

微視すべりを組み込んだ構成モデルと その大変形問題への応用

白戸真大¹・岩熊哲夫²

¹正会員 修 (工) 建設省土木研究所構造橋梁部基礎研究室 (〒 305-0804 つくば市大字旭一番地)

²正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

構造材料・地盤材料の終局状態では極限解析で得られるパターンによく似た局所化した変形が観察される。その局所化した変形がどのように発達して終局に至るかを知らずには、履歴中の複雑な非線形挙動を予測する上で重要である。ここでは比較的少ないパラメータで、発達する局所的な変形を大変形領域まで安定して追跡でき、かつメッシュ依存等の数値解析上の問題点を持たない構成モデルを提案する。特徴は、局所変形の発生条件成立後に、微視すべりによる第二の非弾性成分を組み込んだことである。この第二のメカニズムを二重すべり理論で表し、弾塑性モデルに重ねたが、引っ張り試験による数値ベンチマークテストでは安定した解析結果を得ることができた。この構成モデルの応用例として、圧縮試験片の挙動と、古典的な押し込みの問題を取り挙げ、その適用性を定性的に示した。

Key Words : non-coaxiality, localization of deformation, double-slip model, finite deformation, FEM

1. はじめに

構造部材の単調あるいは繰り返し載荷後の終局状態では、局所的には100%を越すひずみが発生する。すべり等の局所変形を伴うその最終状態が、古典的極限解析によって予測できそうな場合でも、その履歴中にピークがあるのか、あるいは巨視的な剛性がどのように変化していくのか等、大変形の発展を数値的に追跡する必要がある。地盤材料の押し込み実験¹⁾においても、古典的な極限解析による局所化した変形に至るまでに、多くの同様な局所変形集中領域が発達していることが観察されている。しかも観察された領域は、極限解析では得られない部分にも多数存在することもわかっている。

この変形の局所化発生のメカニズムを、せん断帯の発生というある種の分岐現象として捉える研究が古くから行われている。これは有限変形理論の枠組みの中で材料非線形性に起因する分岐解析であり、例えば Hill and Hutchinson²⁾は均質な平面引張り場から解の唯一性が崩れる点を探すことで様々な不安定現象を予測した。このようなせん断帯の発生は当然構成則に大きく依存し、特に「非共軸性」あるいは「降伏曲面の角の存在」が変形局所化の発生を促し、分岐応力を現実的な値の範囲に下げる役割も果たしていることがわかっている^{3),4),5),6)}。

種々の構成則を用いた数値的大変形解析も数多く研究されているが、例えば有限要素法を用いた場合に変形が局所化した際、変形が局所化した部分に過剰に累

積することによって数値解が有限要素メッシュに依存してしまい、要素を増やしてもあるひとつの解に収束しない場合があることが報告^{7),8)}されている。同時に、このようなメッシュ依存性を回避するための方法も各種提案されており、材料の挙動を表現する際に「特徴長さ」を導入する方法や要素そのものにすべり変形モードを導入する方法等が紹介されている⁷⁾。しかし、その特徴長さの値や特殊な有限要素の入れ方によって結果が影響を受けたり、構成則によっては改善が見られない等、問題は完全には解決されていない。そういった問題を除いても、例えば引っ張り試験を対象としたベンチマークテスト^{9),10)}でも明らかなように、構成モデルの用い方や有限要素の違いによって、ピークの有無はもちろん変形パターンも全く異なる結果が得られ、解法に適用範囲があるのが現状である。

せん断帯のようなメカニズムをモデル化した構成則に二重すべりモデル^{11),12)}がある。これは金属の結晶塑性論などで用いられるモデルとみなすこともできるが、固有のすべり面を持つ砂のような材料モデルとも解釈できる。しかしながら、塑性モデルとして二重すべりモデルを用いた上田・岩熊¹³⁾の解析によると、極限解析では得られないような局所変形は予測されるが、その発達や分布を見る限り、定性的にも良いシミュレーションにはなっていない。

本研究では、ギャップ要素のような特殊な要素を用いず、連続体力学の記述範囲で大変形状態までを統一して

扱える構成モデルをひとつ提案する。基本的な弾塑性部分は、非共軸性を有するモデルを用いる。Hill の条件による変形局所化を材料の微視的なすべり系の発生と捉え、その微視すべりが発生した後の挙動は、二重すべりでモデル化したメカニズムによる非弾性ひずみとして考慮する。したがって、実験で観察されるすべり面やせん断帯のようなものは、境界値問題で変形が集中する場所として解釈する。まず、先に述べたベンチマークテスト^{9),10)}を解くことによって定量的な適性を示す。さらに、基本的な材料試験のひとつである圧縮試験と、古典的極限解析の代表的問題のひとつであり、直接基礎下の地盤の挙動のモデルにもなる押し込みの問題を解き、構成モデルの定性的な特徴を明らかにする。

2. 基礎方程式

空間固定のデカルト座標系 $(x_i, i = 1, 2, 3)$ を定義する。ある変形状態を現配置とし、物体力が無い場合に nominal 応力の物質微分で表した増分つり合い式は

$$\dot{n}_{ji,j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

で与えられる。ここに下付きコンマは次の添字が示す座標に関する微分を表し、いわゆる総和規約を用いている。nominal 応力速度は Cauchy 応力と

$$\dot{n}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + v_{k,k} \sigma_{ij} - v_{i,k} \sigma_{kj} \quad (2)$$

という関係にある¹⁴⁾。 v は速度ベクトルである。

幾何学的な境界条件は単純には v_i を規定する形で与えられる一方、力の境界条件は式 (1) に対応させて nominal 応力速度で表すと

$$\nu_j \dot{n}_{ji} = \dot{f}_i \quad (3)$$

となる。ここに、 ν は境界表面の外向き単位法線ベクトルであり、 \dot{f} は外力速度ベクトルである。

構成関係は一般に、単位体積当りの仕事率を表すときに対関係にある成分同士で表すことが多い。したがって nominal 応力速度は速度勾配 $v_{k,i}$ との間で

$$\dot{n}_{ij} = F_{ijkl} v_{k,l} \quad (4)$$

という関係式で形式的には記述される。

構成則に Kirchhoff 応力を用いることもある¹⁵⁾が、他との比較のためにここでは単純に Cauchy 応力を用いる。また応力速度の選択には注意が必要で、Jaumann 率が必ずしも最適なものでないことは指摘されており、他の応力速度もいくつか提案^{例えば¹⁶⁾}されている。この計算例でもかなり大きなひずみが発生するが、これも他研究との比較を容易にするために、よく用いられる Cauchy 応力の Jaumann 率を用いる。

Cauchy 応力の Jaumann 率で構成則は

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = L_{ijkl} d_{kl} \quad (5)$$

と表現できる。ここに、 d は変形速度テンソルで

$$d_{ij} \equiv \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

で定義される。Cauchy 応力の Jaumann 率は

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik} \sigma_{kj} - w_{jk} \sigma_{ki} \quad (6)$$

という関係にある。ここに、 w はスピントンソルで

$$w_{ij} \equiv \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i})$$

で定義される。式 (2) と式 (6) から

$$\dot{n}_{ij} = \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + d_{kk} \sigma_{ij} - d_{ik} \sigma_{kj} + w_{jk} \sigma_{ki} \quad (7)$$

となる。式 (5) を式 (7) に代入して F を L で表せる。

3. 構成モデル

(1) 非共軸 J_2 流れ理論

基本的な J_2 流れ理論を改善し、大変形状態で観察される局所変形を予測し易くしたモデルに、非共軸性を含んだものがある^{3),5),7),17)}。ここでも非共軸モデルを採用するが、その中のひとつで非関連流れ則を用いたモデル³⁾は、次の降伏関数 f と塑性ポテンシャル g とを用いている。

$$f \equiv \bar{\sigma} - F(I_1, \Delta^p, \bar{\epsilon}^p), \quad g \equiv \bar{\sigma} + G(I_1, \Delta^p, \bar{\epsilon}^p) \quad (8)$$

