

非線形分散波理論を用いた 実用的な津波計算モデル

岩瀬浩之¹・見上敏文²・後藤智明³

¹正会員 東海大学技術員 工学部土木工学科 (〒259-1292 神奈川県平塚市北金目1117)
²正会員 (株) アルファ水工コンサルタンツ (〒063-0827 北海道札幌市西区発寒 9-14-516-336)
³正会員 工博 東海大学教授 工学部土木工学科 (〒259-1292 神奈川県平塚市北金目1117)

有限振幅性を考慮した分散関係および水理実験結果との比較を通し、津波計算に最適な分散項の検証を行った。さらに、領域結合や遡上計算が可能な非線形分散波理論による計算法(2段階混合差分法)を開発した。また、差分式の誤差解析から数値誤差抑制項を加えた津波計算モデルを提案するとともに、1次元に関する伝播問題から計算精度を検証した。

Key Words : nonlinear dispersive long wave theory, dispersion relation, numerical simulation, tsunami

1. はじめに

沿岸域で津波が増幅するメカニズムとしては、浅水、集中、共振、波形曲率の4つの効果が考えられる。しかしながら、現状の津波数値計算モデル^{1)~3)}は、線形長波理論や浅水理論(非線形長波理論)を計算の支配方程式としたモデルであり、浅水、集中、共振の3種類の効果が組み込まれているものの波形曲率効果が考慮できていない。

1983年日本海中部地震津波では、15mを越える最大陸上遡上高が北秋田海岸で観測された。この現象は、波形曲率効果すなわちソリトン分裂による増幅機構を考慮しなければ説明がつかない。この様な、日本海中部地震津波の体験により、波形曲率効果を無視して解析することが津波対策を考える上で非常に危険であることが明かとなり、波形曲率効果を考慮した実用的かつ精度の高い津波数値計算モデル開発の機運が高まった。

津波の波形曲率による増幅効果を考慮するためには、非線形分散波理論を支配方程式として用いればよい⁴⁾。しかし、実用的な津波数値計算に組み入れるためには、計算の安定性、計算領域の結合、そして陸上遡上の取扱いなど解決を有するいくつかの難点が存在する。

本研究では、これらの難点が克服可能な計算スキームとして2段階混合差分法を提案する。すなわち、1段階目に運動方程式中の局所項、移流項、静水圧項を陽解法(Staggered Leap-frog法)で、そして2段階目で分散項を陰解法で計算する方法である。この方法を利用すると従来の手法で計算領域の結合や陸上遡上の取扱いが可能であるとともに分散項の計算に伴う計算の

不安定性が回避できる。また、1段階目の計算で発生した数値誤差を2段階目の計算で抑制することにより、精度の高い計算を行うことができる。なお、本文は、分散関係と数値解析による検討を介した津波計算式の提案と計算方法および誤差抑制手法について説明したものである。

2. 有限振幅性を考慮した分散関係

(1) 支配方程式

高階の微分を含む非線形分散波理論の数値計算には、計算上の種々の問題がある。そこで、考慮する分散項の形は、3階微分形までとする。また、津波の伝播を考える場合、波形曲率効果が問題となるのは、水平勾配が緩やかな場合が多く、分散項中の斜面勾配は無視できることが知られているため⁵⁾、水平床近似を行った分散項とする。

支配方程式は、浅水理論に高次の摂動展開⁶⁾によって導かれる以下の3ケースの分散項を加えた形を考察する。支配方程式は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = (A) \sim (C) \quad (2)$$

$$(A) \frac{h^3}{3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2}, (B) \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2}, (C) \frac{D^2}{3} \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2}$$

