

不規則振動論による動吸振器の最適設計

徐建年¹・岡林隆敏²・林英次郎³

¹正会員 工修 (株) PAL構造 (〒852-8003 長崎市旭町8-20)

²正会員 工博 長崎大学教授 工学部社会開発工学科 (〒852-8521 長崎市文教町1-14)

³学生員 長崎大学大学院 工学研究科社会開発工学専攻 (〒852-8521 長崎市文教町1-14)

本研究では、従来、異なる手法で最適設計されていた動吸振器の最適設計を、評価関数として H_2 ノルムおよび H_∞ ノルムを用いることにより、不規則振動論の視点から統一的に取扱う理論を構成する。さらに、解析的に解くことのできない複雑な条件を有する動吸振器の最適設計について、数値計算手法による汎用性のある動吸振器の最適設計を提案する。

本論文では、動吸振器が設置された1自由度系の構造物を対象にして、 H_2 ノルムと H_∞ ノルムによる動吸振器の設計を行い、それぞれの動吸振器の有効性について示した。さらに、 H_2 ノルムによれば非定常不規則外力を受ける構造物のための動吸振器の設計が可能であることを示した。

Key Words : vibration, random vibration, tuned mass damper, optimal design, vibration control

1. はじめに

構造物が外力を受けて振動している場合、この構造物に質量・ばね・減衰系の1自由度系の付加装置を設置することにより、構造物の振動が制御できることが知られている。この付加装置は動吸振器と呼ばれ、古くから構造物の振動を減少させるために活用されてきた。この動吸振器については、質量、固有振動数、減衰定数のパラメータを調整することにより、最適設計する手法^{(1),(2),(3),(4)}が確立されている。この理論は、構造物・動吸振器系の周波数伝達関数の最大値を最小にするための各パラメータを求めるものである。構造物が1自由度系の場合、最適な動吸振器のパラメータ、すなわち、固有振動数、減衰定数の各パラメータが、構造物と動吸振器の質量比の関数として求められている。

他方、構造物に不規則外力が作用し、構造物が振動している場合、構造物・動吸振器系の分散応答を最小にする動吸振器を設計^{(5),(6),(7),(8)}することができる。このような動吸振器は、G. B. Warburton^{(9),(7)}により確立された。外力が白色雑音の場合、動吸振器を設置した構造物の分散応答を動吸振器のパラメータ、すなわち固有振動数、減衰定数の関数と考え、分散応答の最小値問題より解析的に動吸振器の最適パラメータを求めている。その他に、動吸振器の最適設計にいくつかの試み^{(9),(10)}がなされている。また、著者の

一人は走行車両に設置する動吸振器^{(11),(12),(13)}の設計法を提案している。

本研究の目的は、第1に、動吸振器の統一的な設計理論を構成することである。すなわち、従来、異なる手法で最適設計されている動吸振器の最適設計を、不規則振動論の視点から最適設計の評価関数として H_2 ノルムおよび H_∞ ノルム⁽⁴⁾を定義することにより、動吸振器が統一的に設計できる理論を構成することである。第2に、汎用性のある数値計算による最適設計理論を導入した動吸振器の設計手法の提案である。すなわち、従来の研究では解析的な手法により最適パラメータを求めていたが、著者らは数値解析による最適設計の手法を導入し、様々な構造物系や外力系に適用できる動吸振器の設計法の拡張を行った。

本論文では、動吸振器が設置された1自由度系の構造物を対象にして、動吸振器の最適設計の評価関数として H_2 ノルムおよび H_∞ ノルムを定式化し、確率微分方程式による不規則振動論に基づく動吸振器の設計を行った。また、この動吸振器の最適設計を数値計算手法により実行し、すでに求められている解析的手法による結果と比較を行い、この手法の有効性を検証した。さらに、突発的な非定常外力を受ける構造物に設置する動吸振器の設計を行い、その有効性を示した。

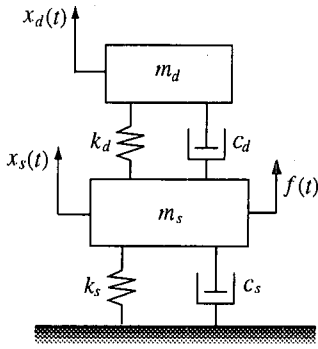


図 - 1 構造物 - 動吸振器系

2. 構造物 - 動吸振器系の方程式

図 - 1 のような不規則外力 $f(t)$ が作用する構造物 - 動吸振器系について考える。構造物の変位を $x_s(t)$ 、動吸振器の絶対変位を $x_d(t)$ とすると、単位質量あたりの構造物 - 動吸振器系の運動方程式は、次式で与えられる。

$$\ddot{x}_s(t) + 2h_s\omega_s\dot{x}_s(t) + \omega_s^2 x_s(t) = -\mu\ddot{x}_d(t) + f(t)/m_s \quad (1)$$

$$\ddot{x}_d(t) + 2h_d\omega_d(\dot{x}_d(t) - \dot{x}_s(t)) + \omega_d^2(x_d(t) - x_s(t)) = 0 \quad (2)$$

ここで、添字の s, d はそれぞれ構造物と動吸振器を示すものとする。 m_s, m_d : 質量, h_s, h_d : 減衰定数, ω_s, ω_d : 固有円振動数, μ : 質量比である。また、それぞれのパラメータは、次式で定義されている。

$$\begin{aligned} \omega_s &= \sqrt{k_s/m_s}, & \omega_d &= \sqrt{k_d/m_d} \\ h_s &= c_s / (2\sqrt{k_s m_s}), & h_d &= c_d / (2\sqrt{k_d m_d}) \\ \mu &= m_d/m_s \end{aligned}$$

