

# 一般振動下の非定常空気を力を用いた 橋桁のフラッター解析

岩本政巳<sup>1</sup>・藤野陽三<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 名古屋工業大学講師 社会開発工学科 (〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

<sup>2</sup>フェロー Ph.D. 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

調和振動下の非定常空気を力を用いた従来のフラッター解析では、空気の前提と固有値解の振動状態が一致しないという問題点があった。本研究では、平板翼空気の作用する2次元橋桁を対象に、一般振動下の非定常空気を力を用いたフラッター解析を行うとともに、空気および運動方程式の定式化の違いがフラッター解析結果に及ぼす影響を調べた。その結果、一般振動仮定の定式化より求めた非定常空気力係数およびフラッター解析結果は高減衰領域において調和振動を仮定した結果と異なること、非定常空気力の有限次数近似モデルはフラッター解析においては一般減衰振動下の空気力として機能すること、が明らかとなった。

**Key Words :** bridge deck, flutter analysis, unsteady aerodynamic forces, generalized Theodorsen function, finite state approximate model

## 1. はじめに

フラッターは気流中で振動している物体に作用する非定常空気に起因する自励振動であり、橋梁を直接崩壊に導く危険な現象である。そのため、橋桁の耐フラッター特性は長大橋梁の設計に際しての第一義的な検討項目とされている。特に近年、明石海峡大橋を越える2500~3000m級の超長大吊形式橋梁の実現に向けての検討が進められ、MONO-DUO形式等の新しい構造形式を用いた長大吊形式橋梁<sup>1)3)</sup>が提案されている。これらの動的空気振動挙動は三次元性が強い。こうした三次元的な振動特性は耐風設計を行う上でも十分に考慮すべきである。しかし、三次元弾性モデルによる風洞実験は、かかる費用が莫大であり、最適な設計条件を見いだすためのパラメトリックスタディにも適していない。したがって、フラッターをはじめとする空力振動の解析的予測の重要度がますます高まっている。

橋梁のフラッター解析に関する従来の研究における非定常空気の定式化は、平板翼についての理論解であるTheodorsen関数をはじめとして、調和振動を前提としたものである。そして、それに基づく振動数領域でのフラッター解析手法は、Scanlan<sup>4)</sup>をはじめとする多くの研究者の努力によってほぼ完成さ

れたとよい。

しかし、こうした調和振動を前提とする空気力モデルには問題点もある。フラッター解析は本質的には複素固有値問題であるため、得られる固有値は一般には複素数となる。複素数解は橋桁が負減衰を含む一般減衰振動状態にあることを示しており、計算の前提としている調和振動とは一致しない。フラッター問題を気流中における橋桁の自由振動時の状態を求める問題とするならば、この不一致により正確な解は得られないことになる。また、橋桁のフラッターをアクティブコントロールにより抑制しようとする研究が近年行われ始めている<sup>5)8)</sup>。その中には橋桁に取り付けた制御翼を用いて空力的な制振を試みているものもある<sup>5)6)</sup>。そうした制御下にある橋桁あるいは制御翼は必ずしも調和振動状態にあるとは限らない。

いずれにせよ、長大吊形式橋梁の実現に関わる空力振動問題に関するより精密な検討を行うためには、調和振動のみならず発散振動、減衰振動を含む一般振動状態に対して適用可能な非定常空気力モデルを導入しておくことが望ましい。航空分野では、航空機翼の制振・制御問題の一環として、非定常空気力の一般振動への拡張がすでに行われている<sup>9)</sup>。一般振動下の平板翼に関する理論解も得られており、

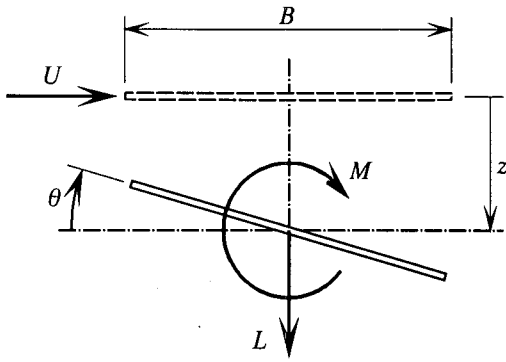


図-1 変位と空気力の定義

Theodorsen 関数を拡張した形式を持つそれは一般 Theodorsen 関数と呼ばれている<sup>9), 10)</sup>.

Theodorsen 関数に基づく非定常空気力係数は無次元振動数の関数として表されるため、橋桁のフラッター解析は従来振動数領域で行われてきた。しかし、振動数領域での定式化および解析手法は、アクティブコントロールのような通常時間領域で扱われる問題には適していない。そこで、藤野<sup>6), 11), 12)</sup>は振動数に依存しない非定常空気力モデルである有限次数近似モデルを提案し、モデル構築のためのパラメータ決定手法とその適用性を示すとともに、同モデルを制御翼による橋桁のフラッターのアクティブコントロール問題に応用した。藤澤<sup>13)</sup>は、同モデルを用いてフラッターメカニズムに関する考察を行った。また、この空気力モデルは時間領域での橋桁のガスト応答解析にも適用されている<sup>14), 15)</sup>。

こうした背景をふまえ、本研究では、平板翼空気力の作用する2次元橋桁を対象に、一般振動下の非定常空気力を用いたフラッター解析を試みる。まず、Theodorsen 関数および一般 Theodorsen 関数に基づく非定常空気力および運動方程式の定式化を示し、従来の調和振動に基づくフラッター解析手法の問題点等を検討する。また、両定式化に基づく非定常空気力係数およびフラッターモード分枝の比較を通じて、定式化の違いが解析結果に及ぼす影響を具体的に示す。さらに、これら振動数領域での非定常空気力モデルと有限次数近似モデルとに基づく非定常空気力係数およびフラッター解析結果の比較により、両者の工学的な関連性について考察する。

なお、本論文での表記は、付録を除きすべて図-1に基づく。また、非定常空気力の加速度項は無視している。

## 2. 各種非定常空気力モデルおよびフラッター解析手法

(1) 調和振動 (Theodorsen 関数) に基づく定式化  
風速  $U$  の気流中で桁幅  $B$  の橋桁が円振動数  $\omega$  で鉛直たわみ、ねじれの2自由度連成調和振動 ( $z, \theta$ ) をしているとき、橋桁に作用する非定常揚力  $L$  及び空力モーメント  $M$  は次式で表せる。

$$L = \pi\rho B^3 \omega^2 \left[ L_{zR} \frac{z}{B} + L_{zI} \frac{\dot{z}}{B\omega} + L_{\theta R} \theta + L_{\theta I} \frac{\dot{\theta}}{\omega} \right] \quad (1a)$$

$$M = \pi\rho B^4 \omega^2 \left[ M_{zR} \frac{z}{B} + M_{zI} \frac{\dot{z}}{B\omega} + M_{\theta R} \theta + M_{\theta I} \frac{\dot{\theta}}{\omega} \right] \quad (1b)$$

ここに、 $\rho$  は空気密度である。非定常空気力係数  $L_{zR}, L_{zI}, L_{\theta R}, L_{\theta I}, M_{zR}, M_{zI}, M_{\theta R}, M_{\theta I}$  は無次元振動数  $K = B\omega/U$  の関数であり、平板翼の場合は Theodorsen 関数により理論解が与えられる。