が候補となる。ここに、 η は波高、 h は静水深、 D は全水深、 \bar{u} 、 M はそれぞれ平均断面流速、流量フラックスを表す。

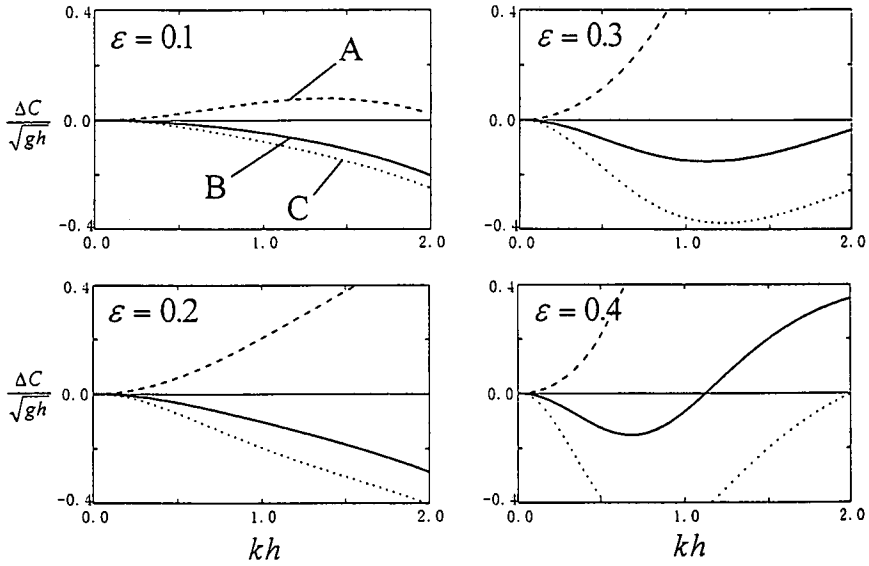


図-1 波高水深比による波峰点の分散関係

上記の3つの分散項を対象として、有限振幅性を考慮した分散関係および水理実験との比較から最適な分散項の考察を行う。

(2) 分散関係式

支配方程式の分散項の考察にあたり、藤間ら⁷⁾によって導かれた5階微分項を含む高次非線形分散波理論に関する近似的な分散関係式を導出する。水平床近似の藤間らの方程式に、正弦波形を仮定すると、

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \left[\frac{1}{1+\epsilon(\epsilon-2)-\alpha+\beta} \right]^{1/2} \quad (3)$$

なる分散関係式が得られる。ここで、

$$\alpha = \frac{\sigma^4 \xi}{45} (2\epsilon - 7\epsilon^2 + 16\epsilon\lambda^2) \quad (4)$$

$$\beta = \frac{\sigma^3 \xi^2}{3} (1 - 2\epsilon - \lambda^2) - \frac{\sigma^4 \xi^4}{45} (1 + 6\epsilon - 21\epsilon^2 + 20\lambda^2 - 32\epsilon\lambda^2 - 8\lambda^4) \quad (5)$$

であり、

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\eta}{D} \\ \xi &= 1 - \epsilon \\ \sigma &= \frac{kh}{(1-\epsilon)} \\ \lambda &= \frac{1}{kh} \frac{\partial \eta}{\partial x} (1-\epsilon) \end{aligned}$$

である。なお、 η は水位、 C は波速、 k は波数、 h は静水深、 D は全水深である。

一方、方程式(1)、(2)の分散関係は式(3)と同形で、

$$\alpha = 0 \quad (6)$$

となり、分散項(A)~(C)に対応する β は、

$$\beta = \begin{cases} (A) & \frac{\sigma^2}{3} (1-\epsilon)^4 (1-6\epsilon+6\lambda^2) \\ (B) & \frac{\sigma^2}{3} (1-\epsilon)^2 \\ (C) & \frac{\sigma^2}{3} \end{cases} \quad (7)$$

となる。

(3) 有限振幅を考慮した分散関係の比較

図-1は、式(3)を用いて波高水深比の違いによる波峰点の分散関係を比較したものである。縦軸は藤間らの式と支配方程式(1)、(2)の無次元波速の差を示し、横軸は相対波数を示す。分散曲線が0軸に近いほど、理論分散に近く、0軸より上は候補とした方程式の波速が速く、下は遅いことを意味する。(A)~(C)の3つの方程式で、(B)の分散項を含む方程式は、他の方程式に比べ比較的波速差が小さい曲線を描く。以上の考察から、最も波速の差が小さいものとして、(B)の分散項を含む方程式があげられる。