ここで、 k_s, k_d : ばね定数, c_s, c_d : 減衰係数である。式(1)、式(2)を状態空間表示するために、構造物系と動吸振器系の状態変数を

$$\mathbf{x}_1(t) = [x_s(t) \quad \dot{x}_s(t)]^T, \quad \mathbf{x}_2(t) = [x_d(t) \quad \dot{x}_d(t)]^T \quad (3)$$

と定義する。さらに、構造物 - 動吸振器系の状態変数を

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t)^T \quad \mathbf{x}_2(t)^T]^T \quad (4)$$

で表す。

この状態変数により、式(1)、式(2)は、次のように表すことができる。

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}f(t) \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{y}(t)$ は着目点の応答である。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_s^2 - \mu\omega_d^2 & -2h_s\omega_s - 2\mu h_d\omega_d & \mu\omega_d^2 & 2\mu h_d\omega_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_d^2 & 2h_d\omega_d & -\omega_d^2 & -2h_d\omega_d \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (8)$$

である。 \mathbf{C} は、構造物と動吸振器の変位および速度を抽出する行列である。構造物の変位応答 $x_s(t)$ を抽出する場合は、 $\mathbf{y}(t) = x_s(t)$ であり、 \mathbf{C} は

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (9)$$

となる。

構造物に作用する外力 $f(t)$ を非定常白色雑音と仮定した場合について考える。白色雑音の確率的特性は、次のように規定される。 $f(t)$ は平均値 $E[f(t)] = 0$ で、次のような自己相関関数を持つ。

$$E[f(t_1) f(t_2)] = \sigma_f^2(t) \delta(t_1 - t_2) \quad (10)$$

なお、 $E[\]$: 数学的平均を表す演算子, $\sigma_f(t)$: 白色雑音の強度, $\delta(t)$: ディラックのデルタ関数である。白色雑音過程を定常であると仮定すると、白色雑音の強度は定数 σ_f となり、この白色雑音のパワースペクトル密度 S_0 は、 $S_0 = \sigma_f^2/2\pi$ の関係がある。

外力を白色雑音と仮定すると、式(6)は伊藤型の確率微分方程式になる。

3. 応答のパワースペクトル密度と分散

(1) 応答のパワースペクトル密度

構造物の応答として、変位応答、速度応答および加速度応答が考えられる。ここでは、変位応答 $x_s(t)$ に着目すると、式(5)は、

$$\mathbf{y}(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(t) \quad (11)$$

となる。

構造物の応答 $\mathbf{y}(t)$ と外力 $f(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $Y(i\omega)$ 、 $F(i\omega)$ とすると、構造物 - 動吸振器系の周波数伝達関数 $H_{sd}(i\omega)$ は、

$$Y(i\omega) = H_{sd}(i\omega) F(i\omega) \quad (12)$$

で表される。この周波数伝達関数は式(5)、式(6)より

$$H_{sd}(i\omega) = \mathbf{C}(\mathbf{I}(i\omega) - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (13)$$

で与えられる。従って、白色雑音が作用する構造物の変位応答のパワースペクトル密度は、

$$S_y(\omega) = |H_{sd}(i\omega)|^2 S_0 \quad (14)$$

となる。

(2) 応答の分散

応答の平均値を0とした場合、応答の分散 $\sigma_y^2(t)$ は、

$$\sigma_y^2(t) = E[y^2(t)] = CE[x(t) \ x^T(t)]C^T \quad (15)$$

のようになる。構造物・動吸振器系の状態変数 $x(t)$ に関する共分散行列を

$$R_x(t) = E[x(t) \ x^T(t)] \quad (16)$$

で表す。この共分散行列の時間的変化は、系が白色雑音外力を入力とする確率微分方程式で記述されている場合、次のような共分散方程式

$$\dot{R}_x(t) = AR_x(t) + R_x(t)A^T + Q_x(t), \quad R_x(0) = R_{x_0} \quad (17)$$

で表される。ここに、 $Q_x(t)$ は次の行列で表される白色雑音外力の強度行列である。

$$Q_x(t) = B_x B_x^T \sigma_f^2(t) \quad (18)$$

初期条件 R_{x_0} は次のように考えられる。ここでは、構造物と動吸振器は $t=0$ において $x(0) = \mathbf{0}$ であるので、 $x(t)$ に関する分散・共分散は $R_{x_0} = \mathbf{0}$ となる。

外力が定常、すなわち、 $\sigma_f(t)$ が定数の場合、 $Q_x(t)$ は定数 Q_x となる。さらに、構造物・動吸振器系の定常応答を考えた場合、 $t \rightarrow \infty$ において、共分散行列 $R_x(t)$ の時間微分 $\dot{R}_x(t) \rightarrow 0$ となる。そこで、式(17)は、

$$AR_x(t) + R_x(t)A^T + Q_x = \mathbf{0} \quad (19)$$

のような連立方程式になる。定常応答は、この方程式の解として求められる。なお、共分散方程式は、係数行列 A が時間と共に変化する時変係数系^{11),12),13)}について考えることもできる。

4. 動吸振器の最適設計のための評価基準

動吸振器の最適設計では、構造物に作用する外力に対して、異なる最適パラメータが得られる。調和外力に対してはDen Hartog¹⁾らによる古典的な最適動吸振器が得られている。また、白色雑音外力に対しては、G.B. Warburton²⁾により最適動吸振器が求められている。これらの動吸振器の設計法は、異なる理論から求められていた。著者らは、不規則振動論の視点から、評価関数としてシステムのノルム¹⁴⁾の概念を導入することにより、外力により異なる従来の動吸振器の最適設計を統一的に実現した。

