

修正放射状領域分割法と塑性信頼性解析への応用

香月 智

正会員 工博 防衛大学校助教授 (〒239-8686 横須賀市走水1-10-20)

本研究は、香月・Frangopol によって提案された放射状領域分割法の解析精度と計算効率を向上させるため技法の改良を行い、トラス構造物の塑性信頼性解析法への適用について検討したものである。まず、標準正規確率変数空間の領域分割の均一性を向上するために、分割領域の中心線ベクトルを周期型組み合わせ配置法に基づき創出する方法を提案した。続いて、確率変数の多い多次元空間における計算効率を向上させるため領域分割の細かさを2段階で調整する2段階領域分割法の技法を提案した。最後に提案手法をトラス構造の塑性信頼性解析に応用しその適用性について検討した。本論文では、数学的基本例題によって、周期型組み合わせ配置法による中心線ベクトル創出法および2段階領域分割法の計算精度および効率についてモンテカルロ法や方向シミュレーション法と比較検討したうえで、トラス構造の塑性信頼性解析においては、土石流荷重を受ける鋼製砂防ダムの問題を取り上げその適用性について検討した。

Key Words: advanced hyperspace division method, center line vector generation method, synchronized combination, two step radial division, system reliability, nonlinear limit state, plastic limit state.

1. 緒言

構造物の安全性照査法に対する確率統計的観点からの研究は数多く、土木学会¹⁾においても広くかつ系統的に検討されており、その重要性については広く認められるところであるが、未だ解決すべき課題が多い。例えば、許容応力度設計法から限界状態設計法へと移行しつつある一つの理由として、その部分安全係数の決定法の理論的背景として確率論的なアプローチを導入することができ、より合理的な設計法にできるとの期待があるものと考えられる。このような背景を踏まえて設計における安全性確保の手法を確率論的なアプローチから再検討することも試みられている²⁾。また、近年のコンピュータ環境の急速な発達には確率算定に要する計算負担を軽減し、徐々に確率論的アプローチの障害が取り除かれつつあるともいえる。

ところで、構造物の終局限界を取り扱う場合には、システム信頼性解析法に立脚する方がより信頼性の高い解析結果が得られる。現在、構造物の信頼性を評価するための代表的な手法には、一次モーメント法 (FORM) または2次モーメント法 (SORM) が用いられることが多い^{3), 4), 5)}。これらの手法は、限界状態面上における確率密度関数が最も大きくなる最尤点において、限界状態を線形関数 (FORM) または2次非線形関数 (SORM) に近似してその破壊確率を求めるものであり、最尤点を求める技法と近似限界状態関数を当てはめ破壊確率を算定する技法が組み合わされている。これらの手法は、限界状態関数が連続した滑らかな関数でその非線形性が小さい場合には、正確な破壊確率を算定でき計算負担も小さい。

しかし、限界状態が微分不可能な非連続な関数であったり、非線形性が強く、限界状態関数局面における確率密度関数が局所的に最大となる点が複数存在する問題などでは、必ずしも近似限界状態面の良いフィットングを得られず、計算精度が著しく低下することがある³⁾。また、これらは単一要素限界状態に関して適用されるものであり、複数の限界状態が混在するシステム信頼性解析には適用できない。FORMをベースにシステム信頼性問題を解く方法に、PNET法がある。PNET法⁵⁾は各要素限界状態ごとにFORMを用いて、要素破壊確率を算定した後、各限界状態関数相互の相関係数を臨界相関係数と比較することによって、積分に加える要素限界状態を取捨選択し積分するものである。PNET法はFORMに立脚するので計算負担が少なく簡便な手法であるが、解の精度を支配する臨界相関係数の設定については、経験則に依存するという難点もある。

代表的なシステム信頼性解析法にモンテカルロ法がある。モンテカルロ法の精度は、限界状態の非線形性やシステム性に依存しないため広範囲の問題に適用が可能である。しかし、解の精度は破壊確率の大きさとシミュレーション回数の相対関係に依存し、破壊確率が小さくなるにつれて所要のシミュレーション回数が増加し、計算所要時間が急激に増加する。すなわち、システム信頼性解析において計算効率と計算精度はトレードオフ関係にあり両者をバランス良く達成することが大切である^{6), 7)}。

香月・Frangopol⁸⁾は、非線形限界状態やシステム信頼性解析への適応が可能で計算効率の良い放射状領域分割

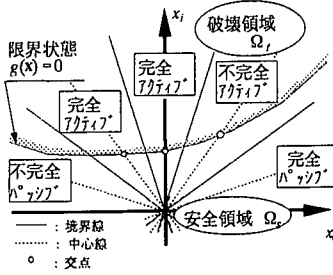


図-1 放射状領域分割と
完全・不完全領域

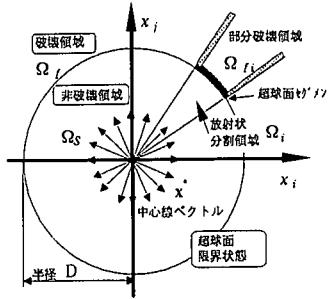


図-2 超球面限界状態関数と
部分破壊領域

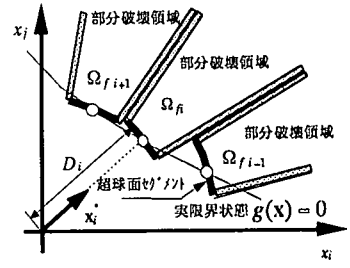


図-3 超球面切'メトによる
部分破壊領域の近似

法を提案した。この手法は、標準正規確率空間を原点周りに放射状に分割したうえで、各分割領域に属する部分破壊領域を超球面切'メトによる限界状態に近似することによって、カ2乗分布による破壊確率積分を行う手法である。この領域分割法は、確率変数の少ない問題に対しては極めて効率的であるが、確率変数の多い問題では、領域分割数を多くしてもあまりよい解析精度が得られないという問題があった⁹⁾。これは、放射状領域分割法の核となる中心線'メト創出法が未熟で標準正規確率変数空間を分割する際の均一性が空間次元の増大にともなって崩れるためである。

そこで本研究は、香月・Frangopolによって提案されたシステム破壊確率算定に用いる放射状領域分割法の解析精度と計算効率を向上させる技法改良を行い、トラス構造物の塑性信頼性解析法への適用について検討したものである。まず、標準正規確率変数空間の領域分割の均一性を向上するために、中心線'メトを周期型組み合わせ配置法に基づき創出する方法を提案した。続いて、確率変数の多い多次元空間における計算効率を向上させるため領域分割の密度を2段階で調整する2段階領域分割法を提案した。最後に、提案手法をトラス構造の塑性信頼性解析に応用しその適用性について検討した。

2. 解析基本式

(1) 放射状領域分割法の解析基本式⁸⁾

標準正規確率変数 \mathbf{x} (平均値: 0, 標準偏差: 1.0) 空間を、図-1に示すように原点周りに放射状に m 個の部分領域に分割する。この際、部分領域の中心線と限界状態関数 $g(\mathbf{x})$ とが交差する部分領域を Ω_{fi} 領域、交差点が得られない部分領域を Ω_{si} 領域と呼ぶ。そのうえで、 Ω_{si} 領域内に部分的に存在する破壊領域を無視すると、破壊確率は次式によって与えられる。

$$P_f = \sum_{i=1}^{m_a} P_{fi} \quad (1)$$

ここで、 P_f : 破壊確率、 P_{fi} : 部分破壊領域の事象発生確率(本研究では部分破壊確率と呼ぶ)、 m_a : Ω_{fi} な部分領域の総数。

ところで、 n 次元の標準正規確率変数空間において超球面形の限界状態関数 g_{SP} は、次式によって与えられる。

$$g_{SP} = -\sum_{i=1}^n x_i^2 + D^2 = 0 \quad (2)$$

ここで、 D : 超球面の半径。

この超球面限界状態に対する非破壊領域 ($\Omega_s = \{g_{SP} > 0\}$) と破壊領域 ($\Omega_f = \{g_{SP} < 0\}$) とに対する生起確率は、それぞれ次式によって与えられる。

$$P_s = P(\mathbf{x} \in \Omega_s) = \chi_n^2(D^2) \quad (3a)$$

$$P_f = P(\mathbf{x} \in \Omega_f) = 1 - \chi_n^2(D^2) \quad (3b)$$

ここで、 χ_n^2 : 自由度 n のカイ2乗分布による累積確率関数。

この空間を図-1.2に示すように原点周りに放射状に均等分割し、分割領域 (Ω_i) 内にある破壊領域 ($\Omega_{fi} = \Omega_i \cap \Omega_f$) を部分破壊領域、分割領域 Ω_i 内にある限界状態面を超球面切'メトと呼ぶものとする。この場合、図-2で明らかのように全領域は等分割されるので、部分破壊領域の生起確率は次式ようになる。

$$P_{fi} = P(\mathbf{x} \in \Omega_{fi}) = [1 - \chi_n^2(D^2)] / m \quad (4)$$

$i = 1, 2, \dots, m$

ここで、 P_{fi} : 部分破壊確率、 m : 分割数。

ところで、分割された領域は隣接する領域との境界を有するが、3次元以上の空間では均等分割するための隣接境界の形は定義することができない。そこで、各分割領域の中心を通る線の単位'メトを中心線'メト \mathbf{x}_i^* と呼ぶものとし、領域ごとに中心線'メトを与え、部分領域 Ω_i はその周囲に放射状に広がる領域として表すものとする。

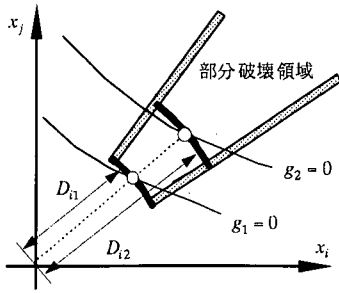
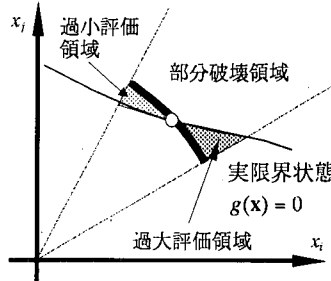
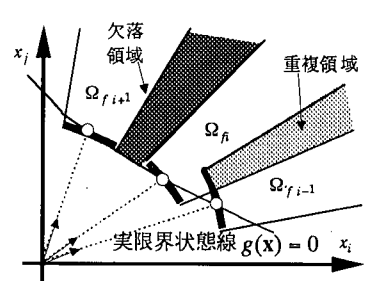


