

# 荷重作用下での変位拘束による残留応力と それにより生ずるクラックの解析

三輪昌弘<sup>1</sup>・長谷部宣男<sup>2</sup>・中島将貴<sup>3</sup>・館浩司<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 東海旅客鉄道株式会社 技術本部 (〒103-0028 東京都中央区八重洲 1-6-6)

<sup>2</sup>正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科 (〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

<sup>3</sup>工修 株式会社大林組 (〒101-0048 東京都千代田区神田司町2-3)

<sup>4</sup>正会員 日本橋梁株式会社 (〒552-0013 大阪市港区福崎2-1-30)

荷重作用下で変形を生じている薄板の境界の一部を変位拘束し、その後荷重を変化させたとき生ずる残留応力の問題を解く。解析は、有理写像関数と複素応力関数による方法で、外力及び混合境界値問題の解として、解析的に求まる変位拘束を受けない板の一樣曲げの解と、境界の一部に変位拘束を受ける一樣曲げの解を重ね合わせて残留応力の解を得る。変位拘束の条件として、固定境界と単純支持境界の2種類の条件を考える。残留応力によって変位拘束の端部からクラックが発生した場合の応力分布を求める。また、残留応力が発生した後に、更に荷重が作用した一般の荷重のもとでクラック発生のおよびひずみエネルギー解放率を求め、クラックの発生およびその方向を調べる。変位拘束のない荷重比の付近では、クラック発生角度は急激に変化する。これ以外の荷重比に対しては、ポアソン比が0.25のとき固定境界の場合 $130^\circ \sim 150^\circ$ 、単純支持境界の場合 $150^\circ$ 前後の角度である。

**Key Words :** crack, residual stress, displacement constraint, stress intensity factor, strain energy release rate, thin plate bending, mapping function, complex stress function

## 1. まえがき

荷重の作用下で板に補剛材などを取り付けたり、補修のために溶接などで新たに変位拘束を与えた後、作用している荷重が変化すると、例えば除荷されると残留応力が生ずる。本論文では、このような残留応力が存在し、新たに荷重が作用した一般の応力状態の解析を行う。近年、橋梁等の構造物は、作用荷重の増加や耐力の低下に対する補強、補修、また周辺環境の対策のため防音工、装飾工等が付加されたりして、既設の部材に新たな部材が取り付けられる事例が多くみられるようになった。このような作業は、外荷重の作用下で行われることも多い。したがって、作業終了後(これは新たな変位拘束が与えられた状態と考えられる)の外力の変化により残留応力が発生する。しかも変位拘束の端部では残留応力による応力集中も生ずるため、これにより生ずるクラックに関して解析を行うことは工学的にも意義深いと思われる。

本論文での解析方法は、有理写像関数と複素応力関数を用いた薄板の解析方法により、外力境界値問題としてのクラックを有する半無限板の曲げ問題の

解<sup>1)</sup>と、境界の一部が変位拘束された混合境界値問題のクラックを有する半無限板の問題の解<sup>2), 3)</sup>を利用し、重ね合わせの原理を用いて変位拘束による残留応力の問題の解を求める。変位拘束の条件としては、境界の一部に固定境界または単純支持境界を与える2種類の場合を扱う。境界上の一部の変位拘束によって残留応力が発生した半無限板の変位拘束の端部からクラックを生じた場合の問題を解く。得られた解を用いて、クラック発生前および発生後の応力分布の例を示す。さらに、新たに荷重が作用した状態での、変位拘束端からのクラックの発生およびその発生方向を調べる。このとき、クラック発生直後のひずみエネルギー解放率を考え、これが最大となる方向にクラックが生ずるとするクライテリオンを用いる。写像関数を半無限板以外のものに代えて、比較的任意形状に関して同様の解析を容易に行うことができる。

残留応力の種類には上述のものその他、溶接等の熱影響によるものや、材料の一部が降伏点を越えて塑性変形したときに生ずるものがある。前者については、日本鋼構造協会の施工指針<sup>4)</sup>の中で広く供用下で行われる場合についてなされており、特に溶接に

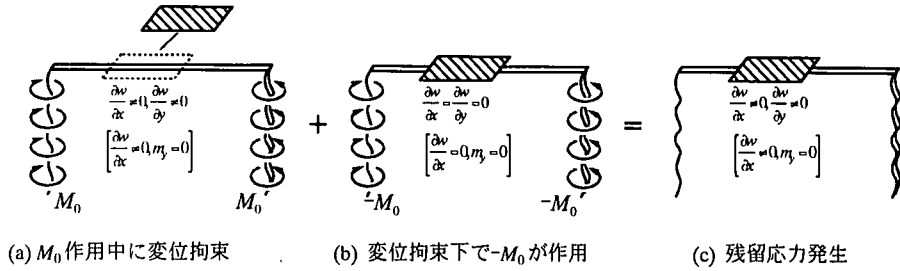


図-1 変位拘束による残留応力(クラック発生前, 固定境界の場合. [ ]内は単純支持境界の場合)

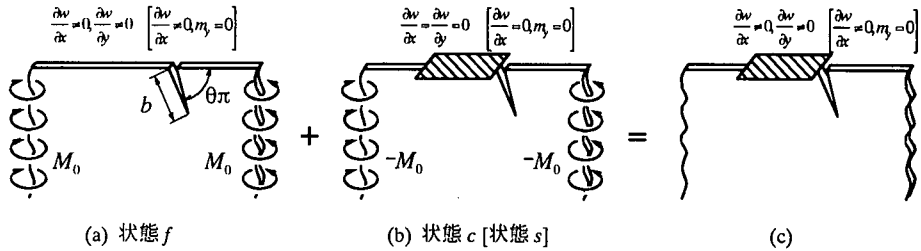


図-2 変位拘束による残留応力(クラック発生後, 固定境界の場合. [ ]内は単純支持境界の場合)

