文中の式(22))でおおよそ近似できる。

- 5) 非共軸項が本文中で提案する  $\dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij} \cdot \dot{p}/p$  の場合と既往の  $\dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij} \cdot \dot{q}/q$  の場合では、二軸伸張試験におけるせん断帯の角度・形状が異なる。

本文で用いた変形理論式は最も簡単な弾塑性構成式である。しかし、実際の地盤材料は等方圧密後の小さなせん断応力でも塑性ひずみが生ずるので、単調せん断負荷経路の降伏条件は  $f = \eta$  が現実に近いし、弾性係数やダイランシー係数は応力状態に依存する。また、変形理論式中の第二比例係数  $\Lambda$  やひずみ速度と降伏曲面法線方向のずれ角の定式化など、問題はさらに複雑になる。

## 参考文献

- 1) Stören, S. and Rice, J.R.: Localized necking in thin sheets, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.23, pp.421-441, 1975.
- 2) Budiansky, B.: A reassessment of deformation theories of plasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.26, pp.259-264, 1959.
- 3) Rundnicki, J.W. and Rice, J.F.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.23, pp.371-394, 1975.
- 4) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.3, pp.95-106, 1991.
- 5) Christoffersen, J. and Hutchinson, J.W.: A class of phenomenological corner theories of plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.27, pp.465-487, 1979.
- 6) 後藤学: 改良形2DとしてのMG構成式の簡易化と大変形弾塑性FEM解析などによる検討, 日本機械学会論文集A編, 第55巻, 第514号, pp.1374-1381, 1989.
- 7) 山田嘉昭: 有限要素法の基礎と応用シリーズ6 塑性・粘弾性, 培風館.
- 8) Mehrabadi, M.M. and Cowin, S.C.: Prefailure and post-failure soil plasticity models, *Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol.106, No.EM5, ASCE, pp.991-1003, 1980.
- 9) Vardoulakis, I.: Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial test, *International Journal for Numerical and Analytical method in Geomechanics*, Vol.4, pp.103-119, 1980.
- 10) Anand, I.: Plane deformations of ideal granular materials, *Journal of Mechanical and Physical Solids*, Vol.31, No.2, pp.105-122, 1983.
- 11) (社)日本塑性加工学会: 非線形有限要素法—線形弾性解析から塑性加工解析まで—, コロナ社, pp.56-60.
- 12) 飯塚敦, 太田秀樹, 杉江茂彦: 破壊近傍での有限要素の特性変化, 地盤の破壊とひずみの局所化に関するシンポジウム, 土質工学会, pp.211-214, 1995.
- 13) Cook, R.D. (川股重也訳): 有限要素法の基礎, 科学技術出版社, pp.145-147.
- 14) Arthur, J.R.F., Dunstan, T., Al-ani, Q.A.J.L. and Assadi, A.: Plastic deformation and failure in granular media, *Geotechniques*, Vol.27, No.1, pp.53-74, 1977.
- 15) Tatsuoka, F., Nakamura, S., Huang, C.C. and Tani, K.: Strength anisotropy and shear band direction in strain tests of sand, *Soils and Foundations*, Vol.30, No.1, pp.35-54, 1980.
- 16) 吉田輝, 後藤正司, 亀谷泰久, 龍岡文夫, 木幡行宏, 董軍: 砂礫の平面ひずみ圧縮試験におけるせん断層の応力・変形関係, 地盤の破壊とひずみの局所化に関するシンポジウム, 土質工学会, pp.189-196, 1995.
- 17) 北川浩: 弾・塑性力学—非線形解析のための基礎理論—, 裳華房, pp.130-132.

(1997. 10. 27 受付)

## PLANE DEFORMATION ANALYSIS OF DILATANT MATERIAL WITH THE STRAIN-HARDENING ELASTOPLASTIC MODEL ADDED NON-COAXIAL COMPONENTS

Hitoshi ISHIZAKI

In this paper, firstly Budiansky's model which is well-known as the yield vertex model in metal materials is discussed in detail and it is clarified how non-coaxial components effect on the shear band initiation and the bifurcation point of stress-strain relationships. Secondly the elastoplastic model of dilatant materials in plane deformation is introduced by adding non-coaxial components to Mohr-Coulomb's flow model. In addition the special element whose normal stiffnesses are soften is proposed in order to analyze the shear band of dilatant materials. FEM analyses concerned with biaxial tests are performed. As the result the above model and the special element are able to express the relations among patterns of shear band, material constants and the localization of deformation.