ここでは、白色雑音外力に対する動吸振器の最適設計の評価関数である H_2 ノルムと、調和外力に対する評価関数である H_∞ ノルムについて説明する。 H_∞ ノルムによる設計法はDen Hartogの設計法に、また、 H_2 ノルムによる設計法はG.B. Warburtonの設

計法に対応する。

a) H_2 ノルムの定義¹⁴⁾

系の周波数応答関数を式(14)における $H_{sd}(i\omega)$ として、 $S_0=1$ とした場合、構造物・動吸振器系の H_2 ノルムは、

$$\|H_2\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{sd}(i\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} = \sigma_y \quad (20)$$

で定義される。これは、白色雑音を入力とする系の応答の標準偏差として計算できる。そこで、この計算は式(17)および式(19)の共分散方程式を解くことにより実現できる。非定常不規則応答の場合、非定常 H_2 ノルム $\sigma_y(t)$ が定義できる。

b) H_∞ ノルムの定義¹⁴⁾

H_∞ ノルムは、構造物に作用する外力を $f(t)$ として、系の周波数伝達関数を $H_{sd}(i\omega)$ とした場合、

$$\|H\|_\infty = \sup_{\|f\|_2=1} \frac{\|H_{sd}\|_2}{\|f\|_2} \quad (21)$$

$$= \sup_{\omega} |H_{sd}(i\omega)|$$

で定義される。これは、あらゆる外力 $f(t)$ に対して、最悪の応答を評価していることになっている。すなわち、 H_∞ ノルムは周波数応答関数の最大値によって評価される。白色雑音を入力とする系においては、構造物・動吸振器系の H_∞ ノルムは、応答のパワースペクトル密度の最大値により評価される。

このように、動吸振器の古典的設計法は振動制御の効率を H_∞ ノルムで評価した場合になり、応答の分散を最小にする動吸振器の設計法は H_2 ノルムを評価関数とした場合になっている。

5. 動吸振器の最適設計法

(1) 可変計量法^{15),16)}による最適化

構造物系の伝達関数や外力の周波数特性を考慮した場合、動吸振器の最適パラメータは解析的に求めることは困難になる。そこで、非線形数理計画手法に基づいて数値解析的に最適設計^{11),15),16)}を行う、可変計量法による極値探索の概要を述べる。

設計する n 個のパラメータを、次のようにベクトル表示する

$$\alpha = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T \quad (22)$$

評価関数を α の関数として $F(\alpha)$ で表し、 $\alpha \rightarrow \alpha^*$ において

$$F(\alpha) \rightarrow \min(\alpha \rightarrow \alpha^*) \quad (23)$$

として、 $F(\alpha)$ を最小にする。

k 回更新した結果のパラメータを α^k とする。 α^k の近似値として $\alpha^k + \Delta\alpha^k$ を考え、 $F(\alpha^k + \Delta\alpha^k)$ を

$\Delta\alpha^k$ の2次式で近似すると、 $F(\alpha^k + \Delta\alpha^k)$ を最小にする $\Delta\alpha^k$ は、

$$\Delta\alpha^k = -G(\alpha^k)^{-1}g(\alpha^k) \quad (24)$$

として得られる。ここに、

$$g^T(\alpha^k) = \left(\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha^k}^T, \quad G(\alpha) = \left[\frac{\partial^2 F(\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right]_{\alpha=\alpha^k} \quad (25)$$

である。可変計量法では G^{-1} を直接計算しないで、勾配ベクトル $g(\alpha)$ を用いた更新公式により、 $\Delta\alpha^k$ を評価する。すなわち、 α^k 点における $\Delta\alpha^k$ の方向ベクトル β^k を

$$\beta^k = -H^k g^k \quad (26)$$

により求める。 $\Delta\alpha^k$ の大きさについては、

$$\min F(\alpha^k + \delta \beta^k) \quad (27)$$

による δ の一次元探索により式(14)あるいは式(15)を最小とする $\delta = \delta^k$ を求める。このようにして得られた β^k と δ^k により、 α^k と H^k をDavidon-Fletcher-Powell^{15),16)}公式により更新する。

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \delta^k \beta^k, \quad H^{k+1} = H^k + \Delta H^k \quad (28)$$

(2) H_2 ノルムによる評価

構造物の変位応答、速度応答および加速度応答の分散を最小にする動吸振器の最適設計について考える。設計変数は、動吸振器の固有円振動数 ω_d と減衰定数 h_d である。そこで、最適設計における設計変数は、

$$\alpha = [\omega_d \quad h_d]^T \quad (29)$$

となる。質量比 μ は与えられるものとする。

このような動吸振器の最適設計の問題は、

$$\sigma_y^2(t, \alpha) \rightarrow \min(\alpha \rightarrow \alpha^*) \quad (30)$$

となり、 α の関数としての応答の分散 $\sigma_y^2(t, \alpha)$ の、極値問題として定式化される。解析的に最適解が求められる場合

$$\frac{\partial \sigma_y^2(t, \alpha)}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (31)$$

より最適解が求められる。

しかし、一般的な場合は、解析解は得られない。この場合は、前述した数値解析法を適用する。可変計量法では、 $\sigma_y^2(t, \alpha)$ の各パラメータによる感度、

$$\frac{\partial \sigma_y^2(t, \alpha)}{\partial \alpha_i} = C \left[\frac{\partial R_x(t)}{\partial \alpha_i} \right] C^T \quad (i=1, 2) \quad (32)$$

