

接線剛性法による薄板構造の大変形挙動解析

帯屋洋之¹・後藤茂夫²・井嶋克志³・井口真一⁴

¹正会員 工修 佐賀大学助手 理工学部都市工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄町1番地)

²正会員 工博 佐賀大学名誉教授 (〒840-8502 佐賀市本庄町1番地)

³正会員 工博 佐賀大学助教授 理工学部都市工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄町1番地)

⁴学生会員 工修 佐賀大学大学院 システム生産科学専攻 (〒840-8502 佐賀市本庄町1番地)

要素剛性分離の手法による接線剛性法による板・シェル構造の解析において、ベクトル則に従わない空間での有限回転を厳密に考慮した計算法を用いて、要素端変形の評価、および節点位置ベクトルの更新を行うことにより、極端な大変形挙動にも容易に対応できる幾何学的非線形解析プログラムを開発した。

本手法は従来のベクトル演算によって節点位置を更新する手法に比べ格段に高い収束性を有し、不平衡力算定による釣合計算によって、定義した要素挙動に対して厳密に整合する大変形解を得ることができる。

Key Words : plate & shell structure, the tangent stiffness method, spatial finite rotation

1. まえがき

板・シェル構造の三次元幾何学的非線形解析については、一般には非線形の支配方程式が必要と考えられており、これを直接解くことはできないため、さまざまな数値解法¹⁾²⁾が提案されている。

しかし、複雑な非線形剛性方程式を離散化式として表現するためには、解式の単純化のための近似概念を導入せざるを得ず、このために不確定な数値誤差が累積することが考えられる。また、弾性座屈後に至るような大変形問題を取り扱う場合には、細かい増分ステップによる荷重の逐次載荷を幾度も繰り返す荷重変位曲線追従型の解析となるため、計算時間が膨大となる。さらには、ベクトル則に従わない空間有限回転を厳密に評価しうる解析システムについての明確な結論が出るに至っていないため、極端に大きな節点回転を伴うような計算例を示した文献は少ない。

これらの問題に対処するための有効な手だてのひとつとして考えられることは、有限個の要素より成立する力学モデルとしての有限要素構造の幾何学的非線形要因を的確に評価した上で、要素の力学的挙動を効率的かつ合理的に定義することである。

有限要素構造の幾何学的非線形挙動は、

a) 要素自体の初期状態からの変形が複雑かつ大き

くなることによるもの

b) 要素個々が共通座標系内において大きく剛体変位することによるもの

の本質的に異なる二つの要因によって引き起こされる。従って、これらの要因を明確に分離して剛性方程式内に記述しなければならない。

板・シェル構造の場合、要素面外変形による幾何学的非線形性を考慮するか否か、という問題は、平面要素を用いるか曲面(シェル)要素を用いるかということと等価となるが、要素分割を密にすれば、各要素は平面と見なすことができるため、計算機性能が飛躍的な向上を遂げた昨今においては、表現が複雑となる曲面要素を適用する意義は薄れつつあると云える。また、要素面内変形に起因する幾何学的非線形成分については、要素分割の粗密とは無関係となるが、剛体変位が大きな拘束を受けるような極端な境界条件の場合を除いては、これを考慮しなくても十分な解析が行える。

以上の観点より、有限要素構造が大変形挙動する場合には、剛体変位による幾何学的非線形成分が支配的であると考えられる。従って、極端に大きな変形に対応し、大きな増分を与えても安定に解が得られるような解析システムを構築するためには、要素内のひずみ-変位関係式を基礎式として第一義に考えるよりは、要素の剛体変位による幾何学的非線形項を省略のない形で表現することが重要となる。

この点において、吉田、増田、松田⁹⁾は、三角形薄板要素に対して線形の要素力式を適用し、二次元解析においては相当大きな増分を与えても安定に求解できることを示している。しかし、ここでの三次元回転の取り扱いに関しては、各反復段階での要素座標系内における要素端の回転変形を、座標変換マトリックスを用いて求めた要素剛体回転と各節点における全回転とのベクトル的な差として、微小回転の考え方に基づく算定を行っている。従って、厳密な有限回転評価が必要となる三次元解析においては大きな増分を一度に与えることはできなくなるものと考えられる。

これに対し後藤らは文献 11) において、要素固有の剛性を、剛体変位に起因する接線幾何剛性から完全に分離した接線剛性法を、三角形薄板要素に適用している。この方法によれば、非線形剛性方程式を介することなく、既知先行要素力によって陽に接線幾何剛性を表現できるため、不平衡力の収束によって得られる解は、全節点における釣り合いを完全に満足したものとなる。また、ここでは、節点の全回転に関するベクトルを一旦座標変換マトリックスに変換し、これと要素座標系から共通座標系への座標変換マトリックスとの合成マトリックスを、再度、回転ベクトルに変換したものを要素座標系内における要素変形として用いることによって、厳密な有限回転評価を行っている。しかし、極端に大きな三次元回転を伴うような大変形解を求める場合には、やはり載荷荷重を細分し漸増させる手法を採らざるを得ず、また、収束に近づくにつれ最大不平衡力が急激に減少するという接線剛性法本来の特長が見られない等の問題を残している。

ここで考慮すべきことは、各断面力や要素変形の算定、あるいはこれによって導出される接線剛性方程式の厳密性だけでなく、連立一次方程式を反復使用し、解を設定条件と整合するところに収斂させるまでの非線形解析システムの全過程において、的確で厳密な有限回転評価を行い、これをアルゴリズム内に書き込むことである。

本研究においては、三角形薄板要素の解析理論としては文献 11) に示された接線剛性法の考え方を踏襲し、さらに、荷重増分（以下、変位増分を与える場合も含むものとする）の載荷から、反復計算を経て不平衡力が収束するまでを一連の解析システムと見た場合の三次元有限回転の厳密な評価法として、各反復段階における節点位置ベクトルの更新の際に、接線剛性方程式の解である回転変位増分を、前段階における回転変位に、座標変換マトリックスを介して合成する新たな方法の提案を行う。

本手法を用いれば、収束性の向上と、一度に載荷できる許容荷重増分量の増大により、計算時間を大幅に短縮することができ、さらには、今まで追跡が不可能であったような極端な大変形挙動時における解についても安定に求めることができる。また、本手法では、荷重変位曲線追跡型の細分荷重載荷による解析を行っても、不確定誤差が累積することは一切ないので、一括載荷による大変形解は荷重変位曲線に厳密に一致することになる。

著者らはこれまでも、接線剛性法を平面骨組へ適用した研究^{12),13),14)}において、座屈荷重を大幅に上回るような巨大荷重を一括載荷した場合でも高い収束性の下に高精度な解を得ているが、本研究で述べる有限回転算定法を用いることにより、板・シェル構造の三次元解析においても、平面骨組の場合と同等の幾何学的非線形解析性能をもつプログラムの作成が可能となった。

本論においては、作成した板・シェル構造の大変形解析プログラムにおけるアルゴリズムの進行に沿って、有限回転処理を含む各構成式を記述し、数値計算例を用いて、接線剛性法の精度、提案する有限回転処理法の収束性、適用範囲への影響についての検証を行う。

