

一般的な不連続変形を考慮した 混合型有限要素解析法の開発

呉 智 深¹・町田 篤彦²・高 東 劭³

¹正会員 工博 茨城大学助教授 都市システム工学科 (〒316-8511 日立市中成沢町4-12-1)

²正会員 工博 埼玉大学教授 建設工学科 (〒338-0825 浦和市下大久保338)

³工修 株式会社創建エンジニアリング (〒170-0002 東京都豊島区巢鴨1-24-1)

本研究では、要素内部の不連続面におけるモードⅠやモードⅡのような不連続変位が表現できる有限要素定式化を、拡張された仮想仕事原理の適用によって三次元的に行った。一般化された解析法では、不連続変位に関する自由度が有限要素支配方程式に現れず、通常の有限要素離散化過程と同様な形となっている。また、各種不連続破壊モードを統一的に取り扱うために、非線形破壊力学モデルを適用した不連続面における構成則関係の提案を試みた。最終的に、変位の適合条件により導かれた二次元不連続変形場を用いて、プレーンコンクリート試験体のクラック進展解析および鉄筋とコンクリートの付着特性に着目した構成部材の曲げ破壊性状に関する解析を行った結果、本研究手法の妥当性および有効性を提示した。

Key Words : discontinuities, mixed finite element, cracks, bond-slip interfaces, deformation modes

1. はじめに

計算機の発達に伴い、計算破壊力学という新しい分野では、幅広い工学材料において生じる変形の局所化破壊、巨視的離散クラック及び各種複合構造における接着・付着界面などの不連続性を含んだ有限要素解析法の研究開発が進められている。現状では、有限要素法で採用されるクラックモデルは、大別すると離散クラックと分布クラックの2種類が提案されている^{1),2),6)}。前者では、予めクラック発生位置を予測して、要素間の分離によって特別のパネかまたはすべり要素を設定し、クラックの進展を解析する。近年、Ingraffeaら³⁾による自動メッシュ再生成法が成功を収めていることより離散クラックモデルの活用範囲が大分改善されている。しかしながら、離散クラックモデルは、膨大な入力問題、節点の連続性を変更することによる計算上の繁雑さ、予めクラック進展方向を規定することによる客観性の欠乏などにより、一部の単純な問題に限られている。例えば、破壊力学によるコンクリート構造物の三次元非線形解析では、本モデルの適用が不可能に近い。後者の分布クラックモデルはクラック方向の局

所座標で定義した要素剛性の変更によってクラックを表現するもので、取り扱いが極めて簡便であり、現在では最も一般的なモデルとなっているが、適用に際してはいくつかの問題点がある。例えば、大きな領域に渡って進展される局部クラック不連続帯についての適用は無効になってしまう。その上、最近の研究によっていくつかの深刻な問題点も指摘されている⁴⁾。まず、解の客観性がないことについては、改良法がいくつか提案されているが理論根拠と汎用性が欠けている。さらに、方向バイアス、偽の破壊モード及び応力ロッキング現象が含まれている。

これらの問題に対し、最近では有限要素領域内にせん断帯やクラック帯、局所化された歪みモードあるいは不連続ひずみ領域が追加され、歪み局所化などの強不連続性をモデル化するための研究が多数報告されている^{5)~8),17)~19)}。これらの手法は歪軟化や塑性局所化問題を解明するのに非常に有効的と思われる。しかし、これらの強不連続性解析法でも、固体における不連続性は連続問題として取り扱われ、不連続変位ジャンプはクラック帯やせん断帯などの領域に分布されている。一方、拡張された仮想仕事の原理を適用し、不連続領

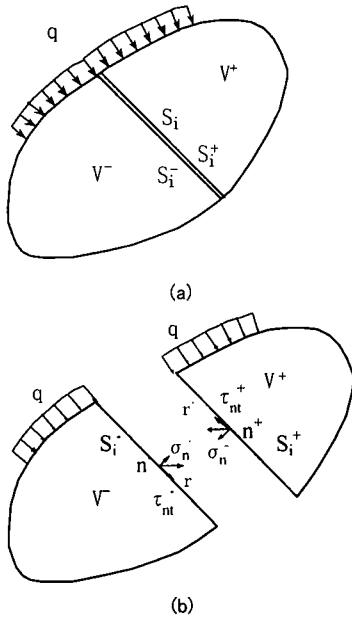


図-1 不連続体システム

域を忠実に考慮した不連続体解析法の開発も行われてつつあるが^{9)~11)}、本質的な問題が残っているほか、実用性もかなり欠乏している。特に、複合材料及び複合構造に対する要求性能が複雑化、多様化している現状においては、合理的な不連続体解析が行われているとは言い難い面がある。