ここに、 $\bar{\sigma}$ は相当応力、 I_1 は応力の第一不変量で

$$\bar{\sigma}^2 = J_2 \equiv \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}, \quad I_1 \equiv \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad (9)$$

で定義されている。また

$$\Delta^p \equiv \int_0^t \frac{\rho_0}{\rho} d^p_{kk} dt, \quad \bar{\epsilon}^p \equiv \int_0^t (2 d^p_{ij} d^p_{ij})^{1/2} dt$$

と定義した。上添字 p は塑性部分を意味し、 ρ_0, ρ はそれぞれ変形前後の密度、 Δ^p は累積塑性体積ひずみ、さらに $\bar{\epsilon}^p$ は累積相当塑性ひずみで、 t は履歴に関するパラメータを表す。また d^p は変形速度テンソルの塑性成分、 d^p' はその偏差成分、 σ' は偏差応力成分である。

この非関連モデルに非共軸性を加えた修正モデル³⁾では、塑性ひずみ成分は

$$d^p_{ij} = \frac{1}{H} \left(\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \frac{\beta}{3} \delta_{ij} \right) \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \frac{\alpha}{3} \delta_{kl} \right) \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} + A \left\{ \overset{\nabla}{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sigma'_{kl} \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \sigma'_{ij} \right\} \quad (10)$$

と表される。右辺第二項目が非共軸性を代表する項で、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ、他の係数は

$$\alpha \equiv -3 \frac{\partial F}{\partial I_1}, \quad \beta \equiv 3 \frac{\partial G}{\partial I_1}, \quad \zeta \equiv \frac{\partial F}{\partial \Delta^p} \\ \eta \equiv \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}^p}, \quad H \equiv \frac{\rho_0}{\rho} \beta \zeta + \eta \quad (11)$$

と定義した。 α は内部摩擦係数、 β はダイレタンシー係数と呼んでもよい。 A はある種の材料パラメータであり、 A^{-1} を相当応力-相当ひずみ曲線の割線係数と解釈する場合もある。この非共軸項は降伏曲面の法線方向に直交する応力増分の塑性変形速度に対する寄与分であ

り、現配置の応力とは仕事をしない。さらに d^p の法線則は成立しなくなる。以上のことから、降伏曲面に角が存在するようなモデルとほぼ同一視されており、現実的な塑性分岐応力レベルを得るために重要な項であることも報告⁴⁾されている。

(2) 局所変形の発生条件

ここでは Hill²⁾ のモデルに従い、連続体中の不連続面の発生として変形の局所化を捉える。すなわち、ある面をまたいだ変形速度の不連続が一様場に発生し得る条件をもって、局所化された変形の発生条件とする。

このような不連続が連続体中に存在する場合も、その不連続面を通して表面力は連続していなければならない、 \mathbf{n} を不連続面の法線方向単位ベクトルとした時、式 (3) の力学的境界条件式を用いて $\langle \dot{n}_{ij} \rangle n_i = 0$ が成立しなければならない。 $\langle \cdot \rangle$ は不連続面をまたぐ飛び移り量を表す。これと構成関係式 (4) とから、不連続な速度勾配の存在条件が

$$\det |n_i F_{ijkl} n_j| = 0; \quad n_k n_k = 1 \quad (12)$$

で表され、これを満足する実数ベクトル \mathbf{n} の存在条件として、変形の局所化条件を捉える事ができる。式 (12) に対応する固有モードの如何によらずこの不連続面をすべり面と捉え、ここでは微視すべり面と呼ぶことにする。

(3) 不連続が発生した後の構成則

この論文で解析対象とする平面ひずみ問題の場合、式 (12) を満足する不連続面は最初に 1 ないし 2 面発生するため、微視すべり発生後の構成則には、Asaro¹¹⁾ により有限変形問題に対して定式化された二重すべりモデルを適用する。つまり局所変形が発生した後の変形速度 d は、弾性成分 d^e と塑性成分 d^p に加えて

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^p + d_{ij}^m \quad (13)$$

となると仮定する。ここに d^m が微視すべり面上でのすべり変形による成分である。これが、不連続な変形速度の代わりに、後述の定ひずみ速度有限要素内に導入する非弾性成分である。近年 Pechersky によって同様のアプローチが提案されている^{18),19)} が、主ひずみ方向を考慮しながらもすべり系の方向を材料固有のパラメータとしており、本論文のようなすべり系の発生条件式 (12) は用いていない。

式 (13) の 3 成分を分離する考え方は無数に存在し、弾性変形に二重すべりが重なるとする Asaro の定式化も可能であるが、その表現はとて面倒になり見通しの悪いものになる。そこでここでは

$$D_{ij} \equiv d_{ij}^e + d_{ij}^p, \quad W_{ij} \equiv w_{ij}^e + w_{ij}^p \quad (14)$$

で表される弾塑性状態に二重すべりが重なるとする。ただし、一旦すべり線を組み込んだ材料は、既に局所化し

た変形を二重すべり面として組み込んだものなので、材料が除荷を受けず降伏している間は局所化発生条件式 (12) の再確認は行わず、その段階までの最後の降伏時のすべり系が維持されることにする。また、微視すべりが滑動した後除荷し、再度降伏した後微視すべりが可能になった場合、発生する微視すべりの向きは新しい状態での局所変形発生条件式 (12) で決定されるとした。

ここで定義した D と W が発生している状態で微視すべりを考えるため、そのすべり面と共に回転運動をする観測者から見た応力速度 $\dot{\sigma}$ を

$$\dot{\sigma}_{ij} \equiv \dot{\sigma}_{ij} - W_{ik} \sigma_{kj} - W_{jk} \sigma_{ki} \quad (15a)$$

$$= \dot{\sigma}_{ij}^{\nabla} + w_{ik}^m \sigma_{kj} + w_{jk}^m \sigma_{ki} \quad (15b)$$

で定義する。 w^m は d^m 同様、微視すべりに関連したスピン成分である。これを用いて、Hooke の弾性関係を微視すべりに無関係な成分で与え

$$d_{ij}^e = \frac{1}{4\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \dot{\sigma}_{kl} + \frac{1}{3\kappa} \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{\dot{\sigma}_{kl}}{3} \quad (16)$$

と一般化する。ここに、 μ と κ はせん断弾性係数と体積弾性係数である。また塑性変形速度 d^p に関する構成式 (10) の応力速度も $\dot{\sigma}$ で置き換えなければならない。以上より、式 (5) に対応する構成則は

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl}, \quad C = L \quad (17)$$

と表現される。ここに L は

$$L_{ijkl} \equiv \left\{ \bar{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \left(\kappa - \frac{2}{3} \bar{\mu} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} + (\mu - \bar{\mu}) \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} - \frac{\{ \mu \sigma'_{ij} / \bar{\sigma} + \kappa \beta \delta_{ij} \} \{ \mu \sigma'_{kl} / \bar{\sigma} + \kappa \alpha \delta_{kl} \}}{H + \mu + \kappa \beta \alpha} \quad (18)$$

と表される。式中の $\bar{\mu}$ は

$$1/\bar{\mu} \equiv 1/\mu + 2A$$

と定義した。式 (18) 第一項目より、 $\bar{\mu}$ は見かけ上の接線せん断係数であり、非共軸性が見かけ上のせん断抵抗を低くしていることがわかる。

Asaro の二重すべりモデルのすべり面は材料固有の特性で、滑動条件は Schmid 則に依っている。ここでは前節のように、Hill の局所化発生条件式 (12) を満足する面の存在が可能になった場合に、 \mathbf{n} をその法線方向とするすべり系が滑動可能になるとしている。このすべり面上のすべりの方向を \mathbf{s} で表す。式 (12) は一様場での局所化発生条件だが、ここでは後述の定ひずみ速度有限要素を前提としているので、この式を構成則上の条件として用いることにした。