が必要になる。これは共分散行列の各パラメータによる感度より得られる。この感度は式(32)を各パラメータで微分した感度方程式より得られる。

$$\dot{R}_x = AR_x + R_x A^T + C_i R_x + R_x C_i^T + D_i \quad (33)$$

ここで、

$$R_x = \frac{\partial R_x(t)}{\partial \alpha_i}, \quad C_i = \frac{\partial A}{\partial \alpha_i}, \quad D_i = \frac{\partial Q_x(t)}{\partial \alpha_i} \quad (i=1, 2) \quad (34)$$

定常応答の場合は、 $\dot{R}_x = 0$ となり、式(33)は連立方程式になる。

(3) H_∞ ノルムによる評価

H_2 ノルムの場合と同じ設計条件を考える。構造物・動吸振器系における構造物の変位のパワースペクトル密度は式(14)で与えられる。これは、設計変数 α の関数と考えられるので、

$$S_y(\omega, \alpha) = |H_{st}(i\omega, \alpha)|^2 \quad (35)$$

で表される。なお、白色雑音のパワースペクトル密度を $S_0 = 1$ としている。 H_∞ ノルムによる最適設計では、応答のパワースペクトル密度 $S_y(\omega, \alpha)$ の最大値を最小にするような

$$S_y(\omega, \alpha)_{\max} \rightarrow \min(\alpha \rightarrow \alpha^*) \quad (36)$$

α を決定する問題になる。この問題は、単純な場合でも解析的に求めることは困難である。そこで、数値解析手法により極値探索を行うために、応答のパワースペクトル密度の各パラメータによる感度

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} S_y(\omega, \alpha)_{\max} \quad (i=1, 2) \quad (37)$$

が必要になる。構造物が単純な場合でも、この式は複雑になるので、通常は数値微分を採用することが必要となる。

6. 解析的手法による動吸振器の最適設計

(1) H_2 ノルムによる動吸振器

一般の構造物の減衰定数 h_s は小さいので、古典的な動吸振器の最適設計¹⁾では、これを0とした場合について行われている。そこで、解析的手法の場合では、 H_2 ノルムおよび H_∞ ノルムのいずれについても、 $h_s = 0$ の場合について考えるものとする。

白色雑音が作用する1自由度系に設置された動吸振器の最適パラメータは、G.B.Warburton⁷⁾により解析的に求められている。この方法は、2自由度系の定常分散応答を解析的に求めた、S.H.Crandall¹⁷⁾らの解に基づいて、Wiener-Khinchineの定理により式(20)を用いたものである。このような手法に対して、

著者らは確率微分方程式に基づいて、式(17)の共分散方程式から直接、変位および速度の分散を求めた。この連立方程式は10元の連立方程式になるために、人による計算では解が極めて煩雑であり、得られた式の信頼性を確定するのに時間がかかる。このような計算において、数式ソフトウェアMathematica¹⁸⁾を用いたが、極めて短時間で計算できた。本研究では、Mathematicaを用いたが、シンボリック計算ソフトを用いると同様の計算が可能である。さらに、動吸振器の最適パラメータである固有振動数 f_d 、減衰定数 h_d を求める式(31)の未知パラメータによる微分のプロセスについても、Mathematicaによる微分演算および代数演算を活用した。このような処理の結果、式(19)の共分散方程式の解として得られた構造物の変位応答の分散は、次式で与えられる。

$$E[x_r^2] = ((2+\mu)\omega_s^2 - (1+\mu)^2\omega_d^2 - 4(1+\mu)\omega_s^2 h_d^2)\omega_d^2 - \omega_s^4)S_0 / 4\mu\omega_s^6\omega_d h_d \quad (38)$$

両辺を ω_d および h_d で微分して、

$$\frac{\partial}{\partial\omega_d} E[x_r^2] = 0 \quad (39)$$

の関係より、分子が0であると考え、

$$I_\omega = ((2+\mu)\omega_s^2 - 3(1+\mu)^2\omega_d^2 - 4(1+\mu)\omega_s^2 h_d^2)\omega_d^2 + \omega_s^4 = 0 \quad (40)$$

の式が得られる。同じく、

$$\frac{\partial}{\partial h_d} E[x_r^2] = 0 \quad (41)$$

の関係より、

$$I_h = ((2+\mu)\omega_s^2 - (1+\mu)^2\omega_d^2 + 4(1+\mu)\omega_s^2 h_d^2)\omega_d^2 - \omega_s^4 = 0 \quad (42)$$

が得られる。この連立方程式を解くことにより、

$$f_d = \frac{\sqrt{1+\mu/2}}{1+\mu} f_s, \quad h_d = \sqrt{\frac{\mu(1+3\mu/4)}{4(1+\mu)(1+\mu/2)}} \quad (43)$$

を得る。ここで、 f_s は構造物の固有振動数である。

同じ処理に基づいて、速度応答の分散を最小にする動吸振器の最適パラメータは次のように求められる。

$$E[\dot{x}_r^2] = -((\omega_s^2 - \omega_d^2)^2 + 4\omega_s^2\omega_d^2 h_d^2 + \mu\omega_d^4)S_0 / 4\mu\omega_s^4\omega_d h_d \quad (44)$$

$$I_\omega = (\omega_s^2 + 2\omega_d^2)\omega_s^2 - 4\omega_s^2\omega_d^2 h_d^2 - 3(1+\mu)\omega_d^4 = 0 \quad (45)$$

$$I_h = (\omega_s^2 - \omega_d^2)^2 - 4\omega_s^2\omega_d^2 h_d^2 + \mu\omega_d^4 = 0 \quad (46)$$

$$f_d = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} f_s, \quad h_d = \frac{\sqrt{\mu}}{2} \quad (47)$$