そこで、本研究では複合的な不連続問題を解明するために、最近開発された内部不連続面での変位不連続性を有する特殊有限要素定式化^{10),11)}をより一般化し、クラックの伝播区の追跡から複合構造での付着性状を表現できる有限要素まで展開する。新しい解析法では不連続変位に関する自由度が有限要素支配方程式に現れず、通常の有限要素汎用コードの一つの要素サブルーチンとして簡単に導入される。特に複合的な不連続性が存在する構造を解析する際（例えば、材料内部のクラックと付着境界面の両方が同時に発生する場合）は本解析において統一的に取扱うことができ、ボンドリリング要素などの追加及び併用の必要がない。

2. 一般的な不連続問題に関する混合有限要素定式化

(1) 一般的な不連続体

一般的な不連続性を有限要素で定式化するために図-1(a)に示すような不連続固体系を考える。内部境界面 S_i ($S_i = S_i^+ \cap S_i^-$) によって不連続体システムは連続な二つの領域に分けられる ($V_i = V^+ \cup V^-$)。物体

が与えられた境界条件のもとでつりあい状態にあるものとする。

図-1(b)に示すような連続な二つの領域を考えると、内部境界面 S_i において変位 u_i (u^+ on S_i^+ , u^- on S_i^-) 及び力 r_i (r^+ on S_i^+ , r^- on S_i^-) の支配関係式は次のように表される (C¹-Continuous)。

$$r^+ + r^- = 0 \quad \text{on } S_i \quad (1)$$

$$u^+ - u^- = u_i \quad \text{on } S_i \quad (2)$$

また全固体系に対して、応力及び歪み場は次式で表される。

$$\sigma = \Sigma \quad \text{in } V^+ \text{ and } V^- \quad (3)$$

$$\epsilon = \nabla_s u \quad \text{in } V^+ \text{ and } V^- \quad (4)$$

次に、体積力を無視した不連続固体系を増分境界値問題として、一般化された仮想仕事の原理を用いて適用してみる^{10)~12)}。

$$\begin{aligned} & \int_{V^-} (\nabla_s \delta u)^T \dot{\sigma} dV^- + \int_{V^+} (\nabla_s \delta u)^T \dot{\sigma} dV^+ \\ & - \left(\int_{S_i^-} \delta u^T \dot{q}^- ds + \int_{S_i^+} \delta u^T \dot{q}^+ ds \right) \\ & + \int_{S_i^-} (\dot{u}^-)^T \dot{r}^- ds + \int_{S_i^+} (\dot{u}^+)^T \dot{r}^+ ds = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここでは、 $\dot{\sigma}$: 応力増分ベクトル、 $\dot{\Sigma}$: 歪み場から導かれた応力増分場、 $\nabla_s \dot{u}$: 変位場から導かれたひずみ増分場、 $\dot{\epsilon}$: 歪み増分ベクトル、 \dot{u} : 変位増分ベクトル、 \dot{u}_i : 不連続境界面間の変位ジャンプ増分ベクトル、 \dot{u}^+ 、 \dot{u}^- および \dot{r}^+ 、 \dot{r}^- : 不連続境界面での変位増分ベクトルおよび反力増分ベクトル、 \dot{q}^+ および \dot{q}^- : 各々の分離体に作用する表面力増分ベクトルである。

更に、式(3)、(4)より次の二つの付加関係式を構築することができる。

$$\int_{V^-} \delta \dot{\epsilon}^T (\dot{\Sigma} - \dot{\sigma}) dV^- + \int_{V^+} \delta \dot{\epsilon}^T (\dot{\Sigma} - \dot{\sigma}) dV^+ = 0 \quad (6)$$

$$\int_{V^-} \delta \dot{\sigma}^T (\nabla_s \dot{u} - \dot{\epsilon}) dV^- + \int_{V^+} \delta \dot{\sigma}^T (\nabla_s \dot{u} - \dot{\epsilon}) dV^+ = 0 \quad (7)$$

従って、式(5)、(6)、(7)を組み合わせることにより次式のような支配方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \int_{V'} (\nabla_s \delta \mathbf{u})^T \bar{\sigma} dV + \int_{V'} (\nabla_s \delta \mathbf{u})^T \bar{\sigma} dV \\
& - (\int_{S_s^-} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}}^- ds + \int_{S_s^+} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}}^+ ds) \\
& + \int_{S_s^-} (\dot{\mathbf{u}}^-)^T \bar{\mathbf{r}}^- ds + \int_{S_s^+} (\dot{\mathbf{u}}^+)^T \bar{\mathbf{r}}^+ ds \\
& + \int_{V'} \delta \bar{\epsilon}^T (\bar{\Sigma} - \bar{\sigma}) dV + \int_{V'} \delta \bar{\epsilon}^T (\bar{\Sigma} - \bar{\sigma}) dV \\
& + \int_{V'} \delta \bar{\sigma}^T (\nabla_s \dot{\mathbf{u}} - \dot{\bar{\epsilon}}) dV + \int_{V'} \delta \bar{\sigma}^T (\nabla_s \dot{\mathbf{u}} - \dot{\bar{\epsilon}}) dV = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}
\int_{S_s^-} \cdot + \int_{S_s^+} \cdot &= \int_{S_s} \cdot, \quad \int_{V'} \cdot + \int_{V''} \cdot = \int_V \cdot \\
\bar{\mathbf{r}}^+ &= -\bar{\mathbf{r}}^- = \bar{\mathbf{r}}, \quad S_s^- = S_s^+ = S_s
\end{aligned}$$