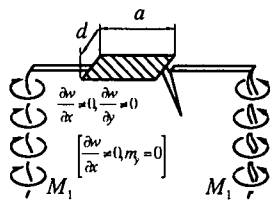


図-3 残留応力状態に新たに荷重  $M_1$  が作用しクラックの発生した状態

よる残留応力・変形に関して, 鈴木・堀川<sup>5), 6), 7)</sup>の研究がみられる. 溶接による残留応力とクラックの連成に関する研究としては, 例えば, 小田・他<sup>8)</sup>が突合せ溶接された板に溶接線と直角にクラックが存在する場合について, 溶接残留応力場とクラックの位置関係を変えて実験と解析を行っており, Sumi<sup>9)</sup>は溶接応力場がクラック先端の伝播経路に及ぼす影響に関する研究を行っている. また, 研削時の熱による板の面方向に対して比較的広く一様で, 厚さ方向には強さが変化する残留応力を対象とした3次元解析<sup>10)</sup>がなされている. Cheng and Finnie<sup>11)</sup>は板に溶接で部材を取り付けた問題について, 溶接の熱影響と取り付けた部材の変位拘束の両方による残留応力の分布を調べる実験と解析を行っている. クラックを閉じる方向に作用する圧縮残留応力は破壊メカニズムの重要な位置を占めるとして, Cordes and Joseph<sup>12), 13)</sup>は板の表面あるいは内部クラックの問題を解析し, また, ボルト穴の周囲に圧縮残留応力を

与えた場合の, クラックの進展抑止に関する Josefson et al.<sup>14)</sup>の研究もみられる. 残留応力発生には多くの原因があり, それらが複雑に複合して生じる場合も多くある. しかし, それぞれの原因別の残留応力の知見を得ることは, 残留応力の発生の本質的なことを知るために重要なことと思われる. また, その方法の一つと思われる.

## 2. 解析モデルと解析方法

ここでは, 解析するモデルとして次のような状態を考える. すなわち, まず一様曲げモーメント  $M_0$  が作用して変位(たわみ)を生じている半無限板の自由境界の一部の変位を拘束した後に(図-1a), 荷重  $M_0$  を除荷すると(図-1b), 変位拘束の影響で変位境界の周囲に残留応力が生ずる(図-1c). 残留応力は変位境界の端部で最大となる応力集中を生じ, これによってクラック発生の可能性が考えられる(図-2c). 残留応力が存在している状態からさらに荷重  $M_1$  が作用し, 残留応力と残留応力発生後の荷重  $M_1$  の影響により, 変位境界の端部からクラックが発生する可能性も考えられる(図-3). その応力状態は図-2bにおいて  $M_0$  の代わりに  $(M_1 - M_0)$  が作用した状態と, 図-2a を重ね合わせて得られる.

変位拘束の条件として, 固定境界と単純支持境界の2種類を考える. 図-4a のように座標をとり, 薄板のたわみを  $w$  で表す.  $DE$  部分に  $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$  の条件を与えるとき, 力学的に固

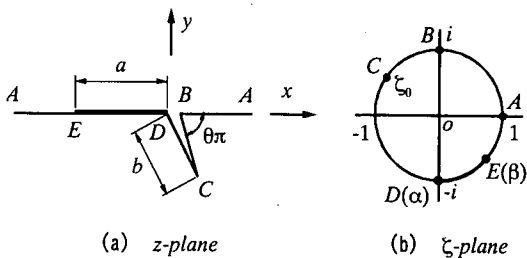


図-4 解析形状と単位円

定支承の条件と同じであるので、これを固定境界と呼ぶことにする。また、DE 部分に  $x$  軸方向たわみ角  $\partial w/\partial x = 0$ 、 $x$  軸回りの曲げモーメント  $m_y = 0$  の条件を与えるとき、単純支持の条件と同じであるので、これを単純支持境界と呼ぶことにする。これらは、構造的に DE 部分が固定支承や単純支持に作られた場合の条件である他に、力学的には次の場合のモデルでもある。変位拘束が補強材等によってなされると考えた場合、補強材の幅(図-3 のハッチング部分の幅、 $d$  と表すことにする)が十分大きくて他の部材と連結している場合には、 $y$  方向のたわみ角(回転)  $\partial w/\partial y$  に対して大きな抵抗を示し、 $\partial w/\partial y = 0$  とみなすことができる。また、逆に  $d$  が小さいとき、たわみ角  $\partial w/\partial y$  発生に対する抵抗が小さくなり  $m_y = 0$  とみなすことができる。また、 $x$  方向のたわみ角はいずれも補強材により  $\partial w/\partial x = 0$  とみなすことができる。

### (1) 写像関数

図-4に示す、 $x$  軸と  $\theta\pi$  ( $0 < \theta < 1$ ) の角度をなす長さ  $b$  のクラックを有する半無限領域( $z$ -plane)を、単位円内部( $\zeta$ -plane)に写像する有理関数は、Schwarz-Christoffel の変換公式を積分して得られる無理関数より、次式の形に作られる<sup>1)</sup>。

$$z = \omega(\zeta) = k \frac{(1+i\zeta)^\theta (1-i\zeta)^{1-\theta}}{1-\zeta} \\ \doteq \frac{E_0}{1-\zeta} + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_c \quad (1)$$

ここに  $k$  は、クラック長さを  $b$  に決める定数で  $k = \{b(1-i)^{-\theta}\} / \{2\theta^\theta(1-\theta)^{1-\theta}\}$ 、 $E_0$ 、 $E_k$ 、 $E_c$ 、 $\zeta_k$  は複素定数、 $n$  は分数式の項数で本論文では  $n=24$  を用いている。また、クラック先端  $C$  に対応する単位円上の点  $\zeta_0$  は、 $\omega'(\zeta_0) = 0$  を満足する  $\zeta_0$  より  $\zeta_0 = (1-2\theta + i)/(1-2\theta - i)$  と与えられる。変位境界部分 DE の長さ  $a$  は、写像関数の式(1)には陽には現れず、後述の応力関数にパラメータ(E 点の座標  $\beta$ )として含まれる。

式(1)は、分数式の和の形で表される有理写像関数である。そのため、クラック先端  $C$  は、厳密には鋭い角を持った形状とはならず、微小な丸みを有している。しかし、クラック先端の曲率半径  $\rho$  とクラック長さ  $b$  の比  $\rho/b$  は、 $\theta = 0.5$  のとき最小、 $\theta$  が 0 または 1 に近づくにつれて徐々に大きくはなるが、その計算結果によるオーダーは  $\rho/b = 10^{-7} \sim 10^{-12}$  と非常に小さく、クラック先端は十分に鋭い。したがって、応力拡大係数やこれを基に計算されるひずみエネルギー解放率は精度よく求まる。本論文で論ずるクラックの発生に関する問題は、クラック長さの非常に短い、つまりクラック長さ  $b$  に対して、境界 DE の長さ  $a$  が十分に長い  $b/a \ll 1$  を解析の対象としている。そのため、この写像関数を使って得られる解の精度は、相対的にさらに向上する。