新たに滑動状態になったすべり面上のすべり変形 γ^α により生じる変形速度とスピンは

$$d_{ij}^m = p_{ij}^\alpha \dot{\gamma}^\alpha, \quad w_{ij}^m = q_{ij}^\alpha \dot{\gamma}^\alpha \quad (19)$$

と書ける。ここに上添字 α は滑動しているすべり系を区別するための記号であり、上式では全ての滑動すべり系に関して総和をとる。また $p_{ij}^\alpha, q_{ij}^\alpha$ は純粋に幾何学的な量で、各すべり系のベクトル n, s とで

$$p_{ij}^\alpha \equiv \frac{1}{2}(s_i^\alpha n_j^\alpha + s_j^\alpha n_i^\alpha), \quad q_{ij}^\alpha \equiv \frac{1}{2}(s_i^\alpha n_j^\alpha - s_j^\alpha n_i^\alpha) \quad (20)$$

と定義される。ただし、この式では上添字 α に関して総和をとらない。

すべり面の滑動開始条件には Schmid 則を用いなかったが、式 (12) はすべりの発展則を与えてくれない。したがってここでは、発展則については Schmid 則に準じ、すべり面上のせん断応力速度とすべり変形速度は比例するものとし、すべり面の速度抵抗則を

$$\dot{\tau}^\alpha = h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\beta \quad (21)$$

で与えることにした。ここに、 $h^{\alpha\beta}$ は β -系のすべりによって生じる α -すべり系の抵抗係数であり、 β については滑動している全ての系に対して総和をとる。すべり面上に発生するせん断応力は

$$\tau^\alpha \equiv \sigma_{ij} n_i^\alpha s_j^\alpha \quad (22)$$

である。ここは α の総和を取らない。

またすべり面の運動学的発展則については Asaro の考え方をそのまま踏襲するが、弾塑性状態にある物体にすべりが生じるとしたので

$$\dot{n}_i^\alpha = W_{ij} n_j^\alpha, \quad \dot{s}_i^\alpha = W_{ij} s_j^\alpha \quad (23)$$

で支配されるものとする。式 (22) の物質微分に式 (20) を考慮して式 (23) を代入すると

$$\dot{\tau}^\alpha = \dot{\sigma}_{ij} p_{ij}^\alpha \quad (24)$$

という非常に簡単な関係が得られるため、式 (21), (24) よりすべり系の発展則は

$$\dot{\sigma}_{ij} p_{ij}^\alpha = h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\beta \quad (25)$$

となる。式 (13), (14) のように、全変形をすべりに起因する成分とそうでない弾塑性成分に分けたために、このような単純な表現が得られている。

最終的に、上式に式 (17) を代入し、式 (13), (14), (19) を考慮すると

$$\dot{\gamma}^\alpha = M^{\alpha\beta} p_{ij}^\beta C_{ijkl} d_{kl}$$

と得られる。 $M^{\alpha\beta}$ は $N^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} + p_{ij}^\alpha C_{ijkl} p_{kl}^\beta$ の逆行列である。これを用いてひずみの 3 成分を重ね合わせると、最終的に F が

$$F_{ijkl} \equiv C_{ijkl} + \sigma_{ij} \delta_{kl} \quad (26)$$

$$- \frac{1}{2}(\delta_{ik} \sigma_{lj} + \delta_{il} \sigma_{kj}) + \frac{1}{2}(\delta_{jk} \sigma_{li} - \delta_{jl} \sigma_{ki})$$

$$- (C_{ijmn} p_{mn}^\alpha + q_{im}^\alpha \sigma_{mj} + q_{jm}^\alpha \sigma_{mi}) M^{\alpha\beta} p_{pq}^\beta C_{pqkl}$$

と表現できる。

前述したように、すべり面には式 (21) のような抵抗則のみが存在し式 (25) の発展則が成り立つとした。すな

わち、一旦発生したすべり面は材料が除荷を受けない限り滑動し続け、その滑動する向きは

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^\alpha &= 0 & \text{もし} & \quad \dot{\sigma}_{ij} p_{ij}^\alpha < h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\beta \\ \dot{\gamma}^\alpha &\geq 0 & \text{もし} & \quad \dot{\sigma}_{ij} p_{ij}^\alpha = h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\beta \end{aligned} \quad (27)$$

で決定される。ただし、この論文では簡単のために、すべり面の硬化パラメータで二つのすべり系の相互作用は無いものとし

$$h^{\alpha\beta} = K \delta^{\alpha\beta}$$

とおく。ここに、 $\delta^{\alpha\beta}$ も Kronecker のデルタである。

また、式 (13), (14) の分離によって、截荷・除荷に関しても、二重すべりメカニズムは通常の J_2 塑性流れで硬化している材料中に付加されたものと解釈して定式化してあるため、硬化条件式は

$$\text{截荷} \quad \text{もし} \quad f = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0 \quad (28a)$$

$$\text{除荷} \quad \text{もし} \quad f = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \quad (28b)$$

のように $\dot{\sigma}$ で一般化されなければならない。また、数値計算上、後続降伏応力を計算するために必要とされる降伏曲面の変化が

$$\dot{F} = -\frac{\alpha}{3} \dot{\sigma}_{kk} + \zeta \frac{\rho_0}{\rho} d_{kk}^p + \eta \sqrt{2 d_{ij}^p d_{ij}^p} \quad (29)$$

のように $\dot{\sigma}$ で表現される。ただし、 d^p は式 (10) の Jaumann 率を $\dot{\sigma}$ で置き換えた表現から算定される。

4. 平面ひずみ問題への適用

(1) 平面ひずみ問題における局所化発生条件

平面ひずみ状態では、局所化発生条件式 (12) は n_1, n_2 , あるいはその比に関する四次方程式になる。

$$f(\chi) \equiv a_4 \chi^4 + a_3 \chi^3 + a_2 \chi^2 + a_1 \chi + a_0 = 0 \quad (30)$$

ここに、 $\chi \equiv n_1/n_2$ と定義した。係数 $a_4 \sim a_0$ は F の成分で陽に表される²⁰⁾。この特性方程式 (30) が少なくとも一つの実数解 χ を持つとき、微視すべりの発生が可能となる。

(2) 微視すべり発生以降の構成則

図-1 のように x_1-x_2 平面内のすべり系を二つのすべり系の対称軸の向き ψ と、その軸に対するすべり線の向き ϕ とで表すことにすれば、すべり系を定義している各単位ベクトル等は ψ, ϕ で表せ、すべり系は式 (23) に従った回転をする¹²⁾とした。式 (30) から求まる n を用いて 2 つの角度を算定できる。

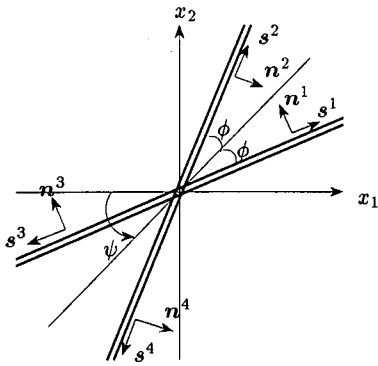


図-1 二重すべり系

5. 数値解析手法と定式化

(1) 定ひずみ速度三角形要素

構成則が増分表示されているため、単純な増分有限要素解析を採用する。見かけ上、nominal 応力速度で表現した支配方程式は、微小変形理論のそれと同じになるため、行列表示した場合の成分の非対称性に留意すれば、弱形式を求めた上で標準的な手法で定ひずみ速度三角形有限要素を定式化できる。定ひずみ速度要素であることから、一旦変形の局所化が可能になった場合には、不連続面が要素内のどこに発生するかを考慮しないで良いため、二重すべりモデルを用いることができ、それは一種の smeared モデルに相当している。

(2) 現配置での節点座標と応力成分の算定

Euler 型の増分方程式を有限要素化したため、節点座標値は荷重段階で常に更新しなければならない。記述が空間固定座標でなされている上に、定ひずみ速度三角形要素を用いたことから、節点座標はその都度の速度ベクトルを現座標値に加えることによって更新できる。