を代入することによって, 上記の式(8)は式(9a)のように書かれる.

$$\begin{aligned}
& \int_V (\nabla_s \delta \mathbf{u})^T \bar{\sigma} dV - \int_S \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} ds + \int_{S_s} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{r}} ds \\
& + \int_V \delta \bar{\epsilon}^T (\bar{\Sigma} - \bar{\sigma}) dV + \int_V \delta \bar{\sigma}^T (\nabla_s \dot{\mathbf{u}} - \dot{\bar{\epsilon}}) dV = 0 \quad (9a)
\end{aligned}$$

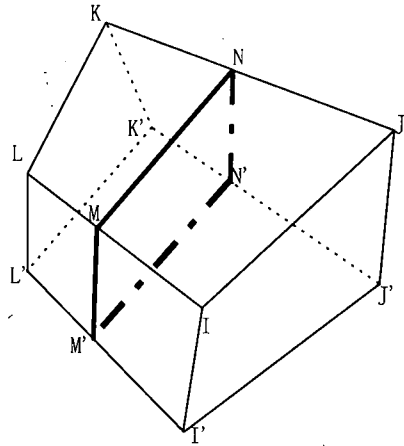
上記の支配方程式に関して, 予め式(3)と式(4)で記述された応力場および歪み場に関する適合条件を導入した場合を考えると, 支配方程式は通常の変位補間原理の表現式となる. 即ち,

$$\int_V \delta \bar{\epsilon}^T \bar{\sigma} dV - \int_S \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} ds + \int_{S_s} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{r}} ds = 0 \quad (9b)$$

(2) 有限要素離散化

有限要素内部の変位増分 $\dot{\mathbf{u}}$ はその要素を構成する節点の変位増分 $\bar{\mathbf{u}}$ 及び変位ジャンプ増分 $\bar{\mathbf{u}}_i$ によってつぎのように適当な補間関数 N_u, N_i で補間されるものとする. ただし, 図-2では一般性を無くさないように, 平面要素では4節点の通常節点と2節点の不連続面構成節点, そして立体要素では8節点の通常節点と4節点の不連続面構成節点で表現されている.

$$\dot{\mathbf{u}} \approx N_u \bar{\mathbf{u}} + N_i \bar{\mathbf{u}}_i, \quad \dot{\mathbf{u}}_i = N_i \bar{\mathbf{u}}_i \quad (10)$$



I, J, K, L, I', J', K', L': 要素構成節点
M, N, M', N': 不連続境界面構成節点

図-2 内部不連続面を有する有限要素

ここで, N は形状関数である. また, 内部不連続面での不連続変位による影響を含んだ節点変位 $\bar{\mathbf{u}}$ とそれを省いた連続体としての要素変形に対応する節点変位 $\tilde{\mathbf{u}}$ の間の関係を次のように表せると仮定しておく. 即ち,

$$\bar{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{P} \bar{\mathbf{u}}_i \quad (11)$$

ここで, \mathbf{P} は変換マトリックスである.

本研究において, 不連続問題を簡単にするため, 不連続境界面の各構成節点変位成分は同一の値 $\bar{\mathbf{U}} = [\bar{U}_n \ \bar{U}_t \ \bar{U}_s]^T$ が保たれると仮定する. 即ち, 不連続境界面変位ジャンプ増分 \mathbf{u}_i は座標値と無関係になる ($\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{T} \bar{\mathbf{U}}$). ここで \mathbf{T} は局所座標 (n, t, s) と全体座標 (x, y, z) 間の座標変換マトリックスである. 従って, 上記の変位補間式を用いて, 変位場によるひずみ場は次式のように導かれる.

$$\nabla_s \dot{\mathbf{u}} \approx \mathbf{B}_u \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{B}_u (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{P} \bar{\mathbf{u}}_i) \quad (12)$$

同様に高精度としてのひずみ補正型の混合型有限要素離散化の概念¹³⁾より $\dot{\bar{\epsilon}}, \dot{\bar{\sigma}}$ も適当な補間関数を用い, 離散化を行うと,

$$\dot{\bar{\epsilon}} = N_\epsilon \bar{\bar{\epsilon}} \quad (13)$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = N_\sigma \bar{\bar{\sigma}} \quad (14)$$