これらの最適値は、G.B.Warburton⁷⁾の解と一致する。

不規則振動論では、演算が極めて煩雑になるために、技術者や研究者が不規則振動論の理論を応用するためには、不規則振動論固有の数式演算を習得する必要があった。数式処理ソフトウェアを活用することにより、不規則振動論固有の複雑な数式処理の負担を回避できることが確認できた。

(2) H_∞ ノルムによる動吸振器

白色雑音を受ける、構造物・動吸振器系の変位応答のパワースペクトル密度関数は、

$$S_y(\omega) = ((-\omega^2 + \omega_d^2)^2 + 4\omega^2\omega_d^2 h_d^2)S_0 / ((\omega^4 - (\omega_s^2 + (1+\mu)\omega_d^2)\omega^2 + \omega_s^2\omega_d^2)^2 + 4\omega^2\omega_d^2 h_d^2((1+\mu)\omega^2 - \omega_s^2)^2) \quad (48)$$

で与えられる。 H_∞ ノルムを最小にする、動吸振器の最適設計は、次のような手順で実行される。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial\omega} S_y(\omega) = 0 \quad (49)$$

となる。 ω^* を求める。この値を $S_y(\omega)$ に代入し、 $S_y(\omega^*)$ の最大値 $S_{y,\max}(\omega_d, h_d)$ を求める。これは、動吸振器のパラメータの関数となっているので、次式より ω_d 、 h_d が求められる。

$$\frac{\partial S_y(\omega_d, h_d)_{\max}}{\partial\omega_d} = 0, \quad \frac{\partial S_y(\omega_d, h_d)_{\max}}{\partial h_d} = 0 \quad (50)$$

しかし、実際にこの演算を実行すると、演算が極めて煩雑になり、解が容易に求められない。

そこで、 H_∞ ノルムによる、解析的手法による動吸振器の最適設計は、周波数伝達関数における動吸振器の減衰定数 h_d による不動点を利用した古典的な設計法¹⁾が利用されている。この場合、次のような動吸振器の最適パラメータ f_d 、 h_d が求められている。

$$f_d = \frac{1}{1+\mu} f_s, \quad h_d = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} \quad (51)$$

7. 白色雑音が作用する場合の動吸振器の最適設計

(1) 構造物の減衰を無視した場合 ($h_s = 0$)

動吸振器の古典的設計法では、構造物の減衰定数 h_s を考えていない。この場合、 H_∞ ノルムと H_2 ノルムによる動吸振器の最適設計が、解析的に行われて

表 - 1 数値計算による最適設計の精度 (最適パラメータ)

質量比 μ	H_2 理論		H_2 数値解析		H_∞ 理論		H_∞ 数値解析	
	f_d	h_d	f_d	h_d	f_d	h_d	f_d	h_d
1/100	0.9926	0.0498	0.9926	0.0498	0.9901	0.0609	0.9901	0.0609
1/50	0.9853	0.0702	0.9853	0.0702	0.9804	0.0857	0.9804	0.0857
1/10	0.9315	0.1525	0.9315	0.1525	0.9091	0.1846	0.9092	0.1846

表 - 2 数値計算による最適設計の精度 (応答値)

質量比 μ	H_2 ノルム設計		H_∞ ノルム設計	
	分散応答 σ^2	伝達関数 最大値 H_{max}	分散応答 σ^2	伝達関数 最大値 H_{max}
1/100	0.0403	0.3795	0.0411	0.3592
1/50	0.0284	0.2748	0.0290	0.2546
1/10	0.0126	0.1326	0.0129	0.1162

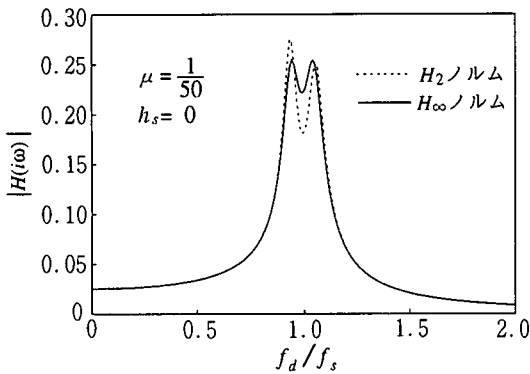


図 - 2 H_∞ 動吸振器と H_2 動吸振器を設置した構造物の変位応答の周波数特性

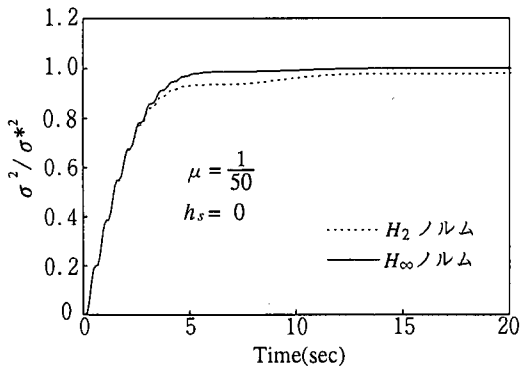


図 - 3 H_∞ 動吸振器と H_2 動吸振器を設置した構造物の変位応答の分散 (σ^{*2} : 最大分散応答)

いる。ここでは、①数値計算による最適設計の精度、② H_∞ ノルムと H_2 ノルムによる動吸振器の差異、③ H_∞ ノルムと H_2 ノルムにより最適設計された構造物 - 動吸振器系の周波数伝達関数と分散応答について検討した。表 - 1 は、質量比 μ をパラメータに、 H_∞