クラック発生前の形状(図-1)は、写像関数をクラック発生後の式(1)において  $E_k = 0$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) の特別な場合、すなわち式(1)の右辺第 1 項のみで表される。

### (2) 複素応力関数

複素応力関数  $\phi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$  および写像関数  $\omega(\zeta)$  を用いるとき、外力境界および変位境界条件式は、それぞれ次式で与えられる<sup>15)</sup>。

$$-\kappa\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma) + \psi(\sigma)} \\ = \frac{1}{D(1-\nu)} \int [m(s) + i \int p(s) ds] dz \quad (2)$$

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma) + \psi(\sigma)} = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3)$$

ここに、 $\sigma$  は単位円上の  $\zeta$ 、 $\kappa = (3+\nu)/(1-\nu)$ 、 $\nu$  : Poisson 比、 $D$  : 板の曲げ剛さ、 $m(s)$  : 曲げモーメント、 $p(s)$  : 置換せん断力、 $\partial w/\partial x$  :  $x$  軸方向のたわみ角、 $\partial w/\partial y$  :  $y$  軸方向のたわみ角である。

はじめに、変位拘束として固定境界による残留応力が発生した状態の解を求める。

図-2a に示す、クラックを有する半無限板に、一様曲げモーメント  $M_0$  が作用する状態を本論文では状態  $f$  と呼ぶ。状態  $f$  の複素応力関  $\phi_f(\zeta)$  は、次式で与えられる<sup>1)</sup>。

$$\phi_f(\zeta) = \frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{A_{kf} B_k}{\zeta_k - \zeta} + \frac{M_0}{2D\kappa(1-\nu)} \left[ \omega(\zeta) + \frac{E_0 - E_0}{2(1-\zeta)} \right] \\ - \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \omega(\zeta) + const \quad (4)$$

ここに,

$$A_{kf} = \phi'_f(\zeta'_k), \quad B_k = E_k / \omega'(\zeta'_k); \quad \zeta'_k = 1/\zeta_k \quad (5)$$

また, 複素定数  $A_{kf}$  は,

$$\phi'_f(\zeta'_k) + \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \omega'(\zeta'_k) = A_{kf} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

に式(4)を代入して, その実部, 虚部に関する  $2n$  元, すなわち今の場合, 48元連立1次方程式を解いて決められる.

外力境界上に, 一部分でも外力の作用しない自由境界が存在する場合, 解析接続<sup>16)</sup>を利用して応力関数  $\psi_f(\zeta)$  は次式で表わされる.

$$\psi_f(\zeta) = \kappa \phi_f(1/\bar{\zeta}) - \frac{\omega(1/\bar{\zeta})}{\omega(\zeta)} \phi'_f(\zeta) \quad (6)$$

図-2b でハッチング部分が固定境界の場合を状態  $c$  と呼ぶことにする. 状態  $c$  の複素応力関数  $\phi_c(\zeta)$  は, 境界の一部( $DE$ )で境界条件  $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0$  を式(3)に代入し, それ以外の部分で  $m(s) = p(s) = 0$  を式(2)に代入して,  $-M_0$  の作用条件の下でこれらを同時に満足する解として次式で得られる<sup>2)</sup>.

$$\begin{aligned} \phi_c(\zeta) = & \chi_c(\zeta) \left[ \frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A_{kc} B_k}}{\chi_c(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \right. \\ & \left. + \frac{M_0 E_0}{4D(1+\nu)\chi_c(1)(1-\zeta)} + \frac{M_0}{4D\kappa(1+\nu)} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\chi_c(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \right] \\ & + const \quad (7) \end{aligned}$$

ここに Plemelj 関数  $\chi_c(\zeta)$  は次式(8)で, その他の定数は式(5)で与えられる.

$$\chi_c(\zeta) = (\zeta - \alpha)^{1-\lambda} (\zeta - \beta)^\lambda; \quad \lambda = 0.5 - i\delta; \quad \delta = \frac{\ln \kappa}{2\pi} \quad (8)$$

$\alpha, \beta$  は単位円上での固定境界の両端の点  $\zeta$  の座標である(図-4参照). また, 複素定数  $A_{kf} = \phi'_f(\zeta'_k)$  は,

$$\phi'_f(\zeta'_k) + \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \omega'(\zeta'_k) = A_{kf} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

に式(7)を代入し, その実部, 虚部に関する  $2n$  元連立1次方程式を解いて決められ, 状態  $c$  の  $\psi_c(\zeta)$  は式(6)で  $\phi_f(\zeta)$  を  $\phi_c(\zeta)$  に代えて得られる.

したがって, 図-2c の状態を表す複素応力関数  $\phi(\zeta)$  は, 重ね合わせによって  $\phi(\zeta) = \phi_f(\zeta) + \phi_c(\zeta)$  で,  $\psi(\zeta)$  は  $\psi(\zeta) = \psi_f(\zeta) + \psi_c(\zeta)$  で求まる.

この  $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$  を用いて, 任意のクラック発生角度に対する解は, 式(1)のパラメータ  $\theta$  を変化させて得られる. また, クラック発生前の図-1c の  $\phi(\zeta)$  は  $E_k = B_k = 0$  として得られる.

さらに図-3 に示す, 残留応力が生じた後に任意の荷重  $M_1$  が作用する場合の解を求めるには, 式(7)において  $-M_0$  を  $(M_1 - M_0)$  と置き換え (これを式(7)と呼ぶことにする), これと式(4)の  $\phi_f(\zeta)$  とを重ね合わせればよい.

次に, 変位拘束の条件として, 前述の固定境界の代わりに単純支持境界を与える場合を考える. 境界の一部で単純支持の境界条件, すなわち図-2b のハッチング部分で  $x$  軸方向のたわみ角  $\partial w/\partial x = 0$ ,  $x$  軸回りの曲げモーメント  $m_y = m(s) = 0$  を与え, それ以外の部分で自由境界を与える (これを状態  $s$  と呼ぶ). これらの条件を同時に満足する  $\phi_s(\zeta)$  は次式で得られる<sup>3)</sup>.

$$\begin{aligned} \phi_s(\zeta) = & H(\zeta) + \frac{1}{2\kappa} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\overline{A_{ks} B_k}}{\zeta_k - \zeta} \left[ 1 + \frac{\chi_s(\zeta)}{\chi_s(\zeta_k)} \right] \right. \\ & \left. + \frac{A_{ks} \overline{B_k} \zeta_k'^2}{\zeta_k - \zeta} \left[ 1 - \frac{\chi_s(\zeta)}{\chi_s(\zeta_k)} \right] \right\} - \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \omega(\zeta) + const; \\ H(\zeta) = & \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \left\{ \frac{E_0 \chi_s(\zeta)}{1-\zeta \chi_s(1)} - \frac{1}{2\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} \left[ 1 + \frac{\chi_s(\zeta)}{\chi_s(\zeta_k)} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{E_k} \zeta_k'^2}{\zeta_k - \zeta} \left[ 1 - \frac{\chi_s(\zeta)}{\chi_s(\zeta_k)} \right] \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

ただし  $\chi_s(\zeta)$  は,

$$\chi_s(\zeta) = (\zeta - \alpha)^{0.5} (\zeta - \beta)^{0.5} \quad (10)$$

で与えられる Plemelj 関数であり,  $\alpha, \beta$  は単位円上での単純支持境界の両端の点  $\zeta$  の座標である.