また、Cauchy 応力と nominal 応力速度の定義から明らかにように荷重毎の $T_{kj}^R \equiv (\sigma_{kj} + \dot{n}_{kj} \Delta t)$ が、新しい配置における第一 Piola-Kirchhoff 応力成分になる。よって、新しい配置での Cauchy 応力は $\sigma_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} x_{i,k} T_{kj}^R$ で得られる¹⁴⁾。右辺の密度比は速度勾配を行列表示した時の行列式で算定できる。

(3) 局所化の発生と二重すべり方向の確定

増分有限要素解析で式 (30) が χ に関して実根を持った瞬間を捉えるのは非常に困難である。そこで $f(\chi)$ が通常は正值関数であることを利用して、荷重中 $f(\chi)$ の最小値が零または初めて負になったときをもって、局所化の発生条件を満たした瞬間であるとし、その最小値を与える χ より二重すべりの方向を求めることとした。具体的に本解析で用いた手法は、文献²¹⁾を参考にした。

このようにして得られたすべり線上での滑動する系は、式 (27) を用い決定する。ここでは増分荷重しているため、式 (27) の σ は一つ前の荷重ステップでの値を用い、それと荷重寸前の p_{ij}^{α} を用いることにした。

(4) 降伏判定と荷重増分量の調整

式 (8) の降伏条件を数値解析で厳密に満足させることは不可能である。したがって、よく用いられる r_{min} 法²²⁾を用い荷重増分ステップ量の調整をした。また F は $F(t + \Delta t) = \tau_0 + \sum_{loading} \dot{F} \Delta t$ によって更新する。 τ_0 は初期降伏せん断応力で、総和記号脇の 'loading' は荷重時のみ和をとることを意味している。また、 \dot{F} は式 (29) を用いて算定できる。

さらに、弾性から塑性への過渡応答を容易にするために、計算上の降伏条件には幅を許容し

$$F(t) \leq \bar{\sigma} < (1 + \Lambda_1) F(t)$$

とした。また、後続降伏の降伏条件も

$$F(t) \leq \bar{\sigma}(t + \Delta t) < (1 + \Lambda_2) F(t)$$

と、別のパラメータ Λ_2 で降伏曲面の「厚さ」を与えた。 Λ_2 は必ずしも Λ_1 と同じ値が良いとは限らず、計算を効率良く進めるために試行錯誤した結果、 $\Lambda_2 > \Lambda_1$ と設定する必要があった。

除荷についても同様に、式 (28b) の降伏曲面の微係数 $\partial f / \partial \sigma$ を用いた判定が困難である。しかし単純な増分解析なので、ある荷重ステップでの配置において得られている $\bar{\sigma}$ と $F(t)$ の値を用い、 $\bar{\sigma} > F(t)$ なら次ステップは荷重、 $\bar{\sigma} < F(t)$ なら除荷として計算を行なった。

6. ベンチマークテストによる解析例

(1) 材料定数と有限要素モデル

大変形問題の数値解析モデルの比較と変形局所化の予測を主目的とした複数のプログラムによるベンチマークテストの報告がある^{9),10)}。対象は両端固着の平面ひずみ引張り試験で、境界条件は上下端の水平方向変位が発生しないよう固定して上下軸方向に一樣な強制変位を与え、側面は自由表面である。縦横比は $L/W = 3$ である。図-2に、文献⁹⁾で指定された要素メッシュを示した。なお、対称性からこの部分は同図左の領域の右上 1/4 の解析対象で、要素数は 504 要素である。また同文献等の解の性質等についての検討を参考にし、要素は 4 角形に罰点を入れた三角形要素群で構成する。

このテストでの弾塑性構成則はべき乗則

$$\sigma = E \varepsilon \quad (\sigma \leq \sigma_Y)$$

$$\sigma = \sigma_Y (\varepsilon / \varepsilon_Y)^m \quad (\sigma > \sigma_Y)$$

で与えられている。ここに E はヤング率で

$$\varepsilon_Y = \sigma_Y / E = 1/500, \quad m = 0.0625, \quad \nu = 0.3333$$

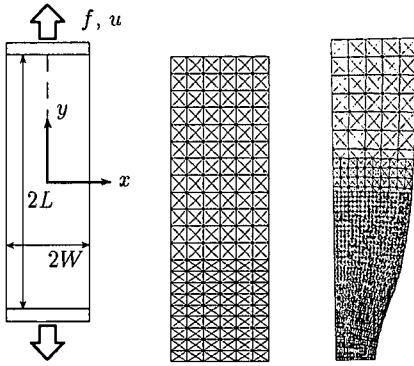


図-2 ベンチマークテスト

としている。これを式(9)の相当応力 $\bar{\sigma}$ と $\bar{\epsilon}^2 \equiv 2\epsilon'_{ij}\epsilon'_{ij}$ で定義される相当ひずみの関係に読み直し、本構成則を文献⁵⁾と同じアプローチで等置すると

$$\frac{H_t}{\mu} = m \frac{H_s}{\mu}, \quad \frac{\bar{\mu}}{\mu} = \left(1 + \frac{1}{H_s/\mu}\right)^{-1} \quad (31)$$

$$H_s \equiv \frac{1}{2A}, \quad \frac{H_s}{\mu} = (1 + \nu)^m \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\gamma_0}\right)^{m-1}$$

という関係になる。ここに初期引張降伏応力は $\sigma_Y = \sqrt{3}\tau_0$ で、初期降伏せん断ひずみ γ_0 を

$$\gamma_0 \equiv \frac{\tau_0}{\mu} = 0.00308 \quad (32)$$

と定義し、値を求めた。なお、相当ひずみ $\bar{\epsilon}$ は、増分量を用いて

$$\bar{\epsilon} \equiv \sum_{\text{loading}} \sqrt{2(d_{ij}^e + d_{ij}^p)(d_{ij}^e + d_{ij}^p)}$$

で算定する。ここに、総和記号下の 'loading' は初期降伏までの弾性時、および、初期降伏後は中立および載荷時のみ和を取ることを示す。

ベンチマークテストは金属材料を対象としていることから、塑性への体積変化等の寄与を無視してもよく

$$\alpha = \beta = 0, \quad \zeta = 0 \quad (33)$$

とする。したがって式(11)の硬化係数は $H = \eta$ となる。さらに、結果整理の段階で微視すべり発生後の変形を評価するための量として、変形速度のうちその非可逆成分 d^p , d^m の和で $d^r = d^p + d^m$ と表すことにし、その相当ひずみ成分を

$$\bar{\epsilon}^r = \int (2d_{ij}^r d_{ij}^r)^{1/2} dt \quad (34)$$

で定義し、相当残留ひずみと呼ぶことにした。

(2) 増分量と降伏曲面の厚さの設定

増分解析であるため、強制変位増分量を適切に選ぶ必要がある。これも、試行錯誤で複数の解析を行ったが、結局 $\Delta u/L = 1 \times 10^{-3}$ 程度以下になるようにすれば十分と判断した。

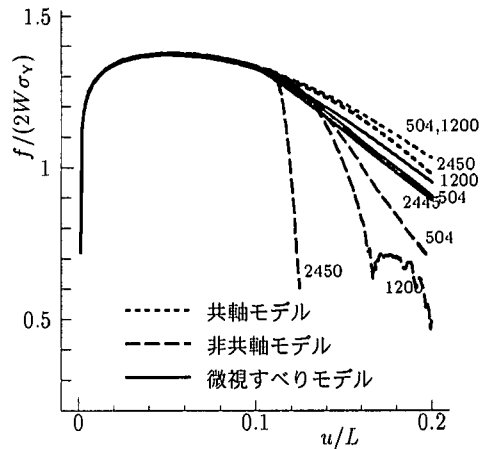


図-3 反力変位関係

また、降伏曲面の厚さを示すパラメータ Λ_1 , Λ_2 についても、いくつかの組み合わせで解析してみた結果、前者については小さい値に制限すべきである一方、後者は少しくらい大きくしてもあまり解に変化が見られなかった。よってここでは、 $\Lambda_1 = 0.005$, $\Lambda_2 = 0.01$ とすることにした。いずれにしてもこのベンチマークテストのような問題では、境界条件の対称性が原因か、変形モードが急変するようなこともなく、数値計算上の各種パラメータの変化には比較的鈍感であった。