鉛直たわみ、ねじれの2自由度を持つ2次元橋桁に関する運動方程式は、式(1)を用いて次式で表せる。

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F_1\dot{q} + F_2q \quad (2a)$$

$$q = \begin{Bmatrix} z/B \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} mB^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2b,c)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2mB^2\xi_z\omega_z & 0 \\ 0 & 2I\xi_\theta\omega_\theta \end{bmatrix} \quad (2d)$$

$$K = \begin{bmatrix} mB^2\omega_z^2 & 0 \\ 0 & I\omega_\theta^2 \end{bmatrix} \quad (2e)$$

$$F_1 = \pi\rho B^4 \omega \begin{bmatrix} L_{zI} & L_{\theta I} \\ M_{zI} & M_{\theta I} \end{bmatrix} \quad (2f)$$

$$F_2 = \pi\rho B^4 \omega^2 \begin{bmatrix} L_{zR} & L_{\theta R} \\ M_{zR} & M_{\theta R} \end{bmatrix} \quad (2g)$$

ここに、 $m, I$  は各々橋桁の単位長さ質量および極慣性、 $\omega_z, \omega_\theta$  は各々鉛直たわみおよびねじれの固有円振動数、 $\xi_z, \xi_\theta$  は各々鉛直たわみおよびねじれの構造減衰定数である。

式(2a)の右辺を移項すれば、自由振動を表す実係数の運動方程式となる。この運動方程式あるいはさらに1階の常微分方程式の形式に改めた状態方程式に基づく複素固有値解析によりフラッター解析は行われる。式(2)にも示されるとおり、方程式の係数マトリクスは円振動数  $\omega$  と無次元振動数  $K$  の関数とな

る。したがって、風速  $U$  と円振動数  $\omega$  を仮定して収束計算を行うことでフラッター発振風速あるいはモード分枝を求めていく。

式(1)における非定常空気力の定義は橋桁が調和振動していることを前提にしている。しかし、式(2)の固有値は一般には複素数であり、橋桁の自由振動が一般減衰振動となることを示している。これは式(1)の前提とは一致しない。つまり、得られる固有値は気流中における自由振動状態を正確に再現するものではないことになる。正確な解が得られるのは固有値が調和振動を示すフラッター発生時のみであり、フラッター発振風速およびフラッター時のモード形状を求めるだけなら何の問題もない。しかし、フラッターモード分枝（風速-減衰曲線）を求める場合には、空力減衰の絶対値が大きくなるとともに解の精度は低下する。

## (2) 加速度表示形式に基づく定式化

式(2)に基づくフラッター解析においては、フラッター発振風速あるいは1つのフラッター分枝を求めるために、風速  $U$  と円振動数  $\omega$  による2重の繰り返し計算が必要となる。すべてのフラッター分枝を求めたい場合は、さらに1つ繰り返しのループを増やさねばならない。この計算上の煩雑さを避けるため、非定常空気力を加速度項にまとめ、無次元振動数  $K$  のみの関数として表現する定式化も提案されている<sup>16)</sup>。ここではこの非定常空気力の表現を加速度表示形式と呼ぶことにする。

加速度表示形式によるフラッター解析は、非定常空気力に加え、複素固有値解析によって得られる固有値が調和振動で近似できると仮定する。

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t} \quad (3a)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = i\omega \cdot \mathbf{q}_0 e^{i\omega t} = i\omega \cdot \mathbf{q} \quad (3b)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \cdot \mathbf{q}_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 \cdot \mathbf{q} \quad (3c)$$

ここに、 $i$  は虚数単位、 $t$  は時刻、 $\mathbf{q}_0$  は複素振幅の初期値である。これにより、式(1)は次式のように変形できる。

$$\mathbf{L} = -\pi\rho B^3 \left[ \left( L_{zR} + iL_{zI} \right) \frac{\ddot{z}}{B} + \left( L_{\theta R} + iL_{\theta I} \right) \ddot{\theta} \right] \quad (4a)$$

$$\mathbf{M} = -\pi\rho B^4 \left[ \left( M_{zR} + iM_{zI} \right) \frac{\ddot{z}}{B} + \left( M_{\theta R} + iM_{\theta I} \right) \ddot{\theta} \right] \quad (4b)$$

また、式(2)に対応する運動方程式は式(4)より次式で

表せる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_3\ddot{\mathbf{q}} \quad (5a)$$

$$\mathbf{F}_3 = -\pi\rho B^4 \begin{bmatrix} L_{zR} + iL_{zI} & L_{\theta R} + iL_{\theta I} \\ M_{zR} + iM_{zI} & M_{\theta R} + iM_{\theta I} \end{bmatrix} \quad (5b)$$

式(5)は、自由振動を表す複素係数の運動方程式となっている。この運動方程式の係数マトリクスは無次元振動数  $K$  のみの関数となるため、 $K$  を仮定して複素固有値解析を行えばすべてのモード分枝の固有値を一度に得ることができる。各モード分枝の風速は仮定した  $K$  の値とそのモード分枝の固有値（振動数）から決定され、分枝ごとに異なる。

加速度表示形式に基づくフラッター解析においては、無次元振動数  $K$  のみの繰り返し計算によってすべてのモード分枝およびフラッター発振風速を求めることができる。このことは、特に多モードフラッター解析において大きな利点となる。しかし、式(3)に示される固有値についての調和振動の仮定により、式(5)より得られるモード分枝は式(2)によるものとも一致せず、その差は空力減衰の絶対値が大きくなるにつれ増加する。正しい解が得られるのは、固有値が調和振動を示すフラッター発生時のみである。

## (3) 一般減衰振動（一般 Theodorsen 関数）に基づく定式化

一般 Theodorsen 関数は、Theodorsen 関数と同様の方法を用いて、複素平面（ラプラス領域）内で求められた平板翼空気力の理論解である。したがって、一般 Theodorsen 関数は次式の一般減衰振動を前提としていることになる。

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{st} \quad (6a)$$

$$s = -\xi\omega + i\omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (6b)$$

ここに、 $s$  はラプラス変換パラメータ、 $\omega$  は円振動数、 $\xi$  は減衰定数である。

風速  $U$  の気流中で桁幅  $B$  の橋桁が式(6)で表される鉛直たわみ、ねじれの2自由度連成一般減衰振動 ( $z, \theta$ ) をしているとき、橋桁に作用する非定常揚力  $L$  及び空力モーメント  $M$  は、一般 Theodorsen 関数に基づく形式により次式で表せる。

$$\mathbf{L} = -\pi\rho B^3 s^2 \left[ \bar{L}_{zR} \frac{z}{B} + i\bar{L}_{zI} \frac{\dot{z}}{Bs} + \bar{L}_{\theta R} \theta + i\bar{L}_{\theta I} \frac{\dot{\theta}}{s} \right] \quad (7a)$$

$$M = -\pi\rho B^4 s^2 \left[ \bar{M}_{zR} \frac{z}{B} + i\bar{M}_{zI} \frac{\dot{z}}{Bs} + \bar{M}_{\theta R} \theta + i\bar{M}_{\theta I} \frac{\dot{\theta}}{s} \right] \quad (7b)$$

ここに、 $\bar{L}_{zR}$ ,  $\bar{L}_{zI}$ ,  $\bar{L}_{\theta R}$ ,  $\bar{L}_{\theta I}$ ,  $\bar{M}_{zR}$ ,  $\bar{M}_{zI}$ ,  $\bar{M}_{\theta R}$ ,  $\bar{M}_{\theta I}$  は非定常空気力係数 (実数) であり、無次元ラプラス変換パラメータ  $\bar{s} = Bs/U$  の関数として表される。平板翼についての各係数の詳細は付録に示している。