3. 計算方法

(1) 2段階混合差分法

次に、数値計算と水理実験の比較から、分散項(A)~(C)の精度を考察する。計算法には、下記に示す2段階混合差分法を用いる。

浅水理論を用いた津波計算では、領域結合および陸上遡上が陽的な差分式により可能となる。しかし、高階微分の分散項を含む非線形分散波理論による津波計

算では、分散項を含むため陽解法を用いると安定した解を求めることが困難である。また、全領域を陰差分で解くことは可能であるが、領域の細分化に伴う計算量増加、陸上遡上での波先端の取り扱いが問題となる。3行対角行列を効率良く計算するには1領域で計算が完結すること、遡上では中央差分を取らない陽差分式で行うことが望ましい。そのため、従来の領域結合と陸上遡上計算が適用でき、分散項も比較的安定に計算できる方法が必要となる。そこで、運動の式(2)を以下のように、2つの式に分割し、1段目を陽解法、2段目を陰解法で計算を行う2段階混合差分法を提案する。

支配方程式における運動の式(2)を、計算の中間値 $M_{i+1/2}^*$ によって2つに分割する。1段目の式では、領域結合²⁾と陸上遡上計算^{8),9)}を考え、陽的差分式で計算を行う。すなわち、領域結合および陸上遡上に関しては、従来通り浅水理論によって計算を行い分散項は考慮しない。

[1段目]

$$\frac{1}{\Delta t} \left[M_{i+1/2}^* - M_{i+1/2}^n \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) \Big|_{F.D.} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{F.D.} = 0 \quad (8)$$

2段目では、計算の安定性を考慮して、分散項を陰的差分式で計算する。

[2段目]

$$\frac{1}{\Delta t} \left[M_{i+1/2}^{n+1} - M_{i+1/2}^* \right] = (A) \sim (C) \Big|_{F.D.} \quad (9)$$

なお、1段目と2段目を加えることにより、非線形分散波理論式となることが確認できる。ここに、 $|_{F.D.}$ の記号は各微分項に対応する差分項を意味する。

このように、陽解法、陰解法を使い分けることにより、1段目の陽解法で浅水理論としての計算と、領域結合・陸上遡上計算を扱い、2段目の陰解法では高階微分の分散項を安定に計算を行うことが可能となる。

(2) 実験比較と支配方程式

水理実験では、図-2に示す水底模型を設置した水槽に、孤立波を伝播させた。観測点Aの波形データを数値計算の境界条件として与え、数値計算は、格子間隔を $\Delta x = 0.02\text{m}$, $\Delta t = 0.005\text{s}$ として計算を行った。

図-3は、観測点B, E, H, Kにおける計算値と実験値を比較したものである。分散項(A)では、実験値に比べ、計算値がやや速く伝播し、分散項(C)では、計算値がやや遅くなる。一方、分散項(B)では、波の先端部が実験値と比較的よく一致している。第1波の波峰点が多少過小評価となり、第2波がやや遅れる結果となるが全般的に実験値とよく一致する結果が得られる。これは、先述した分散関係の検討結果と同一の傾向である。

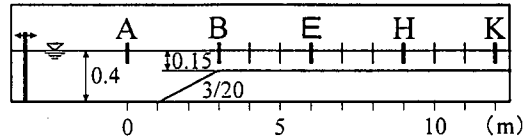


図-2 水理実験における水底勾配と観測点

以上の分散関係および実験値との比較検討より、支配方程式は分散項(B)を用いる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} \quad (11)$$

の式形が適切であることがわかる。

4. 打ち切り誤差の考察

(1) 数値誤差の展開

数値計算では、空間格子間隔が大きくなるにつれ、数値粘性と数値分散、いわゆる打ち切り誤差の影響により計算波高を過小評価とする傾向がある。したがって、数値計算にとって、誤差の考察は必要不可欠である¹⁰⁾。本計算法でも、第1段階での計算による打ち切り誤差により、最終的な計算波高が過小評価となる傾向がある。

