

有限要素法による接触問題の数値解法と シールドトンネルへの適用

武田 洋¹・草深守人²・吉田 保³・田中 弘⁴・黒川信子⁵

¹正会員 工博 法政大学教授 工学部システム制御工学科 (〒184-0002 小金井市梶野町 3-7-2)

²正会員 工博 法政大学教授 工学部土木工学科 (〒184-0002 小金井市梶野町 3-7-2)

³正会員 工博 日本工営 (株) 技術営業推進室室長 (〒102-8539 千代田区麹町 5-4)

⁴正会員 工修 日本工営 (株) 地盤構造部次長 (〒102-8539 千代田区麹町 5-4)

⁵正会員 工修 日本工営 (株) 地盤構造部 (〒102-8539 千代田区麹町 5-4)

従来のシールドトンネルの掘削解析は、推進移動するシールド機やセグメントと地盤の幾何学的接触条件を力学的に自然な形で解析理論として取り込むことが出来なかった。本論文では、摂動型ラグランジュ汎関数を基本として、局所化混合スキームを導入することにより、広く用いられている変位型有限要素アルゴリズムの範疇で一般的な接触問題を取り扱う方法を示した。このことにより、従来の解析手法に比べて、シールドトンネルの施工過程を忠実に表現した掘削解析が可能となる。

また、具体的な解析例から、特にシールド機と周辺地盤の摩擦によって発生する地盤の変形や負荷土圧に関する解析結果が現場計測値をよく表現していることを示した。

Key Words : finite element method, contact problem, perturbed Lagrangian formulation, shield tunnel

1. はじめに

過密化した都市部におけるシールドトンネルの施工環境は、ますます厳しい規制が要求される状況にある。特に、大都市圏では、新設トンネルと既設構造物との離間距離あるいはトンネル直上の土被りを十分確保できないケースが増加している。このようなシールドトンネルの施工では、既設の近接地下構造物や地上構造物の機能と安全性を保證できる施工技術が重要課題となっている。

一方、施工過程でシールドトンネル周辺の地盤や既設構造物に発生するさまざまな力学現象を事前に予測する手法として、主に数値計算力学の立場からこれまでに多くの研究がなされ、実際問題に適用されてきた。従来のシールドトンネルの掘削解析は、その多くが掘削の進行に伴う地山の応力解放量を事前に何らかの数値解析の方法や現場計測結果に基づいて指定すること、あるいはテールボイドの影響を考慮するために全応力解放量を掘削時とテールボイド部の変形時に適当に配分するなど解析技術者によってさまざまな方法が取られてきた^{1),2)}。しかしながら、これらの方法はいずれ

も推進移動するシールド機やセグメントと地盤の幾何学的接触条件を解析理論に取り込むことが出来なかったことによる便宜的手法に過ぎなかった。このため、実際の施工過程をさらに忠実に反映した数値解析手法の飛躍的な進歩に限界を生じているものと考えられる。

本論文は、これらの問題点を解決するために、地山とシールド機およびセグメント間の境界を摩擦を含めた接触問題として扱う数値解析手法について考察したものである。

2. 変形する物体間の接触問題と有限要素法

接触問題の解明は古くから固体力学における重要な問題の一つとして認識され、多くの研究が積み重ねられてきた。特にコンピュータの発達によって今日主流となってきた数値計算力学の分野では、有限要素法や個別要素法³⁾ (DEM)、不連続変形法⁴⁾ (DDA)、剛体パネモデル⁵⁾ (RBMS) などに代表される手法の研究が多くの研究者により積極的に続けられている。

個別要素法は、多数の粒子の集合体について個々の粒子の運動の様子を粒子間での衝突・接触を考慮して

明らかにすることを主要な目的としており、粒子やその集合体内部の応力やひずみなどの量の精度を追求するものでない。また、有限の大きさや形状を有する多数のブロックが互いに接触し変形する問題を扱う不連続変形法や剛体パネモデルなどは、個々のブロックの変形や応力状態をある程度表現できることから、不連続性岩盤などの解析に利用されている。しかしながら、これらの方法もブロック内部の応力やひずみの精度に問題を残しており、特に材料非線形問題での収束性や精度に限界がある。

一方、接触問題に対する有限要素解析の主要な目的は接触境界面付近の物体内部のひずみや応力状態を高い精度で明らかにしようとするものであり、上記の解析手法のように無数の接触面が存在するような問題に対しては計算効率の面から適さない。したがって現状では、解析領域に存在する接触面の数やそれらの幾何学的配置および解析の目的等から適切な手法を選択し利用することになる。本文で扱う問題は、掘削地盤面と接触を保ちつつ長距離にわたって推進移動するシールド機が、シールド機周辺地盤の応力状態や変形にどのように影響するかを解析するものであり、接触境界面はシールド機およびセグメント外周面と掘削地盤面に限定される。したがって、以下では有限要素法に基づく接触問題のみに絞って考察するものとし、他の手法には言及しないこととする。

接触問題に対する有限要素解析では、図-1に示すように接触位置を想定できる場合（互いに接触する有限要素境界面を規定でき、他の要素境界面との接触を工学的には無視できると仮定して良い場合）について、ギャップ要素、インターフェイス要素あるいはジョイント要素と呼ばれるような接合要素を前もって想定した要素間や節点間に導入する方法が広く用いられてきた⁶⁾。しかしこれらの接合要素は、図-2に示すような事前に接触位置を想定できない場合や接触面に沿った相対移動が極めて大きい問題に対しては応用することができなかつた。また、図-1のように接触位置を想定できる場合でも、互いに接触する境界面間の開口幅が極めて大きい問題に対しては、これらの接合要素は要素厚さの大きな変化に対応できない。このような問題に対する解析アルゴリズムとして、接触面の節点間及び要素間において接触条件（接触位置や開口幅）を強制しない手法が、摩擦のない場合に対して摂動型ラグランジュ汎関数 (perturbed Lagrangian functional) を基礎としてSimo⁷⁾等により提案されている。また、摩擦を考慮した問題に対しては、添加型ラグランジュ汎関数 (augmented Lagrangian functional) を基礎としてSimo⁸⁾やShyu⁹⁾等により提案されている。これら