鉛直たわみ、ねじれの2自由度を持つ2次元橋桁に関する運動方程式は、式(7)を用いて次式で表せる。

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = \bar{F}_1\dot{q} + \bar{F}_2q \quad (8a)$$

$$\bar{F}_1 = -i\pi\rho B^4 s \begin{bmatrix} \bar{L}_{zI} & \bar{L}_{\theta I} \\ \bar{M}_{zI} & \bar{M}_{\theta I} \end{bmatrix} \quad (8b)$$

$$\bar{F}_2 = -\pi\rho B^4 s^2 \begin{bmatrix} \bar{L}_{zR} & \bar{L}_{\theta R} \\ \bar{M}_{zR} & \bar{M}_{\theta R} \end{bmatrix} \quad (8c)$$

式(7), (8)は、調和振動を前提とする式(1), (2)における円振動数  $\omega$  をラプラス変換パラメータ  $s$  に、無次元振動数  $K$  を無次元ラプラス変換パラメータ  $\bar{s}$  へと各々拡張し、一般化した形式を持つ。調和振動を仮定し、 $s = i\omega$  を式(7), (8)に代入すると、式(1), (2)と同一の式となる。つまり、調和振動に基づく式(1), (2)は、複素平面内における虚軸上に限定した定式化となっている。

運動方程式の類似性のため、式(8)に基づくフラッター解析は調和振動仮定による従来の方法とほぼ同様に行うことができる。まず風速  $U$  を設定し、続いてラプラス変換パラメータ  $s$ 、すなわち円振動数  $\omega$  および減衰定数  $\xi$  を仮定する。これにより、無次元ラプラス変換パラメータ  $\bar{s}$  および運動方程式が定まる。ターゲットとするモード分枝の複素固有値と一致するまで、 $s$  ( $\omega$  と  $\xi$  の両方) を修正しながら複素固有値解析を繰り返す。結局、調和振動仮定の場合と同様、 $U$  と  $s$  による2重の繰り返し計算を行うこととなる。

この一般減衰振動下の非定常空気力によるフラッター解析においては、前提とする振動と解析の結果得られる固有値の振動状態が一致している。したがって、固有値は気流中における自由振動時の振動数および空力減衰という明確な物理的意味を持っている。また、前提と解析結果の振動状態の一致により、次式に示す変位項にまとめた定式化あるいは加速度表示形式を用いてもフラッター解析結果に差異は生じない。ただし、加速度表示形式により運動方程式

の係数マトリクスを  $\bar{s}$  のみの関数として表すことができるものの、 $\omega$  と  $\xi$  の両方を仮定する必要が生じるため計算の簡略化にはつながらない。

$$L = -\pi\rho B^3 s^2 \left[ \left( \bar{L}_{zR} + i\bar{L}_{zI} \right) \frac{z}{B} + \left( \bar{L}_{\theta R} + i\bar{L}_{\theta I} \right) \theta \right] \quad (9a)$$

$$M = -\pi\rho B^4 s^2 \left[ \left( \bar{M}_{zR} + i\bar{M}_{zI} \right) \frac{z}{B} + \left( \bar{M}_{\theta R} + i\bar{M}_{\theta I} \right) \theta \right] \quad (9b)$$

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = \bar{F}_3 q \quad (10a)$$

$$\bar{F}_3 = -\pi\rho B^4 s^2 \begin{bmatrix} \bar{L}_{zR} + i\bar{L}_{zI} & \bar{L}_{\theta R} + i\bar{L}_{\theta I} \\ \bar{M}_{zR} + i\bar{M}_{zI} & \bar{M}_{\theta R} + i\bar{M}_{\theta I} \end{bmatrix} \quad (10b)$$

式(7)による一般振動下の非定常空気力の問題点は、一般の橋桁断面についての空気力係数を実験的に求めることが困難である点である。これら空気力係数は無次元ラプラス変換パラメータの関数である。したがって、想定される複素平面内のあらゆる点について風洞実験を行う必要がある。さらに、気流中で任意の減衰振動を発生させ、そのときの空気力を正確に計測しなければならない<sup>17)</sup>。

#### (4) 有限次数近似モデルに基づく定式化

非定常空気力の有限次数近似モデルは、本来無限次数系で表される振動体周辺の気流状態および非定常空気力を、有限次数系で近似したモデルである。補助変数を導入することにより、同モデルは振動数に依存しない風速表示形式での非定常空気力の定式化を可能とする。

風速  $U$  の気流中で桁幅  $B$  の橋桁が円振動数  $\omega$  で鉛直たわみ、ねじれの2自由度で任意振動 ( $z, \theta$ ) をしているとき、橋桁に作用する非定常揚力  $L$  及び空力モーメント  $M$  は、有限次数近似モデルにより次式で表せる。

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} L/\frac{1}{2}\rho U^2 B \\ M/\frac{1}{2}\rho U^2 B^2 \end{array} \right\} = A_0 \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} + \frac{B}{U} A_1 \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \sum_{\ell=1}^{n_\ell} \begin{Bmatrix} x_{2\ell-1} \\ x_{2\ell} \end{Bmatrix} \\ \frac{B}{U} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{2\ell-1} \\ \dot{x}_{2\ell} \end{Bmatrix} = -\lambda_\ell \begin{Bmatrix} x_{2\ell-1} \\ x_{2\ell} \end{Bmatrix} + A_{\ell+1} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad \ell = 1, \dots, n_\ell \end{cases} \quad (11a,b)$$

ここに、 $x_m$  ( $m = 1, \dots, 2n_\ell$ ) は補助変数、 $n_\ell$  は近似

モデルの次数である。\$n\_\ell\$ を増やすことにより近似の精度は向上するが、自由度が増大する。\$A\_0, A\_1, A\_{\ell+1}\$ および \$\lambda\_\ell\$ (\$\ell=1, \dots, n\_\ell\$) は近似モデルにおける非定常空気力マトリクスおよびパラメータである。これらは断面形状のみに依存する定数パラメータである。

一般減衰振動を仮定し、式(6)を式(11)に代入すると、式(7)に対応する振動数表示形式の有限次数近似モデルを得る。

$$\begin{Bmatrix} L/\frac{1}{2}\rho U^2 B \\ M/\frac{1}{2}\rho U^2 B^2 \end{Bmatrix} = \left( A_0 + \bar{s}A_1 + \sum_{\ell=1}^{n_\ell} \frac{1}{\lambda_\ell + \bar{s}} A_{\ell+1} \right) \begin{Bmatrix} z \\ B \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (12)$$

式(12)の \$A\_0, A\_1, A\_{\ell+1}\$ および \$\lambda\_\ell\$ は、式(7)の非定常空気力係数より最小2乗法などのパラメータ推定手法を用いて決定される。通常用いられる振動数領域での非定常空気力係数は調和振動を仮定して求められているため、\$s = i\omega, \bar{s} = iK\$ とした上で式(1)より近似モデルが構築される。

鉛直たわみ、ねじれの2自由度を持つ2次元橋桁に関する運動方程式は、式(11)を用いて次式で表せる。

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = \gamma \left( A_0 q + \frac{B}{U} A_1 \dot{q} + \sum_{\ell=1}^{n_\ell} X_\ell \right) \quad (13a)$$

$$\dot{X}_\ell = \frac{U}{B} (-\lambda_\ell X_\ell + A_{\ell+1} q), \quad \ell = 1, \dots, n_\ell \quad (13b)$$

$$X_\ell = \begin{Bmatrix} x_{2\ell-1} \\ x_{2\ell} \end{Bmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \quad (13c,d)$$

橋桁の状態変数ベクトル \$\dot{q}, q\$ および補助変数ベクトル \$X\_\ell\$ (\$\ell=1, \dots, n\_\ell\$) を直列に並べた新たな状態変数ベクトルを定義すれば、式(13)より1階の常微分方程式の形式を持つ状態方程式が得られる。その自由度は \$2(2+n\_\ell)\$ である。方程式の係数マトリクスは風速 \$U\$ のみの関数となるため、\$U\$ を仮定して複素固有値解析を行えばすべてのモード分枝の固有値を一度に得られる。したがって、前述の加速度表示形式と同様、繰り返し計算の低減が可能となる。