ここでは、式(1)の差分式および1段目の式(8)からなる浅水理論計算を考察することにより、打ち切り誤差の第1次近似を差し引き、浅水理論による数値誤差を2段目の計算で抑える方法を検討する。

式(1), (8)の移流項を除く差分式をテーラー展開により微分式にもどし、1次近似の打ち切り誤差項を残すと、連続の式(1)は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\Delta x^2}{24} (1 - K_x^2) \frac{\partial^3 M}{\partial x^3} \quad (12)$$

運動の式(11)は、

$$\frac{\partial M}{\partial t} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\Delta x^2}{24} (1 - K_x^2) \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} \quad (13)$$

となる。ここで、 K_x は、 $K_x = \sqrt{gD} \Delta t / \Delta x$ で表されるクーラン数である。ここで、

$$\alpha' = \frac{\Delta x^2}{24} (1 - K_x^2) \quad (14)$$

とする。いま、

$$M' = M + \alpha' \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \quad (15)$$

とおくと、線形長波理論より、第1次近似の打ち切り誤差項を含む支配方程式は、近似的に、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M'}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial M'}{\partial t} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2\alpha' \frac{\partial^3 M'}{\partial t \partial x^2} \quad (17)$$

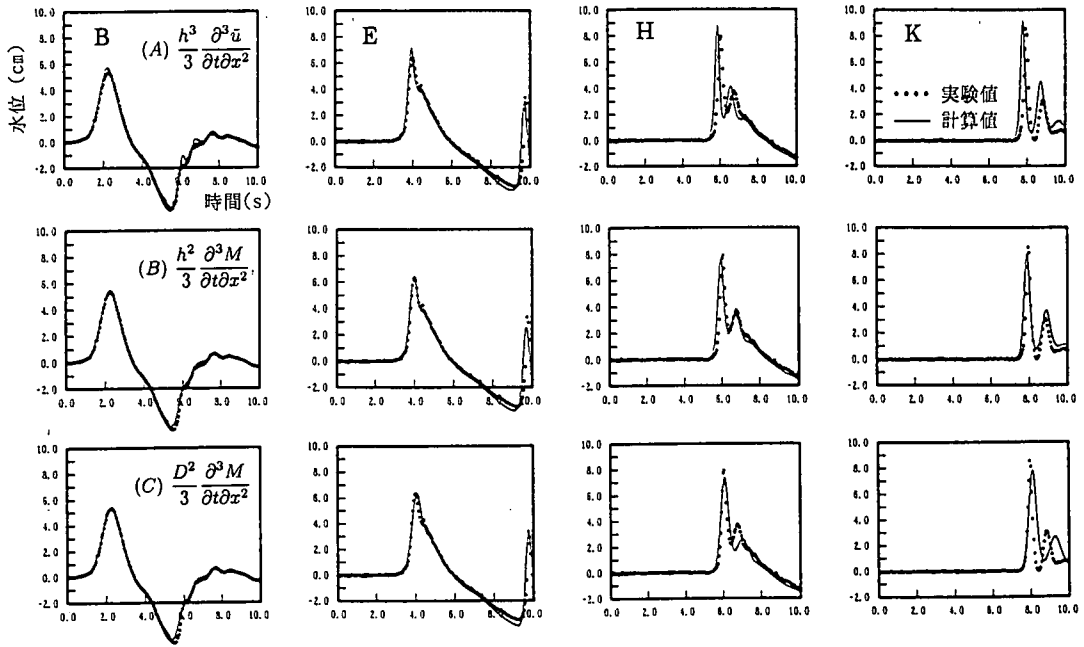