複素定数  $A_{kf} = \phi'_f(\zeta'_k)$  は,  $\phi'_f(\zeta'_k) + \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \omega'(\zeta'_k) = A_{kf}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) に, 式(9)を代入し, これを解いて決められ, その他の定数は式(5)で与えられる.

したがって, 図-2c のハッチング部分が単純支持の場合の状態を表す複素応力関数  $\phi(\zeta)$  は,  $\phi(\zeta) = \phi_f(\zeta) + \phi_s(\zeta)$  で,  $\psi(\zeta)$  は  $\psi(\zeta) = \psi_f(\zeta) + \psi_s(\zeta)$  で求まる. また, クラック発生前の図-1c の解は  $E_k = B_k = 0$  として得られる.

さらに, 図-3 に示す, 残留応力が生じた後に任意の荷重  $M_1$  が作用する場合を求めるには, 式(9)において  $-M_0$  を  $(M_1 - M_0)$  と置き換え (これを式(9)と呼ぶ), これと式(4)の  $\phi_f(\zeta)$  とを重ね合わせればよい.

### 3. 応力分布

前項で求めた解を利用して, クラック発生前の残留応力の分布すなわち図-1c の場合の応力分布, およ

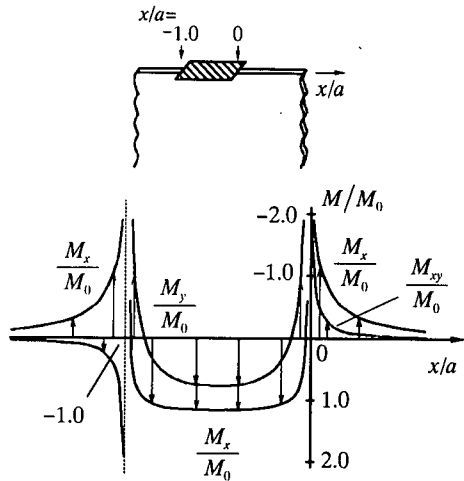


図-5 クラック発生前の応力分布(固定境界の場合,  $\nu = 0.25$ )

び残留応力の影響で変位境界の端部から板の内部に向かって、垂直に( $\theta\pi = 90^\circ$ )クラックが発生したときの図-2cの応力分布例を示す。

はじめに、変位拘束の条件として固定境界の場合を考える。状態  $c$  に関して得られた  $\phi(\zeta)$  および  $\psi(\zeta)$  を用い、次式によって曲げモーメント  $M_x$ ,  $M_y$ , ねじりモーメント  $M_{xy}$  が計算される<sup>15)</sup>。これらの曲げモーメントの成分より応力成分は求められる。

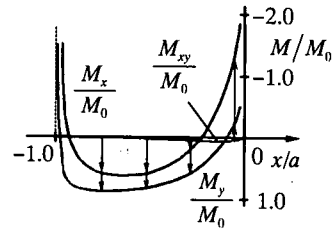
$$M_x + M_y = -4D(1+\nu)\text{Re}\left\{\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right\} \quad (11)$$

$$M_x - M_y + 2iM_{xy} = \frac{2D(1-\nu)}{\omega'(\zeta)} \left[ \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \psi'(\zeta) \right] \quad (12)$$

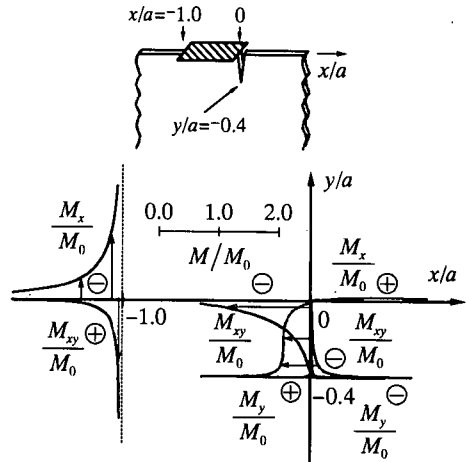
ここに、 $\text{Re}\{ \}$  は  $\{ \}$  の実部を表す。

図-5に、固定境界の長さ  $a$ ,  $\nu = 0.25$  のときの自由および固定境界( $x$  軸)上の残留応力の分布を示す。横軸は境界上の座標を、縦軸は応力の大きさを表す。図に示すように、固定境界の両端部  $x/a = 0, -1.0$  で残留応力による応力集中が生じている。したがって、ここからクラックや、板と固定境界の剥離発生の可能性が考えられる。ここでは前者のクラック発生の場合を考えることとし、いまの場合、自由境界側から固定境界に近づく極限では  $M_x$  が無限大となることから、主応力の直角方向( $\theta\pi = 90^\circ$ )に発生した場合のクラック長さ  $b/a = 0.4$ , poisson 比  $\nu = 0.25$  の残留応力の応力分布を図-6に示す。

図-6aは固定境界上の応力分布で、横軸は固定境界上の座標を、縦軸は応力の大きさを表す。固定境



(a) 固定境界上の応力分布



(b) 自由境界部分の応力分布

図-6 クラック発生後の応力分布(固定境界の場合,  $\nu = 0.25$ )

界の両端で応力集中が生じているが、クラックの発生によって対称性が失われている。図-6bは固定境界以外の、クラック面を含む自由境界に沿う応力分布を示し、 $x-y$  軸は境界上の座標を、図中のスケールは応力の大きさを表す。固定境界近傍とクラック先端に応力集中がみられる。また、クラックのない側の  $x/a < -1.0, y/a = 0$  では、固定境界から離れるにつれて残留応力の影響がなくなり、クラックのある側の  $x/a > 0, y/a = 0$  ではクラック発生後の残留応力は小さい。