ここで、 \mathbf{B}_u : ひずみ-変位マトリックス、 \mathbf{N}_u : 有限要素節点補間関数、 \mathbf{N}_i : 不連続面での節点補間関数、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$: 歪みモードベクトル、 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$: 応力モードベクトル、 \mathbf{N}_e : ひずみ補間関数、 \mathbf{N}_o : 応力補間関数である。

つぎに不連続境界面両側の非線形連続体材料の構成モデルは材料の接線剛性マトリックス \mathbf{D}_i を用いて、次式のような増分式で書かれる。

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{D}_i \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (15)$$

更に不連続境界面において、不連続変位ジャンプ増分 $\dot{\mathbf{u}}_i$ と反力増分 $\dot{\mathbf{r}}$ （不連続断面に関する単位面積当たりの力増分）を関係づける剛性マトリックス \mathbf{D}_i を用いて式(16)が成り立つものとする。

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{u}}_i \quad (16)$$

これはバネやジョイント要素の剛性マトリックスと類似な考え方を有している。従って、(1)において整理された仮想仕事式が上記の各離散式を代入し、次式のような各要素レベルに適用された仮想仕事離散式で表現される。

$$\begin{aligned} & \delta \bar{\mathbf{u}}^T (\int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{N}_o \bar{\boldsymbol{\sigma}} dV - \int_S \mathbf{N}_u^T \dot{\mathbf{q}} ds) + \\ & \delta \bar{\mathbf{u}}_i^T (-\int_V \mathbf{P}^T \mathbf{B}_u^T \mathbf{N}_o \bar{\boldsymbol{\sigma}} dV + \int_S \mathbf{N}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{u}}_i ds - \int_S \mathbf{N}_i^T \dot{\mathbf{q}} ds) + \\ & \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T (\int_V \mathbf{N}_e^T \mathbf{D}_i \mathbf{N}_e \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int_V \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_o \bar{\boldsymbol{\sigma}} dV) + \\ & \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T (\int_V \mathbf{N}_o^T \mathbf{B}_u \bar{\mathbf{u}} dV - \int_V \mathbf{N}_o^T \mathbf{B}_u \mathbf{P} \bar{\mathbf{u}}_i dV - \int_V \mathbf{N}_o^T \mathbf{N}_e \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

そこで、独立している4つの仮想変位 $\bar{\mathbf{u}}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}_i$ および仮想歪み・応力モード $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ であることから、次の4次連立方程式が得られる。

$$\mathbf{K}_{ee} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{K}_{eo} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (18a)$$

$$-\mathbf{K}_{eo}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{K}_{ou} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{K}_{ou} \mathbf{P} \bar{\mathbf{u}}_i = 0 \quad (18b)$$

$$\mathbf{K}_{ou}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{f}}_u \quad (18c)$$

$$-\mathbf{P}^T \mathbf{K}_{ou}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{K}_{ii} \bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{f}}_i \quad (18d)$$

ここでは：

$$\bar{\mathbf{f}}_u = \int_S \mathbf{N}_u^T \dot{\mathbf{q}} ds, \quad \bar{\mathbf{f}}_i = \int_S \mathbf{N}_i^T \dot{\mathbf{q}} ds$$

$$\mathbf{K}_{ee} = \int_V \mathbf{N}_e^T \mathbf{D}_i \mathbf{N}_e dV, \quad \mathbf{K}_{ii} = \int_S \mathbf{N}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{N}_i ds$$

$$\mathbf{K}_{eo} = \int_V \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_o dV, \quad \mathbf{K}_{ou} = \int_V \mathbf{N}_o^T \mathbf{B}_u dV$$

従って、節点変位増分ベクトル $\bar{\mathbf{u}}$ に着目し、それに関する有限要素支配方程式は連立方程式(18)より次のように求められる。

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (19)$$

ここでは：

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{P} (\mathbf{K}_{ii} + \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{K}$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{f}}_u + \mathbf{K} \mathbf{P} (\mathbf{K}_{ii} + \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P})^{-1} \bar{\mathbf{f}}_i$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{su}^T (\mathbf{K}_{es}^T \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{es})^{-1} \mathbf{K}_{ou}$$

同様に、応力場および歪み場に関する適合条件を予め導入した仮想仕事原理の表現式(9b)に適用することによって、次式のような仮想仕事離散式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \delta \bar{\mathbf{u}}^T [(\int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_u dV) \bar{\mathbf{u}} - (\int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_u \mathbf{P} dV) \bar{\mathbf{u}}_i - \int_S \mathbf{N}_u^T \dot{\mathbf{q}} ds] + \\ & \delta \bar{\mathbf{u}}_i^T [-(\int_V \mathbf{P}^T \mathbf{B}_u^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_u dV) \bar{\mathbf{u}} + (\int_V \mathbf{P}^T \mathbf{B}_u^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_u \mathbf{P} dV) \bar{\mathbf{u}}_i - \\ & \int_S \mathbf{N}_i^T \dot{\mathbf{q}} ds + (\int_S \mathbf{N}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{N}_i ds) \bar{\mathbf{u}}_i] = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