図-3 観測点B, E, H, Kにおける数値計算と水理実験の比較

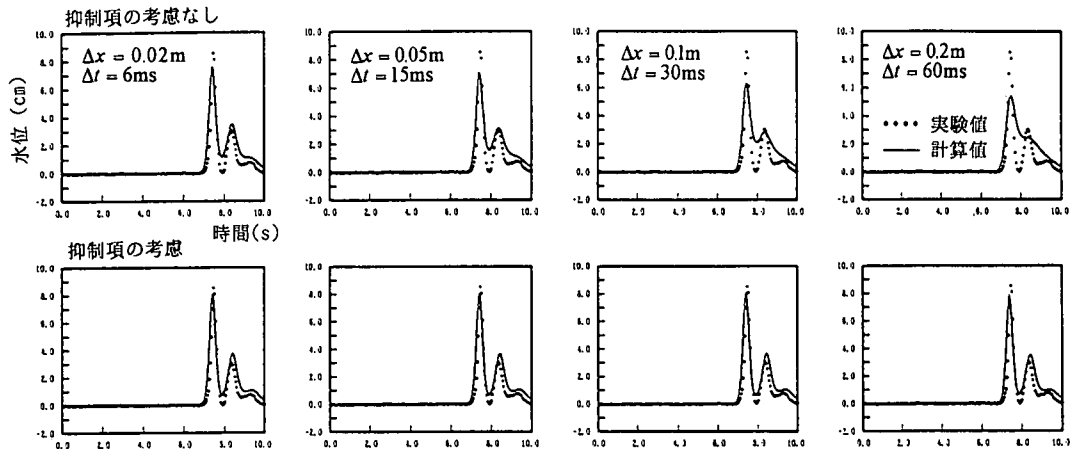


図-4 $K_x = 0.45$ における打ち切り誤差の影響と抑制項の効果

となる。式(17)の右辺の項は分散効果として働くため、数値分散と呼ばれている。

同様に、差分式(8)の移流項を計算点 $(i + 1/2, n + 1/2)$ を中心にテーラー展開し、差分式にもどすと、 $M \geq 0$ のとき、

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) \right|_{F.D.} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) - \beta' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{M^2}{D} \right) \quad (18)$$

$M < 0$ のとき、

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) \right|_{F.D.} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \beta' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{M^2}{D} \right) \quad (19)$$

となる。ここで、

$$\beta' = \frac{\Delta x}{2} (1 - K_x) \quad (20)$$

であり、式(18)、(19)の左辺の差分式は、後藤・小川¹⁾が示すものと同様な風上差分を取る。式(18)、(19)の右辺第2項は粘性作用として働くため、数値粘性(拡散)と呼ばれている。

(2) 誤差抑制項を加えた差分式

上記のように展開をした、数値誤差の第1次近似を考慮することにより、浅水理論における数値誤差(数値粘性・数値分散性)を極力抑えることが可能となる。

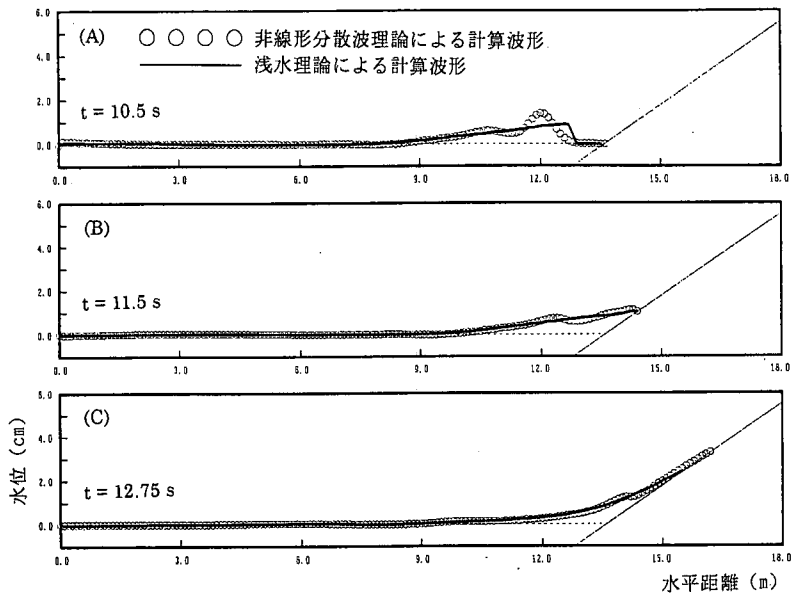
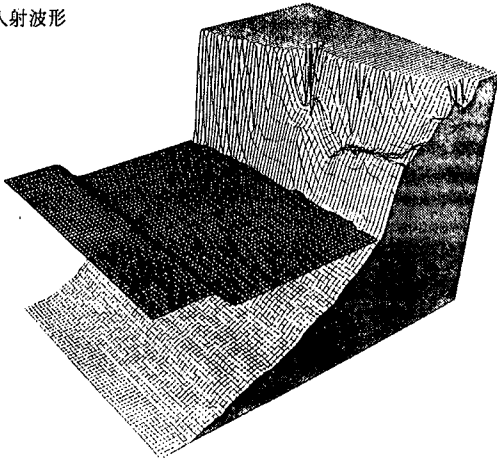