ノルムと H_2 ノルムによる動吸振器の最適パラメータを求めたものである。式(43)および式(51)による解析的に求めた最適パラメータと、数値解析による最適パラメータを小数点4桁まで示した。表より、両者の結果は良い一致を示していることが分かる。実際は小数点4桁以下まで一致しているが、表示の都合上4桁まで示した。このことより、解析的な最適解が求められない一般的な場合、すなわち、構造物の減衰を考慮、多自由度系、外力の周波数特性を考慮した場合等において、数値計算による最適化手法適用の可能性が確認できた。

表 - 2 は、質量比 μ をパラメータにして、表 - 1 で求めた動吸振器に最適パラメータを用いた場合、構造物の変位応答を示したものである。 H_∞ ノルムと H_2 ノルムにより動吸振器を設計した場合、表には H_∞ ノルムと H_2 ノルム、すなわち、周波数伝達関数の最大値および分散応答を示している。 H_2 ノルムを評価関数とした場合は、 H_∞ ノルムを評価関数とした場合より、構造物の変位応答の分散はより最適な値となっている。逆に、 H_∞ ノルムを評価関数とした場合は、 H_2 ノルムを評価関数にした場合より、構造物の変位の周波数伝達関数の最大値は小さく、最適な値になっていることが分かる。

H_∞ ノルムと H_2 ノルムを評価関数にして動吸振器を設計し、それぞれを用いて構造物 - 動吸振器系における構造物の変位応答の周波数伝達関数を表示したものが、図 - 2 である。 H_∞ ノルムを評価関数にして最適設計した場合の周波数伝達関数の最大値が、 H_2 ノルムによるものより小さくなっている。図 - 3 はそれぞれの方法で設計した動吸振器を設置した構造物に定常白色雑音が作用した場合の構造物の変位の過渡応答の分散である。図より、 H_2 ノルムを評価関数にした場合が、 H_∞ ノルムを評価関数にした場合より、応答の分散が抑制できていることが分かる。図 - 3 では、構造物 - 動吸振器系の動的な特性を示すために、過渡応答を示した。定常応答は、時間が十分経った後の応答である。

(2) 構造系の減衰を考慮した場合

実際の構造物では減衰定数 h_i があるために、動吸

表-3 動吸振器の最適パラメータ

減衰定数 h_s	質量比 μ	H_2 数値解析		H_{∞} 数値解析	
		f_d	h_d	f_d	h_d
0.02	1/100	0.9916	0.0498	0.9868	0.0630
	1/50	0.9839	0.0700	0.9762	0.0900
	1/10	0.9293	0.1500	0.9013	0.1850
0.05	1/100	0.9901	0.0498	0.9807	0.0630
	1/50	0.9819	0.0700	0.9681	0.0900
	1/10	0.9254	0.1500	0.8874	0.1958
0.1	1/100	0.9877	0.0498	0.9665	0.0760
	1/50	0.9786	0.0700	0.9517	0.0911
	1/10	0.9190	0.1500	0.8633	0.1987

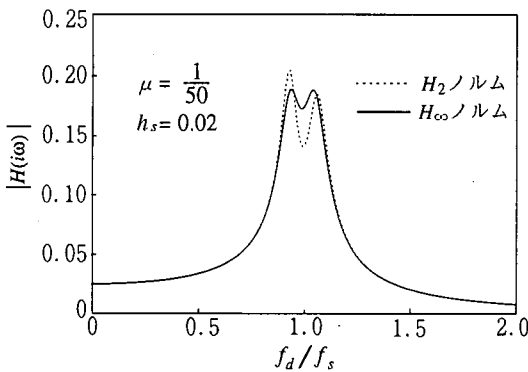


図-4 H_{∞} 動吸振器と H_2 動吸振器を設置した構造物の変位応答の周波数特性

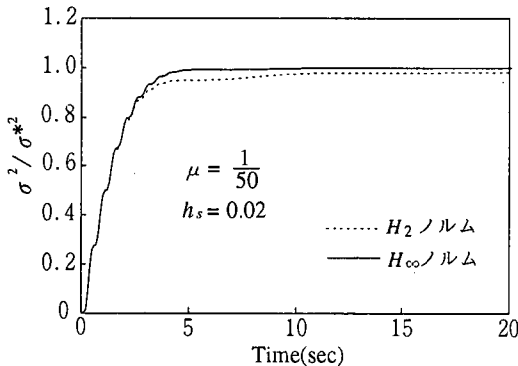


図-5 H_{∞} 動吸振器と H_2 動吸振器を設置した構造物の変位応答の分散(σ^{*2} :最大分散応答)

振器の最適設計は、このことを考慮して計算する必要がある。しかし、構造物の減衰定数 h_s を考慮した場合、最適パラメータは解析的に求められていない。そこで、数値計算により動吸振器の最適パラメータを求めることになる。表-3は、質量比 μ をパラメータとして、 H_2 ノルムと H_{∞} ノルムを評価関数として、動吸振器の最適パラメータを数値解析により求めたものである。構造物の減衰定数 h_s が小さい場合は、

$h_s=0$ と仮定した表-1の結果と近い値になっている。しかし、質量比 μ を大きくすると、 $h_s=0$ と仮定した動吸振器の最適パラメータとの差が大きくなる。このことから、より効果的な動吸振器を設計するためには、構造物の減衰定数 h_s を考慮した計算をする必要がある。なお、表-3において、減衰定数 h_s と質量比 μ に対して、最適パラメータが変化していないものがあるが、これは表示している桁数のためであり、表示した桁より小さい部分では変化していることを確認している。