さらに、ひずみ補正型有限要素と同様な考え方で、式(20)から上記の(19)と同じ形式の有限要素支配方程式が得られる。ただし、 \mathbf{K} の表現はつぎのように置換される。

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_u dV$$

式(19)に示されたように、要素内部不連続変形を考慮した有限要素支配方程式は通常の有限要素定式化と同

様な形式となっている。従って、通常の有限要素汎用コードの機能をそのまま生かして簡単にプログラミングすることができると思われる。また、節点変位増分ベクトルは通常の有限要素定式化での自由度次元と同様であり、自由度の増加が全く必要ないと考えられる。不連続面の変位集中、接触性状などを算定するためには、通常有限要素解析における剛性マトリックスと荷重ベクトルに関する修正を行うことだけで複雑な不連続解析を行うための計算時間の大幅的な増加をなくすることが十分期待される。また、高精度要素として着目されているひずみ補正型の混合型有限要素と通常の混合型有限要素は同様な形式で導かれ、不連続解析の一般化において大きな意義を持っていると思われる。さらに、計算された通常節点変位を用いれば、不連続面における変位ジャンプも算定されることになる。

(3) 不連続補間関数

以上の定式化に関しては、特に二次元問題か三次元問題かを問わず一般的となっているが、実際の数値計算では、 \mathbf{P} マトリックスや不連続面での節点補間関数を導くことが必要となっている。本研究では二次元問題に関して具体的に検討する。

ここでは、二次元のアイソパラメトリック要素を取り上げ、その不連続補間関数の定式化を行う。まず、式(10)と違った形を取り有限要素内部の連続変形に対応する節点変位増分と不連続面での節点変位ジャンプ増分に分け、つぎのような形で書かれる。

$$\dot{\mathbf{u}} \approx \mathbf{N}_u \tilde{\mathbf{u}} + \Phi \dot{\mathbf{u}}_i, \quad \Phi = \phi \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad (21)$$

ここでは、 $\phi = \begin{cases} \omega & \text{in } V^+ \\ (\omega-1) & \text{in } V^- \end{cases}$ 、また、 ω は不連続要素に関する定数である。

図-3に示すように $\omega = V^+ / V$ とすることが考えられる。式(10)と式(21)を比較し、更に式(11)を代入することによって、最終的に不連続補間関係 \mathbf{N}_i は次のような形で求められ、新

$$\mathbf{N}_i = \Phi - \mathbf{N}_u \mathbf{P} \quad (22)$$

もし要素の節点が V^+ 側にあるとき

$$\bar{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} + \omega \mathbf{T} \bar{\mathbf{U}} \quad (23)$$

たに仮定する必要はない。

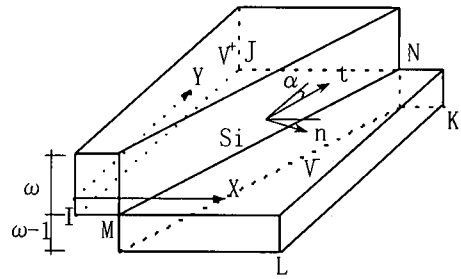


図-3 局所不連続変形モード

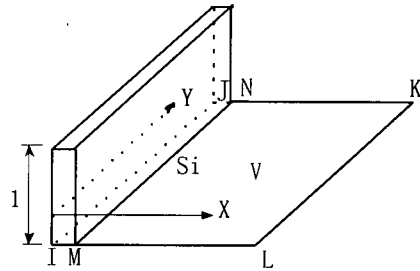


図-4 要素境界における接触・接着・付着すべりのモデル化

一方、要素の節点が V^- 側にあるとき

$$\bar{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} + (\omega-1) \mathbf{T} \bar{\mathbf{U}} \quad (24)$$

ここで、 $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ 、 $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{U}_n, \bar{U}_t)^T$ 、 α は

局所座標系と全体座標系間のなす角度である。

よって、変換マトリックス \mathbf{P} は次のような成分を持った定数マトリックスとなっている。

$$\mathbf{P} = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]^T \quad (25)$$