図-4 システム問題の近似部分破壊領域



(a) 超球面切ぐメトによる近似誤差



(b) 不均一な分割による誤差

図-5 領域分割法の誤差

一般の線形または非線形の限界状態関数では、図-3に示すように実限界状態関数と中心線ぐケルの交点に超球面切ぐメトを置き、その切ぐメトによって近似された部分破壊領域を設定する。よって、その近似された破壊確率が次式によって与えられる。

$$P_f = \sum_{n=1}^m P_n = \sum_{n=1}^m [1 - \chi_n^2(D_i^2)] / m \quad (5)$$

ここに、 D_i : 分割領域 i における限界状態面と中心線ぐケル x_i^* 方向上の交点の原点からの距離であり、次式を満足する。

$$g(D_i x_i^*) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

ここで、 $g(x)$: 限界状態関数。

すなわち、式(5)に代入する D_i は式(6)の解によって与えられる。しかし、式(6)は一方程式一未知数(D_i)問題であるので、例えばニュートン法や黄金分割法などによって、限界状態が非線形性であっても簡易に解を得ることが可能である。

また、複数の限界状態の組み合わせによって形成されるシステム問題では、図-4に示すように、一つの放射状分割領域内に複数の限界状態面が存在するが、これも同様な考え方で処理することができる。

まず、任意の要素限界状態が破壊に達するとシステム全体が破壊する直列システムの問題では、部分破壊領域 Ω_{fi} は次のように与えられる。

$$\Omega_{fi} = \Omega_i \cap \Omega \left[(g_{1i} < 0) \cup \dots \cup (g_{ni} < 0) \right] \quad (7)$$

ここで、 n_g : 限界状態関数の総数。

これは、図-4に示すように、各限界状態関数に対する超球面切ぐメトの距離 D_{ik} の中で、原点から最も短距離にある超球面切ぐメトをシステム破壊領域の代表切ぐメトとして選択することと等価である。よって、次の距離 D_i を式(5)に代入することによって、直列システム問題を解くことができる。

$$D_i = \min_k (D_{ik}) \quad (8)$$

直列システムと同様な近似手法によって、並列システムでは、原点から最も遠距離にある切ぐメトが代表切ぐメトとして与えられ、その距離は次式によって与えられる。

$$D_i = \max_k (D_{ik}) \quad (9)$$

(2) 周期型組み合わせ配置法による中心線ぐケル創出法

放射状領域分割法の近似誤差は、①超球面切ぐメトと実限界状態面との間に生ずる誤差と、②放射状分割の不均一性による誤差とがある。第①番目の超球面切ぐメトと実限界状態面との間に生ずる誤差は、図-5(a)に示すように超球面切ぐメトが実限界状態の外側に入り込むために生ずる過小評価領域と、その反対に内側に入り込むために生ずる過大評価領域とが存在する。図-5(a)から明らかのように、これらの誤差は切ぐメトの中心(交点)から離れるに従って大きくなるため、切ぐメトを小さく、すなわち、分割数を増加することによって、誤差を小さくすることが可能である。第②番目の領域分割の不均一性による誤差の模式図を図-5(b)に示す。この図のように、本来均一であるべき中心線ぐケルが不均一に配置されていると、隣接する中心線ぐケルの間隔が広すぎる部分に、いずれの分割領域にも所属しない欠落領域が生じ、逆に間隔が狭すぎる部分に、部分領域が二重に評価される重複領域が生ずる。この第②番目の誤差は、中心線ぐケルの創出法のもつ偏りに依存するため、第①番目の誤差とは逆に、分割数を多くするにともなって誤差が大きくなる性質がある。すなわち、均一性を十分に保つ分割手法の開発が放射状領域分割法の計算精度と効率を高めるために必要である。

そこで本研究では、先に著者らが提案した手法を改良した周期型組み合わせ配置法による中心線ぐケル創出法を提案する。

まず、 i 番目の中心線ぐケル $x_i^* = [x_{1i}^*, \dots, x_{ji}^*, \dots, x_{ni}^*]^T$ を、次式のような極座標補助変数 θ_i を用いて創出するものとする。

$$x_{1,i}^* = \cos \theta_{1,i} \cos \theta_{2,i} \dots \cos \theta_{n-1,i} \quad (10a)$$

$$x_{j,i}^* = \sin \theta_{j-1,i} \prod_{k=j}^{n-1} \cos \theta_{k,i} \quad (10b)$$

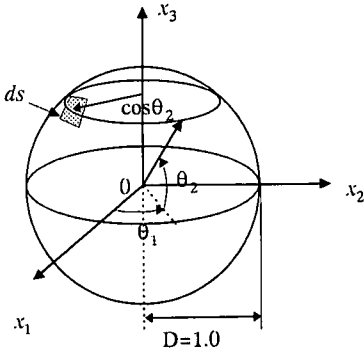
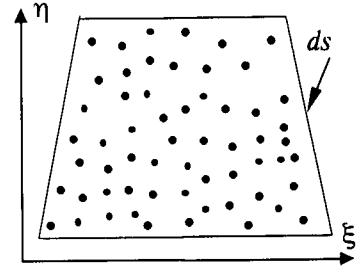
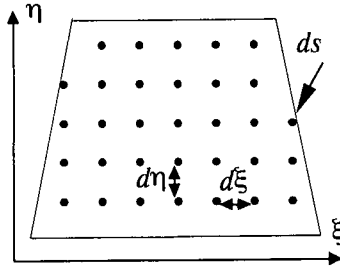


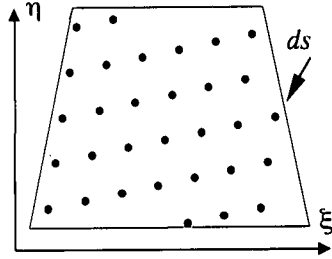
図-6 単位超球面と極座標



(a) ランダム配置



(b) 格子型配置



(c) 周期型組み合わせ配置法

図-7 2次元(η,ξ)面への等密度な配点法

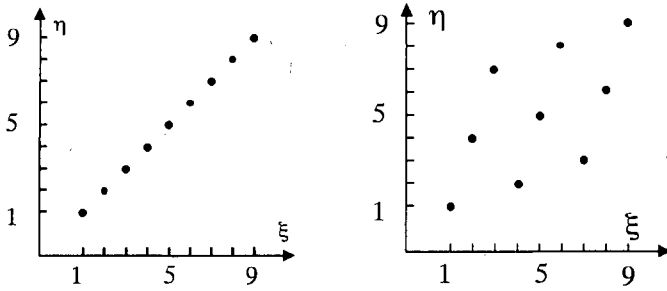
$$x_{n,i}^* = \sin \theta_{n-1,i} \quad (10c)$$

図-6に示すように、中心線ベクトルは単位長さを持つのでその先端は、単位半径の超球面の表面上に配置される。その際、単位超球面が均等に分割されるためには、表面上のいずれの領域 ds 内においても、その先端の配置された点数が等密度に存在しなければならない。ある面内に等密度な点を配置する方法には、次の3つの案が考えられる。第一の方法は、図-7(a)に示すような、表面 ds 上にランダムに配置する考え方である。この手法を方向ベクトルに拡張したものが、方向シミュレーション法(Directional Simulation Method)^{10,11)}である。すなわち、 n 次元の標準正規確率変数のベクトル長さは、カイ2乗分布に従い、その方向に関しては等分布である性質を利用し、ランダムに生成された n 次元の標準正規確率変数のベクトル長を単位長に正規化するものである。この手法は、サンプルサイズが十分に大きい場合に均等性が高くなるが、サンプルサイズが小さいと必ずしも均一な方向ベクトルとはならない。また、ランダムな標準正規確率変数の生成技法の精度にも依存する。第二の方法は、図-7(b)に示すような、超球面の表面上に格子型に等間隔($d\xi = d\eta$)に配置する手法で、著者らが先の研究で提案した手法⁹⁾はこの考え方に立脚している。この方法は、概念が簡明であるため比較的容易にプログラム化できる。しかし、格子型配置を行うには、超球面の表面上に設けた座標 ξ, η に対して、格子点間距離 $d\xi, d\eta$ がともに同一間隔であるように算定する必要があるが、この超球面の表面は、図-6で明らかのように助変数 θ ベクトル

の位置によって歪みが生ずる。この歪みは空間の次元数が大きくなるに連れて複雑になるため、その補正方法の精度を保つことができなかった。第三の手法は、図-7(c)に示す周期型組み合わせ配置法によるものである。これは、予めそれぞれ軸座標変数である ξ, η の要求される分布特性に従う数列を大小順に生成した上で、一方の変数は順番にピクアップし、他方の変数は固定された数ごとにスキップしながら数列からピクアップしたものを組み合わせるものである。これはあたかも一方の変数が1周期する間に、他方の変数が数周期巡回するようにみえるので、本研究ではこのように呼ぶものとする。

格子型配置法と周期型組み合わせ配置法との違いについては、文献8)で述べた格子型配置法の分割手順と本法を詳細に比較して詳述する必要があり、重複するので簡単に相違を述べると、格子型配置法では、同一量の変数(図-7(b)では、 η や ξ 、式(10)では θ_j)を重複して複数回用いるため、分布が離散的になるのに対し、周期型組み合わせ配置法では、同一量の変数は一度しか使用せずに隣接量との間隔によって分布を規制するので、分布関数がより滑らかに実現できる点が根本的に異なる。この周期型組み合わせ配置法の考え方は、多変数の場合にも各変数の異なる分布特性を独立的に管理したうえで、組み合わせることが可能のため、補助変数の要素ごとに分布の異なる超球面の分割に都合がよい。