構造物の減衰定数 h_s を考慮した場合について、 H_2 ノルムと H_{∞} ノルムを評価関数にして動吸振器を設計した構造物の変位応答の周波数伝達関数を、図-4に示した。質量比 μ は1/50である。構造物の減衰定数を無視した $h_s=0$ の場合と比較すると、応答レベルが下がっている。 H_{∞} ノルムを評価関数にした場合の周波数伝達関数の応答レベルが、 H_2 ノルムを評価関数にした場合と比べて小さくなっている。このことより、システムの H_{∞} ノルムが最小になる動吸振器が設計できている。図-5は、 H_2 ノルムと H_{∞} ノルムを評価関数にして動吸振器を設計した構造物の変位応答の分散を示したものである。 H_2 ノルムで設計した動吸振器が、 H_{∞} ノルムで設計した動吸振器より応答の分散を抑制するのに効果的であることが分かる。

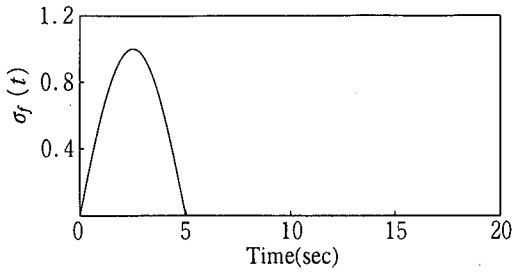
8. 非定常外力が作用する場合の動吸振器の最適設計

実際の構造物に、非定常不規則外力が作用する場合として、突風、地震、爆発の衝撃波などが考えられる。古典的な動吸振器の最適設計法¹⁾は、定常応答を目的関数としているために、非定常的な外力に対応していない。 H_2 ノルムを非定常応答に拡張すると、 H_2 ノルムによる動吸振器の最適設計問題では、非定常分散応答の最大値を最小にするように最適設計することができる。従来の動吸振器の設計法が定常応答に基づいているのに対し、非定常 H_2 ノルムを用いると、非定常応答の最大値を評価関数とする最適設計問題へ拡張できる。

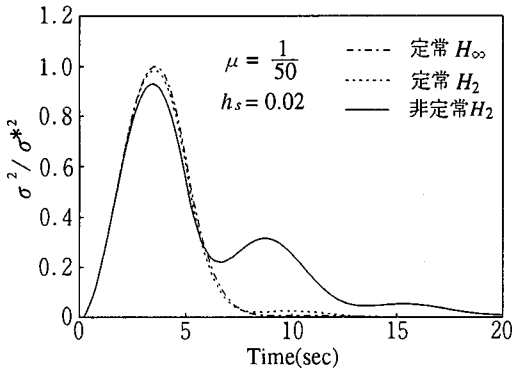
ここでは非定常不規則外力の一つの例として、外力の分散が構造物の固有周期 T の S 倍すなわち $P=ST$ の時間作用する場合を考える。外力の分散の変化は、作用時間 P を半周期とする正弦波形

$$\sigma_f^2(t) = \begin{cases} \sigma_0^2 \sin^2 \frac{\pi}{P} t & 0 \leq t \leq P \\ 0 & t > P \end{cases} \quad (52)$$

で変化するものとする。このような外力の分散の変



(a) 非定常不規則外力の標準偏差



(b) 構造物の変位応答の分散

図 - 6 非定常変位応答に対する動吸振器の効果 (σ_*^2 : 最大分散応答)

表 - 4 最適パラメータと変位応答の最大分散値

非定常外力の作用時間		5T	10T	20T
最適振動数	f_d Hz	1.0300	0.9960	0.9868
最適減衰定数	h_d	0.0250	0.0294	0.0614
非定常 H_2 ノルム	$\sigma_{n2}^2 (\times 10^4)$	1.5838	1.7634	1.9216
定常 H_2 ノルム	$\sigma_{s2}^2 (\times 10^4)$	1.6778	1.8507	1.9284
定常 H_{∞} ノルム	$\sigma_{s\infty}^2 (\times 10^4)$	1.7049	1.9003	1.9649

T: 構造物の固有周期

化を図 - 6(a)に示した。計算例として外力の作用時間を、 $P=5T, 10T, 20T$ の場合について考えたが、 P の値が小さくなるほど、非定常性が強くなる。最適設計の条件は、構造物の減衰定数 $h_s=0.02$ 、質量比 $\mu=1/50$ の場合である。

図 - 6(b)は、 $P=5T$ における定常 H_2 ノルム、定常 H_{∞} ノルムおよび非定常 H_2 ノルムにより最適設計された動吸振器を設置した、構造物の変位の分散応答を示したものである。非定常 H_2 ノルムで最適設計された動吸振器を設置した構造物の分散の応答の最大値が抑え込まれており、最も効果的な結果になっている。ここでは、応答の最大値を最小にする評価関数で最適設計したために、応答の最大値は小さくなっているが、その反面、振動は長く続く傾向を示

している。外力の作用時間 P を $5T, 10T$ 、および $20T$ と変化させた振動の動吸振器の最適パラメータと、各種ノルムにより最適設計された場合の構造物の分散の最大応答を表 - 4に示した。外力の作用時間 P を $20T$ から $5T$ へと小さくして、外力の非定常性を強くすると、動吸振器の振動数は大きくなり、他方、動吸振器の減衰定数は小さくなっていることが分かる。突発的な非定常外力に対して、即応性のある動吸振器が効果的であるためである。各種ノルムで最適設計された動吸振器を設置した、構造物の変位応答の分散の最大値を見ると、非定常 H_2 ノルムで最適設計された場合が、 P のいずれの場合でも最小になっており、非定常 H_2 ノルムによる最適設計の有効性を示している。

従来の動吸振器の設計法は、定常外力が作用する場合を想定している。突発的な外力が作用する場合、走行車両による橋梁振動などのように応答が強い非定常性を示す場合に対して、本設計法が有効であることが確認できた。