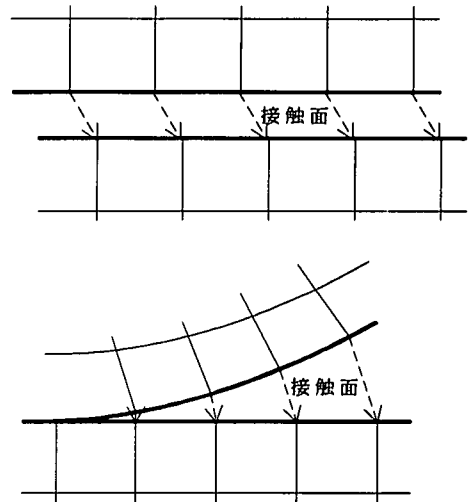


図-1 接触位置を想定できる問題

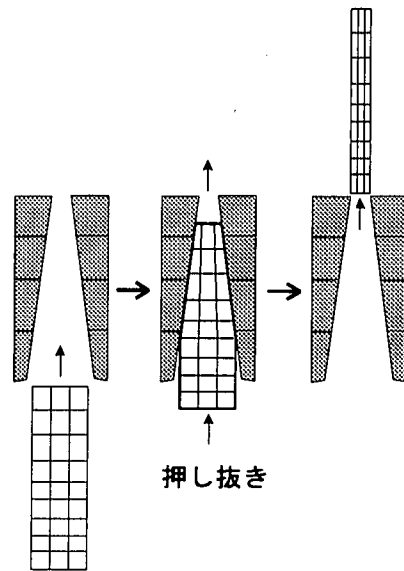


図-2 接触位置を想定できない問題

の方法では接触条件を任意の位置に課することができるが、良好な収束性を得るためには想定される二つの接触面の有限要素メッシュ分割をほぼ等しくする必要があるので、利用面での一般性に問題が残されていた。

ここでは、摂動型ラグランジュ法に基づいて変形する物体間の接触問題の有限要素解析のためにSimo等によって提案されている方法を、互いに接触する物体の変形を許す場合や一方が剛体である場合について摩擦を含めて共通の定式で扱えるようにする。さらに、ここで示す方法は、互いに接触する物体の接触境界面

でのメッシュ分割を任意に分割してもほぼ満足できる収束性が得られることが幾つかの具体的な例題により確かめられており、従来の方法に比べて利用面での一般性が高いと考える。なお、以下で示す接触問題の定式は線形弾性問題や微小変形問題に限定されるものでなく、物体内部の領域が弾塑性問題や大変形問題に対して定式化されていれば、これらの非線形問題にそのまま適用することができる。ただし、ここではこれらの具体的解析例までを逐一示すことはせず、後述するシールドトンネルの例（接触境界での地盤とシールド機のメッシュ分割が異なり、かつ材料非線形・幾何学非線形解析とした）のみを示すこととする。

(1) 基礎方程式と変形式

図-3に示すような接触が想定される二つの物体 A, B の変形後の形状は次のように表わすことができる。

$$\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha) ; \quad \mathbf{X}^\alpha \in \Omega^\alpha \quad (1)$$

ここで、 Ω は初期形状、 \mathbf{X} は変形前の位置、 \mathbf{x} は変形後の位置であり、添字 α は物体 A, B を表わす。また変形後の位置は、変位場 \mathbf{u} を用いて次式で表現する。

$$\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{X}^\alpha + \mathbf{u}^\alpha \quad (2)$$

さらに、接触面の位置ベクトル \mathbf{x}^c と単位法線ベクトル \mathbf{n}^c は次式によって表わされる。

$$\mathbf{x}^c = \mathbf{x}^A \cap \mathbf{x}^B \quad (3)$$

$$\mathbf{n}^c = \frac{\nabla \mathbf{x}^c(\mathbf{X})}{\|\nabla \mathbf{x}^c(\mathbf{X})\|} \quad (4)$$

接触面のギャップの開き g は、増分形で次式のように表わすことができる。

$$g = [\Delta \mathbf{u}^B - \Delta \mathbf{u}^A] \cdot \mathbf{n}^c + g_0 \quad (5)$$

ここで、 g_0 は増分前のギャップの開きであり、増分前の変位 \mathbf{u}_0^α と初期形状におけるギャップの開き G を用いると次のように表わせる。

$$g_0 = [\mathbf{u}_0^B - \mathbf{u}_0^A] \cdot \mathbf{n}^c + G \quad (6)$$

接触前のギャップが開いた状態は次式で表わされる。

$$g = [\Delta \mathbf{u}^B - \Delta \mathbf{u}^A] \cdot \mathbf{n}^c + g_0 > 0 \quad (7)$$

$$\lambda = \mathbf{T}^A \cdot \mathbf{n}^c \equiv -\mathbf{T}^B \cdot \mathbf{n}^c = 0 \quad (8)$$

ここで、 \mathbf{T} は表面力ベクトルであり、 λ は接触面における法線方向の表面力（接触圧力）である。

一方、接触後のギャップが閉じた状態は次式によ

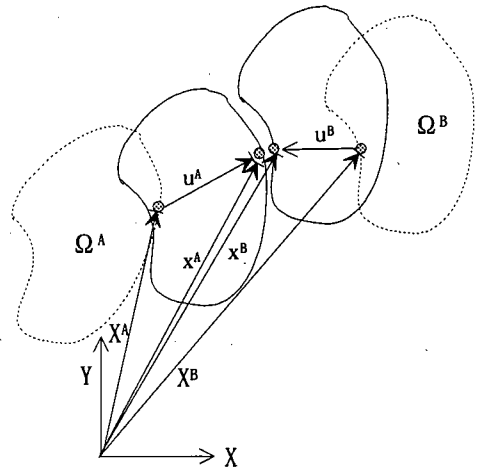


図-3 変形前後の物体の幾何学形態

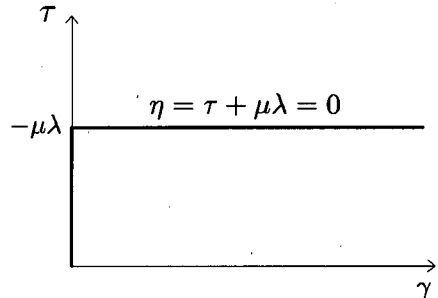


図-4 Coulomb の滑り摩擦条件

て表現される。

$$g = [\Delta \mathbf{u}^B - \Delta \mathbf{u}^A] \cdot \mathbf{n}^c + g_0 = 0 \quad (9)$$

$$\lambda = \mathbf{T}^A \cdot \mathbf{n}^c \equiv -\mathbf{T}^B \cdot \mathbf{n}^c < 0 \quad (10)$$