ここで、 n は通常の有限要素構成節点の数である。

特に、複合材料・構造体における予め存在している不連続接触・接着・付着面を有限要素の境界に配置する場合、次のように対応することが考えられる(図-4)。即ち、

$$V^- \rightarrow 0, \quad V^+ \rightarrow V$$

$$\Phi = \begin{cases} 1 & \text{in } V^+ \\ 0 & \text{in } V^- \end{cases}$$

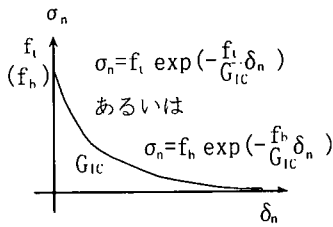


図-5 不連続面におけるopeningモデル

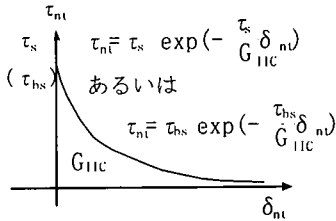


図-6 不連続面におけるslidingモデル

3. 構成モデル

(1) 不連続面における構成モデル

要素の剛性を算定するには、関連の構成モデルを導入する必要がある。要素剛性マトリックスに材料自身の構成則のほか、不連続面、例えば付着面における鋼材とコンクリートとの付着-すべりの関係やコンクリート内部クラックにおける接触応力-開口変位の関係を用意しなければならない。本研究では、上記の不連続体有限要素解析法に関して、異種材間の付着面やコンクリート内部クラック面を有する不連続構造体への適用を試みるため、以下のように不連続面における構成則関係を統一的に取り扱うことにする。

まず、不連続面の非線形性を算定する剛性マトリックス D_i を次のように仮定する。

$$D_i = T \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & G_m \end{bmatrix} T^{-1} \quad (26)$$

ここでは、不連続面の直成分 E_n (opening) とせん断成分 G_m (sliding) の二つの成分が考えられており、dilatancy などのカップリング効果は無視する。それぞれ図-5と図-6のように示されている。しかし、dilatancy などの効果が比較的大きく生じる場合、例えばPush-off型のせん断実験を再現するために、上記の剛性マトリックス D_i の左下や右上の成分も適切に考慮する必要があると思われる。

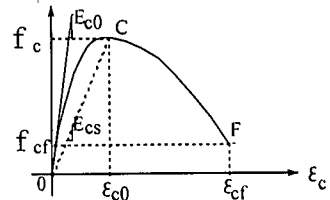


図-7 圧縮領域におけるコンクリートの応力-ひずみ関係

ここで、 f_t : コンクリートのような材料の引張強度、 f_b : 付着面の垂直付着強度、 G_{1c} : 材料内部クラックや付着面に関するモード I 破壊エネルギー、 G_{11c} : 材料内部クラックや付着面に関するモード II 破壊エネルギー、 τ_s : コンクリートのような材料のせん断強度、 τ_{bs} : 付着すべり強度である。

ただし、本研究でのクラック進展解析を行うための opening モデルとして図-5に示す提案式を使用するが、 G_m 成分は通常クラック進展解析における低減係数の概念を用いて次のような関係式を採用する。

$$G_m = \beta G \quad (27)$$

ここで、 β はひびわれによるせん断剛性の低減係数であり、本研究では $\beta = 0.01$ と仮定した。また、 G は弾性状態のせん断剛性である。一方、付着問題を解析するには図-6に示すようなslidingモデルを鋼材とコンクリートの付着-すべり関係とするが、このときの E_n 成分も図-5に示すモデルを採用している。なお、不連続 (クラック、付着すべり) の発生基準として、材料の引張強度や付着強度のような強度判定条件が適用されている。

(2) 材料モデル

コンクリートの圧縮側モデルに関しては、Darwin, Pecknold⁽⁴⁾ が考え出した二次元直交異方性材料としての増分型構成関係式を適用する。ただし、各方向の接線剛性の算定に関して、等価一軸応力-ひずみの概念に基づくコンクリートの二軸応力-ひずみ挙動を模擬するのに広く使われているSaenzの提案式を用いている。図-7に示すようにF点の圧縮強度 $f_{cf} = 0.2f_c$ に至るまで(28)式に掲げるSaenzのシミュレート曲線で表示でき、F点以降はそのままの残留応力を保持するものとする。

$$\sigma_c = \frac{E_{c0}\epsilon_c}{1 + (E_{c0}/E_{cs} - 2)(\epsilon_c/\epsilon_{c0}) + (\epsilon_c/\epsilon_{c0})^2} \quad (28)$$

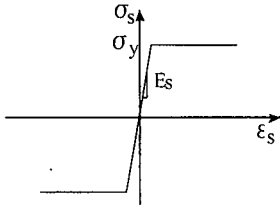


図-8 鋼材の応力-ひずみ関係

また、鋼材はbilinear型の弾塑性材料として取り扱い、図-8に示す鋼材降伏点以降、水平直線と仮定する。

4. 数値解析

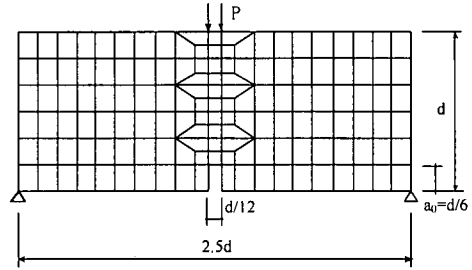
(1) 非線形の求解法

Newton-Raphson法に基づく荷重増分法を用いて、非線形解析を行った。また、極限点後の変位が増加し荷重が減少する不安定な経路を追跡するためにCrisfieldの修正弧長法を導入して繰り返し計算を行う。収束基準としては、一般のResidual force収束基準を適用した(収束判定の基準値 $=10^{-3}$)。