(3) 構成則の差による影響

a) 共軸モデル

図-2の右端に、非共軸性を含まないモデルで、2445要素の場合の $u/L = 0.2$ での変形状態を示した。色の付いた部分は降伏したか降伏後除荷した部分で、白い部分は弾性域である。下端付近における断面の減少は明らかであるが、特に相当塑性ひずみ等の分布を見るまでもなく、局所化した変形は見られない。実際、局所変形の発生条件はどの要素でも成立しなかった。これは、文献⁹⁾でも確認された安定な挙動であり、次節で示す反力と変位関係も同文献のいくつかの結果に非常に近いことから、本解析のプログラム上の正当性を確認できた。またメッシュ依存性は観察されなかった。共軸モデルは、終局状態のうち非常に大きな局所化した変形を伴う状態のシミュレーションには適さないと考えられる。

b) 非共軸モデル

一方、図-3には、前節の共軸モデルの結果も併せて、非共軸モデルを用いた場合の反力変位関係を示している。平面ひずみ問題として奥行方向に単位の深さを取っているため、縦軸は分母の1が省略された無次元量である。この場合、局所化発生条件を満たした要素も存在するが、二重すべりメカニズムは稼働させていない。最初

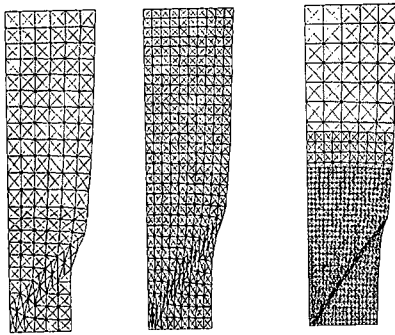


図-4 非共軸モデルの変形

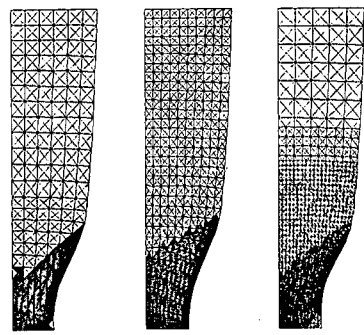


図-5 微視すべりモデルの変形

に局所化発生条件を満たすのはブロック左下角の2要素であり、微視すべりの向きは水平軸に対し約±53度であった。非共軸性によって、局所化発生条件が成立するようになっている。図から明らかなように、要素数の増加に伴い解がどこかに収束するような挙動は見られず、変位レベルが0.1程度以上の範囲では、要素数の異なるモデル毎に全く異なる解を与えている。

図-4には、要素数が504、1200の時で $u/L = 0.15$ の場合と、要素数2445で $u/L = 0.125$ の時の変形図を示した。いずれの要素パターンにおいても、ブロック左下端を通して右斜め上方向に局所化した変形が観察されるが、どの場合でもその幅が有限要素二つ分の幅になっている。すなわち、要素分割を細かくすればするほど、大変形はより狭い部分だけに集中している。そのため、図-3の応答もメッシュに依存してしまい、ある解に収束しないような、いわゆるメッシュ依存性を示す。

c) 微視すべりを持つ本モデル

本論文で提案したモデルを用いる場合、すべり面上での抵抗係数 K はベンチマークテストの解析条件には与えられていない。ここでは、式(31)の硬化係数 H に対し、常に $K/H = 0.1$ となるように与えた。これは、材料が局所化条件式(12)を満足した後、安定ながらも二重すべりが存在しないときより柔な構造になるのではないかと考え、試みに硬化係数の1/10程度にしたものである。なお、材料モデルとしては軟化のような不安定な経路を有していないことを明記しておく。

図-3に、微視すべりを許す本モデルの結果も示した。その挙動は、共軸モデルと非共軸モデルの間にあり、要素分割の影響をほとんど受けていない。すなわちメッシュ依存性はほとんど無くなったと考えて良い。要素数504、1200、2445での変形図を示したのが図-5である。それぞれ $u/L = 0.2$ の時の変形状態で、黒い部分が局所化条件を満足した後二重すべりが滑動している要素、灰色の濃い部分が降伏している場所で、淡い部分が除荷している要素、白い部分が弾性のままの所である。用いた3種類のメッシュパターンでは、前節の非共軸モデル

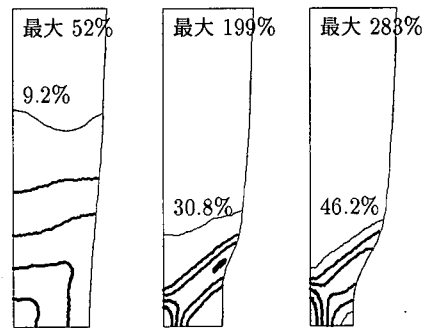


図-6 微視すべりモデルの $\bar{\epsilon}$ 分布の変化(2445要素)

で起きたようなメッシュ依存性は全く観察されない。

ただ、共軸モデルのように、変形が比較的一様に見えるため、 $u/L = 0.1, 0.15, 0.2$ の状態での式(34)で定義した相当残留ひずみ $\bar{\epsilon}$ 分布を図-6に示した。図中に局所的な最大ひずみと、コンター線間のひずみ差を数値で示してある。共軸モデルの場合には大変形状態でも、この図の $u/L = 0.1$ に似た単調なパターンしか見られない。しかし、本構成モデルによる結果の $u/L = 0.15, 0.2$ では、非共軸モデルで見られたような、断面の絞り開始部分から左下斜めに伸びる、比較的大きな非可逆ひずみが累積分布している。

7. 応用例

(1) ブロックの圧縮

岩盤や地盤材料の場合は通常圧縮試験によって材料特性を得るため、ひとつの数値解析例として、ブロックの平面ひずみ圧縮を対象として、初期不整と材料パラメータの影響について考察する。

a) 材料パラメータと有限要素モデル

解析モデルと800要素分割例を図-7に示す。縦横比は $L/W = 2$ で、履歴による終局状態の差を顕著にするために、完全系の他に図示した初期不整 $v(y)$

$$\frac{v}{L} = c \left[1 - \cos \left\{ 4\pi \left(\frac{y}{L} - \frac{1}{2} \right) \right\} \right], \quad c = 0.001 \frac{W}{L}$$

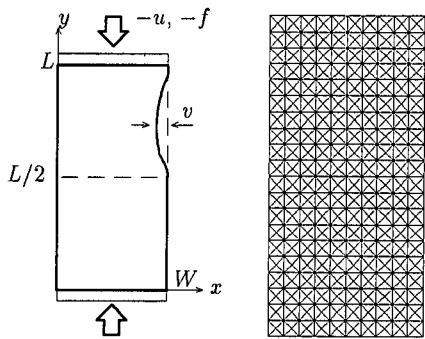


図-7 平面ひずみ圧縮ブロックと有限要素

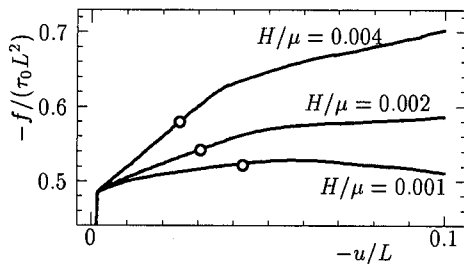


図-8 硬化係数による応答の違い

を持つ系を対象とする。境界条件は両側面が自由、下端を固定端、上端で横方向変位を固定し、下向きの強制変位 $-u$ を与えた。数値計算上のパラメータは、 $\Lambda_1 = 0.004$, $\Lambda_2 = 0.01$ とした。材料パラメータ α, β, η は前節の式 (33) と同じく無視し、定数とした。増分ステップと初期降伏ひずみ γ_0 を

$$-\Delta u/L = 2.5 \times 10^{-5}, \quad \gamma_0 = 0.0025$$

と設定する。

b) 材料パラメータの特徴

材料パラメータの特性を調べるために、初期不整を持つモデルをいくつか解析した。硬化係数 H を数種類試した結果が図-8 である。 $\bar{\mu}/\mu = 0.003$, $K/\mu = 0.00001$ とした。図中白丸は初めて局所化が発生した点である。いずれの H に対しても、局所化発生後しばらくして応答勾配が変わるが、これは塑性域および微視すべりの分布が全幅に拡ったためである。また H が小さいほど低い荷重レベルで局所化が発生するが、逆に変形レベルは大きくなっている。 $H/\mu = 0.001$ のときには応答に極大点が見れ、巨視的には軟化を示した。