ギャップが閉じた状態は滑りの発生していない場合と滑りの発生している場合の二つに分けて考えることができる。滑りの発生していない固着状態は、図-4に示すようなCoulombの摩擦条件 η を考える（塑性の降伏条件と類似）場合、接触面の相対変位の増分 $\Delta \gamma$ を用いて次のように表わすことができる。

$$\Delta \gamma = [\Delta \mathbf{u}^B - \Delta \mathbf{u}^A] \cdot \mathbf{t}^c = 0 \quad (11)$$

$$\eta(\tau, \lambda) = \tau + \mu \lambda < 0 \quad (12)$$

ここで、 μ は接触面における摩擦係数である。また、 τ は接触面の接線方向の表面力（接触せん断応力）であり、接触面における単位接線ベクトル \mathbf{t}^c を用いて次式で表される。

$$\tau = \mathbf{T}^A \cdot \mathbf{t}^c \equiv -\mathbf{T}^B \cdot \mathbf{t}^c \quad (13)$$

同様に滑り状態は次式のように表現することができる。

$$\Delta\gamma = [\Delta\mathbf{u}^B - \Delta\mathbf{u}^A] \cdot \mathbf{t}^c \neq 0 \quad (14)$$

$$\eta(\tau, \lambda) = \tau + \mu\lambda = 0 \quad (15)$$

したがって接触面の滑りは、接触せん断応力が上式の摩擦条件で与えられる摩擦限界に到達したときに限って発生することになり、滑りの状態ではこの限界摩擦抵抗を維持する。

以上に述べた接触条件は、まとめてKuhn-Tucker条件として次式のように表わすことができる。

$$g\lambda = 0, \quad \Delta\gamma\eta = 0 \quad \text{on } \mathbf{x}^c \quad (16)$$

接触条件を考慮しない場合の増分型変分形式として、次のポテンシャルエネルギー汎関数 $\Delta\mathcal{I}$ を考えることができる。

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{I}^\alpha(\Delta\mathbf{u}^\alpha) &\equiv \int_{\Omega^\alpha} \Delta\mathcal{U}dV \\ &- \int_{\Omega^\alpha} (\bar{\mathbf{q}}^\alpha + \Delta\bar{\mathbf{q}}^\alpha) \cdot \Delta\mathbf{u}^\alpha dV \\ &- \int_{\partial_\sigma\Omega^\alpha} (\bar{\mathbf{T}}^\alpha + \Delta\bar{\mathbf{T}}^\alpha) \cdot \Delta\mathbf{u}^\alpha dS; \quad \alpha = A, B \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 \mathcal{U} は内部エネルギー関数、 $\bar{\mathbf{q}}^\alpha$ は物体力、 $\bar{\mathbf{T}}^\alpha$ は力の境界 $\partial_\sigma\Omega^\alpha$ で規定された表面力である。

上式に接触の拘束条件を考慮するための代表的な汎関数には初期のものとしてペナルティー汎関数やラグランジュ汎関数がある。ペナルティー法は、手法が単純であることや物理的解釈が容易であること等の利点を有するものの、ペナルティー値が無限大の極値において拘束条件を完全に満足する反面、ペナルティー値の増加に伴い数値的に不安定になるという避けがたい欠点を持っている。また、通常のラグランジュ乗数を用いる方法は、ペナルティー法の欠点がある程度回避出来るが、変数の増加に加えて計算過程での方程式のオーダーに特別な注意を必要とすることなどから現在あまり用いられていない^{9),10)}。

一方、最近になってペナルティー法やラグランジュ乗数を用いる方法の利点を維持しつつ両者を組合わせた方法の研究が進められている。特に有限要素法の分野では、接触問題を含む多くの付帯条件付き極値問題に対し、ラグランジュ型のさまざまな汎関数が提案されている。これらはいずれもラグランジュ型の汎関数を基本とした場合の数値的問題を改良するためのものであり、接触問題の研究を進める上で現在最も注目されている汎関数は添加型ラグランジュ汎関数と擬動型ラグランジュ汎関数である^{10),11)}。

本研究では、式(17)に式(16)の接触に関する付帯条件を課するために、接触面における表面力 λ と η を

ラグランジュ乗数とする次式の擬動型ラグランジュ汎関数 $\Delta\Pi_\epsilon$ を考える。

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_\epsilon(\Delta\mathbf{u}^A, \Delta\mathbf{u}^B, \lambda, \eta) &\equiv \\ &\sum_{\alpha=A}^B \Delta\mathcal{I}^\alpha(\Delta\mathbf{u}^\alpha) + \int_{\mathbf{x}^c} \lambda g dS \\ &- \frac{1}{2\epsilon_\lambda} \int_{\mathbf{x}^c} \lambda^2 dS + \int_{\mathbf{x}^c} \eta \Delta\gamma dS - \frac{1}{2\epsilon_\eta} \int_{\mathbf{x}^c} \eta^2 dS \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $\epsilon > 0$ はペナルティー係数であり、接触条件を付帯条件とする通常のLagrange汎関数は $\epsilon \rightarrow \infty$ とすることにより得られる。

上式の汎関数の停留条件(汎関数の変分=0)から、接触問題に対する有限要素定式の基礎となる変分方程式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{F}_\mathbf{u} &= \sum_{\alpha=A}^B \Delta\mathcal{I}^\alpha \dot{\mathbf{u}}^\alpha + \int_{\mathbf{x}^c} \lambda [\dot{\mathbf{u}}^B - \dot{\mathbf{u}}^A] \cdot \mathbf{n}^c dS \\ &+ \int_{\mathbf{x}^c} \eta [\dot{\mathbf{u}}^B - \dot{\mathbf{u}}^A] \cdot \mathbf{t}^c dS = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{F}_\lambda &= \int_{\mathbf{x}^c} \dot{\lambda} \\ &\cdot \left\{ -\frac{\lambda}{\epsilon_\lambda} + [\Delta\mathbf{u}^B - \Delta\mathbf{u}^A] \cdot \mathbf{n}^c + g_0 \right\} dS = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Delta\mathcal{F}_\eta = \int_{\mathbf{x}^c} \dot{\eta} \left\{ -\frac{\eta}{\epsilon_\eta} + [\Delta\mathbf{u}^B - \Delta\mathbf{u}^A] \cdot \mathbf{t}^c \right\} dS = 0 \quad (21)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{u}}$ は幾何学的に許容できる以外は任意の仮想変位であり、 $\dot{\lambda}, \dot{\eta}$ は力学的に許容できる以外は任意の仮想表面力である。