2. 接線剛性法における反復概念

本研究における解析システム全体に亘っての有限回転評価に対する考え方を明確にするため、荷重増分の載荷より、解が与えられた増分に対する厳密な釣り合い位置へと収束するまでの、接線剛性法における反復手法の概念を文献 11) の例に倣って示す。

以下、反復段階 r における諸値を、

先行変位	: Δd_0
先行荷重	: D_0
荷重増分	: ΔD
反復段階 r における変位	: Δd_r
要素座標系内における要素変形	: Δs_r
要素力	: S_r
要素力-節点力変換マトリックス	: J_r
接線剛性マトリックス	: K_{Tr}

と表すことにする。

図-1 は、接線剛性法における収束概念図であり、各象限における計算は右回りに進行するものとする。第 1 象限は変位と荷重の関係を表しており、接線剛性法においては、実際には非線形剛性方程式を使用しないため、これを点線で示すことにする。第 4 象限は共通座標系に関する節点変位 Δd より各要素ご

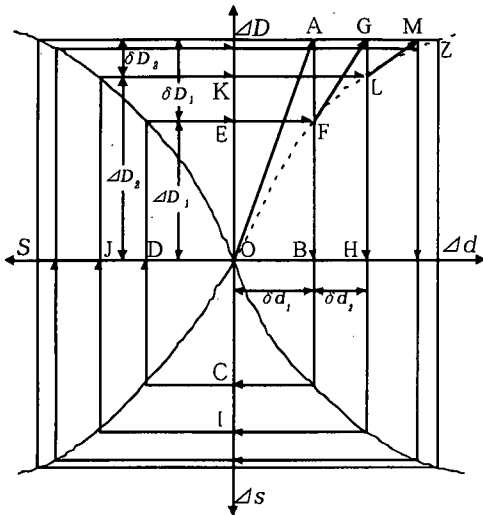


図-1 接線剛性法の反復概念図

とに設定された要素座標系内における要素変形 Δs を厳密に求める適合条件式, 第3象限は要素挙動を規定し要素変形から要素力 S を求める要素式, 第2象限は要素力から現段階の変位を参照した座標変換により節点力を求める平衡条件式を表すものとする。

図-1 における接線剛性法の反復は既知の平衡状態を表す原点 O より出発するものとし, 以下に解が収束するまでの過程を記す。

- ① 与えられた荷重増分 ΔD に対する O 点における接線剛性方程式を解くことにより, δd_1 を得る ($O \rightarrow A \rightarrow B$)。
- ② 初期状態における変位 Δd_0 に δd_1 を加えることにより Δd_1 を求める。
- ③ 変位 Δd_1 より, 厳密な適合条件式を用いて要素変形 Δs を求める ($B \rightarrow C$)。
- ④ 要素式により S_1 , さらに平衡条件式を用いて ΔD_1 を計算することにより, 平衡状態 F が得られる ($C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$)。
- ⑤ 目的とする荷重状態 ΔD と, 変位状態 Δd_1 に釣り合う荷重ベクトル ΔD_1 との差としての不平衡力 δD_1 を算出する。
- ⑥ さらに状態 F を先行状態とし, δD_1 に対応する接線剛性方程式の解 δd_2 を求める ($F \rightarrow G \rightarrow H$)。
- ⑦ δd_2 より新しい変位状態 Δd_2 を算出する。
- ⑧ 前段階同様に $H \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K$ として, 次の平衡状態 L を求める。
- ⑨ 以下, これを反復することにより平衡状態が無限に Z に近づき, 収束解を得ることになる。

よって, 接線剛性法における反復式は次のように表すことができる。

$$\Delta d_{r+1} = \Delta d_r - K_r^{-1} \cdot (D_0 + \Delta D - J, S_r) \quad (1)$$

接線剛性法による計算過程においては, 結果的に図-1 において点線で示した厳密な非線形剛性方程式の解曲線上をランダムなピッチでたどることになるが, 厳密な接線剛性方程式の各係数が, 不平衡力算定の過程で得られる諸値より陽に算定できるため, 実際には厳密に成り得ない非線形剛性方程式を定式化する必要は一切ない。

ここで, 立体構造物としての板・シェル構造物への適用を考えれば, ②, ③, および⑦の操作において, 変位の回転成分の取り扱いについての十分な配慮が必要となる。

上記反復過程においては, 大きな荷重増分あるいは変位増分に対しては, 不平衡力が初期値に比べて数桁大きな値となるような不平衡状態が現れる場合がある。もっとも, このような不平衡状態においても, 算出された ΔD に対しては厳密な平衡状態となるが, 回転変位にまつわる諸値については, ベクトルの取り扱いができなくなる。従って, 要素につながる節点の全回転と要素剛体回転より要素座標系内における要素変形としての回転変形を算出する操作③, 前段階までの回転変位に接線剛性法の解としての回転変位増分を加える操作②および⑦においては, 有限回転に対して厳密に評価しなければならない。

本研究においては, 接線剛性方程式を解くときの回転変位は微小回転としての取り扱いとなるが, 上記の操作において有限回転評価を行うことにより, 接線剛性法本来の幾何学的非線形解析理論としての合理性が発揮されることになる。

3. 座標変換マトリックスによる回転の合成

立体有限回転の処理に関しては, これまでも主に立体骨組の大変形解析に関する文献^{10), 11), 15), 22)}等において精力的な研究がなされ, 特に, 有限回転を座標変換マトリックスを用いて表現する方法については, 前田, 林¹⁹⁾, あるいは後藤^{10), 11)}などに述べられている。本章においては, 実際の接線剛性法によるアルゴリズムへの適用を念頭に置き, ひずみ場とは無関係に表現できる座標変換マトリックスによる回転合成の手法についての詳しい記述を行う。

周知のように, 三次元回転は力学的にはベクトルではないが, ここでは, 回転変位3成分を3行1列の列ベクトルとして表示し, このベクトルの方向が回

回転の方向を、大きさが回転量を表すものとする。

いま、回転 r_1 に引き続いて回転 r_2 が発生した場合、それぞれの回転が微小であるとすれば、その合計回転 r は、次式で表すことができる。

$$r = r_1 + r_2 \quad (2)$$

これに対して、有限回転を考慮した演算を行う場合には、座標系が回転によって一次変換される場合の座標変換マトリックスを用いるのが便利である。ここで、 e を単位マトリックス、 r をスカラー量としての回転量とすれば、回転ベクトル r による座標変換マトリックス $\Phi(r)$ の表記は、

$$\Phi(r) = \frac{rr^T}{r} (1 - \cos r) + e \cos r - \frac{r}{r} \times e \sin r \quad (3)$$

$$r^2 = r^T r \quad (4)$$

となる。これにより、座標系 ω_0 から r_1 によって、 ω_1 に移り、さらに回転 r_2 により ω_2 に変換された場合の座標変換 (図-2) は、次式のようになる。

$$\omega_1 = \Phi(r_1) \omega_0 \quad (5)$$

$$\omega_2 = \Phi(r_2) \omega_1 = \Phi(r_2) \Phi(r_1) \omega_0 \quad (6)$$

$$\Phi(r) = \Phi(r_2) \Phi(r_1) = C \quad (7)$$

よって、座標系 ω_0 から ω_2 への回転 r は、式(7)の逆変換により、次のように表すことができる。

$$r = \Phi^{-1}(C) \quad (8)$$

上式における逆変換の計算は具体的には、以下のようになる。

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

とすれば、

$$2 \cos r = C_{11} + C_{22} + C_{33} - 1 \quad (10)$$

$$4 \sin^2 r = (C_{32} - C_{23})^2 + (C_{13} - C_{31})^2 + (C_{21} - C_{12})^2 \quad (11)$$

$$r = r \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{r}{2 \sin r} \begin{bmatrix} C_{32} - C_{23} \\ C_{13} - C_{31} \\ C_{21} - C_{12} \end{bmatrix} \quad (12)$$