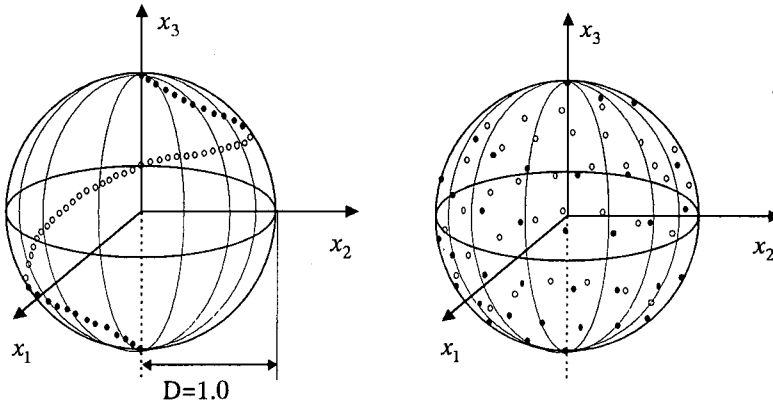
さて、単位超球面の全表面積 S は、次式によって表される。



(a) 単純組み合わせ法

(b) 周期型組み合わせ配置法

図-8 等分布数列の組み合わせによる2次元面への配列



(a) 単純組み合わせ法

(b) 周期型組み合わせ配置法

図-9 数列 θ_1 と θ_2 の組み合わせによる単位超球面上へのベクトル配置

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \theta_2 \cdots \cos^{j-1} \theta_j \cdots \cos^{n-2} \theta_{n-1} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_j \cdots d\theta_{n-1} \quad (11)$$

よって、表面積 S の助変数 θ_j に関する微分は、次式のように与えられる。

$$\frac{dS}{d\theta_j} = C_j \cos^{j-1} \theta_j \quad (12)$$

ここで、 C_j は空間次元数によって決定される定数。式(12)は、超球面を m 個に均等分割する中心線ベクトル $(\mathbf{x}_i^*, i=1, \dots, m)$ を生成する極座標助変数の数列 $\theta_j = [\theta_{j1}, \dots, \theta_{ji}, \dots, \theta_{jm}]$ の分布密度は、 $\cos^{j-1} \theta_j$ に比例しなければならないことを示している。そこで、その分布に従い大小順に並んだ m 個の数列 $\theta_{j1}, \dots, \theta_{ji}, \dots, \theta_{jm}$ を、台形公式を用いて生成する。

$$\theta_1 = [\theta_{11}, \dots, \theta_{1i}, \dots, \theta_{1m}] = [0, \dots, 2\pi] \quad (13a)$$

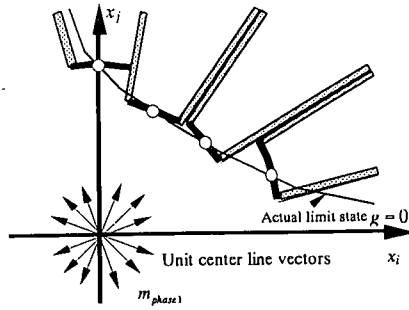
$$\theta_j = [\theta_{j1}, \dots, \theta_{ji}, \dots, \theta_{jm}] = [-\pi/2, \dots, \pi/2] \quad (j=2, \dots, n-1) \quad (13b)$$

式(13)の数列は分布特性の条件を満足するが、大小順に並んであるので、これをそのまま組み合わせても均等に分散された配置とはならない。例えば、二次元一様分布の点列を配置する際に、一様分布に従う数列 $\xi = [1, 2, \dots, \xi_k, \dots, 9]$ と $\eta = [1, 2, \dots, \eta_k, \dots, 9]$ は一様分布に従う数列であるが、2次元面内に ξ_k と η_k を、そのままの順番で組み合わせ配置すると、図-8(a)のように完全相関関係にある一線上に並んだ点列を形成する。しかし、 η_j を原数列から3つずつスキップして抽出した数列 $\eta = [1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9]$ を作ると、2次元面内の点列は、図-8(b)に示すような周期型の配置となる。よって、 (ξ, η) 平面上に一様に分布する点列を形成できる。

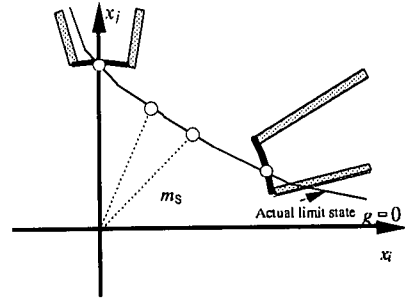
そこで、式(10)に代入する助変数の数列を、式(13)の順番に並べられた数列から、次式のようなスキップ抽出した数列に並べ替えて代入する。

$$\theta_{j,i} = \theta_{j,(\text{mod}(i \times n_j, m))} \quad (14)$$

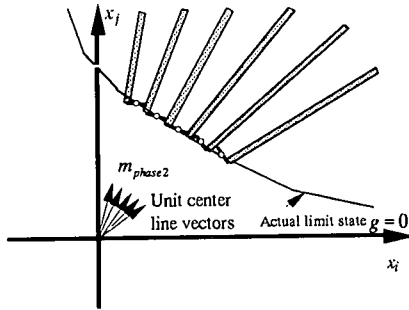
ここで、関数 $\text{mod}(s, m)$ は、 s の m による剰余を表わし、 n_j は θ_j の数列に関するスキップ数であり、次式によって求める。



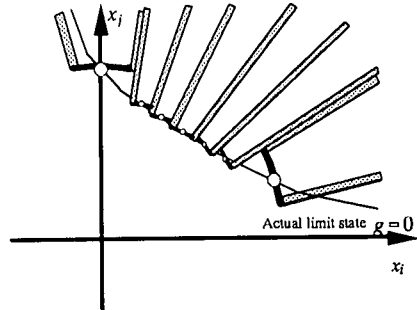
(a) ステップ1: 全領域を m_{phase1} 個に分割し、段階1の破壊確率を算定



(b) ステップ2&3: 原点に近い m_s 個の部分領域の破壊確率を除外



(c) ステップ4: 抽出された領域を m_{phase2} 個に分割



(d) ステップ5: ステップ3に代入し、段階2の破壊確率を算定

図-10 2段階領域分割法の計算手順

$$n_{sj} = m^{(1-0.5(n-1-j))} \quad (15)$$

図-9(a)に、3次元空間において、式(12)の分布に従うが、式(13)に示す順番に並んだ数列 θ_1 と θ_2 をそのまま組み合わせた上で式(10)に代入して得られる中心線ベクトルの点列を示す。点列は超球面の表面を下の極から上の極に至る間において、反時計周りに一周する線上に一直列に並び、超球面表面上に均等に分散されていない。これを、式(14)による周期型組み合わせ配置を行うと、図-9(b)のようになり、表面上に万遍なく均等に配列されている。

(3) 2段階領域分割法

周期型組み合わせ配置法による中心線ベクトル創出法を用いると、領域分割数を増やすことによって計算精度を着実に向上させることができる。しかし、空間次元数が増加すると所要の精度を得るための分割数も増加し、計算効率が低下する。そこで、モンテカルロ法の集中サマリングの概念^{(10),(12),(13)}を応用した2段階領域分割法を提案する。一般に限界状態は全方位に存在することはないため、パツツな分割領域、または、アクティブであっても部分破壊確率が極めて小さい分割領域が多く存在する。この

ような領域に対して、密度の高い分割を行ってもシミュレーション回数を増加させるだけで計算精度は向上しない。一方、アクティブな分割領域においても、限界状態面が原点に近づく最尤点付近における近似精度が全破壊確率の精度に及ぼす影響が極めて大きい。すなわち、計算精度を向上させつつ計算負担を軽減するには、限界状態面が原点に近づく領域では領域を細かく分割して、逆に、限界状態面が遠い部分では分割を粗くすることが有効である。そこで本研究では、前述の領域分割法をさらに拡張して、まず粗い分割による第1段階で、細かく分割すべき領域と粗いまの分割領域を区分し、第2段階で選択された領域を細かく分割して計算する2段階領域分割法を提案する。その手順の概要は、図-10に示すものであり、以下ようになる。

ステップ1: 図-10(a)に示すように、粗い分割数 (m_{phase1}) を用いて全空間を分割し第1段階の破壊確率 $P_f^{(1)}$ を求める。

$$P_f^{(1)} = \frac{1}{m_{phase1}} \sum_{i=1}^{m_{phase1}} [1 - \chi_n^2(D_i^2)] \quad (16)$$

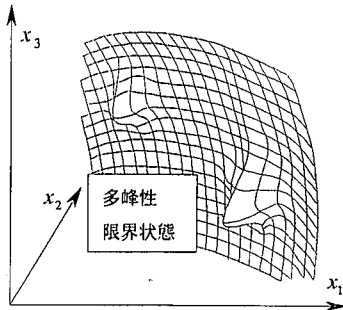
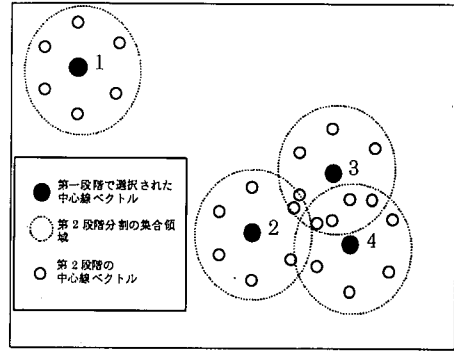
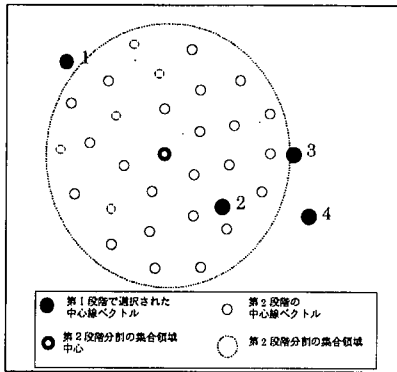