式(11)に示した非定常空気力の有限次数近似モデルは任意振動を前提として定義されており、式(7)の一般減衰振動下の空気力よりさらに一般性が高い。式(13)の固有値解は複素数であり一般減衰振動を表すから、式(13)に組み込まれた非定常空気力は一般減衰振動により規定され、実質的に式(12)と一致する。

したがって、得られるフラッター解析結果は、式(8)あるいは式(10)の一般減衰振動を前提とした定式化によるものと本質的に同一のものである。

なお、有限次数近似モデルの一般性は、その係数パラメータ \$A\_0, A\_1, A\_{\ell+1}\$ および \$\lambda\_\ell\$ の決定方法には依存しない。調和振動を仮定し、式(1)と式(12)との係数比較によって係数パラメータを定めたととしても、式(12)からも明らかのように、式(11)は任意振動下の非定常空気力として機能する。つまり、振動状態(減衰)に応じて、非定常空気力係数は変化する。ただし、その精度については別問題である。調和振動下の空気力より構築した有限次数近似モデルが調和振動に対して高い近似精度を持っていたとしても、それがあらゆる振動状態に対しても同様の精度を持つとは限らない。

だが、任意振動下の平板翼空気力はあるスカラー関数により特徴づけられており、平板翼空気力の有限次数近似モデルはそもそも、その関数を有限個の指数関数で近似することによって定式化されたものである<sup>11)</sup>。この振動状態に依存しない数学的な一貫性のため、平板翼空気力を対象とした場合の有限次数近似モデルは、調和振動下の空気力をもとに構築されたとしても、一般振動全般を通じて一貫した近似精度の空気力モデルとなりうると考えられる。

有限次数近似モデルは本来無限次数で表されるべきものを有限次数で打ち切ったものであるから、モデル構築の際の近似誤差を免れることはできない。その近似誤差の評価をフラッター解析結果の比較を通じて行うのであれば、式(9)の一般減衰振動下の空気力に基づく定式化を比較対象とするのが望ましい。調和振動を前提とする従来のフラッター解析結果との比較評価を行う場合には、有限次数モデル側を調和振動仮定に適合させた上で解析を行う等の注意が必要である。

### 3. 各種非定常空気力モデルによる平板翼の非定常空気力係数の比較

#### (1) Theodorsen 関数と一般 Theodorsen 関数

まず、付録の式(A-2)に示される平板翼についての一般 Theodorsen 関数が、翼の振動状態、すなわち減衰によってどの程度変化するかを調べた。対数減衰率 \$\delta\$ を仮定し、無次元風速 \$\bar{U} = U/Bf\$ (\$f\$ は振動数) の関数として表した、一般 Theodorsen 関数の実部および虚部を図-2 に示す。\$\delta = 0\$ の場合が、調和振動仮定の解である Theodorsen 関数を表している。

図に示されるとおり、減衰による一般 Theodorsen

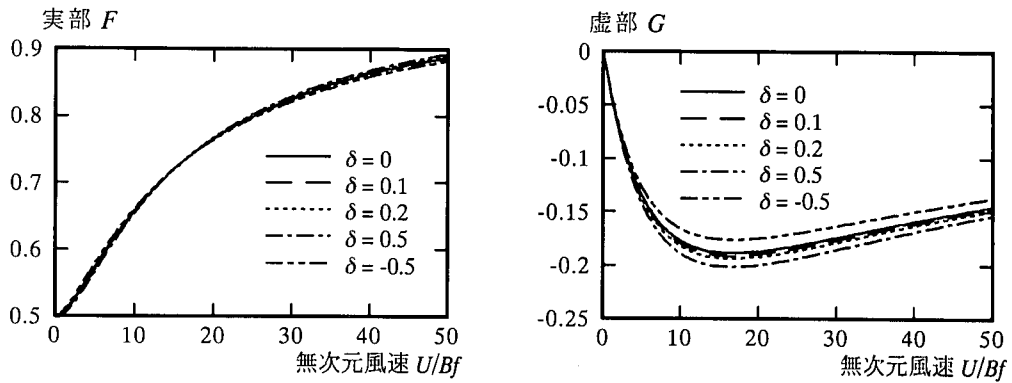


図-2 一般 Theodorsen 関数

関数の変化はさほど大きくない。実部については、 $\delta = 0.5$ としても $\delta = 0$ の場合との差はほとんど認められない。一方、虚部については、減衰によって比較的大きな変化が生じていくものの、 $\bar{U} = 16$ 付近のピーク値についての $\delta = 0, 0.5$ の両ケースの差異は7%程度である。

(2) 振動状態が非定常空気力係数に及ぼす影響

式(7) および付録の式(A-4)に示される、平板翼についての一般 Theodorsen 関数に基づく非定常空気力係数を図-3 に示す。図-2 と同様、無次元風速  $\bar{U} = U/Bf$  の関数として表し、対数減衰率  $\delta$  による変化を示している。

図に示されるとおり、8つの非定常空気力係数のうち減衰による影響が大きいのは、 $\bar{L}_{zR}, \bar{L}_{\theta l}, \bar{M}_{zR}, \bar{M}_{\theta l}$  の4つである。 $\bar{U} = 20$ における $\delta = 0, 0.5$ の両ケースの差異は各々39%, 270%, 39%, 65%程度である。残りの4係数については、減衰による変化はほとんど見受けられない。

各係数の感度解析<sup>10), 18)</sup>により、フラッター発振風速およびフラッターモード分枝の空力減衰に及ぼす影響が大きいのは、 $\bar{L}_{\theta R}, \bar{M}_{z l}, \bar{M}_{\theta R}, \bar{M}_{\theta l}$  の4つと考えられる。このうち、先の減衰の影響が大きい係数と合致するのは $\bar{M}_{\theta l}$ であることから、調和振動、一般減衰振動下の非定常空気力を用いたフラッター解析より得られるフラッターモード分枝に差異が生じるとすれば、この係数が主要因と考えられる。

(3) 有限次数近似モデルによる非定常空気力係数<sup>19)</sup>

平板翼空気力の有限次数近似モデルとして、本研究では増川らの非線形最適化手法による推定値<sup>11)</sup>を用いる。この推定値は、モデル次数を $n_e = 2$ と設定

した最小次数近似モデルに基づき、調和振動下の平板翼空気力 (Theodorsen 関数) より求められている。推定時の無次元振動数の範囲は  $0.1 \leq K \leq 1$  ( $2\pi \leq \bar{U} \leq 20\pi$ ) である。式(11)~(13)における具体的な係数パラメータは次式のとおりとなる。

$$\lambda_1 = 0.1912, \lambda_2 = 0.7477 \quad (14a,b)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1.304 & -3.533 \\ 0.3354 & 0.8738 \end{bmatrix} \quad (14c)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.384 & -2.358 \\ 0.7989 & -0.1875 \end{bmatrix} \quad (14d)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.05030 & -0.2713 \\ -0.01197 & 0.06456 \end{bmatrix} \quad (14e)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.7527 & -0.8478 \\ -0.1991 & 0.2242 \end{bmatrix} \quad (14f)$$

式(12)と式(14)より換算して求めた式(7)における非定常空気力係数を、式(7)の厳密解と比較して図-4 に示す。図中には、調和振動を示す対数減衰率  $\delta = 0$  のケースだけでなく、一般減衰振動状態である  $\delta = 0.5, -0.5$  のケースについての比較結果も示してある。