(2) 有限要素法による一般的定式化

前節において接触問題に対する変分形式を示したが、有限要素系に対しては式(19)~式(21)の離散系として次式の表現を考えることができる。

$$\Delta\mathcal{F}_\mathbf{u} \approx \sum_{e=1}^M \Delta\mathcal{F}_\mathbf{u}^{(e)} + \sum_{s=1}^L \Delta\mathcal{F}_\mathbf{u}^{(s)} = 0 \quad (22)$$

$$\Delta\mathcal{F}_\lambda \approx \sum_{s=1}^L \Delta\mathcal{F}_\lambda^{(s)} = 0 \quad (23)$$

$$\Delta\mathcal{F}_\eta \approx \sum_{s=1}^L \Delta\mathcal{F}_\eta^{(s)} = 0 \quad (24)$$

ここで、 M は要素総数、 L は接触状態に応じて解析プログラム内部で自動的に設定される接触切片総数であり、添字 e と s はそれぞれ要素と接触切片を表すこととする。また、 $\Delta\mathcal{F}_\mathbf{u}^{(e)}$ は有限要素の仮想仕事増分であり、接触切片に関する項は個々の切片 \mathbf{x}_s^c を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{F}_\mathbf{u}^{(s)} &= \int_{\mathbf{x}_s^c} \lambda [\dot{\mathbf{u}}^B - \dot{\mathbf{u}}^A] \cdot \mathbf{n}^c dS \\ &+ \int_{\mathbf{x}_s^c} \eta [\dot{\mathbf{u}}^B - \dot{\mathbf{u}}^A] \cdot \mathbf{t}^c dS \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{F}_\lambda^{(s)} &= \int_{\mathbf{x}_s^c} \dot{\lambda} \\ &\cdot \left\{ -\frac{\lambda}{\epsilon_\lambda} + [\Delta\mathbf{u}^B - \Delta\mathbf{u}^A] \cdot \mathbf{n}^c + g_0 \right\} dS \end{aligned} \quad (26)$$

$$\Delta \mathcal{F}_\eta^{(s)} = \int_{x_s^c} \dot{\eta} \cdot \left\{ -\frac{\eta}{\epsilon_\eta} + [\Delta \mathbf{u}^B - \Delta \mathbf{u}^A] \cdot \mathbf{t}^e \right\} dS \quad (27)$$

なお、 $\Delta \mathcal{F}^{(e)}$ は通常の変位仮定の有限要素定式に従うものとするとき次のように表される。

$$\Delta \mathcal{F}_\mathbf{u}^{(e)} = \{\dot{\mathbf{u}}^e\}^T [\mathbf{k}_\eta^e] \Delta \{\mathbf{u}^e\} - \{\dot{\mathbf{u}}^e\}^T \Delta \{\mathbf{p}^e\} \quad (28)$$

ここで、 $\{\dot{\mathbf{u}}^e\}$ は要素節点の仮想変位、 $\Delta \{\mathbf{u}^e\}$ は要素節点変位増分、 $[\mathbf{k}_\eta^e]$ は要素の接線剛性マトリックス、 $\Delta \{\mathbf{p}^e\}$ は等価要素節点荷重増分である。

全体系に対しては通常有限要素組立過程により次のように表わされる。

$$\sum_{e=1}^M \Delta \mathcal{F}_\mathbf{u}^{(e)} = \{\dot{\mathbf{U}}\}^T [\mathbf{K}_T] \Delta \{\mathbf{U}\} - \{\dot{\mathbf{U}}\}^T \Delta \{\mathbf{P}\} \quad (29)$$

ここで、 $[\mathbf{K}_T]$ と $\Delta \{\mathbf{P}\}$ は次式で与えられる。

$$[\mathbf{K}_T] = \sum_{e=1}^M [\mathcal{A}^e]^T [\mathbf{k}_\eta^e] [\mathcal{A}^e] \quad (30)$$

$$\Delta \{\mathbf{P}\} = \sum_{e=1}^M [\mathcal{A}^e]^T \Delta \{\mathbf{p}^e\} \quad (31)$$

ここで、 $\{\dot{\mathbf{U}}\}$ は節点仮想変位、 $\Delta \{\mathbf{U}\}$ は点変位増分、 $[\mathbf{K}_T]$ は接線剛性マトリックス、 $\Delta \{\mathbf{P}\}$ は等価節点荷重増分である。また、 $[\mathcal{A}^e]$ は e 番目の要素と節点の結合関係を表す論理マトリックスであり次の関係を満足する。

$$[\mathcal{A}^e] : \Delta \{\mathbf{U}\} \rightarrow \Delta \{\mathbf{u}^e\}$$

$$\text{または、} [\mathcal{A}^e] \Delta \{\mathbf{U}\} = \Delta \{\mathbf{u}^e\} \quad (32)$$

次に接触切片に対しては、次式で表される有限要素補間を導入する。

$$\lambda = [\mathbf{N}_\lambda] \{\lambda^s\} \quad (33)$$

$$\eta = [\mathbf{N}_\eta] \{\eta^s\} \quad (34)$$

$$\Delta \mathbf{u}^B - \Delta \mathbf{u}^A = [\mathbf{N}_\mathbf{u}] \Delta \{\mathbf{u}^s\} \quad (35)$$

$$\dot{\lambda} = [\mathbf{N}_\lambda] \{\dot{\lambda}^s\} \quad (36)$$

$$\dot{\eta} = [\mathbf{N}_\eta] \{\dot{\eta}^s\} \quad (37)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^B - \dot{\mathbf{u}}^A = [\mathbf{N}_\mathbf{u}] \Delta \{\dot{\mathbf{u}}^s\} \quad (38)$$

ここで、 $[\mathbf{N}_\lambda]$ は接触圧力に関する補間関数、 $[\mathbf{N}_\eta]$ は接触せん断応力に関する補間関数、 $[\mathbf{N}_\mathbf{u}]$ は接触面の相対変位に関する補間関数であり、添字 s は接触切片を構成する点（一般には接触境界に位置する節点とは一致しない）における値を意味する。上式を式(25)～式(27)に代入することにより次式が得られる。

$$\Delta \mathcal{F}_\mathbf{u}^{(s)} = \{\dot{\mathbf{u}}^s\}^T \left([\mathbf{z}_\lambda^s] \{\lambda^s\} + [\mathbf{z}_\eta^s] \{\eta^s\} \right) \quad (39)$$

$$\Delta \mathcal{F}_\lambda^{(s)} = \{\dot{\lambda}^s\}^T [\mathbf{z}_\lambda^s]^T \Delta \{\mathbf{u}^s\} + \{\dot{\lambda}^s\}^T \frac{1}{\epsilon_\lambda} [\mathbf{c}_\lambda^s] \{\lambda^s\} \quad (40)$$

$$\Delta \mathcal{F}_\eta^{(s)} = \{\dot{\eta}^s\}^T [\mathbf{z}_\eta^s]^T \Delta \{\mathbf{u}^s\} + \{\dot{\eta}^s\}^T \frac{1}{\epsilon_\eta} [\mathbf{c}_\eta^s] \{\eta^s\} \quad (41)$$