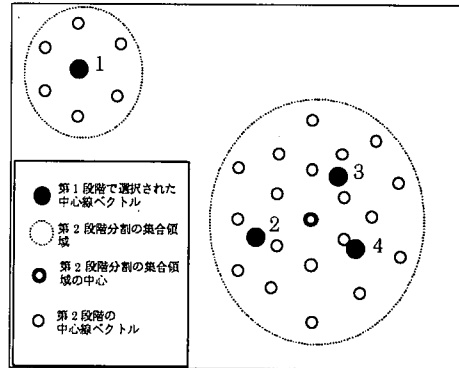
図-11 多峰性限界状態



(a) 個々に小分割する方法



(b) 全体で集合領域を設ける方法



(c) 相関判別してグループ分けし集合領域を設ける方法

図-12 小領域区分の手法概念図

ステップ2: 図-10(b)に示すように、第1段階の解において限界状態面までの距離が小さい領域を m_s 個 ($m_s < m_{phase1}$) 選択し、その選択領域の被代入破壊確率を算定する。

$$P_f^{(sel)} = \sum_{j_{sel}=1}^{m_s} [1 - \chi_n^2(D_{j_{sel}}^2)] / m_{phase1} \quad (17)$$

ここで、 $j_{sel} : D_{j_{sel}} \leq D_{m_s}$ を満足する選択された分割領域番号。

ステップ3: 図-10(c)に示すように選択された m_s 個の領域をより細かく m_{phase2} ($m_{phase2} > m_s$) 個の領域に分割し、その破壊領域の代入破壊確率を算定する。

$$P_f^{(sub)} = \sum_{j_{sub}=1}^{m_{phase2}} [1 - \chi_n^2(D_{j_{sub}}^2)] / (m_{phase1} m_{phase2} / m_s) \quad (18)$$

ここで、 $j_{sub} : m_{phase2}$ 個に分割された領域の番号。

ステップ4: 図-10(d)に示すように、第1段階で得られた全破壊確率から被代入破壊確率を差し引き、代入破壊確率を代入することによって、第2段階目の全破壊確率を算定する。

$$P_f^{(2)} = P_f^{(1)} - P_f^{(sel)} + P_f^{(sub)} \quad (19)$$

ところで、第1段階では全空間を粗く分割するため、中心線ベクトルの均一性にひずみがある。このため、ステップ3の算定法に工夫を必要とする。これを、図-11, 12を用いて説明する。図-11に示すような複数の点が原点に近接するいわゆる多峰性の限界状態の問題を取り扱う場合を想定する。これを、この第1段階での分割において選択された代表4個の中心線ベクトルを原点側から見た場合の配置が、図-12に示す黒丸●のように表されるものとする。ここで、ステップ3の手法として3案を比較することによって提案法の特性を述べる。まず、図-12(a)に示すように、選択された中心線ベクトルの個々の点(●)ごとにその周りに小分割を行うための中心線ベクトルを配置する方法では、隣接する選択小領域内における相互関係は考慮されないため、図-12(a)のように第1段階の中心線ベクトル2, 3, 4の周りに配置された小分割の中心点(●)が不均一に重なりを生ずる可能性があることがわかる。そこで、選択領域の集合領域を形成し、その全体領域を小分割することが考えられる。図-12(b)にその例を示すが、第1段階で選択された一塊の集合領域とみなすと、新たな小領域の中心線ベクトル相互の距離においては良好な分割であるが、第2段階分割の集合領域の中心が、二つの峰からずれた位置となるため、二つの峰の周りを適切にカバーできない。そ

ここで本研究では、図-12(c)に示すように第一段階で選択された中心線ベクトルの相対的な距離関係から集合判別を行い、それぞれの集合ごとに第2段階の分割領域を設ける手法を提案する。これは以下のような手順で行われる。

① 選択された m_s 個の領域の中において原点から限界状態までの距離が最短の領域 $i - \min$ を抽出する。

$$D_{i-\min} \leq D_i \text{ for } j_{sel} = 1, \dots, m_s \quad (20)$$

② 選択された m_s 個の領域の中で、最短距離領域 $i - \min$ と近接し同一グループとされる領域を、中心線ベクトル相互の相関係数を用いて判定区分する。

$$\mathbf{x}_{j_{sel}}^* \mathbf{x}_{i-\min}^* \geq \rho_c \text{ then (同一グループ)} \quad (21)$$

$$\mathbf{x}_{j_{sel}}^* \mathbf{x}_{i-\min}^* < \rho_c \text{ then (非同グループ)} \quad (22)$$

ここで、 ρ_c : 臨界相関係数。

③ 式(22)によって、非同グループと判別された分割領域群の中で、さらに最短距離を有する分割領域を式(20)に準じて選択し、それと同一グループとされる領域群を式(21)、(22)によって判別分類する。以上の①②の過程をすべての選択領域 m_s がグループ分けされるまで繰り返す。よって、次のような n_g 個のグループに区分される。

$$m_1 + m_2 + \dots + m_g + \dots + m_{n_g} = m_s \quad (23)$$

この処理を経た後、前述ステップ3の代入破壊確率の算定は、各グループごとに行われ、次式のように表される。

$$P_f^{(sub)} = \sum_{g=1}^{n_g} \sum_{j_{sub}=1}^{m_g} \frac{[1 - \chi_n^2(D_{j_{sub}}^2)]}{(m_{phase1} m_{phase2} / m_s)} \quad (24)$$

さて、式(24)における各グループごとの領域をさらに細かく分割するための中心線ベクトル \mathbf{x}_{sub}^* は、周期型組み合わせ配置法の中心線ベクトル創出法を応用して以下のように行う。

④ g 番目のグループに属する m_g 個の中心線ベクトルを用いて、集合領域の中心方向ベクトル $\mathbf{x}_{center-g}$ を次式によって算定する。

$$\mathbf{x}_{center-g} = \left(\sum_{j_{sel-g}=1}^{m_g} \mathbf{x}_{j_{sel-g}}^* P_{j_{sel-g}} \right) / \left(\sum_{j_{sel-g}=1}^{m_g} P_{j_{sel-g}} \right) \quad (25)$$

⑤ 周期型組み合わせ配置法によって、全体空間に対する分割数を $m_{phase1} m_{phase2} / m_s$ とした場合の中心線ベクトルを、1から m_g 個まで創出する。創出された中心線ベクトルは、式(13)~(15)の特性によって、常に $\mathbf{x}_i^* = [0, 0, \dots, -1]^T$ を中心として渦巻き状に配列されたベクトルが創出される。

⑥ そこで得られた m_g 個の中心線ベクトルを $\mathbf{x}_{center-g}$ 方向へ座標変換する。

$$\mathbf{x}_{sub}^* = \mathbf{T} \mathbf{x}_i^* \quad (26)$$

ここで、 \mathbf{T} : \mathbf{x}_i^* から $\mathbf{x}_{center-g}$ への座標変換マトリクス。

(4) 塑性信頼性解析の基本式

骨組構造の塑性崩壊メカニズムを限界状態とする塑性信頼性解析は降伏部材の組み合わせに関して並列システム問題であり、メカニズムの選定においては直列システム問題となる複雑なシステム信頼性解析問題である。本研究では、提案する放射状領域分割法に線形計画法を組み合わせることによって、このような問題においても、煩雑な処理を行うことなく簡便に解析が可能であることを示す。

下界定理に基づく確定的塑性解析の基本式は、線形計画法の問題として次式のように与えられる¹⁴⁾。

$$\text{Given: } \mathbf{C}^T, \mathbf{F}, \mathbf{N}^T, \mathbf{R}$$

$$\text{Find: } \mathbf{Q}, \alpha$$

$$\text{Object: } \alpha \rightarrow \max \quad (27)$$

$$\text{Subjected to: } \mathbf{C}^T \mathbf{Q} - \alpha \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N}^T \mathbf{Q} \leq \mathbf{R}$$

ここで、 \mathbf{C}^T : 構造全体の釣合マトリクス、 \mathbf{F} : 節点荷重ベクトル、 \mathbf{N}^T : 降伏条件式への外向き直交マトリクス、 \mathbf{R} : 塑性容量ベクトル、 \mathbf{Q} : 部材の軸力ベクトル、 α : 荷重係数。

信頼性解析に拡張するにあたって、外力および部材の塑性容量のばらつきが卓越しており確率変数として取り扱うものとする。またこれらは正規変換されて、次式のように表されるものとする。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_F \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}} \\ \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

ここで、 σ_F 、 σ_R : それぞれ荷重および塑性容量の標準偏差マトリクス、 $\bar{\mathbf{F}}$: 外力の平均値ベクトル、 $\bar{\mathbf{R}}$: 塑性容量の平均値ベクトル、 \mathbf{x}_F 、 \mathbf{x}_R : それぞれ荷重および塑性容量に対する標準化正規確率変数ベクトル。

よって、放射状領域分割法における各中心線ベクトル \mathbf{x}_i^* に沿った塑性限界状態に関する距離 D_i を求める基本式は、次式のような線形計画問題となる。

$$\text{Given: } \mathbf{C}^T, \bar{\mathbf{F}}, \sigma_F, \sigma_R, \mathbf{x}_{Fi}^*, \mathbf{x}_{Ri}^*, \mathbf{N}^T, \bar{\mathbf{R}}$$

$$\text{Find: } \mathbf{Q}, D_i$$

$$\text{Object: } D_i \rightarrow \max \quad (29)$$

$$\text{Subjected to: } \mathbf{C}^T \mathbf{Q} - D_i \sigma_F \mathbf{x}_{Fi}^* = \bar{\mathbf{F}}$$

$$\mathbf{N}^T \mathbf{Q} - D_i \sigma_R \mathbf{x}_{Ri}^* \leq \bar{\mathbf{R}}$$

ここで、 \mathbf{x}_{Fi}^* 、 \mathbf{x}_{Ri}^* : それぞれ中心線ベクトルの荷重および塑性容量ベクトル成分であり、次式のように表される。

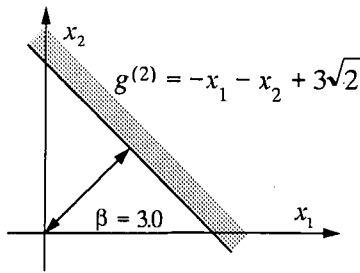


図-13 2次元線形限界関数

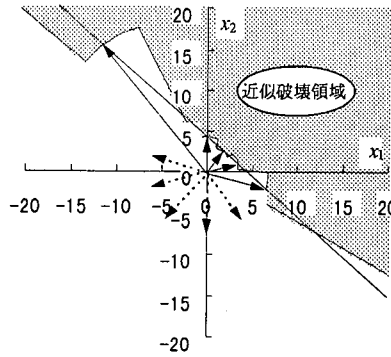


図-14 近似破壊領域 (10分割)