次に単純支持境界の場合の応力成分は、状態  $s$  に関して得られた  $\phi(\zeta)$  および  $\psi(\zeta)$  を式(11), (12)に代入して得られ、クラック発生前の  $\nu = 0.25$  の自由および単純支持境界上の残留応力の応力分布を図-7に、発生後の  $b/a = 0.4, \nu = 0.25$  の場合のそれを図-8に示す。

図-7の横軸は境界上の座標を、縦軸は応力の大きさを表す。単純支持境界の両端部  $x/a = 0, -1.0$  で  $M_{xy}$  が残留応力による応力集中を生じているが、 $M_x$  には応力集中がみられず  $M_x/M_0 = 1.0$  で一定である。

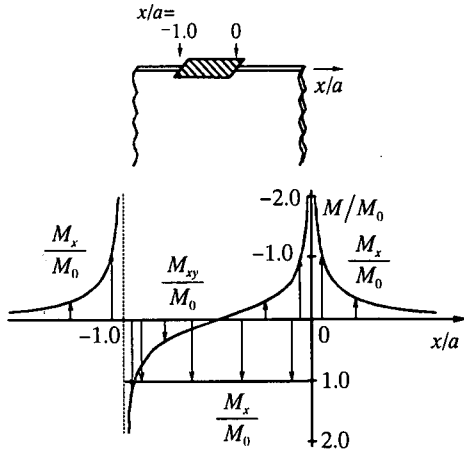
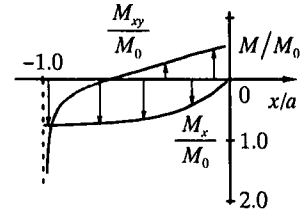


図-7 クラック発生前の応力分布(単純支持境界の場合,  $\nu=0.25$ )

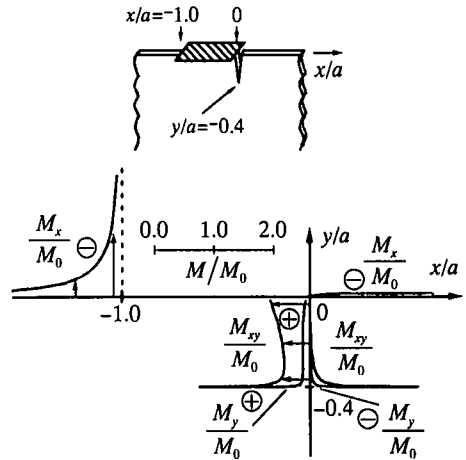
固定境界のときと同様、自由境界側から単純支持境界に近づく極限では  $M_x$  が無限大となることから、クラックが主応力の直角方向( $\theta\pi=90^\circ$ )に発生した場合の応力分布例を示す。図-8a はクラック発生後の単純支持境界上の応力分布を示し、横軸は単純支持境界上の座標を、縦軸は応力の大きさを表す。クラックの発生によって  $M_{xy}$  の逆対称性と  $M_x$  の対称性(一定値)が失われている。クラックのない側の単純支持端の  $x/a=-1.0, y/a=0$  で  $M_{xy}$  に応力集中がみられる。図-8b は単純支持境界以外の、クラック面を含む自由境界上の応力分布を示し、 $x-y$  軸は境界上の座標を、図中のスケールは応力の大きさを表す。クラックがない側の単純支持境界端で応力集中を生じているが、単純支持境界から離れるにしたがって残留応力は小さくなっている。また、クラック先端でも応力集中を生じている。クラックのある側の  $x/a>0, y/a=0$  では、クラック発生後は残留応力はほとんど生じていない。

#### 4. クラック発生時のひずみエネルギー解放率とクラックの発生方向

クラック先端の応力拡大係数を複素応力関数を用いて計算し、さらに、これを用いてクラック発生時のひずみエネルギー解放率を求める。本論文では、クラックは、そのひずみエネルギー解放率が最大となる方向に発生するとしてクライテリオンを使用する。また、クラック発生時のひずみエネルギー解放率として、状態  $c$  では  $b/a=0.001$  および  $b/a=0.0005$  の微小クラックの、状態  $s$  では  $b/a=0.0001$  のひずみエネルギー解放率を用いる。これらの  $b/a$  値を選んだ



(a) 単純支持境界上の応力分布



(b) 自由境界部分の応力分布

図-8 クラック発生後の応力分布(単純支持境界の場合,  $\nu=0.25$ )

理由は後述する。

$k_B$  を曲げモード、 $k_S$  を面外せん断モードの応力拡大係数とすると、クラック先端の応力拡大係数  $K=k_B+ik_S$  は、クラックと  $x$  軸のなす角  $\delta_0=-\theta\pi$ 、単位円上のクラック先端の座標  $\zeta_0=(1-2\theta+i)/(1-2\theta-i)$  を用いて、次式で計算される<sup>1),17),18)</sup>。

$$k_B - ik_S = -2D(1+\nu)\exp(-i\delta_0/2)\phi'(\zeta_0)/\sqrt{\omega''(\zeta_0)} \quad (13)$$

図-2a の状態  $f$  の場合の、長さ  $b$ 、角度  $\theta\pi$  のクラックの応力拡大係数は、式(4)の  $\phi_f(\zeta)$  を式(13)に代入して得られ、次式で無次元化した  $F_{Bf}$ 、 $F_{Sf}$  を図-9 に示す。

$$F_{Bf} + iF_{Sf} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{1}{M_0\sqrt{b}} (k_{Bf} + ik_{Sf}) \quad (14)$$

状態  $c$  の長さ  $a$  の固定境界端部から発生したクラック、および状態  $s$  の長さ  $a$  の単純支持境界端部から発生したクラックの無次元化した応力拡大係数を次式で表す。