なお、 $\alpha = [\alpha, \beta, \gamma]^T$ は、 r の回転軸の方向余弦であ

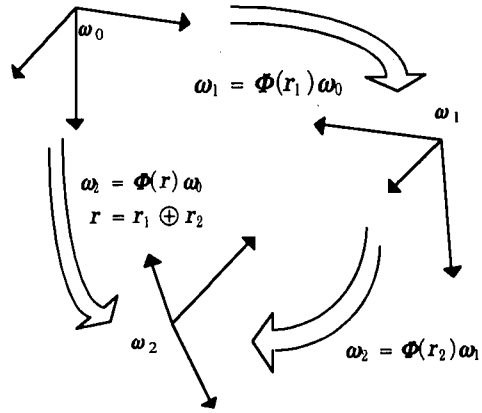


図-2 座標変換と有限回転の合成

る。また、実際のプログラム内においては、式(10),(11)をそれぞれ、 c 、 s^2 とにおいて、以下を用いる。

$c > 0$ のとき

$$r = \tan^{-1}(s/c) \quad (13)$$

$c < 0$ のとき

$$r = \tan^{-1}(s/c) + \pi \quad (14)$$

これにより、 $|r| < \pi$ の範囲においての有限回転の合成が可能となる。ただし、 c に条件をつけない式(11)のみの場合は、 $|r| < \pi/2$ となる。

このような絶対回転量に関する制限が生じるのは、式(8)における逆変換が多価関数となるためである。しかし、実際のアルゴリズム内での計算では、適当な要素分割を施していれば、4. (1) で述べる回転変形算定の際に、要素座標系内での要素端における回転が π を超えるような状態は事実上考える必要がないものと思われる。また、接線剛性法の反復段階において極端に大きな変位を伴う不平衡状態が現れたことによって、4. (4) で述べる節点位置ベクトルの更新を行う際に不慮に上記の制限を超えるような場合には、適宜、荷重を分割荷重すればよく、この分割を行ったとしても、従来手法における荷重の細分化の概念に比べれば、格段に大きな荷重ステップでの解析ができることになる。

本研究においては、式(3)から式(14)までの座標変換マトリックスによる有限回転の合成を、式(2)におけるベクトル演算の表現に対して、

$$r = r_1 \oplus r_2 \quad (15)$$

のように表すことにする。

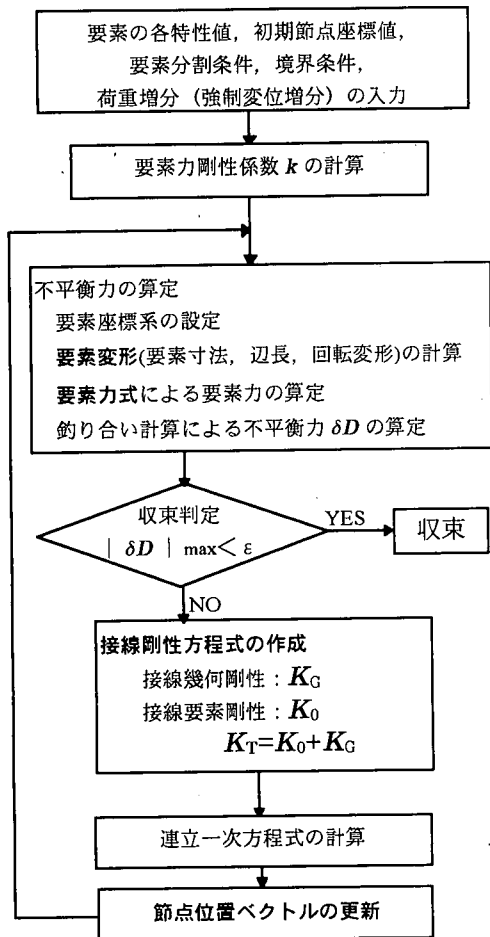


図-3 接線剛性法によるプログラムのブロックダイアグラム

4. 三角形薄板要素の幾何学的非線形解析アルゴリズム

図-3は、作成したプログラムの流れを示すブロックダイアグラムである。本プログラムにおいては、各反復段階における接線剛性係数を、不平衡力算定の過程で算出される要素力より陽に得ることができるため、反復ループの中では、不平衡力算定→収束判定→接線剛性マトリックスの作成→連立一次方程式の計算→節点位置ベクトルの更新、という順序で各サブルーチンを配置している。

(1) 要素座標系内における要素変形

図-4に示すように、1点→2点の方向を第1軸、要素平面方向に第2軸をとった右手系を要素座標系を ω とし、基準座標系を ω_0 とした場合、要素座標系から基準座標系への座標変換マトリックスは、

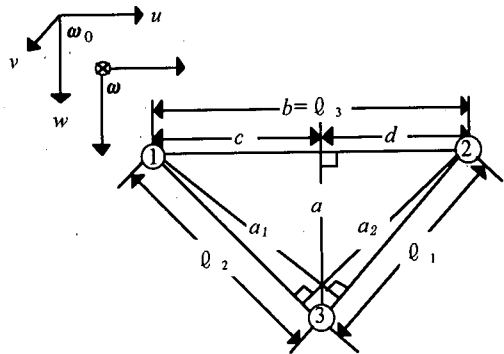


図-4 要素座標系と要素寸法

$$u_{ij} = [u_j - u_i, v_j - v_i, w_j - w_i]^T \quad (16)$$

として、

$$\eta_x = u_{12} / b \quad (17)$$

$$\eta_y = (u_{13} - c\eta_x) / a \quad (18)$$

$$\eta_z = \eta_x \times u_{13} / a \quad (19)$$

$$\eta = [\eta_x, \eta_y, \eta_z]^T \quad (20)$$

$$\omega_0 = \eta\omega \quad (21)$$

のように、回転変位とは無関係に得られる。

ここで、面内変形と面外変形のそれぞれについて、独立な要素変形を、

$$\Delta s_p = [\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3, \Delta \phi_1, \Delta \phi_2, \Delta \phi_3]^T \quad (22)$$

$$\Delta s_b = [\Delta \theta_{x1}, \Delta \theta_{y1}, \Delta \theta_{x2}, \Delta \theta_{y2}, \Delta \theta_{x3}, \Delta \theta_{y3}]^T \quad (23)$$

のように定義すれば、このうち、並進変位としての i ($i=1,2,3$)点に対する辺の辺長変化量 Δl_i は、各辺の無応力長を l_{i0} として、

$$\Delta l_i = \sqrt{u_{jk}^T u_{jk}} - l_{i0} \quad (24)$$

により、厳密に算出される。また、回転変形については、 i 点における基準座標系に関する回転変位ベクトルを Δx_i とすれば、座標変換マトリックスを用いた合成により

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta_{xi} \\ \Delta \theta_{yi} \\ \Delta \theta_{zi} \end{bmatrix} = \Phi^{-1} \{ \Phi(\Delta x_i) \eta \} \quad (25)$$

となる。

また、このうち面内変形としての回転に対しては、

$$\Delta\phi = \Delta\theta_z + \Delta\psi \quad (26)$$

のように、辺長変化による面内剛体回転の項 $\Delta\psi$ が付加されることになる。(付録1.)