式(14)の係数パラメータは調和振動下の非定常空気力から決定されたものであるから、 $\delta = 0$  のケースでの厳密解との比較によって、その近似精度を調べることができる。 $\bar{L}_{zR}, \bar{M}_{zR}$  において無次元風速  $\bar{U}$  が 20 を越えるあたりから誤差が増大するのが認められるが、その他の係数では非常に精度の高い近似値が得られていることが分かる。

一方、前述のとおり一般 Theodorsen 関数による非定常空気力係数の厳密解は減衰により変化する。 $\delta = 0.5, -0.5$  のケースについてのこの厳密解との比較より、有限次数近似モデルによる非定常空気力係

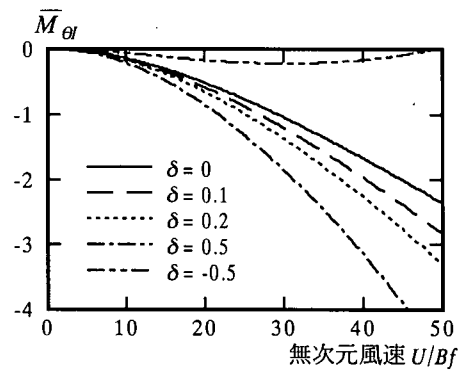
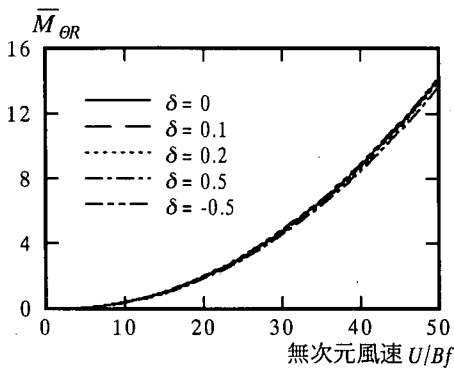
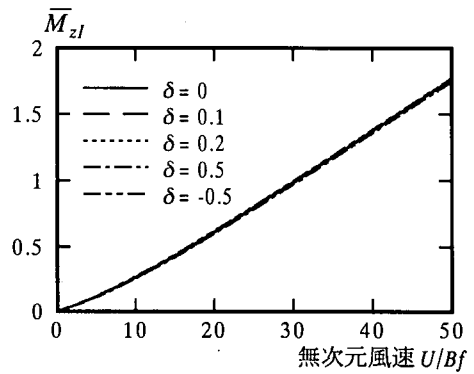
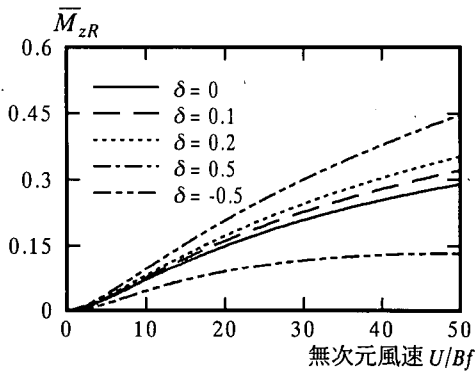
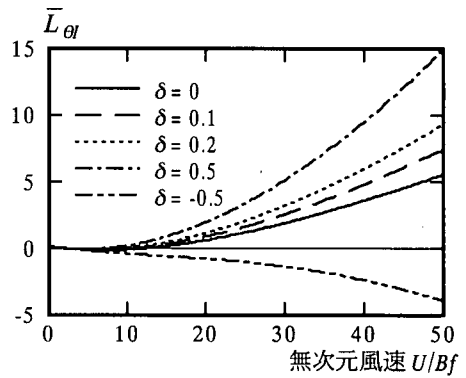
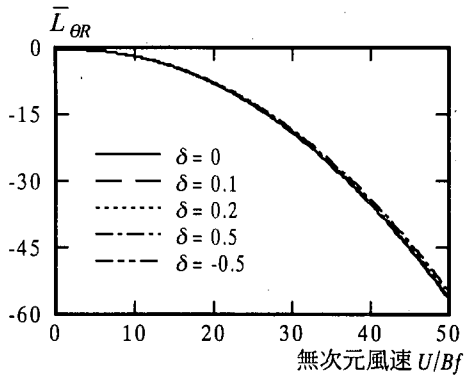
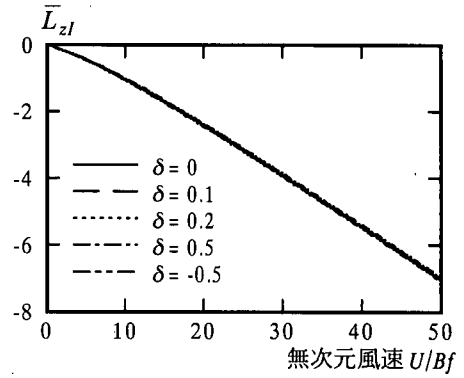
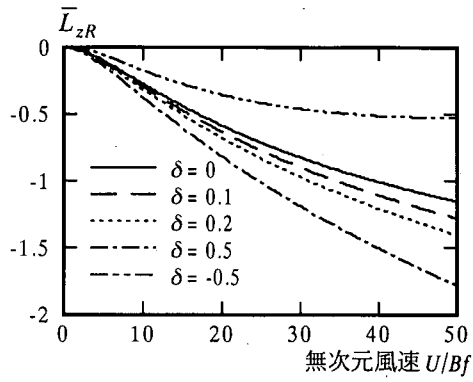