表-1 領域分割計算結果 (2次元)

領域番号	原点距離	部分破壊確率
1	6.61	3.29556×10^{11}
2	3.37	3.45383×10^4
3	3.04	9.92314×10^4
4	4.24	1.23410×10^5
5	19.2	0.0
6-10	∞	0.0
破壊確率		1.35004×10^{-3}

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Fi} \\ \mathbf{x}_{Ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \end{bmatrix} \quad (30)$$

よって、式(29)の解 D_i を式(5)に代入し、トラス構造の塑性崩壊限界状態に対する破壊確率が求められる。

3. 計算例と考察

(1) 線形限界状態関数 (周期型組み合わせ配置法)

提案する周期型中心線ベクトル創出法に基づく領域分割法の精度と計算効率性を確認するために、次の線形限界状態関数に対する破壊確率を算定した。

$$g_{linear}^{(n)} = - \sum_{i=1}^n x_i + \beta \sqrt{n} \quad (31)$$

$$\beta = 3.0 \quad (32)$$

ここで、 $g_{linear}^{(n)}$: n 次元空間の線形限界状態関数。

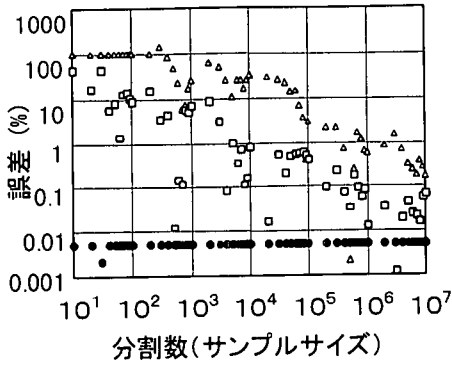
図-13に2次元空間における式(31)、(32)による限界状態関数を示す。図に示すように、この関数は、 n 次元空間において常に原点と最尤点との距離が3.0に保たれるため破壊確率の厳密解は、次式によって与えられる。

$$\Phi(-\beta) = 1.34997 \times 10^{-3} \quad (33)$$

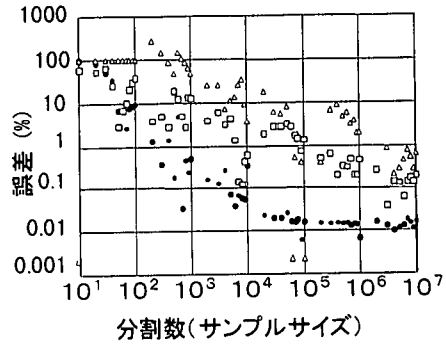
図-14に図-13の実限界状態に対して、全空間を10分割した提案手法による近似破壊領域を示す。また、図-14に対応する部分破壊確率を表-1に示す。この場合、分割数が少ないため近似領域は非常に粗く図-13に示す実破壊領域とはかなり異なった近似形となっている。表-1に示すように、10個の分割領域のうち、No. 6~10の5つの領域は限界状態関数と中心線ベクトルの交点が存在しないパツパ領域となり、残りの5つの領域が7ケブ領域となっている。分割領域No.5では原点と限界状態関

数との距離 $D_5 = 19.2$ となり7ケブではあるが、その部分破壊確率は、カイ2乗分布の算定不可能なほど小さいので零となっている。よって、全破壊確率は、図-14に示す粗い近似の分割領域No. 1~4の部分破壊確率の和によって与えられる。この破壊確率 $P_f = 135004 \times 10^{-3}$ は、厳密解に対して0.01%以下の誤差であり、極めて精度の高い解が得られている。その内訳を見ると、分割領域No.2とNo.3の部分破壊確率の占める割合が非常に大きい。これは、この二つの領域は最尤点 ($x_1 = 2.12, x_2 = 2.12$) に近いためである。言い換えると、最尤点付近の近似精度さえ良ければ、全体の破壊確率の精度も向上できることがこの例より明らかである。ちなみに、領域No.3の中心線ベクトルと限界状態関数との交点座標は、($x_1 = 1.79, x_2 = 2.46$)であり、最尤点とかなり近接した点を得られている。すなわち、提案手法において分割数を十分に大きくすることによって、設計点(最尤点)の近似解も得られることがわかる。

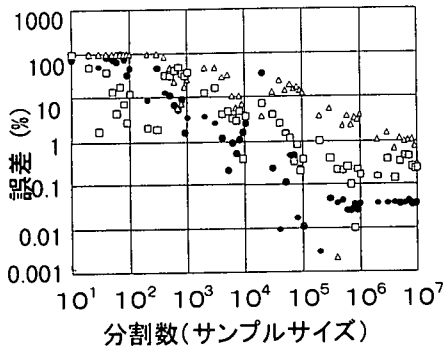
提案手法の解析精度を、モンテカルロ法や方向シミュレーション法と比較するために、2次元から10次元空間において、分割数を10~1000万にパラメトリックに変化させ、厳密解との誤差を調べた。なお、モンテカルロ法のプログラムについては、汎用ライブラリ¹⁵⁾を使用した。図-15に、次元数2, 4, 6, 8, 10における誤差と分割数の関係を示す。また、図中には同数のサブドメインによるモンテカルロ法および方向シミュレーション法の誤差も示す。まず、図-15(a)の2次元空間では、提案手法は分割数10から1000万のいずれにおいても誤差は0.01%以下である。一方、モンテカルロ法では100以下のサブドメインでは、全く破壊領域にヒットしないため破壊確率が零となり、誤差が100%となる。このモンテカルロ法の誤差は1000万回でも0.1%以下になることはない。また、方向シミュレーション法では、10~100のサブドメインでは、概ね10%以上の誤差があり、0.1%以下の誤差には50万回以上のシミュレーションを要する。



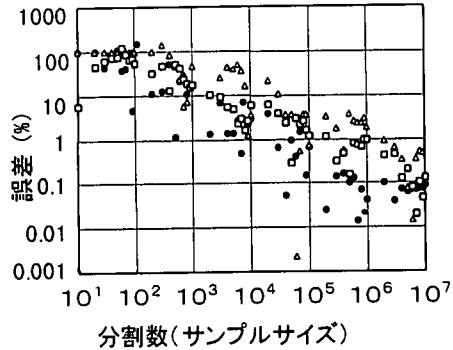
(a) 2次元



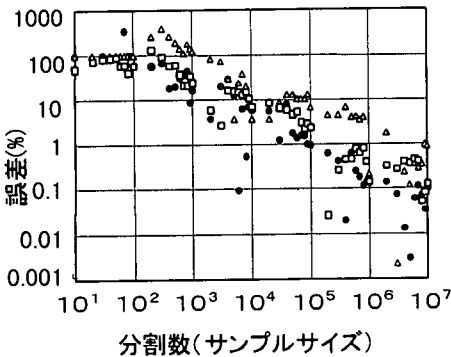
(b) 4次元



(c) 6次元



(d) 8次元



(e) 10次元

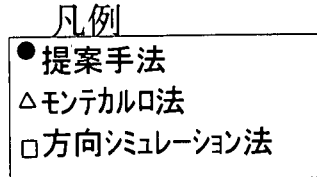
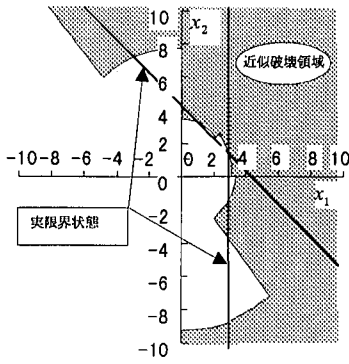


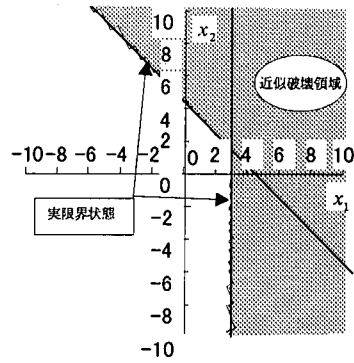
図-15 分割数が誤差に与える影響 (線形限界状態: 周期型組み合わせ配置法)

提案手法の誤差が1%以下になる概ねの所要分割数を見ると、4次元で700、6次元で1万、8次元で10万、10次元で10万程度である。一方、モンテカルロ法では、次元数にかかわらず概ね100万回である。また方向シミュレーション法では、4次元で10万回、6次元で10万、8次元で100万、10次元で100万程度である。すなわち、モンテカルロ法や方向シミュレーション法に比べて、提案手法の精度は高く、特に次元数の小さい問題において、その差は顕著である。しかし、空間次元の増大にともなってその差はあまり顕著ではなくなる。

表-2には、破壊確率が小さい問題への適用性を検討するため、式(31)の β を大きくして破壊確率が 10^{-6} と 10^{-9} の厳密解を得られる問題に対する検定結果を示している。破壊確率が 10^{-6} の場合に、提案手法で分割数を1万とするとその誤差は約6%であるのに対して方向シミュレーション法は0.3%となる。しかし、分割数を10万とした場合では提案手法の誤差の方が小さい。さらに、破壊確率が 10^{-9} の場合には、いずれの分割数においても提案手法の精度の方が方向シミュレーション法よりも良い。これらを図-15(c)と比較すると、提案手法や方向シミュレーション



(a) 第1段階



(b) 第2段階

図-16 2次元直列線形システム問題の計算

表-2 破壊確率が誤差に与える影響
(線形境界状態：周期型組み合わせ配置法)

ケース1 : $\beta = 4.753258, \Phi(-\beta) = 1.0 \times 10^{-6}$		
解析法	分割数 (サンプルサイズ [*])	破壊確率(誤差(%))
提案手法	10,000	0.93952×10^{-6} (6.05%)
	100,000	1.00039×10^{-6} (0.04%)
方向シミュレーション法	10,000	0.99648×10^{-6} (0.35%)
	100,000	0.99210×10^{-6} (0.79%)
モンテカルロ法	10,000,000	0.90000×10^{-6} (10.00%)
ケース2 : $\beta = 5.997438, \Phi(-\beta) = 1.0 \times 10^{-9}$		
解析法	分割数 (サンプルサイズ [*])	破壊確率(誤差(%))
提案手法	10,000	0.97010×10^{-9} (2.99%)
	100,000	0.99444×10^{-9} (0.56%)
方向シミュレーション法	10,000	1.06878×10^{-9} (6.88%)
	100,000	1.01215×10^{-9} (1.12%)
モンテカルロ法	10,000,000	0.0×10^{-9} (100.00%)