(2) 要素力式

本研究においては、要素内のひずみは微小であるという前提のもとに、辺上の変位を3次関数で仮定したHybrid法によって誘導された要素力剛性マトリックスにより、面内、面外それぞれの要素挙動に対して、

$$S_p = k_p \Delta s_p \quad (27)$$

$$S_b = k_b \Delta s_b \quad (28)$$

のように、線形の要素力式を定義し、用いている。

これは、第1章においても述べたように、三角形要素では、面外変形に関しては、適当な要素分割を行うことにより、各要素は平面と見なせるようになることと、面内変形については、著者らの立体要素に関する研究²⁴⁾における考察と同様に、各要素の剛体変位が極端に拘束されるような境界条件を施した特別な場合を除いては、ひずみ-変位関係に現れる非線形性を考慮しなくても、十分な解析ができると考えられるためである。

この考え方は、解式の単純化や非線形式の線形化を行う場合の近似概念とは全く立場の異なるものであり、得られる解が要素挙動に関する基本仮定に厳密に整合すれば正解とすることができるので、有限要素構造の基本的性質から考えても合理的である。また、接線剛性法においては、構造系の性質によっては非線形の要素力式を用いることも可能であり、この場合は、要素力式の要素変形による微分としての接線要素力式を接線剛性方程式に組み込むことになる。

なお、 k_p 、 k_b の具体的な誘導については、文献26)を参照されたい。

(3) 接線剛性方程式

一要素に関する、先行釣合状態における節点力ベクトルを D 、要素座標系内における独立な節点力として要素端に作用する要素力ベクトルを S とすれば、次の平衡条件式が成立する。

$$JS = D \quad (29)$$

これを、微分することにより、

$$J\delta S + \delta JS = (K_0 + K_G)\delta d = \delta D \quad (30)$$

のように接線剛性方程式を得る。 K_0 は要素固有の剛性に起因する要素剛性マトリックスであり、式(27)および式(28)の k_p 、 k_b を各反復過程で得られる適合条件式で基準座標系に変換することにより得られる。また、 K_G は剛体変位に起因する接線幾何剛性であり、その i 行 j 列要素は、要素力、要素変形、および節点変位をそれぞれ、 S 、 Δs 、 Δd として、

$$K_{Gij} = \left. \frac{\partial^2 (\sum \Delta s_k S_k)}{\partial \Delta d_i \partial \Delta d_j} \right|_{\Delta d_1, \Delta d_2, \dots, \Delta d_n \rightarrow 0} \quad (31)$$

のように得られる。これにより、未知変位を一切含まない接線幾何剛性係数が確定する。(付録2.)

(4) 節点位置ベクトルの更新

立体構造の場合、各節点の変位は並進3成分と回転3成分の合計6成分から成り、反復段階 r における節点位置ベクトルと接線剛性方程式の解である変位増分ベクトルは、それぞれ、

$$d_r = \begin{bmatrix} u_r \\ x_r \end{bmatrix}, \quad \delta d_r = \begin{bmatrix} \delta u_r \\ \delta x_r \end{bmatrix} \quad (32)$$

のように表すことができる。これにより、次段階における節点位置ベクトル d_{r+1} を求める際、もちろん並進3成分については、

$$u_{r+1} = u_r + \delta u_r \quad (33)$$

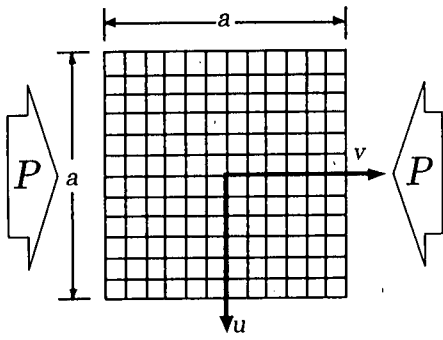
のようにベクトル則に従った演算により求めることができるが、回転3成分については、

$$x_{r+1} = x_r + \delta x_r \quad (34)$$

とできるのは、回転が微小な時のみであり、接線剛性法において大きな荷重増分を与えたときのように、1回の反復での変位増分が大きくなるような場合には、式(15)で用いた演算子の表現による、

$$x_{r+1} = x_r \oplus \delta x_r \quad (35)$$

となるような、有限回転に関する厳密な演算を行わなければならない。三角形薄板要素の場合は、式(20)による座標変換マトリックスが回転変位を介さず得られるため、式(34)を用いた場合でも式(35)を用いた場合と同じ解に収束するが、収束性、および荷重増分の適用範囲において、式(35)を用いた方が格段に有利になる。



$a = 48\text{cm}$, $w_0 = \delta \cos(\pi u/a) \cos(\pi v/a)$
 $E = 2.1 \times 10^7 \text{tf/m}^2$ (205.8GPa), $\nu = 0.316$, $t = 1.0\text{cm}$

図-5 矩形板の初期形状と解析諸元

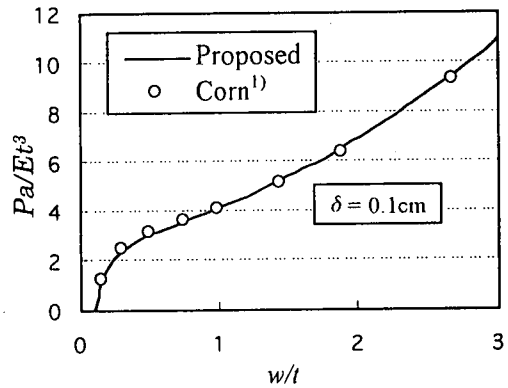


図-6 荷重-たわみ曲線 ($w/t=0\sim 3$)