9. まとめ

動吸振器の最適設計において、構造物・動吸振器系の周波数応答関数の最大値を最小にする、古典的設計法と、応答の分散を最小にする設計法がある。本論文は、動吸振器の最適設計の評価関数として、構造物・動吸振器系の H_{∞} ノルムと H_2 ノルムを導入し、不規則振動論の立場で考えると、従来の設計法を統一的に把握できることを示した。さらに、動吸振器の最適設計法に、非線形計画法による数値解析手法を導入することにより、構造系が複雑な場合や、外力の周波数特性を考慮した場合の動吸振器の最適設計が可能になることを示した。

数値計算では、この数値解析による動吸振器の最適パラメータの精度を、解析的に求められている最適パラメータと比較して、数値解析手法の有効性を確認した。この手法を使って、構造物の減衰定数を考慮した動吸振器の最適設計を行い、構造物の減衰定数を無視した古典的な設計法と比べて、構造物の減衰定数を考慮した設計法が、より効果的な動吸振器であることを確認した。また、非定常外力を対象に最適設計した動吸振器は、定常外力に設定した動吸振器に比べて、突発的な外力が作用する場合、最大応答の抑制に効果があることが分かった。

最後に、 H_{∞} ノルムと H_2 ノルムを評価関数として設計した動吸振器の特性は、次のように説明できる。システムの H_{∞} ノルムは、最悪の外力による応答であるので、この基準で設計された動吸振器は、応答

の最大値を小さくするような動吸振器になっている。
これに対して、 H_2 ノルムにより設計された動吸振器は、平均的な応答レベルを最小にするものになっていると考えることができる。

参考文献

- 1) Den Hartog, J. P. : *Mechanical Vibrations*, 4th ed., McGraw-Hill, Inc., 1956.
- 2) 背戸一登, 岩浪孝一, 滝田好宏 : 動吸振器による多自由度系の制振(第1報, 動吸振器の設計理論), 日本機械学会論文集(C編), 50巻, 458号, pp.1962-1969, 1974.10.
- 3) 背戸一登 : 動吸振器による多自由度系の制振(第2報, 伝達マトリックス法による動吸振器の最適設計), 日本機械学会論文集(C編), 50巻, 458号, pp.1970-1977, 1974.10.
- 4) 高橋龍夫, 倉西茂 : 動吸振器による可撓性構造物の振動制御について, 土木学会論文報告集, 第308号, pp.350-358, 1981.4.
- 5) Wirsching, P.H. and Campbell, G.W. : Minimal Structural Response under Random Excitation Using the Vibration Absorber, *Earthquake eng. struct. dyn.*, Vol.2, pp.303-312, 1974.
- 6) Ayorinde, E.O. and Warburton, G.B. : Minimizing Vibrations with Absorbers, *Earthquake eng. struct. dyn.*, Vol.8, pp.219-236, 1980.
- 7) Warburton, G.B. : Optimum Absorber Parameters for Various Combinations of Response and Excitation Parameters, *Earthquake eng. struct. dyn.*, Vol.10, pp.381-401, 1982.
- 8) Lee, J. : Optimal Weight Absorber Designs for Vibrating Structures Exposed to Random Excitations, *Earthquake eng. struct. dyn.*, Vol. 19, pp.1209-1218, 1990.
- 9) C.W.de Silva : An Algorithm for the Optimal Design of Passive Vibration Controllers for Flexible Systems, *J.Sound and Vibration*, 74(4), pp.495-502, 1981.
- 10) J.V.de Vegte and C.W.de Silva : Design of Passive Vibration Controls for Internally Damped Beams by Modal Control Techniques, *J. Sound and Vibration*, 45(3), pp.417-425, 1976.
- 11) 岡林隆敏, 竹下渡, 岩見章博 : 交通荷重による補剛アーチ橋の振動制御のための動吸振器の最適設計, 構造工学論文集, Vol.38A, pp.805-813, 1992.3.
- 12) 岡林隆敏, 加賀敏明 : 動吸振器の最適設計に関する考察, 橋梁振動に関するコロキウム論文集PART.A, pp.273-279, 1995.12.
- 13) 岡林隆敏, 竹下渡 : 走行車両による道路橋振動制御のための動吸振器の最適設計, 土木学会, 振動制御コロキウム講演論文集PART.B, pp.97-104, 1991.7.
- 14) Boyd, S.P. and Barratt, C.H. : *Linear Controller Design, Limits of Performance*, Prentice Hall, Inc., 1991.
- 15) 町田東一, 小島紀夫男 : FORTRAN応用数値計算, 東海大出版会, 1989.6.
- 16) 土木学会構造工学委員会 : 構造システムの最適化, 土木学会, 1988.9.
- 17) Crandall, S.H. and Mark, W.D. : *Random Vibrations in Mechanical Systems*, Academic Press, 1963.
- 18) Wolfram, S. : *Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer*, 2nd ed., Wolfram Research, Inc., 1992.

(1997.10.13 受付)

OPTIMAL DESIGN OF TUNED MASS DAMPERS BY RANDOM VIBRATION METHODS

Jiannian XU, Takatoshi OKABAYASHI and Eiziro HAYASHI

The purpose of the study is to make up a standard design method for tuned mass dampers. That is, by random vibration theory, using the H_2 norm and H_∞ norm as evaluation functions, then the design methods based on different theories can be integrated to a standard method for optimal design of tuned mass dampers. For the conditions where the analysis method are difficult to be used, this paper presents an optimal design method that can be commonly used by numerical computation.

In this paper, a method of optimal design of a tuned mass damper, for a structure of 1-degree of freedom, is given by using H_2 norm and H_∞ norm method. The validity of the method is confirmed by analytical and numerical calculations.