表-3 2段階領域分割

空間次元	第1段階	第1段階	第2段階	第2段階
	分割数 m_{phase1} (m_s)	破壊確率 $P_f^{(1)}$ (誤差)	分割数 m_{phase2}	破壊確率 $P_f^{(2)}$ (誤差)
10	10,000 (1000)	1.27761×10^{-3} (5.37%)	10,000	1.34986×10^{-3} (0.01%)
12	10,000 (1000)	1.76629×10^{-3} (30.84%)	10,000	1.34982×10^{-3} (0.01%)
14	10,000 (1000)	0.98615×10^{-3} (27.96%)	10,000	1.34978×10^{-3} (0.01%)
16	10,000 (1000)	1.65391×10^{-3} (22.51%)	10,000	1.34989×10^{-3} (0.01%)
18	10,000 (1000)	2.38173×10^{-3} (76.42%)	10,000	1.34987×10^{-3} (0.01%)
20	10,000 (1000)	1.76546×10^{-3} (30.78%)	10,000	1.34971×10^{-3} (0.02%)

シミュレーション法は、破壊確率の大きさによる解析精度への影響はあまりなく、むしろ分割数の影響がそのまま現れていると考えられる。一方、モンテカルロ法では破壊確率が精

表-4 直列線形システム(2次元)

手法	分割数 シミュレーション回数	破壊確率 P_f
提案手法	段階1 $m_{phase1} = 8$ ($m_s = 5$)	1.92485×10^{-3}
	段階2 $m_{phase2} = 50$	2.46194×10^{-3}
モンテカルロ法	10,000,000	2.45620×10^{-3}
方向シミュレーション法	1,000,000	2.44540×10^{-3}
Ditlevsenの複対 ト [*] 限界値		$2.41104 \times 10^{-3} \leq P_f \leq 2.55549 \times 10^{-3}$

表-5 直列線形システム(10次元)

手法	分割数 シミュレーション回数	破壊確率 P_f
提案手法	段階1 $m_{phase1} = 1000$ ($m_s = 300$)	2.45421×10^{-3}
	段階2 $m_{phase2} = 15000$	2.67135×10^{-3}
モンテカルロ法	10,000,000	2.67280×10^{-3}
方向シミュレーション法	1,000,000	2.67236×10^{-3}
Ditlevsenの複対 ト [*] 限界値		$2.658635 \times 10^{-3} \leq P_f \leq 2.679288 \times 10^{-3}$

度に影響するため、1000万回のシミュレーションにおいて破壊確率が 10^{-6} の場合で10%、 10^{-9} の場合にはシミュレーション結果の破壊確率が0.0で100%の誤差を生じている。

このように提案手法の解析精度は主に確率変数の数すなわち次元数に依存する。そこで多次元空間における計算効率の低下を補うために、2段階領域分割法を用いることを提案する。次の計算例では、10次元以上の空間で2段階領域分割法の適用性を検討する。

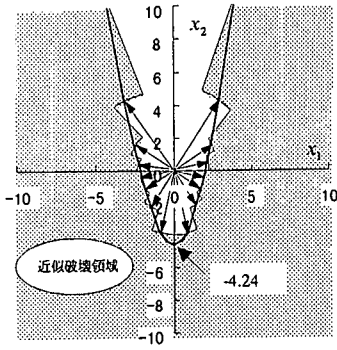


図-17 非線形限界状態 (2次元)

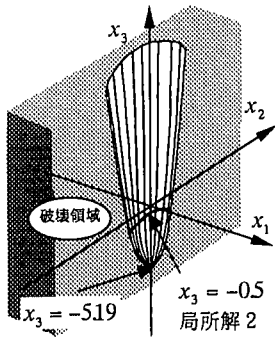


図-19 非線形限界状態関数(3次元)

(2) 線形関数 (2段階領域分割法)

表-3に式(31), (32)で与えられる線形限界状態関数の問題を10次元から20次元の多次元空間において、2段階領域分割法によって解いた計算結果を示す。ここでは第1段階の全領域分割数を $m_{phase1} = 10000$ とし、その中の $m_s = 1000$ を領域選択したうえで、第2段階では、選択領域を $m_{phase2} = 10000$ 分割した。この第2段階の分割数は、全体空間を10万分割したものと同等の細かい分割となる。前計算例で明らかのように10次元空間では1%以下の誤差精度を得るには全空間を10万分割以上にする必要があるが、この第1段階での分割数は1万分割と粗いので、当然のことながら第1段階の破壊確率は厳密解とは異なっている。この誤差は、次元数が増加するにつれて5~80%と大きくなる。しかし、式(25)によって求められる被選択分割領域に対する集合中心ベクトルは、限界状態関数の最尤点 $[3/\sqrt{n}, \dots, 3/\sqrt{n}]$ と近接した座標となる。よって、第2段階の領域分割は概ね最尤点を中心として行われる。すなわち、第1段階の目的とする第2段階の分割領域の焦点が良好に検索されている。このため、第2段階の解は、次元数が10から20次元と増加し第1段階の誤差は増加するにもかかわらず、ほぼ一定の0.01%以内の誤差となっている。ところで、この計算の第1段階と第2段階の合計分割数

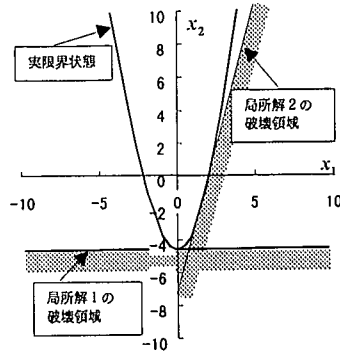


図-18 非線形限界状態に対するFORMの解

表-6 非線形限界状態関数 (2次元)

手法	分割数 (シミュレーション回数) (β)	破壊確率
提案手法	16	4.79127×10^{-2}
	100	4.77257×10^{-2}
モンテカルロ法	1,000,000	4.75170×10^{-2}
方向シミュレーション法	1,000,000	4.77207×10^{-2}
FORM(局所解 1)	$\beta = 4.2426$	1.10526×10^{-5}
FORM(局所解 2)	$\beta = 1.9982$	2.28496×10^{-2}

表-7 非線形限界状態関数 (3次元)

手法	分割数 (シミュレーション回数) (β)	破壊確率
提案手法 (1段階)	1,000	8.42304×10^{-2}
提案手法 (2段階)	段階 1 50 (20)	8.39812×10^{-2}
	段階 2 200	8.40536×10^{-2}
モンテカルロ法	1,000,000	8.47300×10^{-2}
方向シミュレーション法	1,000,000	8.44015×10^{-2}
FORM(局所解 1)	$\beta = 5.1962$	1.01921×10^{-7}
FORM(局所解 2)	$\beta = 2.2240$	1.30743×10^{-3}

表-8 非線形限界状態関数 (10次元)

手法	分割数 (シミュレーション回数) (β)	破壊確率
提案手法	1,000,000	3.99258×10^{-1}
提案手法 (2段階)	段階 1 500 (300)	4.11231×10^{-1}
	段階 2 3,000	3.99544×10^{-1}
モンテカルロ法	1,000,000	3.99296×10^{-1}
方向シミュレーション	1,000,000	3.99085×10^{-2}
FORM(局所解1)	$\beta = 9.4868$	1.21154×10^{-21}
FORM(局所解2)	$\beta = 3.0392$	1.18604×10^{-3}

は20000であり、先の計算例において10次元空間で、誤差を1%以内とするために10万の分割数が必要であったのに比して、効率的な計算が可能であることが認められる。

(3) 線形関数直列システム問題

複数の線形関数によって構成される直列システム問題への適用性を確認するために、次のような2つの要素線形限界状態関数を与えて直列システム問題を検討した。

$$g_{\text{system-1}} = -x_1 + 3.0 \quad (34)$$

$$g_{\text{system-2}} = -\sum_{i=1}^n x_i + 3.0\sqrt{n} \quad (35)$$

ここで、 n ：確率変数空間の次元数。

図-16(a)に2次元空間における式(34)および(35)の限界状態関数を示す。この問題の各要素限界状態関数はそれぞれ $[-3.0, 0.0]$ および $[212, 212]$ に原点距離 $\beta = 3.0$ の最尤点をもつ、いわゆる双峰性の問題となっている。全領域を x_1 軸から $\theta = 22.5^\circ$ を起点に 45° 間隔に全空間を8等分すると、図-16(a)に示すように5つの領域が7タイプとなり、近似領域が図のように設定される。図によって明らかなようにこの近似領域は非常に粗く実限界状態関数が形成する領域とは異なっている。このため、第1段階の破壊確率は、表-4に示すように 1.92×10^{-3} となるが、モンテカル法(1000万回)や方向シミュレーション法(100万回)の 2.45×10^{-3} とは一致しない。さらに、表-4に示す Ditlevsenの複モード限界値 $2.41 \times 10^{-3} \sim 2.56 \times 10^{-3}$ の境界値にも入っていないため、不正確である。そこで、第2段階では7タイプな5つの選択領域を細かく50等分すると、図-16(b)のように実限界状態をほぼ忠実に近似した破壊領域が形成される。特に二つの最尤点付近の近似が良くなるためその解 2.46×10^{-3} は、モンテカル法や方向シミュレーション法とも良く一致しており、Ditlevsenの複モード限界値の条件も満足する。

表-5には、線形システム問題を、10次元空間に適用して解いた結果を示す。第1段階で全空間を1000分割したが、これは非常に粗い分割数なので、得られた破壊確率 2.45×10^{-3} は、モンテカル法(1000万回)や方向シミュレーション法(100万回)と一致せず正確ではない。しかし、第1段階の中から300領域を選択し、これを15000分割した第2段階の解は 2.67×10^{-3} となり、モンテカル法や方向シミュレーション法の解とほぼ一致しており、Ditlevsenの複モード限界値条件も満足する。この問題では、第1段階と第2段階で合計16000個の中心線ベクトルに対してシミュレーションを行うが、これは、前計算例の10万分割に比して少なく、10次元空間において2段階領域分割法が効率的に破壊確率を算定できることがわかる。