図-3 一般Theodorsen関数による平板翼の非定常空気力係数

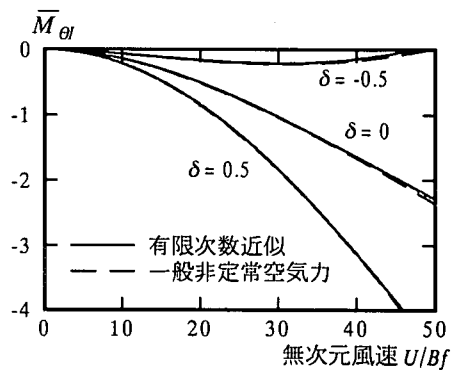
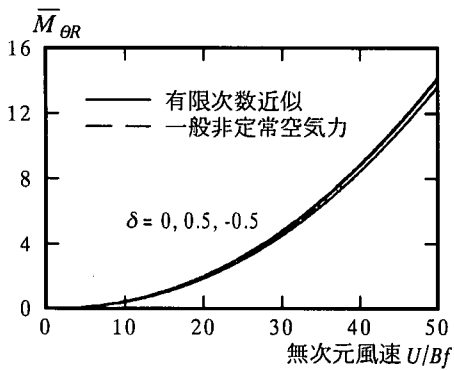
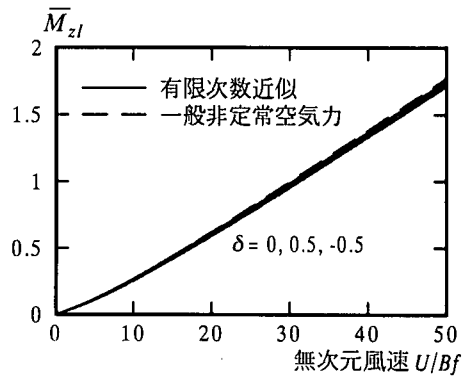
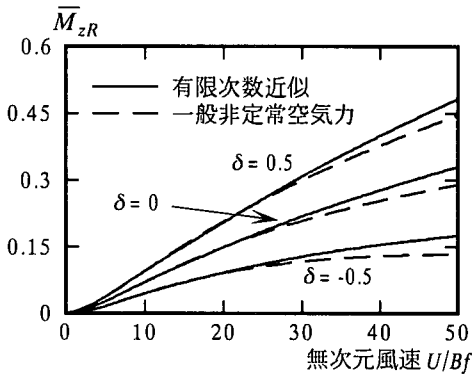
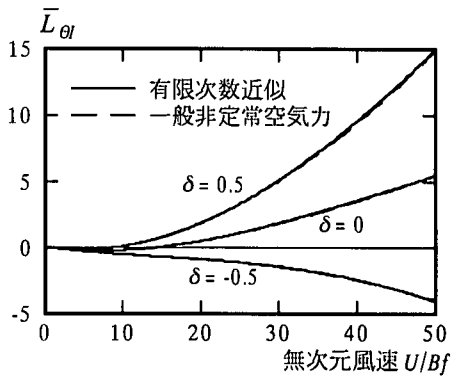
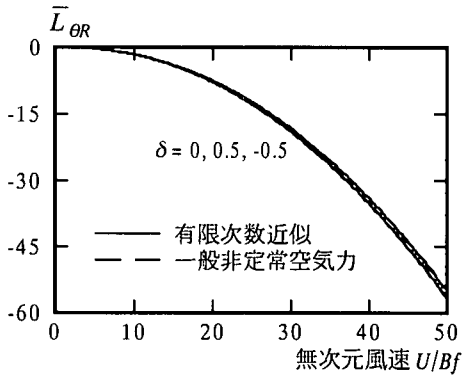
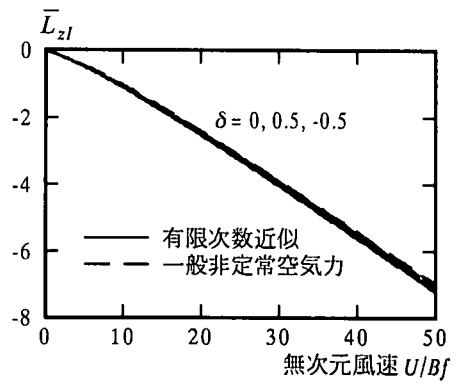
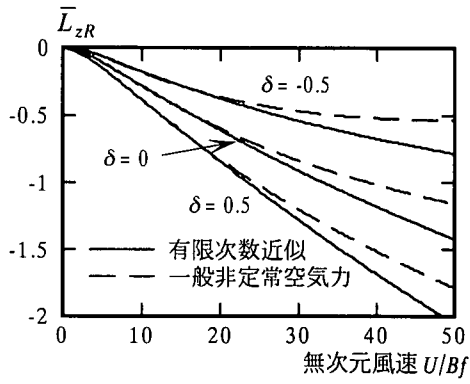


図-4 有限次数近似モデルによる平板翼の非定常空気力係数



表-1 フラッター解析諸元<sup>1)</sup>

項目	値
空気密度 $\rho$	1.225 [kg/m <sup>3</sup> ]
桁幅 $B$	38 [m]
単位長さ質量 $m$	$3.303 \times 10^4$ [kg/m]
単位長さ極慣性 $I$	$5.194 \times 10^6$ [kg·m <sup>2</sup> /m]
鉛直たわみ振動数	0.0644 [Hz]
ねじれ振動数	0.1704 [Hz]
構造減衰	0

数がその変化に対して追従していることが分かる。また、調和振動下の非定常空気力をもとに決定されているにもかかわらず、ここに示している有限次数近似モデルは一般減衰振動下の非定常空気力に対しても高い近似精度を有している。

#### 4. 平板翼空気力の作用する2次元橋桁についてのフラッター解析

##### (1) 解析条件とケース

2で述べた4種類の定式化を用いて、平板翼空気力の作用する2次元橋桁を対象に、フラッター解析を行った。有限次数近似モデルについては、3.(3)と同様式(14)に表される推定値を用いることとし、式(13)により解析を行った。解析に用いた橋桁の構造諸元は、文献1)の中央スパン長2500m級吊橋の諸元を参考に、表-1のとおりとした。

4種類の解析方法については、以後便宜的に以下のケース名で呼ぶことにする。

- ・ケース1：式2)に基づく調和振動下の非定常空気力を用いた解析
- ・ケース2：式5)に基づく調和振動下の非定常空気力の加速度表示形式を用いた解析
- ・ケース3：式8)に基づく一般減衰振動下の非定常空気力を用いた解析(厳密解)
- ・ケース4：式13)に基づく非定常空気力の有限次数近似モデルを用いた解析

##### (2) 調和振動および一般減衰振動を前提とするフラッター解析結果の比較

フラッター解析結果を図-5に示す。ここではまず、ケース1～3の比較を行う。前提としている振動状態の違いはあるが、これら3ケースの解析に用いている非定常空気力はいずれも平板翼に関する厳密解である。したがって、この比較により、非定常空気

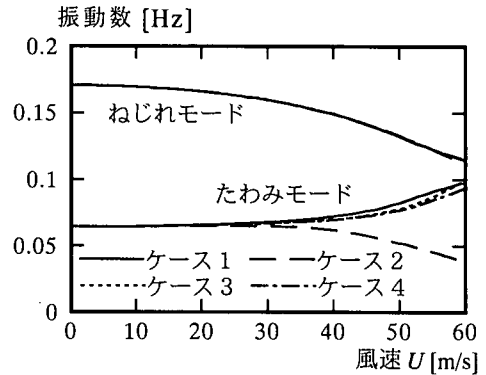


図-5a) フラッター解析結果(風速-振動数曲線)

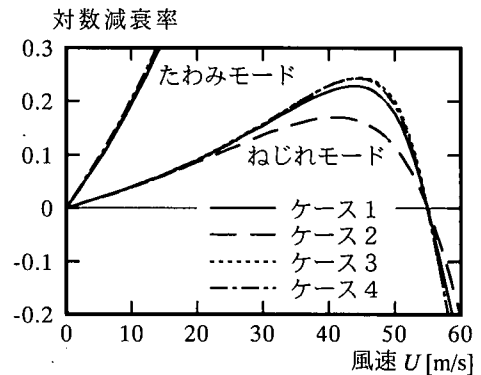


図-5b) フラッター解析結果  
(風速-減衰曲線、ねじれモード分枝)

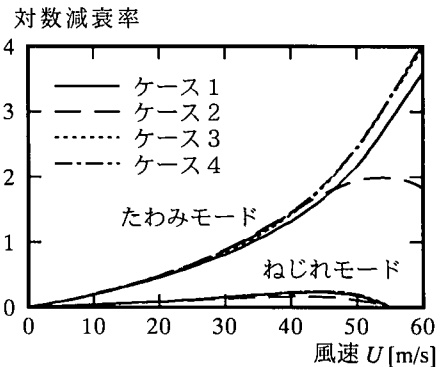


図-5c) フラッター解析結果  
(風速-減衰曲線、鉛直たわみモード分枝)

力および運動方程式の定式化がフラッター解析結果に及ぼす影響を調べることができる。

図-5a)には、両モード分枝の振動数の変化を示している。フラッター分枝であるねじれモード分枝に関しては、ほぼ一致した結果が得られている。一方、

鉛直たわみモード分枝については、ケース2が他のケースとは大きく異なる経路をたどっている。ケース1, 3において風速の上昇とともに振動数が単調増加するのに対し、ケース2の振動数は、風速25m/s付近までは増加傾向を示すものの、その後は単調に減少する。風速60m/sの振動数値は他ケースの4割程度である。この風速における無次元振動数 $\bar{U}$ の値を見ると、ケース1, 3で約21, ケース2では約42であった。