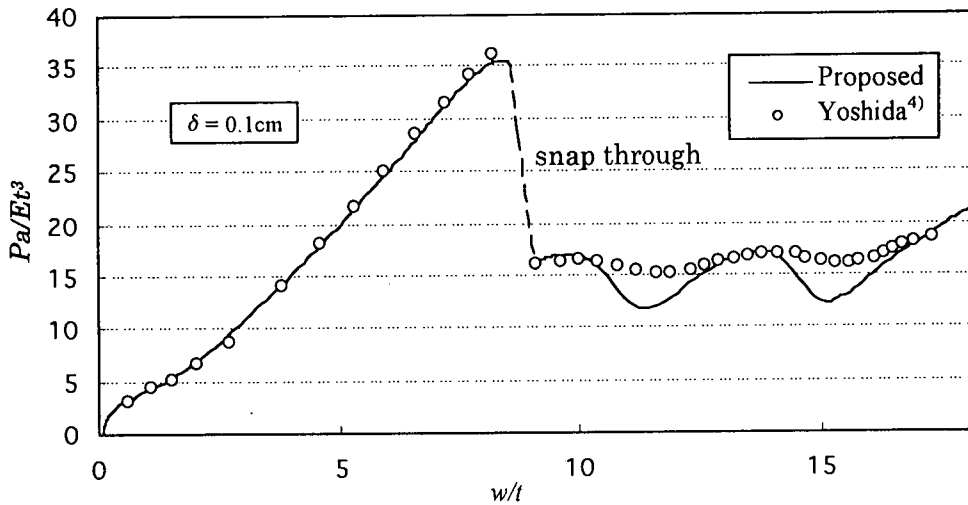


図-7 荷重-たわみ曲線 ($w/t=0\sim 18$)

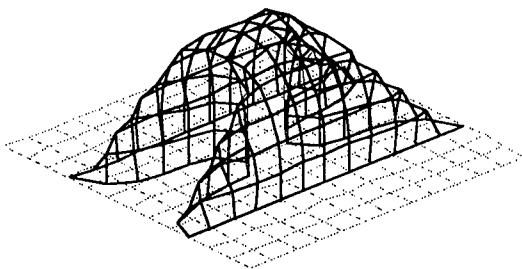


図-8 矩形板の解形状 (実寸等倍: $w/t=18$)

5. 数値計算例

(1) 圧縮を受ける矩形板の大変形解析

図-5 に示すような周辺単純支持の矩形板に初期たわみ $\delta=0.1\text{cm}$ を与え、相対する 2 辺が等変位となるような圧縮を受ける場合の大変形解析を行った。

図-6 は、比較的小さい変位域での解析において、多くの文献^{4)-6),8)}で引用されている Corn¹⁾の級数解との比較を行ったものであり、本手法における解とよく一致している。また、図-7 は中央点のたわみが $w/t=18$ となるような極端に大きな変位状態 (図-8) まで解析を行った場合の荷重-たわみ曲線である。図中、吉田ら⁴⁾が行った解析結果を○で示しており、メッシュ分割等の条件は吉田らと同一のものを使用している。これによれば、飛び移りが起きる前までの解ではよく一致しているが、飛び移り後の複雑な形状となる大変形域ではかなりの差異が見られる。これは、本研究では式(25)における座標変換マトリックスを用いた合成によって要素端における回転変形を厳密に評価しているためと考えられる。

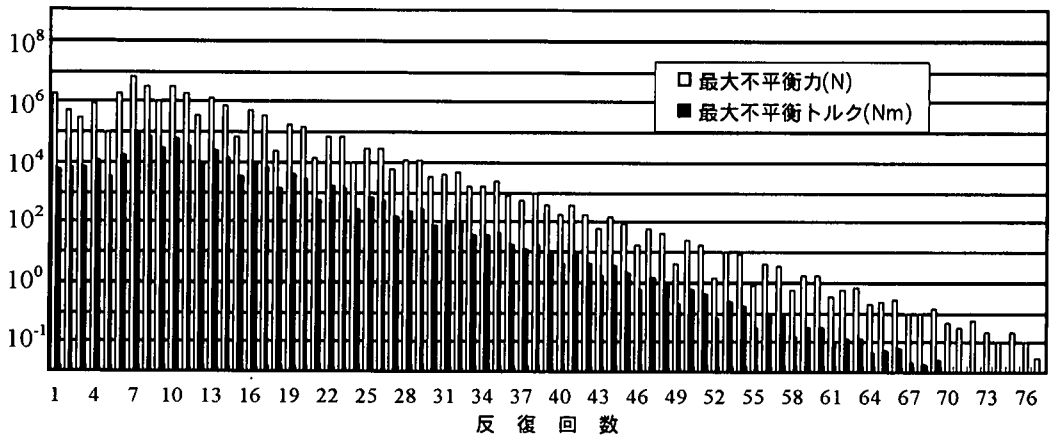


図-9 最大不平衡力の収束状況 一式(34)を用いた場合一

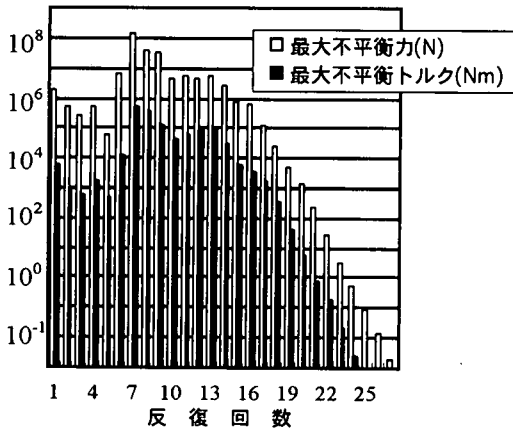
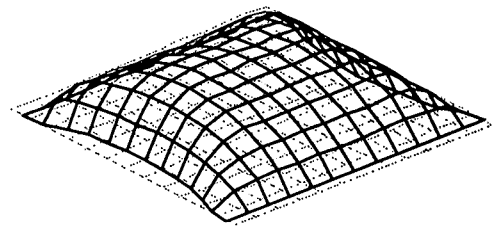
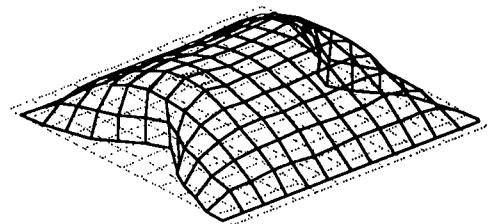


図-10 最大不平衡力の収束状況 一式(35)を用いた場合一



(a) 飛び移り前 (先行状態)



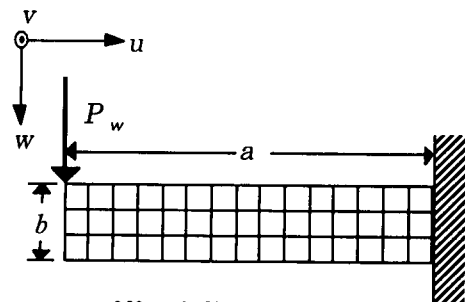
(b) 飛び移り後 (収束解)

図-11 飛び移り前後の形状 (実寸等倍)

次に、飛び移り前の解を先行状態に、一回の増分で飛び移り後の解を求める解析において、図-9には節点位置ベクトルの更新に式(34)によるベクトル演算を用いた場合の収束状況、図-10には式(35)による座標変換マトリックスの合成を用いた場合の収束状況を示している。縦軸は最大不平衡力、最大不平衡トルクを対数目盛で表しており、横軸は連立一次方程式を解いた回数としての反復回数である。

この場合、最終的に得られる解(図-11-b)は同じものとなるが、式(35)によって厳密に有限回転の評価を行って節点位置の更新を行った方が、約3倍程度速く収束しており、収束に至る過程での不平衡力、不平衡トルクの一回の反復計算による減少幅も大きなものになっている。