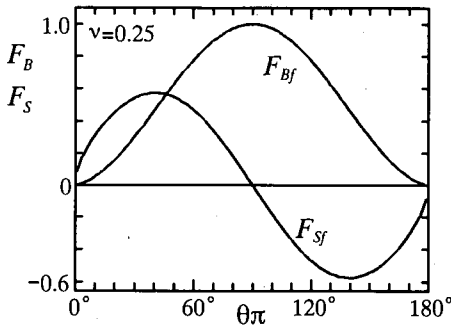


図-9 自由境界から角度 $\theta\pi$ で発生したクラックの無次元化した応力拡大係数  $F_{Bf}, F_{Sf}$

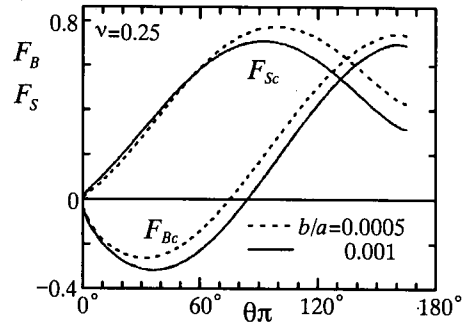


図-10 固定境界端部から角度 $\theta\pi$ で発生したクラックの無次元化した応力拡大係数  $F_{Bc}, F_{Sc}$

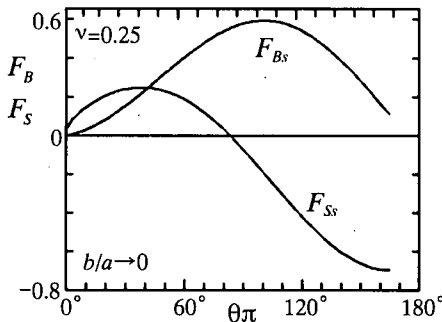


図-11 単純支持境界端部から角度 $\theta\pi$ で発生したクラックの無次元化した応力拡大係数  $F_{Bs}, F_{Ss}$

$$\begin{Bmatrix} F_{Bc} + iF_{Sc} \\ F_{Bs} + iF_{Ss} \end{Bmatrix} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{1}{(-M_0)\sqrt{a}} \begin{Bmatrix} k_{Bc} + ik_{Sc} \\ k_{Bs} + ik_{Ss} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

クラック発生時のひずみエネルギー解放率  $G$  は、応力拡大係数  $K$  を用いて次式で表される<sup>19)</sup>。

$$G = \frac{\pi\kappa}{D(1+\nu)^2} K\bar{K} \quad (16)$$

図-3の、残留変形を与えた後に  $M_1$  を作用させた状態の  $K$  は、固定支承の場合を  $K^{(c)}$ 、単純支持支承の場合を  $K^{(s)}$  と表し、それぞれ式(7)に関する  $\phi(\zeta)$  および式(9)に関する  $\psi(\zeta)$  を式(13)に代入して次式で得られる。

$$\begin{Bmatrix} K^{(c)} \\ K^{(s)} \end{Bmatrix} = M_0 \begin{Bmatrix} K_f - K_c \\ K_f - K_s \end{Bmatrix} + M_1 \begin{Bmatrix} K_c \\ K_s \end{Bmatrix} \quad (17)$$

したがって、式(14)、(15)を式(17)に代入し、さらに式(16)を用いると、各々の拘束条件におけるひずみエネルギー解放率  $G$  は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} G^{(c)} \\ G^{(s)} \end{Bmatrix} = \frac{\pi\kappa a}{D(3+\nu)^2} \left[ \left( M_0 \begin{Bmatrix} \sqrt{b/a} F_{Bf} - F_{Bc} \\ \sqrt{b/a} F_{Sf} - F_{Ss} \end{Bmatrix} + M_1 \begin{Bmatrix} F_{Bc} \\ F_{Ss} \end{Bmatrix} \right)^2 + \left( M_0 \begin{Bmatrix} \sqrt{b/a} F_{Sf} - F_{Sc} \\ \sqrt{b/a} F_{Sf} - F_{Ss} \end{Bmatrix} + M_1 \begin{Bmatrix} F_{Sc} \\ F_{Ss} \end{Bmatrix} \right)^2 \right] \quad (18)$$

固定境界の場合、 $b/a=0$  付近の微小な  $b/a$  値の範囲では  $F_{Bc}, F_{Sc}$  値は急激に変わり<sup>2)</sup>、 $b/a \rightarrow 0$  に対する極限の  $F_{Bc}, F_{Sc}$  の値を求めるのは難しい。したがってここでは、 $b/a=0.001$  および  $b/a=0.0005$  の2つの場合の微小クラックの  $F_{Bc}, F_{Sc}$  を図-10に示す。また、これらの値を用いて計算されるひずみエネルギー解放率の値を、クラック発生時の値として用いることにする。一方、図-11に示した単純支持境界の場合、 $b/a=0.001$  より短いクラックの  $F_{Bs}, F_{Ss}$  は、 $b/a$  によらずほぼ同じ値となる<sup>3)</sup> ことから、ここでは  $b/a \rightarrow 0$  の  $F_{Bs}, F_{Ss}$  を外挿して求めたは値  $b/a=0.0001$  の場合の値と同じであるので、これから計算されるひずみエネルギー解放率を、クラック発生時の値として用いる。

図-9, 10, 11 で得られた応力拡大係数を式(18)に代入し、クラック発生角度  $\theta\pi$  を変化させて得られた  $G$  の最大値およびそれを与える  $\theta\pi$  を、固定境界の場合を図-12 と図-13 に、単純支持境界の場合を図-14 と図-15 に示す。図示したグラフの縦軸は、無次元化した  $G$  (図中に定義を示す) を、横軸は、荷重  $M_0$  および  $M_1$  がそれぞれゼロから正負の無限大までの、任意の大きさの荷重に対応するため、 $M_0$  と  $M_1$  の比をとって示してある。

固定境界の場合、図-12 では  $M_1/M_0 (=M_0/M_1)=1.0$  のとき、すなわちこの場合は図-2a に示す状態となり、 $G$  の値は非常に小さくなっている[式(18)右辺の  $F_{Bf}$  に関する項のみに依存するため]。この付近では