図-5b)には、空力減衰の変化をねじれモード分枝に着目して示している。風速の上昇によりねじれモード分枝の空力減衰が増加するに伴い、一般減衰振動を前提とするケース3の減衰値が調和振動を前提とするケース1の値を上回る傾向を示すことが分かる。正減衰のピーク値を比較すると両ケースの差異は約7%である。ケース2も他と同様の経路をたどるものの、高減衰領域における減衰値はケース1, 3に比べかなり小さくなる。ケース2のピーク減衰値はケース3の7割程度である。本解析におけるケース3のピーク減衰値は約0.24であるが、橋桁諸元によってはさらにこの値が高くなる可能性もある。その場合、フラッターモード分枝の空力減衰値の差異はさらに増大する。逆に空力減衰値が低い場合には、差異は小さくなる。一方、フラッター発振風速については、3ケースの値は55m/s ( $\bar{U}=12$ )と一致している。3で述べたとおり、フラッター発振時の振動状態は調和振動であり、調和振動を前提とする非定常空気を力を用いたとしても誤差が生じないためである。

図-5c)には、減衰の変化を鉛直たわみモード分枝に着目して示している。たわみモード分枝についても、ねじれモード分枝と同様、ケース1の空力減衰はケース3に比べ小さめの値となる。ただし、風速60m/sにおける両ケースの差異は約9%であり、空力減衰値が4程度と非常に高い割には、さほど大きな差は生じていない。ケース2の減衰値は、振動数と同様、風速の上昇とともに他ケースとは異なった経路をとっており、風速55m/s付近で上昇から下降に転じている。

以上のように、非定常空気の力的前提となる振動状態の違いにより、フラッター解析結果にはある程度の差異が生じる。したがって、橋桁のフラッター分枝経路等に関する正確な評価を行うためには、一般減衰振動下の空気力モデルを用いる必要があると考えられる。また、調和振動下の非定常空気の力加速度表示形式を用いた解析には、フラッターモード分枝の空力減衰値をかなり低く評価する、鉛直たわみ

モード分枝の振動数が風速とともに低下する、といった問題点があることが分かった。

### (3) 有限次数近似モデルを用いたフラッター解析結果

図-5中には有限次数近似モデルを用いたケース4の結果もあわせて示してある。3で述べたとおり、この空気力モデルは一種の近似モデルであり、近似誤差を含んでいる。ただし、同モデルはフラッター解析においては一般減衰振動下の空気力として機能するため、従来の調和振動を前提とする空気力モデルによる解析結果との比較を通じて、その近似誤差を評価するのは妥当ではない。ここでは、一般減衰振動下の空気力を用いたケース3との比較により、有限次数モデルの近似精度を調べる。

ケース4の解析結果は、振動数、減衰とも総じてケース3とよい一致を見せている。比較的大きな誤差が生じているのは鉛直たわみモード分枝の振動数であるが、風速60m/sにおける両ケースの差異は5%程度である。ねじれモード分枝の空力減衰に着目すると、ピーク減衰値のケース3との差異は0.7%、フラッター発振風速の誤差は0.15%であった。

以上のことから、適切に決定された有限次数近似モデルより得られるフラッター解析結果は、一般減衰振動下の非定常空気力による解析結果とほぼ一致することが分かった。

## 5. まとめ

本研究では、平板翼空気力の作用する2次元橋桁を対象に、一般振動下の非定常空気力を用いたフラッター解析を行った。調和振動、一般減衰振動を前提とする各種定式化についての比較を通じて、定式化の違いが非定常空気力係数およびフラッター解析結果に及ぼす影響を調べた。また、有限次数近似モデルについて、他形式の空気力モデルとの工学的な関連性を検討した。得られた主な知見を以下にまとめる。

- (1) 調和振動下の非定常空気力を用いた従来のフラッター解析では、空気力的前提と固有値解の振動状態が一致しないため、解の物理的な意味が不明瞭である。一方、一般減衰振動下の非定常空気力を用いた解析においては、前提と解の振動状態を一致させることができるため、得られる固有値解は気流中における自由振動時の振動数および空力減衰という明確な物理的意味を持つ。
- (2) 一般減衰振動を前提とする定式化のもとでは、非

定常空気力係数は減衰によって変化する。したがって、フラッター解析によって得られる空力減衰は、その減衰量が大きくなるにしたがって、調和振動を前提とする解析結果とは乖離していく。このことから、橋桁のフラッター分枝経路等に関する正確な評価を行うためには、一般減衰振動下の空気力モデルを用いる必要があると考えられる。

(3) 非定常空気力の有限次数近似モデルは、複素固有値問題であるフラッター解析においては、一般減衰振動下の空気力として機能する。同モデルは一種の近似モデルではあるが、その係数の決定を適切に行うことにより、少なくとも平板翼空気力に関しては、かなり精度の高い空気力モデルとなる。また、このモデルは、調和振動下の非定常空気力係数から一般振動下の空気力モデルを構築できる、風速のみを仮定することによりすべてのモード分枝の固有値を求めることができる、といった利点を有している。

謝辞：本研究を行うにあたり、四日市市の戸本直弥氏（研究当時名古屋工業大学大学院生）にご協力いただきました。また、鹿島の増川淳二氏より有限次数近似モデルについてのデータをご提供いただきました。ここに記して、感謝の意を表します。また、本研究は文部省科学研究費（奨励研究(A) 08750586）の補助を受けました。

## 付録 一般 Theodorsen 関数による平板翼空気力の理論解

ここでは、図-A1 に示す航空分野の慣例に基づく定義で、一般減衰振動下の平板翼に作用する非定常空気力の理論解を示す。非定常揚力  $L$  及び空力モーメント  $M$  は次式で表される。

$$\frac{L}{2\pi\rho U^2 b} = \left\{ \frac{\bar{s}^{*2}}{2} + \bar{s}^* C(\bar{s}^*) \right\} \frac{z}{b} + \left\{ \frac{\bar{s}^*}{2} + \left[ \frac{\bar{s}^*}{2} + 1 \right] C(\bar{s}^*) \right\} \theta \quad (\text{A-1a})$$

$$\frac{M}{2\pi\rho U^2 b^2} = \frac{\bar{s}^*}{2} C(\bar{s}^*) \frac{z}{b} - \left\{ \frac{\bar{s}^{*2}}{16} + \frac{\bar{s}^*}{4} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \bar{s}^* + 1 \right] C(\bar{s}^*) \right\} \theta \quad (\text{A-1b})$$

ここに、 $b (= B/2)$  は半弦長、 $\bar{s}^* (= bs/U = \bar{s}/2)$  は  $b$

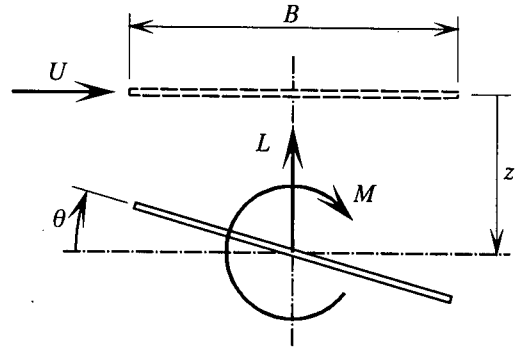


図-A1 航空分野の慣例に基づく変位と空気力の定義

で定義された無次元ラプラス変換パラメータである。 $C(\bar{s}^*)$  が一般 Theodorsen 関数であり、次式のように与えられる。

$$C(\bar{s}^*) = \frac{K_1(\bar{s}^*)}{K_0(\bar{s}^*) + K_1(\bar{s}^*)} \quad (\text{A-2})$$