次に、非共軸パラメータ $\bar{\mu}/\mu$ を変化させた結果を図-9 に示す。 $H/\mu = 0.002$, $K/\mu = 0.00001$ とした。この図の範囲では、 $\bar{\mu}/\mu = 0.004$ より大きい値では微視すべりが発生しない。すなわち非共軸性がそれより強い材料でないと、変形の局所化条件は満足されない。これは既存の研究で指摘されているのと同様である。さらに $\bar{\mu}/\mu$

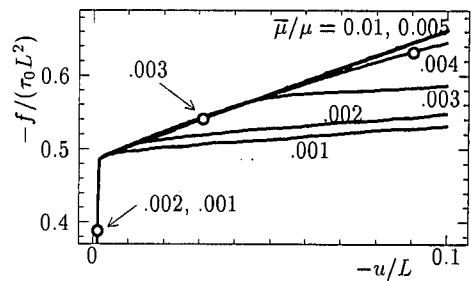


図-9 非共軸パラメータの影響

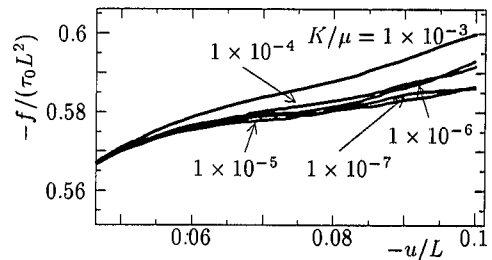


図-10 すべり抵抗係数の影響

を小さく、つまり非共軸性を増していくと、初期局所化発生荷重レベル、変形レベル共に小さくなる。

最後に、二重すべり面の抵抗係数 K の影響を図-10 に示した。ただし、 $H/\mu = 0.002$, $\bar{\mu}/\mu = 0.003$ とした。塑性の硬化係数 H と同様、この抵抗係数も小さくなる程応答勾配は零に近づくが、 $K/\mu = 1 \times 10^{-5}$ 以下ではほとんど影響が現れなかったことは興味深い。つまり、すべり面上の抵抗が非常に小さくなると不安定性が増し軟化すると予想されたが、他のパラメータとの関連が、そうならなかった。また、この抵抗係数が大きくなると、応答曲線が上方に移動することから、微視すべりの無い通常の非共軸モデルに近づく。

c) 初期不整による影響

図-11 に、上端での強制変位反力関係を示した。材料定数は初期不整系でピークを持つ組合せ

$$H/\mu = 0.001, \quad \bar{\mu}/\mu = 0.003, \quad K/\mu = 0.00001 \quad (35)$$

とした。図中の白丸は、最初に変形局所化条件を満足した要素が発生したレベルである。このレベルは初期不整によって低く、かつ変形の小さいレベルに移動している。応答そのものも、初期不整がある場合の方が柔である。この柔な応答は初期降伏以後すぐに始まっており、何らかの分岐で異なる挙動が得られたと考えるより、単なる履歴依存のために異なる変形履歴を示していると考えた方が良いかもしれない。

この応答の違いを考察するために、まず初期不整の無い場合の $u/L = -0.1$ での変形図を図-12 に示した。左図の黒い部分が、微視すべりが発生している要素であ

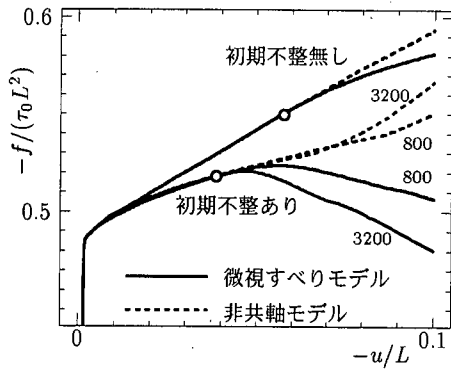


図-11 圧縮ブロックの反力変位関係

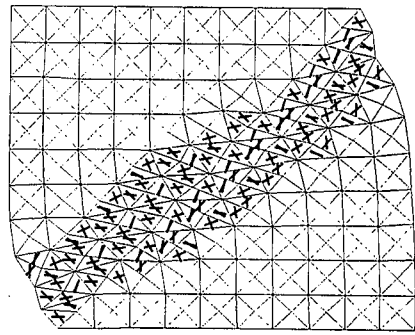


図-14 初期不整がある場合の微視すべりの向き

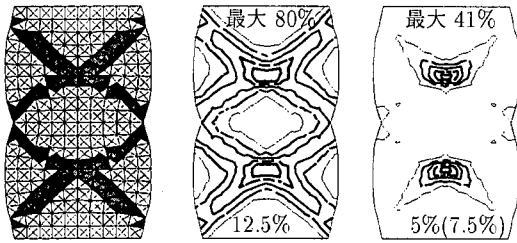


図-12 初期不整が無い場合の変形状態と $\bar{\epsilon}$ と $\bar{\epsilon}^m$

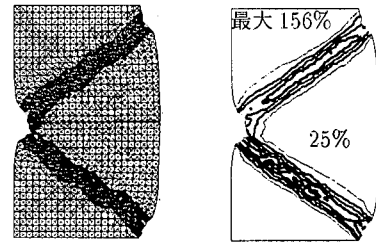


図-15 3200要素を用いた場合の変形状態と $\bar{\epsilon}$

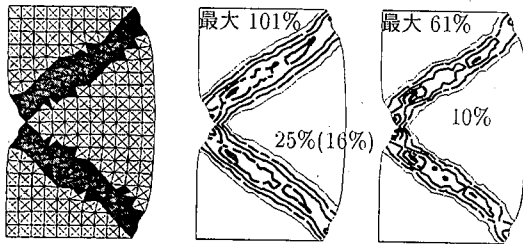


図-13 初期不整が存在する場合の変形状態と $\bar{\epsilon}$ と $\bar{\epsilon}^m$

る。初期不整が無い場合、変形形状も上下左右共に対称になっている。同図の中央に残留ひずみの分布を描いたが、変形の集中が上下半分部分毎の対角方向に発達している。図中の数値は局所的最大値とコンター間のきざみ幅である。同じ図の右側には

$$\bar{\epsilon}^m = \int (2 d_{ij}^m d_{ij}^m)^{1/2} dt \quad (36)$$

で定義した。非可逆相当ひずみ成分の内のすべり成分だけの分布を描いた。図中の数値は最も細い線でのひずみレベルで、括弧内はコンター間のきざみ幅を示す。このすべり変形の方は上下の半分部分の中央部分のみに集中しており、かつ全残留ひずみの半分程度に留まっている。つまり、対称性のため、すべりのような方向性を強く持った変形がごく限られた部分に拘束され、そのため比較的剛な挙動を示していると考えられる。