図-5 陸上遡上を含めた1次元伝播計算例

入射波形



最大遡上時

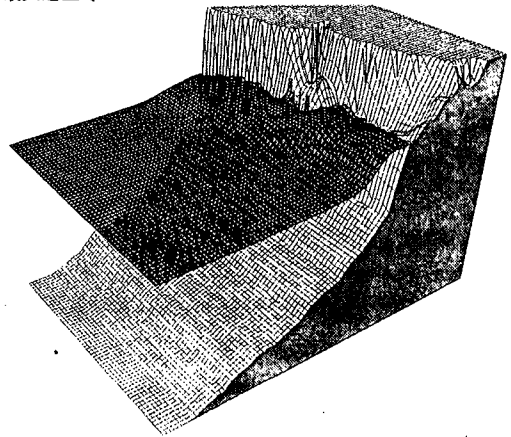


図-6 陸上遡上を含めた2次元伝播計算例

2段目の差分式(9)に誤差抑制項を以下のように加える。

$$\frac{1}{\Delta t} \left[M_{i+1/2}^{n+1} - M_{i+1/2}^{*n} \right] = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} \Big|_{F.D.} - 2\alpha' \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} \Big|_{F.D.} \pm \beta' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{M^2}{D} \right) \Big|_{F.D.} \quad (21)$$

ここで、右辺第3項目の符号は、 $M \geq 0$ で負、 $M < 0$ で正となる。

(3) 実験との比較

ここでは、誤差抑制した数値モデルと、水理実験との比較を行うことにより、数値誤差抑制項の妥当性を

検証する。

図-4は観測点Kでの一定のクーラン数($K_x = 0.45$)における、空間格子間隔の違いによる計算結果と実験結果を示したものである。誤差抑制項を考慮しない差分式の計算結果(図-4の上段)は、計算格子間隔が大きくなるにつれ、打ち切り誤差の影響により波高が低くなり、実験値との差が大きくなることが確認できる。一方、誤差抑制項を考慮した差分式による計算結果(図-4の下段)は、計算格子間隔をある程度大きく取っても、実験値と良好な一致を示している。

5. 陸上遡上を考慮した計算例

(1) 1次元計算

陸上遡上を考慮した1次元の非線形分散波理論による計算結果と従来の浅水理論による計算結果を図-5に示す。計算は、水理実験と同様3/10の水底勾配に孤立波を入射条件として与えている。なお、計算格子間隔は、 $\Delta t = 0.02m$, $\Delta t = 0.001s$ であり、運動量の損失(底面摩擦・砕波等)は考慮していない。

図-5の(A)に示すように、浅水理論では計算困難であった津波によるソリトン分裂も本計算式・手法で計算を安定に行うことができる。図-5の(C)に示す様に、浅水理論に比べ非線形分散波理論の遡上高の方が約1.5倍程度の高い計算結果となる。これは、ソリトン分裂によって波高が高くなり波峰へのエネルギーが集中し、遡上流を加速した結果と考えられる。