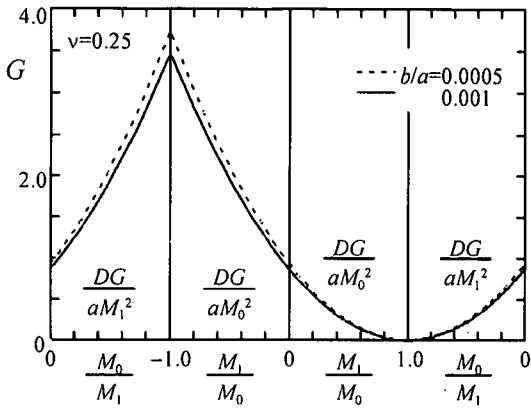


図-12 固定境界端から発生した微小クラックのひずみエネルギー解放率  $G$

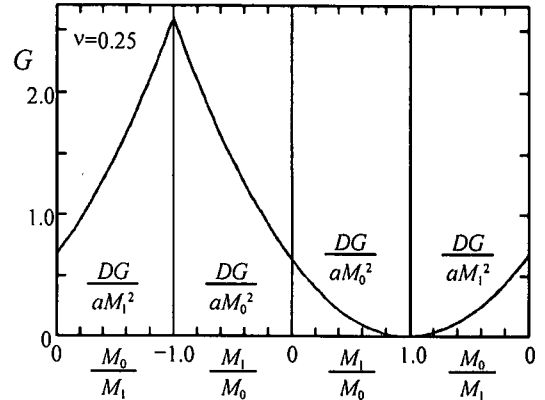


図-14 単純支持境界端からのクラック発生直後のひずみエネルギー解放率  $G$

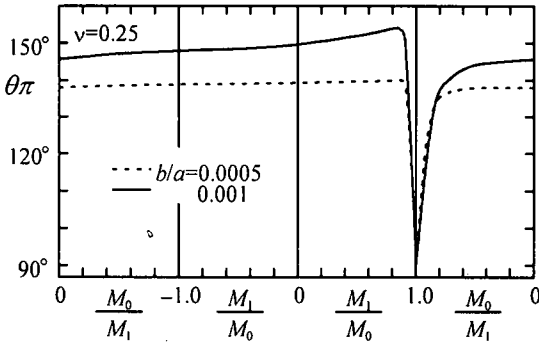


図-13 固定境界端から発生するクラックの発生方向  $\theta\pi$

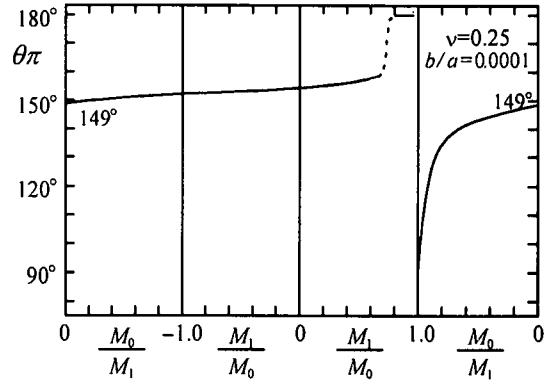


図-15 単純支持境界端から発生するクラックの発生方向  $\theta\pi$

クラック発生の可能性は極めて低いが、クラックが発生するときの角度は境界線に対して  $90^\circ$  前後の角度となる(図-13 参照)。  $M_0/M_1=0$  の点は  $M_0=0$ 、すなわち残留応力がない状態での固定境界の場合を表している。  $M_1/M_0=0$  の点は、残留変形のみで外力が作用しない状態(図-2c)を、  $M_1/M_0(=M_0/M_1)=-1.0$  は固定境界を付加したとき、大きさが同じで逆向きの荷重が作用した状態を表している。  $b/a=0.0005$  と  $0.001$  では  $G$  の値に差はあまり生じていないが、  $\theta\pi$  に対しては差があり、クラック発生角度はクラック長さに敏感と言える。

ひずみエネルギー解放率で表されるクラック発生の破壊靱性値を  $G_{CR}$  とすると、図-12 で  $G_{CR}$  が  $G < G_{CR}$  となる範囲にあれば、クラックは発生せず安全である。

単純支持の場合の  $G$  値も、図-14 に示されるように固定境界の場合と相対的に似た傾向を示しているが、  $G$  の値は小さい。また、図-15 にこのときのクラック発生角度を示す。

$M_0/M_1=0$  のとき、すなわち残留応力が関与しない荷重状態でのクラック発生角度は  $\theta\pi=149^\circ$  となる。図の右端の  $M_0/M_1=0$  の状態から、  $M_0/M_1=1.0$  の単純支持による変位拘束の影響が打ち消される応力状態に近づくとき、  $\theta\pi=90^\circ$  となる。しかし逆に、グラフ中央の  $M_1/M_0=0$  の残留応力みの状態から、  $M_1/M_0=1.0$  の単純支持による変位拘束の影響が打ち消される応力状態に近づくときは、  $\theta\pi=180^\circ$  (クラック発生方向が拘束辺に沿う、つまり剥離を意味する)に近づくが、その途中の破線部分については、今のところ正確な  $\theta\pi$  の値が得られていない。この付近では、式(18)右辺の( )<sup>2</sup>内の計算において、  $M_0$ 、  $M_1$  の各々が関係する2つの項の値の絶対値が非常に接近し、かつ互いに異符号となるため、相互の有効数字部分を打ち消しあう計算上の問題と、  $\theta\pi=160^\circ \sim 180^\circ$  に対する有理写像関数の写像上の精度の問題がこの原因と思われる。いずれにしろ、  $M_0/M_1=1.0$  前後でクラック発生角度が不連続になる。



## 5. 結 語

固定、単純支持それぞれの境界条件に対して解かれた応力関数の一般解と、外力境界の場合の解を用い、重ね合わせの原理を利用して、荷重載荷中に境界の一部が変位拘束され、その後の荷重変化によって生ずる残留応力の問題への応用について述べた。解析例として、一様曲げモーメント  $M_0$  が作用する半無限板の境界の一部を、固定境界あるいは単純支持境界の2種類の条件で変位拘束し、その後荷重が  $M_1$  に変化した場合の問題を扱った。図-1, 2 に示す構造物の一般の変位拘束は固定境界と単純支持境界の中間にあると思われる。半無限板は、変位拘束部分  $a$  の寸法に比べ帯板の幅が大きく、境界の影響がない場合に相当する。帯板の場合には、その写像関数を用いて同様の議論がなされる。

得られた解を利用して、変位拘束の後に載荷されていた荷重が完全に取り除かれたとき( $M_1=0$ )の、クラック発生前、および変位拘束の端部の一方からクラックが発生した後の残留応力分布の例を示した。この他、 $M_1$  や  $M_0$  の大きさを変化させることによって、残留応力の発生後さらに荷重が作用した場合の、一般的な荷重状態での応力分布を容易に求めることができる。