ここで、 $[\mathbf{z}_\lambda^s]$ 、 $[\mathbf{c}_\lambda^s]$ 、 $[\mathbf{z}_\eta^s]$ 、 $[\mathbf{c}_\eta^s]$ は次の通りである。

$$[\mathbf{z}_\lambda^s] = \int_{x_s^c} [\mathbf{N}_\mathbf{u}]^T \mathbf{n}^c [\mathbf{N}_\lambda] dS \quad (42)$$

$$[\mathbf{c}_\lambda^s] = - \int_{x_s^c} [\mathbf{N}_\lambda]^T [\mathbf{N}_\lambda] dS \quad (43)$$

$$[\mathbf{z}_\eta^s] = \int_{x_s^c} [\mathbf{N}_\mathbf{u}]^T \mathbf{t}^c [\mathbf{N}_\eta] dS \quad (44)$$

$$[\mathbf{c}_\eta^s] = - \int_{x_s^c} [\mathbf{N}_\eta]^T [\mathbf{N}_\eta] dS \quad (45)$$

接触面の全領域については、すべての接触切片を接触面において組み立てることにより（通常有限要素の組立と類似）次のように表すことができる。

$$\sum_{s=1}^L \Delta \mathcal{F}_\mathbf{u}^{(s)} = \{\dot{\mathbf{U}}\}^T \left([\mathbf{Z}_\lambda] \{\Lambda\} + [\mathbf{Z}_\eta] \{\mathbf{H}\} \right) \quad (46)$$

$$\sum_{s=1}^L \Delta \mathcal{F}_\lambda^{(s)} = \{\dot{\Lambda}\}^T [\mathbf{Z}_\lambda]^T \Delta \{\mathbf{U}\} + \{\dot{\Lambda}\}^T \frac{1}{\epsilon_\lambda} [\mathbf{C}_\lambda] \{\Lambda\} \quad (47)$$

$$\sum_{s=1}^L \Delta \mathcal{F}_\eta^{(s)} = \{\dot{\mathbf{H}}\}^T [\mathbf{Z}_\eta]^T \Delta \{\mathbf{U}\} + \{\dot{\mathbf{H}}\}^T \frac{1}{\epsilon_\eta} [\mathbf{C}_\eta] \{\mathbf{H}\} \quad (48)$$

ただし、 $[\mathbf{Z}_\lambda]$ 、 $[\mathbf{C}_\lambda]$ 、 $[\mathbf{Z}_\eta]$ 、 $[\mathbf{C}_\eta]$ は次の通りである。

$$[\mathbf{Z}_\lambda] = \sum_{s=1}^L [T^s]^T [\mathbf{z}_\lambda^s] [\mathcal{A}_\lambda^s] \quad (49)$$

$$[\mathbf{C}_\lambda] = \sum_{s=1}^L [\mathcal{A}_\lambda^s]^T [\mathbf{c}_\lambda^s] [\mathcal{A}_\lambda^s] \quad (50)$$

$$[\mathbf{Z}_\eta] = \sum_{s=1}^L [T^s]^T [\mathbf{z}_\eta^s] [\mathcal{A}_\eta^s] \quad (51)$$

$$[\mathbf{C}_\eta] = \sum_{s=1}^L [\mathcal{A}_\eta^s]^T [\mathbf{c}_\eta^s] [\mathcal{A}_\eta^s] \quad (52)$$

ここで、 $[\mathcal{A}_\lambda^s]$ 、 $[\mathcal{A}_\eta^s]$ は s 番目の接触切片の接触面全体に関する結合を表わす論理マトリックスであり、 $[T^s]$ は s 番目の接触切片の代表的な相対変位増分と節点変位増分の関係を表わすマトリックスを意味し、それぞれ次の関係を満足する。

$$[T^s] : \Delta \{\mathbf{U}\} \rightarrow \Delta \{\mathbf{u}^s\}$$

$$\text{または、} [T^s] \Delta \{\mathbf{U}\} = \Delta \{\mathbf{u}^s\} \quad (53)$$

$$[\mathcal{A}_\lambda^s] : \{\Lambda\} \rightarrow \{\lambda^s\}$$

$$\text{または、} [\mathcal{A}_\lambda^s] \{\Lambda\} = \{\lambda^s\} \quad (54)$$

$$[\mathcal{A}_\eta^s]: \{\mathbf{H}\} \rightarrow \{\eta^s\}$$

または、 $[\mathcal{A}_\eta^s]\{\mathbf{H}\} = \{\eta^s\}$ (55)

最後に、式(29)および式(46)～式(48)を式(22)～式(24)に代入することにより接触問題に対する次の有限要素支配方程式が得られる。

$$[\mathbf{K}_T]\Delta\{\mathbf{U}\} + [\mathbf{Z}_\lambda]\{\Lambda\} + [\mathbf{Z}_\eta]\{\mathbf{H}\} = \Delta\{\mathbf{P}\} \quad (56)$$

$$[\mathbf{Z}_\lambda]^T \Delta\{\mathbf{U}\} + \frac{1}{\epsilon_\lambda} [\mathbf{C}_\lambda]\{\Lambda\} = \{\mathbf{0}\} \quad (57)$$

$$[\mathbf{Z}_\eta]^T \Delta\{\mathbf{U}\} + \frac{1}{\epsilon_\eta} [\mathbf{C}_\eta]\{\mathbf{H}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (58)$$

あるいは、上式はまとめて次式のように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{Z}_\lambda & \mathbf{Z}_\eta \\ \mathbf{Z}_\lambda^T & \frac{1}{\epsilon_\lambda} \mathbf{C}_\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_\eta^T & \mathbf{0} & \frac{1}{\epsilon_\eta} \mathbf{C}_\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{U} \\ \Lambda \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{P} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (59)$$