なお、回転の処理法の違いが反復一回のCPU時間に及ぼす影響は僅少であり、本論文では収束までの反復回数を計算時間の指標として用いている。



$a=250\text{cm}$, $b=50\text{cm}$, $r=2.0\text{cm}$
 $E=2.1 \times 10^7 \text{tf/m}^2$ (205.8GPa), $\nu=0.330$
 撓乱荷重: $P_w=980\text{N}$

図-12 腹板の初期形状と諸元

表-1 解析過程と収束に要した反復回数

式(34)			式(35)		
解析過程	荷重増分	反復回数	解析過程	荷重増分	反復回数
0→a	44.1kN	26回	0→A	88.2kN	59回
a→b	14.7kN	36回			
b→c	19.6kN	43回			
c→A	9.8kN	36回			
0→A		141回	A→B	102.9kN	30回
			B→C	161.7kN	28回

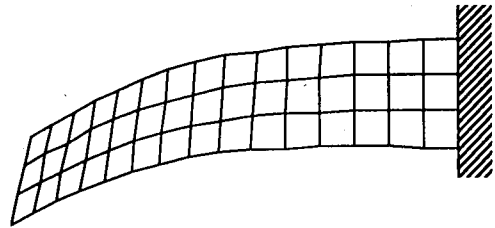


図-14 解Aの形状 (実寸等倍 : $P_w=88.2\text{kN}$)

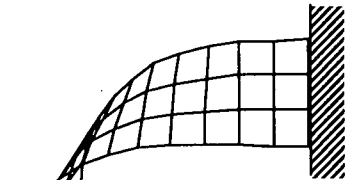


図-15 解Bの形状
(実寸等倍 : $P_w=191.1\text{kN}$)

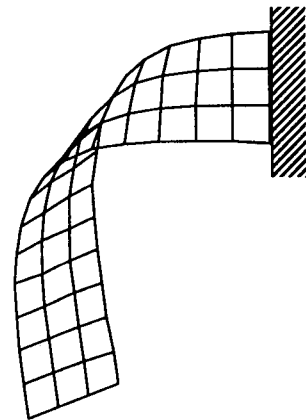


図-16 解Cの形状
(実寸等倍 : $P_w=347.9\text{kN}$)

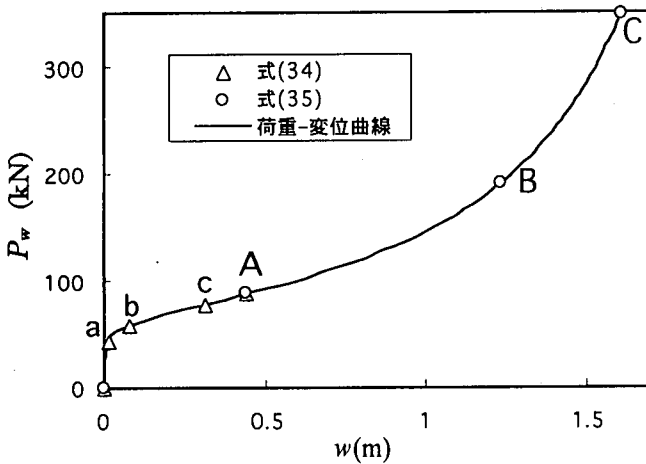


図-13 荷重-変位曲線

(2) 腹板の横倒れ座屈解析

図-12 に示す右端完全固定の腹板の左上端に常時荷重としての面外方向の攪乱 $P_w=980\text{N}$ と共に、鉛直下向きに荷重 P_w を載荷した。

図-13 は荷重-変位曲線であるが、図中の△および○はそれぞれ式(34)、式(35)を用いて、相当な数値実験を行った結果、収束解を得ることができる最大の荷重増分幅による解をプロットしたものである。また、表-1 はそのときの解析過程、荷重増分および収束判定基準を $\epsilon=0.001\text{N}$ とした場合の収束に要した接線剛性方程式の反復回数を示している。

式(34)を用いた場合には無応力の初期状態より弾性座屈後の解を直接求めることはできず、 $0 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c$ と経由して解 A (図-14) に至るが、以降は相当に細かい増分幅を設定しなければ解析を進めることはできなくなる。

これに対し、式(35)を用いた場合は初期状態より直接、弾性座屈後の解 A を求めることができ、以降も解 B (図-15) → 解 C (図-16) と大きな荷重増分で解き進めることが可能となる。

また、表-1 によれば、式(34)を用いた場合には解 A を求めるまでに、合計 141 回の反復を要しているのに対し、式(35)を用いれば半分以下の 59 回となり、計算時間も大幅に短縮することができる。

6. 結言

要素固有の剛性を剛体変位に起因する接線幾何剛性から完全に分離した接線剛性法において、解析システム全体としての有限回転の厳密な評価を可能とする、板・シェル構造のための幾何学的非線形解析プログラムを開発した。本プログラムによれば、極端な大変形・大回転を伴うような場合でも、大きな荷重増分に対応し、高い収束性のもとに釣合解を得ることができる。

本研究では、ベクトル演算則に従わない三次元空間における有限回転の処理に関して、座標変換マトリックスによる合成を介して再び回転ベクトルに変換する手法により、厳密な評価を行った。これにより、要素の剛体変位から分離された要素座標系内において、要素端における回転変形の省略のないかたちでの表現が可能となる。さらに、節点位置ベクトルの更新手続にこの手法を適用した場合、収束性の飛躍的な向上と適用可能な荷重増分幅の拡大により、収束に至るまでの反復回数を指標として、約2~3倍も計算速度が上昇することが数値計算によって確認された。

以上のように、本研究で開発された解析プログラムは単純明解な理論により構成されつつも、得られる解は常に完全な釣り合いを満足するため、たとえば、分岐釣合経路の追跡など、複雑な変形性状を示す大変形挙動の場合でも、実験的感覚で解析を行うことができる。従って、本手法は、宇宙空間における巨大構造物の折り畳み問題等の非常に強い幾何学的非線形性を考慮すべき問題に対して有用であるだけでなく、弾性・大変形問題全般において、信頼性のある解を与える汎用性を有していると言える。また、弾塑性・大変形問題に適用する場合には、本論文で示したような極端な大増分幅での解析は期待できないものの、要素個々の弾塑性挙動を要素力式に記述すれば、定義した要素モデルに完全に整合する解が得られるという本手法の特性に即した合理的な解析が可能になるものと考えられる。

付録1. 面内剛体回転 $\Delta\psi$ について

ここでは、式(26)における面内剛体回転項 $\Delta\psi$ に関する詳しい記述を行う。

図-17は要素座標系内において面外方向の変位を拘束し、面内方向には静定で安定な支点条件を施した場合の平面要素力を表しており、このときの無拘束方向への要素力とこれに対応する要素変形は、