一方、初期不整が存在する系の変形図が図-13である。初期不整は右上辺で与えたものの、最初の微視すべ

りは、やや右下隅に近い内部と上半分の中央付近、および左辺中央部で、ほぼ同時に発生し、それが斜めの方向に発達してこの図左のような変形状態に至る。これは文献²³⁾で示された粘土の結果のいくつかと定性的に整合する。同図中央に残留ひずみの分布を、右に式(36)のすべり成分のみの非可逆相当ひずみ分布を示したが、この場合には、すべり変形が大きく広がるだけでなく、全残留ひずみに占める割合も対称変形の場合より相対的に大きくなっている。

また、図-14には上半分領域における微視すべり線の接線方向 θ の向きの分布を示した。用いた要素分割にも依存するだろうが、規則的に並んだ亀裂の進展に似て、2組のすべり系の向きが少し違う要素とほぼ平行する要素とが、隣り合って交互に現れるのは興味深い。非対称変形ですべりを許容しているため、剛性が非常に小さくなり、結果的に応答図-11に示したように、巨視的な軟化挙動を示したと考えられる。

縦横比をいくつか変えてみたが、初期不整の有無に依らず、同様の非可逆変形の累積パターンしか得られなかった。また数値計算上は、完全系であっても微視すべりが滑動後、増分剛性行列の行列式の符号が頻繁に変化した。非対称行列であるためエネルギー的観点から安定の議論はできないから、直接分岐点の存在には結び付かないが、少なくとも有限要素法としては不安定な解析を続行していることは注記しておきたい。

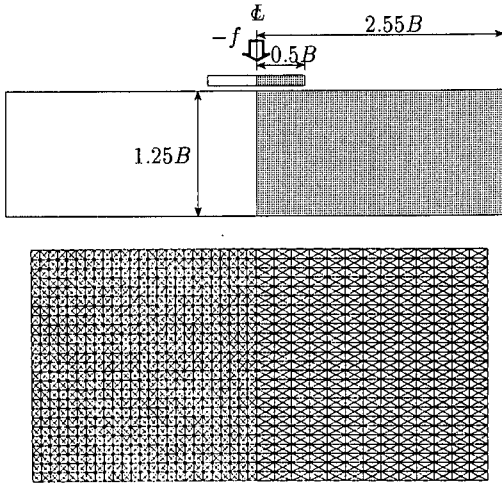


図-16 押し込み問題の解析対象と有限要素

d) 要素数の影響

ベンチマークテストと同様、メッシュ依存性について検討するため、要素数を3200に増加させた。 $u/L = -0.1$ のときの変形形状が図-15である。反力変位関係は図-11に800要素の場合と並べて示してある。2種類だけではあるが、非共軸モデルのベンチマークテスト結果程の差異は無い。変形状態についても、要素数が800要素の場合の図-13と比べて、微視すべり発生領域の幅は多少狭くなっているものの、これも非共軸モデルでのベンチマークテストの結果に比べると、それ程相違は無い。残留ひずみ $\bar{\epsilon}$ も、最大値は約1.5倍になっているが、その分布の幅等はほぼ同様である。

ただ図-11にも示したように、微視すべりを滑动させない通常の非共軸モデルの結果もあまりメッシュに依存していないことから、圧縮のような境界値問題では、メッシュ依存性が顕著にならないだけかもしれない。

(2) 押し込み問題

古典的な極限解析ですべり線が求まっている代表的な問題として、半無限体の押し込み問題を対象とする。解析対象と、用いた3800有限要素分割を図-16に示した。これは文献^{24),25)}を参考にしたが、文献²⁴⁾で推奨している範囲よりも浅い。これは計算機メモリの制約があったことと、数値解析例のある文献²⁵⁾との比較を容易にするために、後者で用いられていたのとはほぼ同じ領域を対象としたためである。なお、幾何形状と境界条件の対称性から図-16の影のついた右半分のみを解析した。

境界条件は、底面固定、左右境界は鉛直方向に自由、水平方向に固定とした。押し込み部分の節点には同じ大きさの鉛直変位 $-u$ を与えることでモデル化した。また簡単のため、押し込み部の水平変位は固定とした。計算

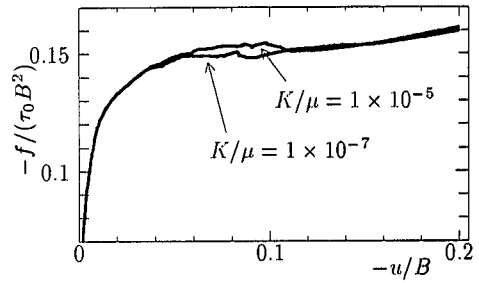


図-17 反力押し込み関係

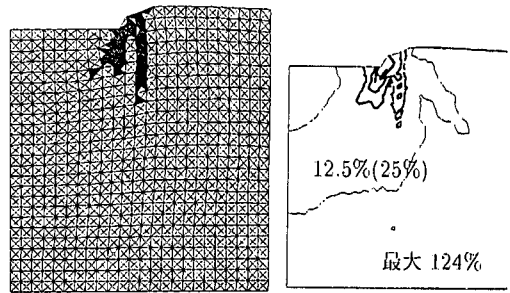


図-18 $u/B = -0.06$ での変形状態と $\bar{\epsilon}$ 分布

制御パラメータは $\Lambda_1 = 0.003$, $\Lambda_2 = 0.01$ とした。材料定数を特定する実験情報を有していないので、前節の平面ひずみ圧縮試験と同じ式(35)の定数値を用いた。また、変位増分は $\Delta u/B = -2 \times 10^{-4}$ とした場合に $u/B = -0.097$ を越える辺りで数値解析が進展しなくなった。そこで、 $\Delta u/B = -2.5 \times 10^{-5}$ とした。

反力変位曲線を図-17に示した。 $K/\mu = 1 \times 10^{-5}$ のときの応答は、文献¹⁾の大型実験の図12あるいは文献²⁶⁾の小型実験結果のFig.4と定性的には似ている。また横軸の押し込み量は定量的にもよく合っており、実験では押し込み量が0.05あたりに極大値を持っているが、本数値解析でも同様の部分で応答が複雑になり、応答の勾配がほぼ水平になっている。同図には、すべり面の抵抗係数 K/μ を 1×10^{-7} にした場合の結果も示した。圧縮のシミュレーションと同様、より柔かな応答を示しているが、その差異は顕著ではなく、また次に示す変形状態もほとんど同じであった。

変形局所化条件は、押し込み量が0.01を越えた辺りで、押し込み部の右端で初めて満足される。このとき、図-16に示した有限要素メッシュの左半分の細かく分割した部分のほとんどが塑性状態に至っている。代表的な状態として、巨視的剛性がほぼ零になる $u/B = -0.06$ での変形と残留ひずみの分布を図-18に示した。極限解析で得られる自由表面から押し込み部直下側45度方向への微視すべりメカニズム発生部分が発達し始めると同時に、押し込み縁直下方向への発達も観察される。後

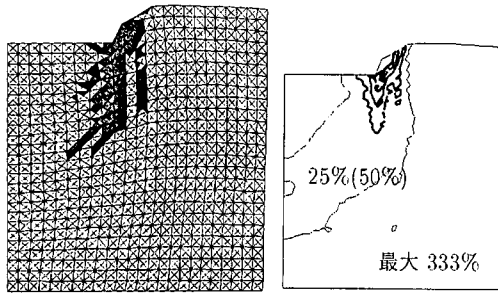


図-19 $u/B = -0.105$ での変形状態と $\bar{\sigma}$ 分布

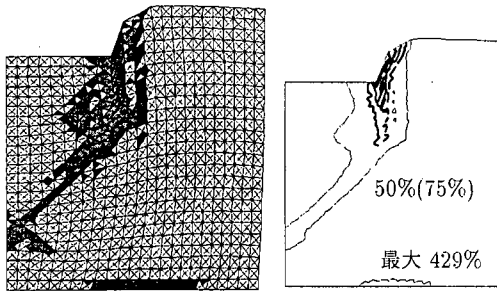


図-20 $u/B = -0.15$ での変形状態と $\bar{\sigma}$ 分布

者は文献¹⁾の大型試験でも観察されるすべり線の発達パターンによく似ている。押し込み量が0.105あたりになると、図-19にあるように、微視すべりの滑動し始めた要素が極限解析で得られる斜め45度方向に発達し、残留ひずみ分布も発達していくが、残留ひずみの高い部分は押し込み縁直下の鉛直下方にも拡っている。残留ひずみコンター図中の数値は、最大値と最小コンター線のひずみレベル、括弧内がコンター間のきざみ幅である。