さらに、上式より Λ と \mathbf{H} を消去すると次式が得られる。

$$[\tilde{\mathbf{K}}_T]\Delta\{\mathbf{U}\} = \Delta\{\mathbf{P}\} \quad (60)$$

ここで、 $[\tilde{\mathbf{K}}_T]$ は接触条件を考慮に入れた場合の接線剛性マトリックスであり次の通りである。

$$[\tilde{\mathbf{K}}_T] = [\mathbf{K}_T] + [\mathbf{K}_T^C] \quad (61)$$

ただし、上式の接線剛性マトリックスに対する接触条件の寄与 $[\mathbf{K}_T^C]$ は次式で与えられる。

$$[\mathbf{K}_T^C] = -\epsilon_\lambda [\mathbf{Z}_\lambda][\mathbf{C}_\lambda]^{-1}[\mathbf{Z}_\lambda]^T - \epsilon_\eta [\mathbf{Z}_\eta][\mathbf{C}_\eta]^{-1}[\mathbf{Z}_\eta]^T \quad (62)$$

一方、局所化混合法¹²⁾ (localized mixed method) の概念に従って、接触切片における接触圧力と接触せん断応力の補間をそれぞれの切片で独立に選ぶことにすると接触切片間での連成はなくなり、 $[\mathbf{C}_\lambda]$ 、 $[\mathbf{C}_\eta]$ の逆は個々の切片に対する $[\mathbf{c}_\lambda]$ 、 $[\mathbf{c}_\eta]$ の逆を組み立てることにより求められるので、上式の $[\mathbf{K}_T^C]$ は次のようになる。

$$[\mathbf{K}_T^C] = \sum_{s=1}^L [\mathbf{T}^s]^T [\mathbf{k}_s^c] [\mathbf{T}^s] \quad (63)$$

ただし上式では、 δ_{st} をKroneckerのデルタ記号、 $[\mathbf{I}_\lambda]$ と $[\mathbf{I}_\eta]$ を単位マトリックスとして次式の関係を考えている。

$$[\mathcal{A}_\lambda^s][\mathcal{A}_\lambda^s]^T = \delta_{st}[\mathbf{I}_\lambda] ; [\mathcal{A}_\eta^s][\mathcal{A}_\eta^s]^T = \delta_{st}[\mathbf{I}_\eta] \quad (64)$$

また、式(63)において $[\mathbf{k}_s^c]$ は接触切片 s の剛性マトリックスであり、次の通りである。

$$[\mathbf{k}_s^c] = -\epsilon_\lambda [\mathbf{z}_\lambda^s][\mathbf{c}_\lambda^s]^{-1}[\mathbf{z}_\lambda^s]^T - \epsilon_\eta [\mathbf{z}_\eta^s][\mathbf{c}_\eta^s]^{-1}[\mathbf{z}_\eta^s]^T \quad (65)$$

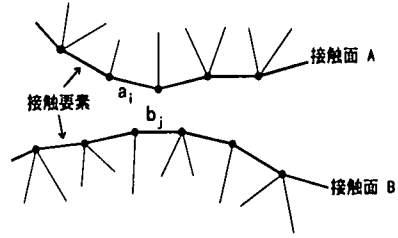
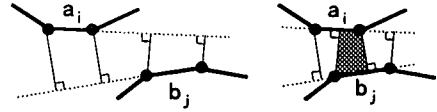


図-5 接触領域に対する有限要素モデル



(1) 接触切片なし (2) 接触切片あり

図-6 接触要素と接触切片

以上により摂動型ラグランジュ汎関数を基本として、局所化混合スキームを導入することにより、広く用いられている変位型有限要素アルゴリズムの範囲で一般的な接触問題を取り扱うことが可能となる。

(3) 接触領域に対する有限要素モデル

有限要素法を用いた接触境界を含む問題の解析は増分形で表された式(60)を解くことになるが、その場合の接線剛性マトリックスは、式(61)のように物体内部の領域に関する接線剛性マトリックス $[\mathbf{K}_T]$ と接触条件の寄与を表す接線剛性マトリックス $[\mathbf{K}_T^C]$ に分けてモデル化される。したがって、前者の物体内部領域は通常の有限要素の集合としてモデル化されればよく、後者の接触条件の寄与については物体端部を含む有限要素についてのみ式(65)で表される接触切片の集合として式(63)を組立てればよい。実際の解析におけるこれらの接触切片の組立てでは、接触境界面にある全ての要素端部について接触切片を指定する必要はなく、以下のような手順を踏むこととなる。

図-5に示す接触が想定される2つの接触面 A, B をそれぞれ接触要素 a_i と b_j の集まりとし、2つの面の個々の接触要素についてその部分が接触するかどうかを判別する必要がある。このとき、接触の可能性がある場合にそれを接触切片と呼び、この部分について接触条件を有限要素離散する。具体的には、二次元問題の場合の接触切片の判別は、図-6に示すように2つの接触面 A, B 上の任意の接触要素 a_i と b_j を構成する節点からそれぞれ相手側に垂線を下ろし、その領域の重なり合いによって判定した。例えば図-6(1)は、接触面 A 上の任意接触要素 a_i を構成する節点から接触面 B 上の任意接触要素 b_j に下ろした2つの垂線によって囲まれる領域と b_j から a_i に下ろした2つの垂線に

よって囲まれる領域が互いに重ならない場合であり、このとき両接触要素は接触しないと判別され、接触切片を定義する必要がない。一方、図-6 (2) の場合は、重なりが存在することから両接触要素は互いに接触する可能性があるものとして接触切片を挿入する。なお、これらの操作は解析プログラム内部で自動的に行われることから、増分過程で接触位置が刻々変化する問題にも対応できる。

接触切片の概念は以上述べた通りであるが、数値計算プログラミング上必要となる具体的な離散化アルゴリズムについては、基本的に文献7)～文献10)に述べられている方法に準じているため、ここではその詳細を省略する。

3. シールドトンネルの掘削解析例

杭等の基礎構造物、埋設管あるいはトンネルなどにみられるように、地盤中に建設される構造物のほとんどが、地盤と構造物の間に接触境界を含む力学問題である。本章では、シールドトンネルを例に、シールド機の推進過程で生じる地盤変形を接触問題として解析し、シールド機と地盤の接触摩擦の影響について考察する。

シールドトンネルの施工が近接構造物に与える影響や、小土被り下で施工される場合の地盤沈下の問題は、切羽やテールボイド下部での応力開放あるいは裏込め注入の良否のみで説明できるものでなく、シールド機の掘進に際してのシールド機スキンプレートと周辺地盤との接触摩擦の影響を考慮した検討を必要とすることが指摘されている¹³⁾。そこで、現場計測データが準備されている東京都下水道局竹の塚幹線のシールドトンネルを例に、シールド機が掘進移動することによって生じるスキンプレート表面と地盤の摩擦が周辺地盤の変形や応力変化に与える効果を解析し、計測値との比較を行った。