(2) 2次元計算例

図-6は、上述の1次元モデルを2次元へ拡張し、陸上遡上の計算を検証した計算結果である。計算格子間隔は、 $\Delta x = 2.5m$, $\Delta t = 0.05s$, 計算格子数は、沖側方向に202個、汀線方向に61個、波高2mの波を沖側より強制的に与えた例である。1次元同様、運動量の損失は考慮していない。2次元計算への遡上適応性を検証するために行った計算であるため、使用した地形は北秋田沿岸領域一部のみを使用した。図-6の右側は最大遡上時における波形であり、従来の浅水理論計算と同様な遡上計算が可能であることが確かめられる。

6. おわりに

本報では、実用性を重視した非線形および分散波効果を考慮した津波計算式と領域結合・陸上遡上の計算可能な差分計算法の提案を行った。主要な結論をまとめると下記ようになる。

(1) 分散関係および水理実験との比較を介し、実用的

な津波計算に適した3階微分までの分散項を含む支配方程式を検証した。

(2) 浅水理論を陽解法、分散項を陰解法で計算する2段階混合差分法により、陸上遡上計算ができ、また安定した数値解を得ることができた。

(3) 打ち切り誤差を考察し、誤差抑制項を加えることによって精度の高い計算結果を得た。

なお、今後の課題としては、砕波、陸上遡上後の分散項の取り扱い、現地適用を目的とした2次元拡張に伴う分散効果特性の考察などがある。

謝辞： 本研究を行うにあたり、東北大学首藤伸夫教授、東海大学濱野啓造教授、飯田邦彦助教授、冨野利夫非常勤講師、(株)エコ柴木秀之氏から貴重な御助言を頂いた。また、水理実験において、東海大学大学院の原 信彦・鈴木崇之両君の助力を得た。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) 後藤智明, 小川由信: Leap-Frog法を用いた津波計算法, 東北大学土木工学科資料, p.52, 1982.
- 2) 後藤智明, 佐藤一央: 三陸海岸を対象とした津波数値計算システムの開発, 港湾技術研究報告, 第32巻, 第2号, pp.3-44, 1993.
- 3) 岩瀬浩之, 柴木秀之, 見上敏文, 後藤智明: 汎用津波計算システムの開発, 東海大学紀要工学部, Vol.36, No.2, pp.139-145, 1996.
- 4) 佐藤慎司: 波の分裂と砕波を考慮した津波の数値計算, 海岸工学講演会論文集, 第42巻, pp.376-380, 1995.
- 5) 長尾昌朋, 後藤智明, 首藤伸夫: 非線形分散波の数値計算, 第32回海岸工学講演会論文集, pp.114-118, 1985.
- 6) 後藤智明: アーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式, 土木学会論文集, Vol.351, pp.193-201, 1984.
- 7) 藤間功司, 後藤智明, 首藤伸夫: 非線形分散式の精度の検討, 土木学会論文集, Vol.396, pp.223-232, 1986.
- 8) 岩崎敏夫, 真野 明: オイラー座標による二次元津波遡上の数値計算, 第26回海岸工学講演会論文集, pp.70-74, 1979.
- 9) 後藤智明, 首藤伸夫: 各種津波遡上計算法と波先端条件の比較, 第27回海岸工学講演会論文集, pp.80-84, 1980.
- 10) 今村文彦, 後藤智明: 差分法による津波数値計算の打ち切り誤差, 土木学会論文集, Vol.375, pp.241-245, 1986.

(1997.9.25 受付)

PRACTICAL TSUNAMI NUMERICAL SIMULATION MODEL BY USE OF NON-LINEAR DISPERSIVE LONG WAVE THEORY

Hiroyuki IWASE, Toshifumi MIKAMI and Chiaki GOTO

The most suitable dispersion terms for tsunami simulation were investigated through the analysis of the dispersion relation and the comparison with hydraulic experiments. A new computation algorithm, two-step mixed finite difference scheme, is also developed for the computation of run-up on land composite regions, and the model of tsunami simulation including correction terms to improve numerical results are introduced by analysis for errors of difference equations, and the calculation of accuracy confirmed by one-dimensional propagation.