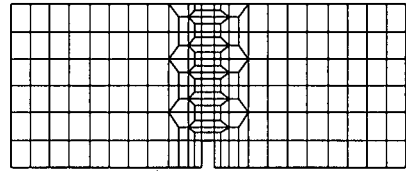
(2) プレーンコンクリート梁のクラック進展解析

Bazantらはコンクリート破壊における歪み速度効果を調べるために一連の実験を行った¹⁵⁾。本節ではその中の一つの供試体(高さ $d=7.6\text{cm}$ 、厚さ $=3.8\text{cm}$)を用いてクラック進展解析を行い、開発された不連続有限要素法を検討する。解析に使用した材料特性は、引張強度 $f_t=30.3\text{kgf/cm}^2$ 、弾性係数 $E_c=2.86 \times 10^5\text{kgf/cm}^2$ 、破壊エネルギー $=0.1, 0.15, 0.175\text{kgf/cm}$ 、ポアソン比 $=0.20$ とした。まず、要素分割のメッシュ依存性に関して、図-9(a)(b)に示された二つのメッシュを用いて数値計算を行った。図-10に示す荷重と荷重点下の垂直変位との関係から判明できるように、同様な最大荷重値が予測され、全体的にもほぼ一致している。ただし、軟化領域に関しては、粗い要素分割の場合と比べて、細かい分割の方がよりスムーズなカーブとなっており、また最終的により小さな残留荷重値が残されている。

一方、ひび割れた要素のクラック面におけるせん断剛性の低減係数 β に関して数値解析を行った結果(図-11)、コンクリート梁の荷重-たわみ曲線がクラック面におけるせん断剛性による影響はまったくないことを明らかにした。これは、要素レベルでのsliding変形モードを正しく表現できない固定型分布クラックモデルの問題が解決されていると思われる⁹⁾。



(a)



(b)

図-9 二つのメッシュ分割図

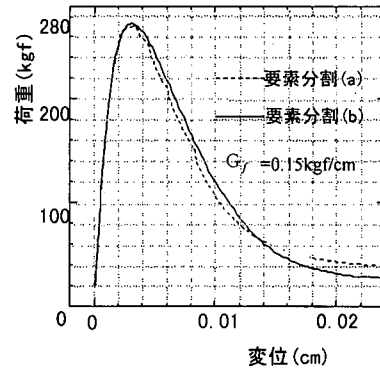


図-10 予測された荷重-たわみ曲線

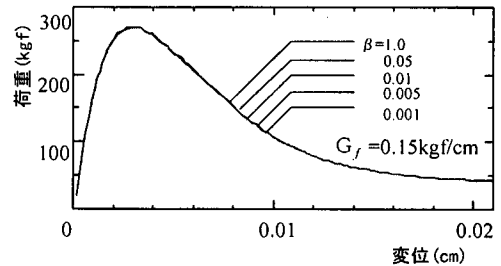
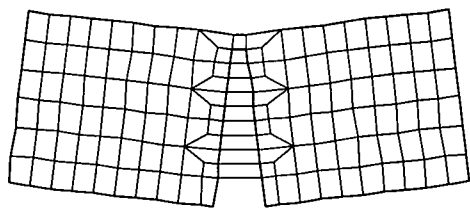
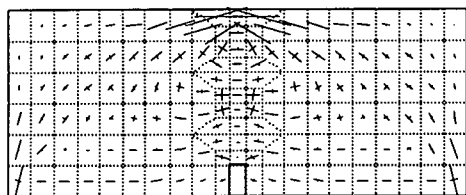


図-11 低減係数 β 値による荷重-たわみ曲線に及ぼす影響

図-12(a)(b)は、コンクリート梁の最終破壊時での変形、および最大荷重時での主応力分布の様子を示している。以上により、本解析手法の妥当性は定性的に確認できたと考えられる。