図-7に本シールドトンネルの地盤条件とトンネル及び計測点の位置関係を示す。解析に用いた地盤条件は同図中に示す通りとしてDrucker-Pragerの降伏条件に従う弾塑性材料を仮定した。図-8は解析に使用した有限要素分割図であり、スキンプレートと地山間およびセグメントと地山間にはそれぞれ接触条件を設定(同図中に太点線で示す)した。また、境界条件は両側端面および最下端面をローラ固定条件とし、荷重条件は土、シールド機およびセグメントの自重を、かつ切羽面には泥水圧を作用させることとした。ただし、接触面での摩擦係数は $\mu = 0.05 \sim 0.30$ の範囲でシールド機先端部から後端部まで線形分布とし、泥水圧は鉛直土被り圧に対して土圧係数 $K = 0.6$ を仮定している。

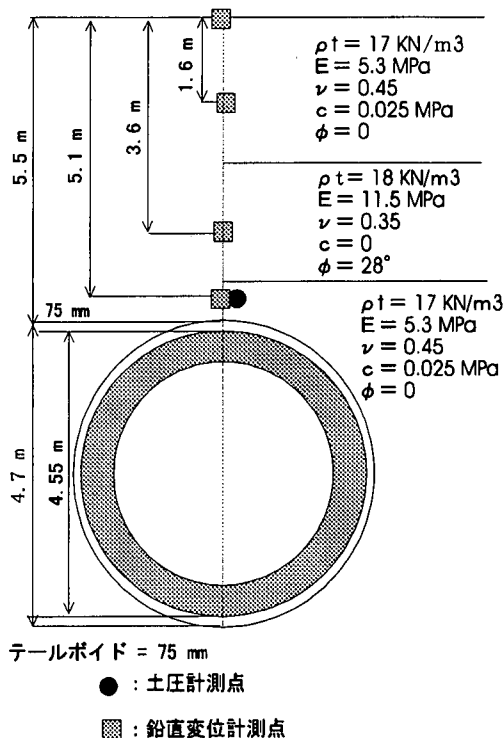


図-7 シールドトンネルの断面形状と解析条件

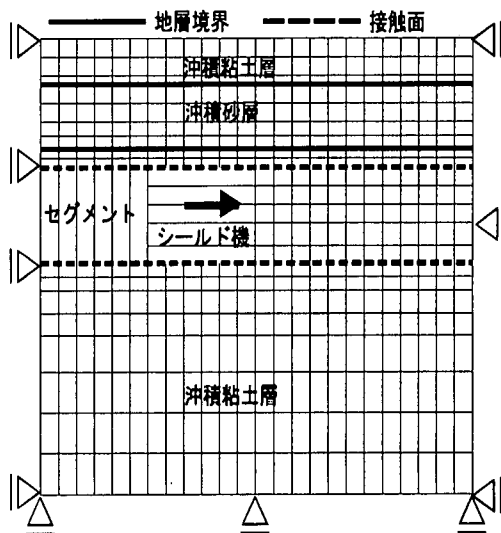


図-8 シールド掘削解析の有限要素分割

さらに、本現場ではセグメントと地山のテールボイドに同時裏込め注入が施工されているが、計測結果から判断してシールド機離脱直後にテールボイドが完全に注入材で充填されていないものと思われるので、解析では裏込め材の充填率をテールボイド量 75 mm に対し 70% と仮定した。

解析手順は従来の掘削解析とほぼ同様である。具体的には、まず自然地盤の自重解析により初期応力状態を求めた後（ただし、この時点で変位はゼロ状態とする）、セグメント1リング分相当の土要素の掘削および掘削面に泥水圧を載荷→シールド機後端内部にセグメント要素1リング分を挿入→シールド機要素を1リング分推進（推進方向に強制変位）させるサイクルを繰り返す。

図-9は、シールド機の推進に伴って図-7に示す計測点で測定されたシールド機直上部地盤内の鉛直変位量と、シールド機の推進移動に伴ってスキムプレート表面と地山面との摩擦抵抗によって発生する土圧の増分量（以後、負荷土圧と呼ぶこととし、解析では着目点での鉛直応力成分の増分量とした）を本解析手法による計算値と比較したものである。この図から分かるように、沈下量及び負荷土圧の計算値は定量的にも定性的にも実測値をほぼ説明していると思われる。ただし、沈下及び負荷土圧の量的、モード的一致は、シールド機と掘削地盤面との摩擦係数、掘削切羽面の泥水圧およびテールポイド量の見積りに大きく左右されることから、実際の施工条件に見合った適切な解析条件を選定する必要がある。特に、シールド機周面の摩擦抵抗と切羽面の泥水圧の相対的比率の評価が実測値を解析で表現する上で重要な要素となっている。

上記の解析では、先にも述べたように、切羽面に作用する泥水圧は本現場の計測区間で測定された泥水圧の平均値を使用している。シールド機周面の摩擦抵抗は、現場で直接計測することが困難であることから、通常はシールド機のジャッキ推力と泥水圧の関係から間接的に推定せざるを得ない。しかしながら、本現場でのジャッキ推力の計測値はバラツキが大きく、ジャッキ推力から摩擦抵抗を推定することは不相当と考えた。

吉田¹³⁾らは多くのシールドトンネルの施工実績からシールド機の周面摩擦に関する考察を行い、過去の研究成果^{14),15),16)}との比較から砂質土については N 値 $=30$ （相対密度で60%程度）以下では摩擦係数として $\mu=0.3\sim0.5$ 程度を採用しても良いとしている。また、粘性土に対する周面摩擦抵抗は土の強度やシールド径に大きく左右され、その評価が難しく、現状では周辺土の粘着力 c_u 程度を最大としてそれ以下を採用するのが無難としている。

本解析例での摩擦抵抗は、トンネル周辺地盤が粘性土であるため、図-7に示す粘着力相当の摩擦抵抗を想定し、摩擦係数を土被り圧と c_u から逆算した値を最大値とした。ただし、シールド機先端に近いほど掘削直後の土の乱れと泥水の影響を受けやすいことから先端部でほぼゼロ状態とし、後端部で最大値を取るよう