ここに、 $K_0$ 、 $K_1$  は各々1、2次の第2種変形ベッセル関数である。式(A-2)は Theodorsen 関数を拡張したものであり、 $\bar{s}^* = ik$  ( $k = b\omega/U$ ) を代入すると Theodorsen 関数と同一の式となる。

式(A-1)を整理すると、非定常空気力および空気力係数は次式ようになる。

$$L = \pi\rho b^3 s^2 \left[ \bar{L}_z^* \frac{z}{b} + \bar{L}_\theta^* \theta \right] \quad (\text{A-3a})$$

$$M = \pi\rho b^4 s^2 \left[ \bar{M}_z^* \frac{z}{b} + \bar{M}_\theta^* \theta \right] \quad (\text{A-3b})$$

$$\bar{L}_z^* = \frac{2}{\bar{s}^*} C(\bar{s}^*) \quad (\text{A-3c})$$

$$\bar{L}_\theta^* = \frac{2}{\bar{s}^{*2}} C(\bar{s}^*) + \frac{1}{\bar{s}^*} [1 + C(\bar{s}^*)] \quad (\text{A-3d})$$

$$\bar{M}_z^* = \frac{1}{\bar{s}^*} C(\bar{s}^*) \quad (\text{A-3e})$$

$$\bar{M}_\theta^* = \frac{1}{\bar{s}^{*2}} C(\bar{s}^*) - \frac{1}{2\bar{s}^*} [1 - C(\bar{s}^*)] \quad (\text{A-3f})$$

図-1 と図-A1 における揚力の定義の違いに注意して、式(A-3)と係数を比較することにより、式(7)の非定常空気力係数は次のように与えられる。

$$\bar{L}_{zR} = \frac{1}{4} \text{Re}[\bar{L}_z^*], \quad \bar{L}_{zI} = \frac{1}{4} \text{Im}[\bar{L}_z^*] \quad (\text{A-4a,b})$$

$$\bar{L}_{\theta R} = \frac{1}{8} \operatorname{Re}[\bar{L}_{\theta}^*], \quad \bar{L}_{\theta I} = \frac{1}{8} \operatorname{Im}[\bar{L}_{\theta}^*] \quad (\text{A-4c,d})$$

$$\bar{M}_{zR} = -\frac{1}{8} \operatorname{Re}[\bar{M}_z^*], \quad \bar{M}_{zI} = -\frac{1}{8} \operatorname{Im}[\bar{M}_z^*] \quad (\text{A-4e,f})$$

$$\bar{M}_{\theta R} = -\frac{1}{16} \operatorname{Re}[\bar{M}_{\theta}^*], \quad \bar{M}_{\theta I} = -\frac{1}{16} \operatorname{Im}[\bar{M}_{\theta}^*] \quad (\text{A-4g,h})$$

## 参考文献

- 1) 前田研一, 森園康之, 岩本政巳, 長井正嗣, 藤野陽三: 補助ハンガーシステムを併用した MONO-DUO 形式超長大吊橋の構造特性, 構造工学論文集, Vol.42A, pp.1049-1060, 1996.
- 2) 前田研一, 岩本政巳, 森園康之, 田平秀和, 長井正嗣, 藤野陽三: MONO-DUO 形式超長大吊橋の耐風安定性に及ぼすリジッドハンガーの効果, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.1209-1220, 1997.
- 3) 松田一俊, 樋上琇一, 宇野名右衛門, 鈴木政直: 超長大橋の設計上考慮すべき対風応答と新形式橋梁の提案その 1 ~ 3, 土木学会第 49 回年次学術講演会講演概要集 1(B), pp.1096-1101, 1994.
- 4) Scanlan, R. H.: The action of flexible bridges under wind, I: Flutter theory, *Journal of Sound and Vibration*, **60**(2), pp.187-199, 1978.
- 5) Kobayashi, H. and Nagaoka, H.: Active control of flutter of a suspension bridge, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 41-44, pp.143-151, 1992.
- 6) Wilde, K., Fujino, Y. and Bhartia, B.: Active control of flutter instability of bridge deck with rational function approximation of aerodynamic forces, 第 13 回風工学シンポジウム論文集, pp.425-430, 1994.
- 7) 日下部毅明, 佐藤弘史, 関谷光昭: アクティブコントロールによるフラッター制振に関する実験的研究, 第 13 回風工学シンポジウム論文集, pp.431-436, 1994.
- 8) 久保喜延, 加藤九州男, 山口栄輝, 幽谷栄二郎, 松尾智章: 偏平矩形柱のフラッター制振への境界層制御の適用, 第 14 回風工学シンポジウム論文集, pp.371-376, 1996.
- 9) 松下 洸: 非圧縮流中の有限翼に対する空気力学伝達関数, 航空宇宙技術研究所報告, TR-867, 1985.
- 10) 戸本直弥, 岩本政巳, 藤野陽三, 長谷部宣男: 一般 Theodorsen 関数を用いた橋桁のフラッター解析に関する基礎研究, 土木学会第 49 回年次学術講演会講演概要集 1(B), pp.1012-1013, 1994.
- 11) 増川淳二: 様々な橋梁断面に作用する非定常空気力の有限次数近似モデルとその応用, 東京大学修士論文, 1994.
- 12) Wilde, K., Fujino, Y. and Masukawa, J.: Time domain modeling of bridge deck flutter, 土木学会論文集, No.543/I-36, pp.19-30, 1996.
- 13) 藤澤伸光: 近似空気力を用いたフラッター特性の考察, 第 14 回風工学シンポジウム論文集, pp.485-490, 1996.
- 14) 松本泰尚, 藤野陽三, 木村吉郎: 状態方程式表示を用いたガスト応答解析の定式化の試み, 土木学会論文集, No.543/I-36, pp.175-186, 1996.
- 15) 松本 勝, 陳 新中: 長大橋ガスト時刻歴応答解析, 第 14 回風工学シンポジウム論文集, pp.515-520, 1996.
- 16) 宮田利雄, 山田 均, 太田博文: 立体骨組み解析法による横たわみしたトラス補剛吊橋の曲げねじれフラッター解析, 土木学会論文集, No.404/I-11, pp.267-275, 1989.
- 17) 佐伯公康, 宮田利雄, 山田 均: 一般化非定常空気力測定のためのアクティブ制御応用に関する基礎研究, 土木学会第 51 回年次学術講演会講演概要集 1(A), pp.458-459, 1996.
- 18) 岩本政巳, 藤野陽三, 磯部正治, 長谷部宣男: 2つのモードからなる自由振動波形を用いた橋桁の非定常空気力係数の同定, 第 12 回風工学シンポジウム論文集, pp.363-368, 1992.
- 19) 岩本政巳, 栗田 稔, 戸本直弥, 藤野陽三: 非定常空気力の有限次数近似モデルを用いた橋桁のフラッター解析, 土木学会第 50 回年次学術講演会講演概要集 1(B), pp.1484-1485, 1995.

(1997. 9. 5 受付)

## FLUTTER ANALYSIS OF BRIDGE DECK USING UNSTEADY AERODYNAMIC FORCES BASED ON GENERAL OSCILLATION

Masami IWAMOTO and Yozo FUJINO

Conventional flutter analysis formulation using unsteady aerodynamic forces based on sinusoidal oscillation has a problem that the oscillation condition of aerodynamic forces doesn't correspond to the eigen-solutions. This paper discussed flutter analysis of bridge deck using unsteady aerodynamic forces based on general damped oscillation and examined the influence of formulation of aerodynamic forces and equation of motion on the analysis results. It is found that the flutter derivatives and the flutter analysis results based on general oscillation tend to differ from the results based on sinusoidal oscillation as the damping value increases and that the finite state approximation model of aerodynamic forces functions as forces based on general oscillation in flutter analysis.