押し込み量が0.12程度に至ると、微視すべりが滑動する要素が図の左辺つまり対称軸に到達し、0.15での状況を図示すると、図-20のようになる。この状態では下方境界にも微視すべりが滑動した要素が分布し始め、ここで解析した最終状態の $u/B = -0.2$ では下方から対称軸までも微視すべりの発達した要素が連続して分布する。なお、文献²⁵⁾では、押し込み量がこの1/4程度のレベルではあるが、同じようなパターンと履歴で高ひずみ分布帯の発達が得られている。

最終的に極限解析によるすべり線方向に、微視すべり滑動要素が拡っているが、極限解析には無い方向にも変形の集中が履歴途中で追跡できた。今回採用した有限要素範囲が前述のように深さ方向には多少小さめだったため、特に下面境界の影響を受けてしまっており、新しい結論が何か出るというわけではないが、载荷の比較的初期段階から非可逆変形の集中した領域が、極限解析結果とは異なる部分にも発展し、終局状態に至るまでにピー

クを持つような非単調な変形を数値的に追跡できたと言える。

8. 結語

本論文では、変形の局所化を伴う問題を数値的に追跡するための構成モデルを新たに提案し、それを平面ひずみ問題に適用し、その適用性について検討した。

1. ベンチマーク試験との比較計算では、数値的な不安定もなく大変形挙動を追跡できた。また、実際に値を代入した塑性パラメータも3個と少ないながら、大変形状態までを统一的に解析できた。
2. 共軸モデル材料は局所変形を予測しないが、非共軸モデルもメッシュ依存性を持つ場合があり、いずれも適用範囲に限られることを再確認した。
3. 本論文で提案する非共軸微視すべりモデルは、メッシュ依存性を示さず、圧縮や押し込みの問題においても定性的に許容できるような大変形数値シミュレーションができた。メッシュ依存が見られないのは、ここで導入したすべり抵抗が軟化の集中のようなものを阻害するからと予想されるが、明確な理由は見出せなかった。
4. ただ、本構成モデルでも、微視すべりを許容した後も局所発生条件を満足する不連続面が存在し得、また非対称ではあるが接線剛性行列の行列式が正ではないまま解析が続行されており、楕円型ではない偏微分方程式系に有限要素法を適用しているという問題点は解決できていない。

このように、材料パラメータの決定法や上記の数値解析手法としての問題を今後まだ検討する必要はあるが、微視的な変形の局所化を構成モデルに組み込んだ上で、大変形状態までを统一的に解析できる数値モデルを提案できた。

参考文献

- 1) 龍岡文夫, 田中忠治, 谷和夫, Siddiquee, M. S. A., 岡原美知夫, 森本励: 土質力学の境界値問題におけるひずみの局所化の意味, 地盤の破壊とひずみの局所化, 土質工学会, pp. 50-63, 1994.
- 2) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plain tension test, *Int. J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 421-441, 1975.
- 3) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S.: An analytical estimate of shear band initiation in a necked bar, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 18, pp. 69-83, 1982.
- 4) Needleman, A.: Non-normality, and bifurcation in plane strain tension and compression, *Int. J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 27, pp. 231-254, 1979.

- 5) Stören, S. and Rice, J. R.: Localized necking in thin sheets, *Int. J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 421-441, 1975.
- 6) 後藤学, 天木勇人, 田中光三: 単軸引張下のくびれ変形の解析, 日本機学会論文集 A 編, Vol. 53, No. 491, pp. 1440-1446, 1987.
- 7) 富田佳宏: 有限要素法による大変形弾塑性問題解析の展望, 塑性と加工 (日本塑性加工学会誌), Vol. 36, No. 408, pp. 2-9, 1995.
- 8) Pietruszczak, S. T. and Mróz, Z.: Finite element analysis of deformation of strain-softening materials, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 17, pp. 327-334, 1981.
- 9) 神馬敬, 富田佳宏, 島村三郎: 変形問題に対するベンチマークテスト報告集, 日本塑性加工学会, 1986.
- 10) 神馬敬 (研究代表者): 変形問題に対するベンチマークテスト報告集, 平成元年度科学研究費 (総合研究 A) 研究成果報告書, 1990.
- 11) Asaro, R. J.: Micromechanics of Crystals and Polycrystals, *Advances in Appl. Mech.*, Vol. 23, pp. 1-115, 1983.
- 12) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S.: Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals, *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. A394, pp. 87-119, 1984.
- 13) 上田勝久, 岩熊哲夫: 直接基礎下地盤の変形局所化発生についての数値解析, 構造工学論文集, Vol. 42A, pp. 325-332, 1996.
- 14) Malvern, L. E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, New Jersey, 1969.
- 15) 北川浩: 弾・塑性力学, 裳華房 1987.
- 16) 後藤学: 最近の弾塑性変形理論, 塑性と加工 (日本塑性加工学会誌), Vol. 27, No. 300, pp. 25-33, 1986.
- 17) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R.: Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *Int. J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975.
- 18) Pęchersky, R. B.: Modelling of large plastic deformations based on the mechanism of micro-shear banding. Physical foundations and theoretical description in plane strain, *Arch. Mech.*, Vol. 44, pp. 563-584, 1992.
- 19) Pęchersky, R. B.: Finite deformation plasticity with strain induced anisotropy and shear banding, *J. Mater. Process. Tech.*, Vol. 60, pp. 35-44, 1996.
- 20) Nemat-Nasser, S. and Iwakuma, T.: Elastic-plastic composites at finite strains, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 21, pp. 55-65, 1985.
- 21) Ortiz, M., Leroy, Y. and Needleman, A.: A finite element method for localized failure analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 61, pp. 189-214, 1987.
- 22) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T.: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 10, pp. 343-354, 1968.
- 23) 浅岡頭, 野田利弘: 平面ひずみ非排水一軸圧縮場におけるカムクレーの水～土連成挙動, 地盤の破壊とひずみの局所化に関するシンポジウム発表論文集, 土質工学会, pp. 197-204, 1994.
- 24) 竹内則雄: 地盤力学における離散化極限解析, 培風館, 1991
- 25) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: Formation of shear bands by a noncoaxial Cam-clay model, *2nd Int. Workshop on Numerical Methods for Localization and Bifurcation of Granular Bodies*, (ed. Dembicki, E., Gudehus, G. and Sikora, Z.), Gdańsk, pp. 227-247, 1989.
- 26) Tatsuoka, F., Tani, K., Morimoto, T., Okahara, M., Tatsuta, M. and Huang, C. C.: Shear band formation related to scale effect in bearing capacity of footing on sand. Experimental results, *Numerical Methods for Localization and Bifurcation of Granular Bodies*, (ed. Dembicki, E., Gudehus, G. and Sikora, Z.), Gdańsk, pp. 201-225, 1989.

(1997. 8. 14 受付)

A CONSTITUTIVE MODEL WITH MICRO-SLIP MECHANISM AND ITS APPLICATION TO LARGE DEFORMATION PROBLEMS

Masahiro SHIRATO and Tetsuo IWAKUMA

Many localized deformations are observed in the ultimate state of structural and geotechnical materials. Since it is important to predict how such localized deformations are initiated and developed, we propose a constitutive model which is represented by small number of parameters and yields no difficulty in numerical calculations. The model includes a micro-slip mechanism as the second inelastic part of deformation after the condition of localization of deformation by Hill is satisfied. The micro-slips are formulated by the double-slip theory. Numerical check with standard tensile tests shows stable numerical calculation up to very large deformation state. Compression tests and indentation problems are solved to show eligibility of the present model.