また、変位拘束の一端から任意角度方向に微小クラックが発生した場合の応力拡大係数を求め、この値より計算されるクラック発生のひずみエネルギー解放率を、 $M_0$  と  $M_1$  の任意の大きさの荷重比に対して得た。ここで求めたひずみエネルギー解放率と、ひずみエネルギー解放率で規定される破壊靱性値の大小関係によって、クラック発生の可能性を調べることができる。破壊靱性値を最大ひずみエネルギー解放率より大きく選べば、クラックは生じない。破壊靱性値  $G_{CR}$  として疲労に対する  $G_{CR}$  を用いれば、疲労に対して応用できる。さらに、ひずみエネルギー解放率が最大となる方向にクラックが発生するとするクライテリオンを用い、クラックの発生方向を示した。破壊靱性値、クラック発生方向のクライテリオンとしてひずみエネルギー解放率を用いたが、もしこれに従わない材料の場合には、その材料のクライテリオンを用いて本論文と同様の議論がなされる。

変位拘束の影響が打ち消される荷重条件  $M_0/M_1=1.0$  ( $M_1/M_0=1.0$ ) の前後では、クラックの発生角度は急に変化し、この部分以外では、Poisson 比  $\nu=0.25$  の固定境界の場合で  $130^\circ \sim 150^\circ$  程度、単純支持で  $150^\circ$  前後の比較的決まった方向にクラックは発生する。単純支持境界の場合、

$M_1/M_0=0.8 \sim 1.0$  では単純支持境界に沿うクラック(剥離)が生じる。 $M_1/M_0=1.0$  前後で、クラック発生方向は不連続になる。本論文の解析には薄板が曲げ変形を受けたことによる板厚方向圧縮側のクラック面の接触を考えていない。接触しない状態は薄板面内に引張力が作用して曲げ変形を受けていてもクラック面が接触しない状態で解析していることになる。面内、面外変形を同時に受ける場合の解析は、面内張力が、変化しない場合は、図-1a, 2a の一様引張力を受ける平面問題の解<sup>1)</sup>を用いて行われる。一様引張力が変化する一般の場合の解析は図-1b, 2b に相当する平面混合境界値問題の解を用いる事によってなされる。又はクラック面が接触する場合で実験的に得られた破壊靱性値と接触しない本論文の解析結果(たとえば図-12, 14)との関係を見いだすことが工学的には有用と思われる。

## 参考文献

- 1) Hasebe, N. and Inohara, S. : Stress Analysis of a Semi-Infinite Plate with an Oblique Edge Crack, *Ingenieur Archive*, 49, pp.51-62, 1980.
- 2) Hasebe, N. : Mixed Boundary Value Problem of Plate with Crack, *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol.110, No.1, pp.37-48, 1984.
- 3) Hasebe, N., Miwa, M. and Nakamura, T. : Second Mixed-Boundary-Value Problem for Thin-Plate Bending, *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol.119, No.2, pp.211-224, 1993.
- 4) 日本鋼構造協会 : 供用下にある鋼構造物の溶接施工指針, JSSCテクニカルレポート, No. 22, 1993.
- 5) 鈴木博之, 堀川浩甫 : 応力作用下で溶接された平板の変形挙動, 土木学会論文集, No. 350/I-2, pp. 237-242, 1984.
- 6) 鈴木博之, 堀川浩甫 : 圧縮応力作用下にあるパイプ柱への溶接, 土木学会論文集, No. 356/I-3, pp. 489-497, 1985.
- 7) 鈴木博之, 堀川浩甫 : 応力作用下で溶接された継手の機械的性質および残留応力, 土木学会論文集, No. 362/I-4, pp. 277-283, 1985.
- 8) 小田勇, 坂本英俊, 雑賀和也, 木村由史 : き裂を有する溶接材の変形挙動に及ぼす残留応力の影響, 溶接学会論文集 8-3, pp. 115-120, 1990.
- 9) Sumi, Y. : Computational crack path prediction for brittle fracture in welding residual stress fields, *Int. J. Frac.*, 44, pp. 189-207, 1990.
- 10) Mishra, A., Singh, M. C. and Geeta Agnihotri : Three dimensional stress analysis of a cracked plate in the presence of residual stress field, *Engrg. Frac. Mech.*, 34, No. 4, pp. 861-881, 1989.

- 11) Cheng, W. and Finnie, I. : Measurement of residual stress distributions near the toe of an attachment welded on a plate using the crack compliance method, *Engrg. Frac. Mech.*, 46, No. 1, pp. 79-91, 1993.
- 12) Cordes, R. D and Joseph, P. F. : Crack surface contact of surface and internal cracks in a plate with residual stress, *Int. J. Frac.*, 66, pp. 1-17, 1994.
- 13) Cordes, R. D and Joseph P. F., : Surface and internal cracks in a residual stressed plate, *Int. J. Frac.*, 68, pp. 287-314, 1995.
- 14) Josefson, B. L., Karlsson, S. and Ogeman, G. : Influence of residual stress on fatigue crack growth at stress-coined holes, *Engrg. Frac. Mech.*, 47, No. 1, pp. 13-27, 1994.
- 15) Savin, G. N. : *Stress Concentration around Hole*, Pergamon Press, Oxford, England, 1961.
- 16) Muskhelishvili, N. I. : *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Noordhoff, The Netherlands, 1963.
- 17) Sih, G. C., Paris, P. C. and Erdogan, F. : Crack-tip Stress Intensity Factors for Plate Extension and Plate Bending Problems, *J. Appl. Mech.*, Vol.29, pp. 306-312, 1962.
- 18) Ishida, M. : *Plates and Shells with Cracks*, G. C. Sih, ed., Leyden, Netherlands, 1977.
- 19) 三輪昌弘, 長谷部宜男, 中島将貴, 中村卓次 : 曲げ・ねじりを受ける薄板の変位拘束端に生ずるクラックと剥離の分岐問題, 土木学会論文集, No. 525/I-33, pp. 27-38, 1995.

(1997. 11. 10受付)

## RESIDUAL STRESS AND A CRACK DUE TO DISPLACEMENT CONSTRAINT FOR THIN PLATE BENDING PROBLEM

Masahiro MIWA, Norio HASEBE, Masaki NAKASHIMA and Koji TACHI

In this paper the thin plate bending problem of residual stress which is generated due to the change of loading after the partial displacement constraint is given under a loading is analyzed. Then the crack initiation due to the residual stress and the change of loading is investigated. The rational mapping function and the complex variable method are used. The solution of residual stress is obtained by superposing the solution of uniform bending of an external force boundary value problem and that of uniform bending of a mixed boundary value problem under partial displacement constraint. Clamped supported and simple support boundaries are treated as the displacement constraint. Stress distributions before and after the crack is initiated by residual stress from an end of the displacement constraint are investigated. Occurrence of a crack and its direction are investigated using the energy release rate of crack initiation under the initial loading and that after the crack initiates.