(4) 非線形限界状態関数

非線形限界状態関数には、安全領域が凸のものや凹のものがあるが、凸領域を形成するものは、多峰性問題となるので数値計算上の難度が高い。そこで本研究では、安全領域が凸である次式の非線形限界状態関数について適用性を検討した。

$$g_{\text{nonlinear}}^{(n)} = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 3\sqrt{n} \quad (36)$$

図-17に2次元空間における式(36)による限界状態関数を示す。この関数は放物形状をしており、その最尤点を、変分条件に従って解くと、次の2つの局所解が得られる。

a) 局所解1

$$x_n = -3\sqrt{n}, \quad x_i = 0.0 \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (37)$$

b) 局所解2

$$x_n = -0.5, \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 3\sqrt{n} - 0.5 \quad (38)$$

局所解1は、図-18に示すように、凸関数の頂点に対応しており、最尤点とは対応していない。一方、局所解2は最尤点ではあるが、3次元以上の空間では、最尤点が連続した峰を形成する。また、2次元空間では図-18で明らかなように、対称的に2つの解がある。FORMでは、これらの解に対応して線形近似した破壊領域を設定するが、最尤点の算定に最適7モードを使用するため、局所解1に収束しやすいことが示されている⁸⁾。図-18にそれぞれに対応するFORMの破壊領域を示すが、局所解1に対応する破壊領域は、実領域と全く異なる破壊領域を形成することがわかる。また、局所解2に対応する破壊領域も実破壊領域の約半分の領域しか表現できないことがわかる。式(36)による限界状態はこのような特性をもつ関数であるため、FORMによる破壊確率は、実破壊確率と異なったものとなる。表-6に提案手法およびモンテカル法、方向シミュレーション法およびFORMによる解を比較して示す。これより、提案手法では、16分割でモンテカル法や方向シミュレーション法とほぼ一致する解を得ており、全領域を100分割するとほぼ完全に一致する解を得られることがわかる。図-19には、3次元空間における式(36)の限界状態関数を示す。3次元空間では、局所解2の峰が図中の太線のように円形に形成される。このように数値計算上の難点を多く持つ関数にもかかわらず、表-7に示すように2段階解析法によっても、モンテカル法(100万回)や方向シミュレーション法(100万回)の解と良く一致した解を得られている。表-8には、10次元空間における解析結果を他の手法とともに示す。提案した周期型組み合わせ配置による手法で100万分割または2段階領域分割法の500分割(第1段階)、3000分割(第2段階)で得られた破壊確率 3.99×10^{-3} は、いずれもモンテカル法(100万回)や方向シミュレーション(100万回)の結果と非常に良く一致する。一方、FORMでは近似の良い局所解2であってもその破壊確率は 1.19×10^{-3} と正解値の約1/30となり、このような非線形限界状態関数の場合、空間次元が増加するにつれてFORMの精度が低下することがわかる。

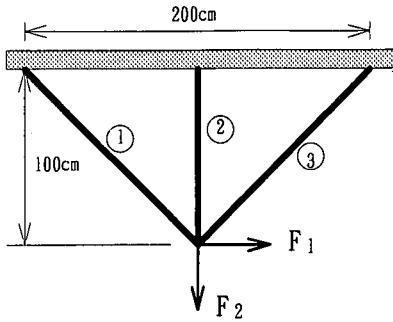


図-20 3部材トラス

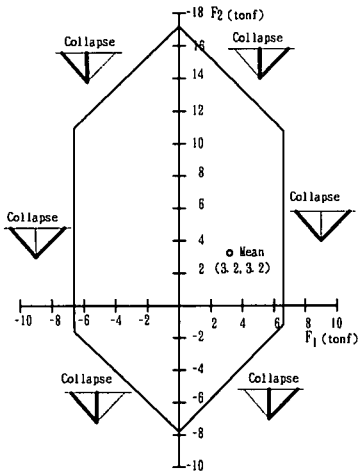


図-21 塑性崩壊限界状態線と崩壊メカニズム

表-9 荷重のばらつき

	平均値	標準偏差
F_1	3200kgf	960kgf
F_2	3200kgf	960kgf

表-10 降伏軸力

部材	引張側	圧縮側
①	7200kgf	2300kgf
②	7200kgf	4600kgf
③	7200kgf	2300kgf

表-11 3部材トラスの破壊確率

領域	距離 D_i	部分破壊確率
1	3.97	2.401×10^{-5}
2	5.18	9.232×10^{-8}
3	8.76	1.408×10^{-17}
4	11.4	2.384×10^{-30}
5	13.9	1.233×10^{-43}
6	12.8	1.585×10^{-37}
7	11.2	4.413×10^{-29}
8	10.3	4.173×10^{-25}
9	11.2	4.414×10^{-29}
10	10.5	7.312×10^{-26}
11	11.4	5.728×10^{-30}
12	8.18	1.847×10^{-16}
13	6.26	1.926×10^{-10}
14	5.18	9.232×10^{-8}
15	3.97	2.401×10^{-5}
16	3.66	7.596×10^{-5}
合計		1.242×10^{-4}

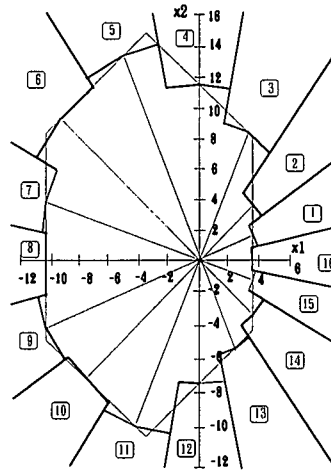


図-22 近似破壊領域

(5) トラスの塑性信頼性解析 (3部材トラス)

図-20に示す3部材トラスに表-9に示す正規分布に従う不確定荷重が作用する場合の塑性崩壊による破壊確率を算定する。水平方向の荷重 F_1 と垂直方向の荷重 F_2 は互いに独立した確率変数であり、表-9に示すように、平均値3.2tonf、標準偏差0.96tonf(変動係数0.30)のばらつきを有するとする。各部材の降伏軸力は、表-10に示すように引張と圧縮側で異なる確定量である。外力 F_1, F_2 がランダムな値をとるため、トラス構造には、構造の持つ全ての塑性崩壊モードが生ずる。図-21に荷重変数空間に形成される塑性崩壊限界状態線を示す。図中に示した3部材トラスの太線部分は、対応する塑性崩壊限界状態線において、塑性降伏している部材を示す。例えば、平均荷重 ($F_1 = 3.2\text{tonf}, F_2 = 3.2\text{tonf}$) から、垂直荷重 F_2 の大きさを変えずに、水平荷重 F_1 を増加すると、 $F_1 = 6.72\text{tonf}$ で第①部材が引張降伏、第③部材が圧縮降伏した塑性崩壊モードとなる。逆に F_1 を減ずると、 $F_1 = -6.72\text{tonf}$ で、第①部材が圧縮降伏、第③部材が引張降伏する塑性崩壊モードとなる。このように、選択される2つの降伏部材の引張降伏、圧縮降伏の組み合わせにより合計6種類の崩壊モードがあり、6角形の凸型の限界状態線が形成されている。すなわち、任意の2部材の降伏組み合わせに関す

る並列システムと6つの塑性崩壊モードによる直列システム信頼性解析の問題となっている。図-22は、図-21の荷重変数空間を式(28)に基づいて、平均荷重を原点とし標準偏差値を1.0とする標準化正規確率変数空間に逆変換したものである。提案手法は、この変数空間を原点まわりに16等分割して、それぞれの分割領域に円弧セグメントによる近似破壊曲線を設定し、放射状の離散化された破壊領域を得る。この円弧と原点間距離 D_i は式(29)の線形計画問題として算定されるため並列・直列複合システムにもかかわらず簡易に計算できる。表-11に各領域ごとの部分破壊確率を示す。表-11より、原点から最短距離を与えるのは領域No.16 ($D_{16} = 3.66$)であり、隣接する領域No.1とNo.15が次に短い距離を与える。このため、この3領域の部分破壊領域の破壊確率が他の領域に対して約1000倍以上あり、全体確率の99%以上をこの3つの領域によって占めている。参考のために提案手法でさらに細かく128分割した場合の結果とモンテカルロ法(200万回)との結果を比較したが、これらの結果は、16分割のものとはほぼ完全に一致した。よって、前述の例題などから判断して2次元の問題では16分割程度で十分高精度の結果が得られることがわかる。ちなみに、EWSを用いた計算時間は、本法の3秒に対して、モンテカルロ法は5分を要した、この倍率は構造物の規模が大

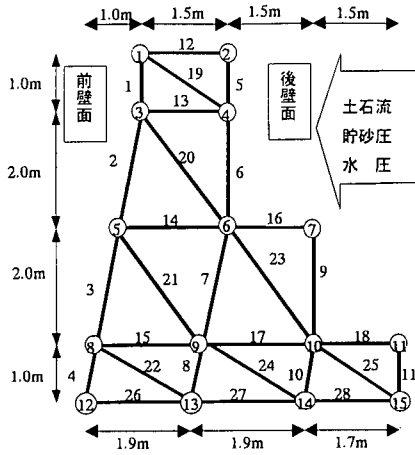


図-23 鋼製杵砂防ダム

表-12 荷重のばらつき

荷重種類	変動係数
中詰材圧荷重	0.30
土石流流体圧荷重	1.00
背面貯砂圧荷重	0.30
洪水時水圧荷重	0.00

きくなるにつれて比例的に増加するので、実構造物の問題では提案法の優位性が大きくなる。

(6) 鋼製砂防構造物の塑性信頼性解析

砂防ダムの機能は多様であるが、近年土石流災害への対策工法として用いられることが多い¹⁶⁾。図-23に示す鋼製杵砂防ダムは、鋼製型鋼のフレームで堤体の水平荷重に対するせん断変形抵抗力を分担させたうえで、内部の空隙に礫材を詰めて剛体安定の抵抗力を分担する重力式砂防ダムである。この砂防ダムは、骨組構造の接合の工夫により屈撓性があるため、建設基礎の不等沈下への抵抗力があることや、迅速施工が可能なため被災地への緊急対策工としての利便性が注目されて近年設置される例が多い。しかし本砂防ダムの設計法については、その抵抗メカニズムに不確定な要素が多く、従来のコンクリート式砂防ダムの設計法を準用しながら安全性照査を行っている。特に、土石流荷重に対する安全性照査法は、一般の砂防構造物においても未解明な段階にあり、現状では静的な等価荷重を与えてその安全性を照査している。すなわち、本構造物の安全性照査法については、不確定な要素が多く安全性の照査法自体の信頼性についても未解明な状態にある。そこで、本研究では提案する手法を適用することによって、信頼性照査手法の一例を示す。