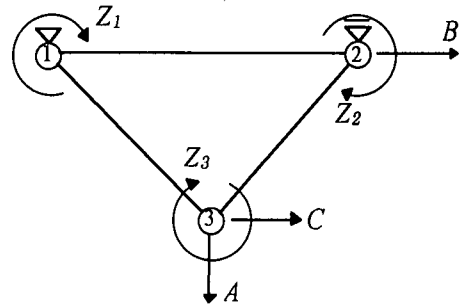


図-17 静定な支点条件に対応する平面要素力

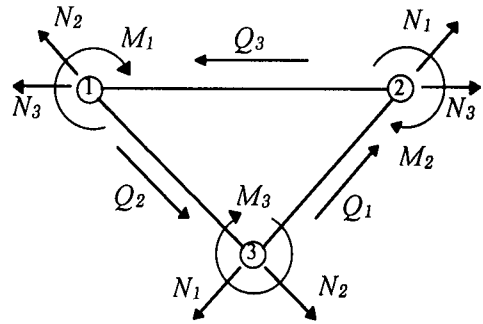


図-18 辺方向の要素力

$$S_{pe} = [A, B, C, Z_1, Z_2, Z_3]^T \quad (36)$$

$$\Delta s_{pe} = [\Delta a, \Delta b, \Delta c, \Delta\theta_{11}, \Delta\theta_{12}, \Delta\theta_{13}]^T \quad (37)$$

のように表すことができる。

これに対し、図-18は三角形要素の辺方向に変換された要素力を示しており、このうち式(22)の面内要素変形に対応する独立な要素力は次のようになり、

$$S_p = [N_1, N_2, N_3, M_1, M_2, M_3]^T \quad (38)$$

ここでは、次式のような釣り合関係が成り立つため、

$$a_1 Q_1 = a_2 Q_2 = a_3 Q_3 = M_1 + M_2 + M_3 \quad (39)$$

$$Q_1 / l_1 = Q_2 / l_2 = Q_3 / l_3 \quad (40)$$

S_p と S_{pe} の間の変換は次式で表すことができる。

$$S_{pe} = \begin{bmatrix} \frac{a}{l_1} & \frac{a}{l_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d}{l_1} & 0 & 1 & -\frac{c}{2ab} & -\frac{c}{2ab} & -\frac{c}{2ab} \\ -\frac{d}{l_1} & \frac{c}{l_2} & 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S_p \quad (41)$$

従って,

$$\Delta S_p^T S_p = \Delta S_{pe}^T S_{pe} \quad (42)$$

の仮想仕事式に対して, 式(41)を代入することにより $\Delta \psi$ は次式のようになる.

$$\Delta \psi = (b\Delta c - c\Delta b) / 2ab \quad (43)$$

付録2. 三角形薄板要素の接線幾何剛性係数

接線剛性法においては, 節点変位ベクトルとして, 並進3成分, 回転3成分の合計6成分を過不足なく評価するため, 三角形薄板要素の一要素に関する接線幾何剛性は, 式(31)により 18×18 の対称マトリックスとして得られる. 以下に基準座標系を先行状態の要素座標系とする場合の接線幾何剛性係数を示す.

式(22)における $\Delta \theta_1$, $\Delta \theta_2$, $\Delta \theta_3$ に対応する要素力, N_1 , N_2 , N_3 の関数となる幾何剛性部分を K_{G1} とすれば, 各辺の方向余弦を

$$\alpha_1 = -d / \ell_1 \quad (44)$$

$$\alpha_2 = -c / \ell_2 \quad (45)$$

$$\alpha_3 = 1 \quad (46)$$

$$\beta_1 = a / \ell_1 \quad (47)$$

$$\beta_2 = -a / \ell_2 \quad (48)$$

$$\beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0 \quad (49)$$

として,

$$k_{Gjk} = \frac{N_j}{\ell_j} \begin{bmatrix} 1 - \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \beta\alpha & 1 - \beta^2 & \beta\gamma \\ \gamma\alpha & \gamma\beta & 1 - \gamma^2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

となるような 3×3 の部分幾何剛性マトリックスを, 以下のように配置することにより得られる.

$$K_{G1} = \begin{bmatrix} k_{G12} + k_{G31} & 0 & -k_{G12} & 0 & -k_{G31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{G12} & 0 & k_{G12} + k_{G23} & 0 & -k_{G23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{G31} & 0 & -k_{G23} & 0 & k_{G23} + k_{G31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

また, 要素座標系の座標軸まわりのモーメントとして表示される各要素端の端モーメント要素力 X_1 , Y_1 , Z_1 , X_2 , Y_2 , Z_2 , X_3 , Y_3 , Z_3 および面外方向力としての要素力 W_1 , W_2 , W_3 の関数となる幾何剛性部分 K_{G2} は, 式(25), 式(26)を2次の項まで展開したものに對して式(31)を実行することにより得られる.

従って, 3 節点剛節要素としての接線幾何剛性 K_G は次式により表される.

$$K_G = K_{G1} + K_{G2} \quad (52)$$

以下に K_{G2} の非零要素を示す. なお, k に関する添字の数字はそれぞれ, 18×18 のマトリックスにおける行番号, 列番号を表すものとする.