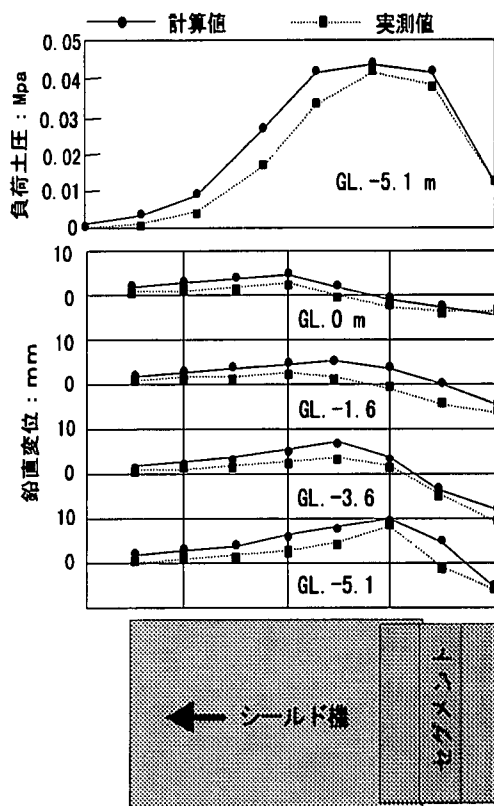


図-9 解析結果と現場計測値の比較

に摩擦係数の直線分布を仮定した。

4. あとがき

ここでは、種々の接触問題を従来から広く用いられている変位型有限要素法で取り扱うための一般的な定式化を示した。本手法によれば、例えば二次元問題において文献7),8),9)で提案されている手法のように、想定される二つの接触面の有限要素分割をほぼ等しくしなければならないという制約はなくなり、任意の一般的なモデル化が可能となった。また、互いに接触する物体間の相対移動量に制限がなくなったことにより、地盤中を長距離にわたって掘進移動するシールド機と地盤との接触問題の数値解析が可能であることを具体例で示すことができた。

さらに、ここでの解析例はトンネル縦断方向の2次元問題として扱ったが、シールド機の推進に伴うトンネル直上・下部の地盤の挙動はある程度表現できたものとする。しかし、トンネル横断方向の挙動を予測する問題や近接する既設構造物（トンネルと既設構造物の配置関係は2次元問題として扱えない場合が多い）

への影響を検討するような問題に対しても施工過程を忠実に再現した解析を行うためには、本文で述べた手法を3次元問題に拡張する必要がある。今後は、3次元問題への拡張を含めて、現場計測データの存在するより多くのシールドトンネルについて、施工過程を出来る限り完全に再現した解析とその考察を積重ねる必要があると考える。特に、地盤の沈下や隆起に対する切羽圧やテールボイドの影響、シールド機と地盤の摩擦によって生じる負荷土圧が近接構造物に及ぼす影響等のように従来の解析では扱いにくかった諸問題について検討してゆきたいと考える。

参考文献

- 1) 久武勝保, 竹山喬, 伊藤富雄: 双設シールドトンネルによる地表面沈下の算定手法とその現場への適用, 土木学会論文集, 1983.
- 2) 大西有三, 岸本英明: トンネル切羽の影響を近似的に考慮した2次元有限要素解析, トンネルと地下, vol. 11, No. 12, 1980.
- 3) Cundall, P.A. and Strack, O.D.L.: A Discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, Vol. 2, No. 1, pp. 47-65, 1979.
- 4) Shi, G.H. and Goodman, R.E.: Discontinuous Deformation Analysis, *Proc. 25th U.S. Symposium on Rock Mechanics*, pp. 269-277, 1984.
- 5) 川井忠彦: 新しい離散化モデルとその船体構造解析への応用(1,2), 日本造船学会誌, Vol. 585, pp. 109-115, Vol. 589, pp. 345-353, 1978.
- 6) 倍風館: 有限要素法ハンドブック, 基礎編, pp. 421-425, 1988.
- 7) Simo, J.C., Wriggers, P. and Taylor, R.L.: A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems, *Comp. Mech. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. 51, pp. 163-180, 1985.
- 8) Simo, J.C. and Laursen, T.A.: An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Comput. Struct.*, Vol. 42, No. 1, pp. 97-116, 1992.
- 9) Shyu, S.C., Chang, T.Y. and Saleeb, A.F.: Friction-contact analysis using a mixed finite element method, *Comput. Struct.*, Vol. 32, No. 1, 1989.
- 10) Crisfield, M.A.: *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 2, JOHN WILEY, pp. 411-446, 1997.
- 11) 寺沢寛一: 自然科学者のための数学概論(応用編), 岩波書店, pp. 191-204, 1969.
- 12) Takeda, H., Kusabuka, M., Imoto, K., Takumi, K. and Soejima, M.: Numerical algorithm for local failure mechanism of pre-stressed concrete containment vessel wall with penetration, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 166, pp. 389-401, 1996.
- 13) 吉田保, 山田孝治: 泥土圧シールド掘進時の切羽土圧と周面摩擦力について, 土木学会論文集, No. 445, 第3部門-18, 1992.
- 14) 岸田隆夫, 吉見吉昭: 砂と金属材料との間の摩擦抵抗, 第12回土質工学研究発表会, pp. 295-298, 1977.
- 15) 岸田隆夫, 吉見吉昭, 植木一志: 砂と金属材料との間の摩擦抵抗(その2), 第13回土質工学研究発表会, pp. 437-440, 1978.
- 16) 佐藤孝治, 渋谷昌志: 砂とコンクリート面間の摩擦抵抗に関する実験的研究, 第16回土質工学研究発表会, pp. 557-560, 1981.
- 17) 黒川信子, 草深守人, 田中弘, 吉田保: シールド機と地盤の接触摩擦を考慮したシールド掘削解析, 土木学会第51回年次学術講演概要集, 1996.
- 18) 黒川信子, 草深守人, 田中弘, 吉田保: シールド掘進中の負荷土圧に伴う近接構造物への影響検討解析手法, 第6回トンネル工学研究発表会論文集, 1996.

(1997.4.23 受付)

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF GENERAL CONTACT PROBLEMS
AND
APPLICATION FOR EXCAVATION OF SHIELD TUNNEL

Hiroshi TAKEDA, Morito KUSABUKA
Tamotsu YOSHIDA, Hiroshi TANAKA and Nobuko KUROKAWA

Several finite element procedures for frictionless- or friction-contact problems have been proposed for the case in which node-to-node contact no longer holds. One of the typical computational algorithms is the nodal mis-match algorithm in which contact interface is discretized into contact segments. In this paper, the nodal mis-match algorithm to allow arbitrary finite element mesh is generalized by using a perturbed Lagrangian formulation and localized mixed concepts.

A numerical analysis for the excavation problem of shield tunnel was carried out by using the proposed algorithm. The numerical results were well similar to the ground behaviors observed in situ.