検討対象とするのは、図-23に示すような一径間(2m)杵組構造を持つ砂防ダムである。杵組構造部材は、既製のH型钢およびL型钢で作られているが、その部材断面積を表-13に示す。本構造物に作用する荷重につ

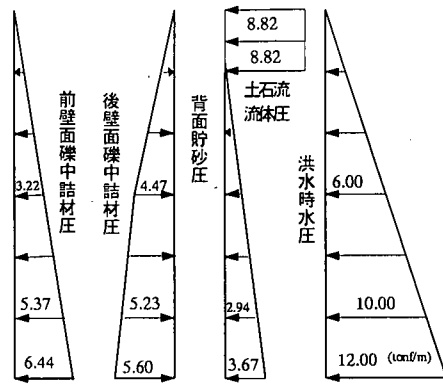


図-24 平均荷重

表-13 部材断面および破壊確率

グループ	部材番号	断面積 (cm ²)
1	1,5,6,9,11	40.14
2	2,3,4,7,8,10	39.01
3	12,16,18,26,27,28	23.71
4	13,14,15,17	47.42
5	19,20,21,22,23,24,25	17.11
6	26,27,28	23.71
総鋼重量(kgf)		990
破壊確率		5.15×10^{-7}

いては、建設予定地ごと異なる特性をもつものであるが、標準設計用に使われている図-24に示す荷重を平均値として与えた¹⁶⁾。図中の前壁および後壁面礫中詰材圧荷重とは中詰材が内部から鋼骨組部材を押し出す圧力であり、著者らの研究¹⁷⁾により、静止土圧に加えてせん断変形による増分礫圧が作用することがわかっている。ここでは、0.1%せん断変形時に生ずる荷重を用いた。背面貯砂圧は、砂防ダム建設後に上流側に堆積する貯砂による荷重であり、設計便覧¹⁶⁾に定めるものを用いている。さらに、洪水時静水圧は、現在便覧で使用されている荷重を用いている。土石流流体圧は、現行設計法では本構造物に対して用いられないが、コンクリート砂防ダムの設計時に用いられる大同の式¹⁶⁾に、流速5mを代入して求めたものである。すなわち、本設計において骨組に作用する荷重の設定は、極めて不確定な条件の下で設定されていることがわかる。そこで、鋼部材の抵抗力のばらつきは無視したうえで、荷重のばらつきのみを表-12に示すように考慮した。提案手法による信頼性解析結果によると破壊確率は、 5.15×10^{-7} となる。これは著者らの行った弾塑性信頼性解析¹⁰⁾による頂点変位が1cmとなる限界状態に対する破壊確率 6.13×10^{-6} より小さく、塑性崩壊確率の方が弾塑性限界より小さいことがわかる。ただし、本研究での外力のばらつき量は暫定的な値であるため、その

相対的な意義においてのみ有用である。ちなみに、計算所要時間は、5分以下であることから、今後本法を応用して構造物の信頼性解析を比較的簡便に行いその安全性の相対評価に資することが可能である。

4. 結 言

本研究は、香月・Frangopolによって提案された放射状領域分割法の解析精度と計算効率を向上させるための技法改良を行い、その適用性を確認したうえで、トラス構造物の塑性信頼性解析への応用を図ったものである。本研究の成果を要約すると以下ようになる。

(1) 放射状領域分割法の基礎となる中心線ベクトルの方向均一性を向上させるために、周期型組み合わせ配置法による中心線ベクトル創出法を提案した。提案する周期型組み合わせ配置法による中心線ベクトル創出法を用いると、標準正規空間を均一に分割できるため、少ない分割数で精度の高い破壊確率が算定できる。このため、同一精度に要する計算負担がモンテカルロ法や方向シミュレーション法に比して少なく、その差は確率変数の次元数が小さいほど顕著である。

(2) 周期型組み合わせ配置法による領域分割法を応用して、多次元の問題における計算効率を高めるために、空間の分割密度を限界状態の最尤点付近で集中して高くする2段階領域分割法のアルゴリズムとその技法を提案した。提案した2段階領域分割法を用いると、10次元以上の問題においても、概ね2万分割程度のシミュレーションによって、精度の高い破壊確率算定が可能であることを示した。

(3) 線形直列システム問題および凸型領域を持つ非線形限界状態問題に対する適用性を確認した。これらの問題は、いわゆる多峰性の問題であるが、提案手法は特に技法上の工夫の必要なく、精度の高い破壊確率を算定できることを示した。

(4) 提案手法を線形計画法と組み合わせた塑性信頼性解析法を提案した。提案手法は、トラス構造物の塑性崩壊によるシステム破壊確率を簡易に精度も高く算定可能であることを示したうえで、鋼製砂防ダムの塑性信頼性解析問題への適用例を示した。

提案手法は、確率計算部分の計算負担を軽減できるので、限界状態が直接的な非線形解析に立脚する信頼性解析への応用も可能となり、現在衝撃問題への応用を検討中である¹⁰⁾。なお、本研究では正規確率変数空間での検討のみを行っており、他の分布特性に従う問題等への応用については別途検討を要する。

謝辞：本研究を行うにあたり、菅野谷慎一氏（防衛施設庁技官）および伊藤一雄氏（防衛大学校研究員）の助力を得た。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 土木学会：構造物のライフタイムリスクの評価（構造工学シリーズ2），土木学会，1988.
- 2) 佐藤尚次，藤田宗久，白木渡，香月智，中村孝明：設計基準における安全性確保の考え方，構造工学論文集，Vol.43A，pp493-504，1997年3月.
- 3) Karamchandani, A.K. and Cornell, C.A.: Sensitivity estimation within first and second order reliability methods, *Journal of Structural Safety*, Vol.11(2), pp.95-106, 1992.
- 4) 長 尚：基礎知識としての構造信頼性設計，山海堂，1995.
- 5) 星谷勝，石井清：構造物の信頼性設計法，鹿島出版会，1986.
- 6) Bjerager, P.: On computational methods for structural reliability analysis, *New Directions in Structural System Reliability*, Dan M. Frangopol Eds., University of Colorado at Boulder, pp.52-67, 1988.
- 7) 白木渡，Schueller, G.I.: 条件付き破壊確率を用いた繰り返し高速モンテカルロ法とその構造物の動的信頼度評価への応用，構造工学論文集，Vol.35A，pp.467-478，1988年3月.
- 8) Katsuki, S. and Frangopol, D. M.: Hyperspace division method for structural reliability, *J. of Engrg. Mech.*, ASCE, Vol.120(11), pp.2405-2427, Nov. 1994.
- 9) 香月智，石川信隆：放射状領域分割法による破壊確率算定法，土木学会第48回年次学術講演会，pp.1212-1213，1993年9月.
- 10) 奥田昇也，米澤政昭，邵晓文，室津義定：方向シミュレーションに基づく構造システムの信頼性評価法，第13回材料・構造信頼性シンポジウム講演論文集，pp.14-19，1994年11月.
- 11) Bjerager, P.: Probability integration by directional simulation, ASCE, pp.1285-1302, 1988.
- 12) 星谷勝，忽那幸浩：重要サブリングとカルマンフィルタによる信頼性解析，土木学会論文集，No.437/I-17, pp.183-192, 1991年10月.
- 13) Melchers, R.E.: Radial importance sampling for structural reliability, *J. of Engrg. Mech.*, ASCE, Vol.116(1), pp.189-203, 1990.
- 14) 石川信隆，大野友則：入門塑性解析と設計法，森北出版，1988.
- 15) Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P.: *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1992.
- 16) 砂防・地すべり技術センター鋼製砂防構造物研究会：鋼製砂防構造物設計便覧，1993年9月.
- 17) 香月智，石川信隆，大平至徳，鈴木宏：鋼製砂防構造物の中詰材のせん断抵抗力および中詰材圧の推定法に関する一考察，土木学会論文集，No.428/I-15，pp.97-106, 1991年4月.
- 18) 香月智，伊藤一雄，石川信隆，阿部宗平：弾塑性信頼性解析による鋼製砂防ダムの安全性照査法，土木学会論文集，No.531/I-34，pp.65-76，1996年1月.

- 19) 香月智, 伊藤一雄, 石川信隆: ダブルウォール砂防ダム
の耐衝撃信頼性解析, 土木学会第52回年次学術講演会講
演概要集, I - B 189, pp.378 - 379, 1997年9月.

(1997. 8. 20受付)

ADVANCED HYPERSPACE DIVISION METHOD AND APPLICATION FOR PLASTIC RELIABILITY ANALYSIS

Satoshi KATSUKI

The hyperspace division method proposed by Katsuki and Frangopol is modified to get a more accurate solution with less computational effort. First, the advanced centerline generation method using synchronized polar coordinates parameter combination method is proposed to divide more precisely the standard normal random variable space into the radial subdomains. Secondly, two step hyperspace division method is proposed to compute the failure probability more efficiently in multiple random variable space by adopting an importance sampling methodology. Thirdly, the proposed method is applied to the plastic reliability analysis of truss structures. The accuracy and efficiency of the proposed methods is verified by comparing with the Monte Carlo simulation and/or the directional simulation results of some mathematical numerical examples, i.e., linear and nonlinear element or system reliability problems. Finally, the plastic reliability analysis of the three bar truss and the check dam structure are shown as application of the proposed method.