$$k_{1,3} = -k_{1,9} = W_1 / b \quad (53)$$

$$k_{2,3} = (bdW_1 - \ell_1^2 W_3) / 2ab^2 \quad (54)$$

$$k_{2,4} = -k_{4,8} = k_{6,15} = Y_1 / 2b \quad (55)$$

$$k_{2,5} = -k_{5,8} = -X_1 / 2b \quad (56)$$

$$k_{2,9} = \{bcW_1 + (a^2 - cd)W_3\} / 2ab^2 \quad (57)$$

$$k_{2,10} = -k_{8,10} = Y_2 / 2b \quad (58)$$

$$k_{2,11} = -k_{8,11} = -X_2 / 2b \quad (59)$$

$$k_{2,15} = (dW_3 - bW_1) / 2ab \quad (60)$$

$$k_{2,16} = -k_{8,16} = Y_3 / 2b \quad (61)$$

$$k_{2,17} = -k_{8,17} = -X_3 / 2b \quad (62)$$

$$k_{3,4} = -k_{4,9} = -k_{5,15} - Z_1 / 2b \quad (63)$$

$$k_{3,5} = dZ_1 / 2ab \quad (64)$$

$$k_{3,6} = -(aX_1 + dY_1) / 2ab \quad (65)$$

$$k_{3,7} = -k_{7,9} = W_2 / b \quad (66)$$

$$k_{3,8} = \{bdW_2 + (a^2 - cd)W_3\} / 2ab^2 \quad (67)$$

$$k_{3,10} = -k_{9,10} = Z_2 / 2b \quad (68)$$

$$k_{3,11} = dZ_2 / 2ab \quad (69)$$

$$k_{3,12} = -(aX_2 + dY_2) / 2ab \quad (70)$$

$$k_{3,13} = -k_{9,13} = W_3 / b \quad (71)$$

$$k_{3,14} = dW_3 / ab \quad (72)$$

$$k_{3,15} = -(Z_1 + Z_2 + Z_3) / 2ab \quad (73)$$

$$k_{3,16} = -k_{9,16} = Z_3 / 2b \quad (74)$$

$$k_{3,17} = dZ_3 / 2ab \quad (75)$$

$$k_{3,18} = -(aX_3 + dY_3) / 2ab \quad (76)$$

$$k_{5,9} = cZ_1 / 2ab \quad (77)$$

$$k_{6,9} = (aX_1 - cY_1) / 2ab \quad (78)$$

$$k_{8,9} = (bcW_2 - \ell_2^2 W_3) / 2ab^2 \quad (79)$$

$$k_{8,15} = (cW_3 - bW_2) / 2ab \quad (80)$$

$$k_{9,11} = cZ_2 / 2ab \quad (81)$$

$$k_{9,12} = (aX_2 - cY_2) / 2ab \quad (82)$$

$$k_{9,14} = cW_3 / ab \quad (83)$$

$$k_{9,15} = (Z_1 + Z_2 + Z_3) / 2ab \quad (84)$$

$$k_{9,17} = cZ_3 / 2ab \quad (85)$$

$$k_{9,18} = (aX_3 - cY_3) / 2ab \quad (86)$$

$$k_{11,15} = -Z_2 / 2a \quad (87)$$

$$k_{12,15} = Y_2 / 2a \quad (88)$$

$$k_{14,15} = -W_3 / a \quad (89)$$

$$k_{15,17} = -Z_3 / 2a \quad (90)$$

$$k_{15,18} = Y_3 / 2a \quad (91)$$

参考文献

- 1) Corn, J.M. : Large-deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression, *Journal of Applied Mech.*, Trans. ASME, Vol.18, pp.143-151, 1951.
- 2) Yamaki, N. : Postbuckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression, *Journal of Applied Mech.*, Trans. ASME, Vol.26, pp.407-414, 1959.
- 3) 吉田裕, 雨宮栄一郎, 増田陳紀 : 立体構造解析のための薄板有限要素, 土木学会論文報告集, No.211, pp.19-28, 1973.
- 4) 吉田裕, 増田陳紀, 松田隆 : 薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法, 土木学会論文報告集, No.288, pp.41-55, 1979.
- 5) 前田幸雄, 林正, 森寛司 : 有限帯板法による薄板の有限変位解析, 土木学会論文報告集, No.316, pp.23-36, 1981.
- 6) 山尾敏孝, 崎元達郎 : 板要素とはり要素の結合による薄肉鋼構造物の有限変位弾塑性解析, 構造工学論文集, Vol.32A, pp.291-302, 1986.
- 7) Sakurai, T., Chu, K., and Nishino, F. : A numerical analysis of finite displacement problems of elastic shell structures, *Proc. of JSCE*, No.368, pp.1-10, 1986.
- 8) 桜井孝昌, Karamanlidis, D., 西野文雄 : 混合ハイブリッド有限要素法を用いた弾性シェル構造物の有限変位解析, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.299-306, 1991.
- 9) Morita, C., Matsuda, H., and Sakiyama, T. : Analysis on geometrical nonlinear behavior of rectangular plates, *Proc. of JSCE*, No.455, pp.35-42, 1992.
- 10) 後藤茂夫 : 立体構造物における接線幾何剛性マトリックスの定式化, 土木学会論文報告集, No.335, pp.1-11, 1983.
- 11) 後藤茂夫, 荒牧軍治, 井嶋克志 : 要素剛性分離の手法による構造物の幾何学的非線形解析, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.315-328, 1991.
- 12) 後藤茂夫, 井嶋克志, 古賀勝喜, 帯屋洋之 : 接線剛性法による要素力式の設定と解の精度, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol.18, pp.121-126, 1994.
- 13) 後藤茂夫, 井嶋克志, 帯屋洋之, 劉磊 : 接線剛性法による平面骨組の分岐的合系の解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol.18, pp.127-132, 1994.
- 14) Obiya, H., Goto, S., Ijima, K. and Koga, K. : Equilibrium analysis of plane frame structures by the tangent stiffness method, *Proc. of Stability of steel structures*, Vol.2, pp.305-312, 1995.
- 15) Tezcan, S.S. and B.C. Mahapatra : Tangent stiffness matrix for space frame members, *ASCE*, Vol.95, No.ST6, Proc. Paper6627, pp.1257-1270, 1969.
- 16) Chu, K.H. and Rampetsreiter, R.H. : Large deflection buckling of space frames, *ASCE*, Vol.98, No.ST12, Proc. Paper 9455, pp.2701-2722, 1972.
- 17) Oran, C. : Tangent stiffness in space frame, *ASCE*, Vol.99, No.ST6, Proc. Paper9813, pp.987-1001, 1973.
- 18) Bathe, K.J. and Bolourchi, S. : Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, *Int. J. Numerical Method of Engrg.*, Vol.14, pp.961-986, 1979.
- 19) 前田幸雄, 林正 : 立体骨組構造物の有限変位解析, 土木学会論文報告集, No.253, pp.13-27, 1976.
- 20) 吉田裕, 増田陳紀, 森本剛, 広沢規行 : 立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法, 土木学会論文報告集, No.300, pp.21-31, 1980.
- 21) 阿井正博, 伊東賢 : 有限変位を受ける薄板はり要素の一離散化展開, 土木学会論文集, No.344, pp.215-224, 1984.
- 22) 後藤芳顯, 渡辺康人, 春日井俊博, 松浦聖 : 空間での有限回転を伴う弾性座屈現象を利用したリングのたみ込み, 土木学会論文集, No.428, pp.117-125, 1991.
- 23) Ai, M., and Nishino, F. : An explicit FEM formulation of the 2-D triangular element for finite strains, *Proc. of JSCE*, No.446, pp.113-116, 1992.
- 24) Obiya, H., Goto, S., Ijima, K. and Iguchi, S. : Application of the tangent stiffness method to 3-D structures using polyhedral elements, *Proc. of ICCBE VII*, Vol.2, pp.63-68, 1997.
- 25) Iguchi, S., Goto, S., Ijima, K. and Obiya, H. : Large deformation analysis of spatial folding by the tangent stiffness method, *Proc. of ICCBE VII*, Vol.2, pp.209-214, 1997.
- 26) 後藤茂夫, 井嶋克志, 古賀勝喜, 帯屋洋之, シーウェイ, 劉磊 : 膜構造・骨組構造の形状決定と挙動解析に関する統一理論の確立とプログラムの開発, 能村膜構造技術振興財団助成研究成果報告書, pp.37-47, 1995.
- 27) 有限要素ハンドブック編集委員会 : 有限要素ハンドブックⅡ応用編, 培風館, pp.122-169, 643-651, 1983.
- 28) 土木学会構造工学委員会 : 構造工学における計算力学の基礎と応用, 土木学会, pp.118-153, 213-244, 1996.

(1997.10.1 受付)

LARGE DEFORMATION ANALYSES FOR PLATE & SHELL STRUCTURES BY THE TANGENT STIFFNESS METHOD

Hiroyuki OBIYA, Shigeo GOTO, Katsushi IJIMA and Shin-ichi IGUCHI

A computational program by the tangent stiffness method has been developed for plate & shell structures. By this program, we can obtain strict equilibrium solutions even in the case of extremely large deformation, because our new calculation method considers exact spatial finite rotation of each node. The method expresses the total rotation by the composition of two coordinate transformational matrixes. In some computations, it has been evident that the application of this new method in order to renew the rotational vector as the nodal displacement causes so much improvement of the convergence.