(a) 最終破壊時での変形図



(b) 最大応力時での応力分布図

図-12 コンクリート梁の破壊変形および応力分布

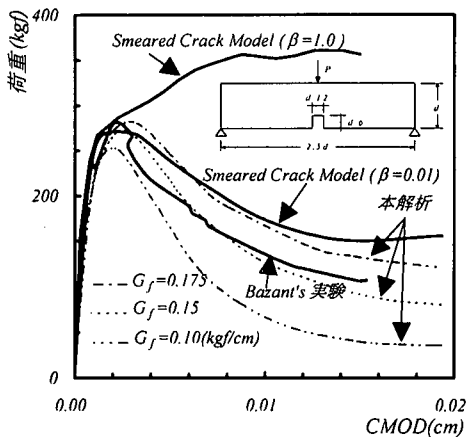
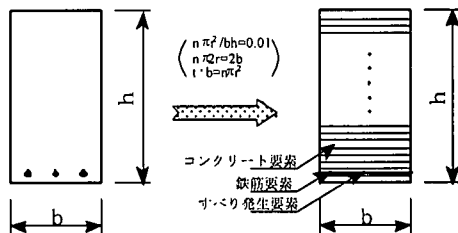
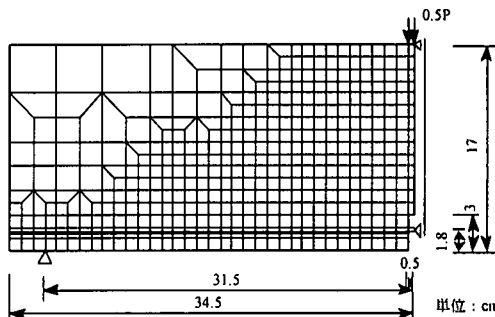


図-13 荷重-CMOD関係

次に、本解析手法および同様なコンクリート引張軟化曲線を用いた固定型分布クラックモデルによる計算を行った。その結果とBazantら¹⁵⁾の実験結果との比較を図-13に示す。結果として、破壊エネルギー $G=0.15\text{kgf/cm}$ とした場合、本解析手法は非常によく実験結果を同定しているのに対して、非常に小さい β 値を適用しない限り、既存の分布クラックモデルの方はピーク後性状を応力ロッキング現象などにより、正しく算定できない結果となっている。また、本解析手法と比べ、より高い強度、軟化後において過大な残留荷重が計算されている。



(a) はり断面図



(b) メッシュ分割図

図-14 鉄筋コンクリート梁モデルのメッシュ分割

表-1 解析時材料定数特性 単位: kgf/cm^2

材 料	弾性係数	引張 (降伏) 強度	圧縮 (降伏) 強度	ポアソン 比
鉄 筋	2.05×10^6	3,710	3,710	0.18
コンクリート	3.10×10^5	30.3	302	0.20

(3) 鉄筋とコンクリートの付着特性に着目した RCはりの曲げ破壊性状に関する解析

鉄筋コンクリートの複合効果は、鉄筋とコンクリート間の付着作用によってうまく発揮される。付着特性は鉄筋コンクリート部材の耐力、変形状状及び破壊機構に大きな影響を及ぼすことが従来より分かっている。しかしながら、鉄筋とコンクリートの相互作用は極めて複雑な現象であり、まだ不明な点が多いことから、ここではモードII不連続問題に関して開発された解析方法を検証するという付着面の不連続性に着目したコンクリート曲げ部材の構造解析を試みる。

鉄筋コンクリート梁モデルに対して強度 τ_{bs} を7.0, 40.0, 150.0 kgf/cm^2 の3種類としてパラメトリック解析を行う。三点曲げ梁の対称性を考えて、全体の1/2を解析モデルとして4節点アイソパラメトリック要素を用いた。有限要素分割を図-14に示す。各種材料の物性は表-1に示すものとする。また、梁の幅は単位長さの

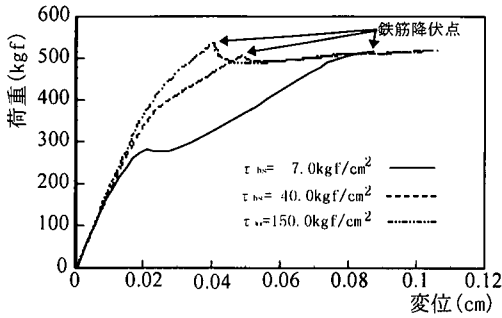


図-15 荷重-梁中央スパンのたわみ曲線

1.0cmとして考えられ、厚方向の応力変化が無視され、平面問題として取り扱う。さらに、コンクリート梁の鉄筋比は1.0%とする。鉄筋層は1.0cmの幅で、1.0%の鉄筋比で逆算された高さを用いる。

一方、鉄筋層周辺に付着すべり不連続変位が生じるための薄い鉄筋コンクリート付着要素を設ける。ここでは、付着要素の初期すべりせん断剛性(弾性状態) E_{bs} と付着破壊エネルギー G_{ic} はそれぞれ $1.55 \times 10^4 \text{kgf/cm}^2$ および 0.4kgf/cm と仮定する。

まず、荷重-梁中央スパンのたわみ関係に関する解析結果は図-15に示す。付着強度の大きさによって、鉄筋の降伏時の変位が大きく変化していることに対して、終局荷重はあまり変わらない結果となっている。また、鉄筋降伏荷重の差異もある程度見られている。一方、それぞれの付着強度値によって、コンクリート内部のクラック分布および付着すべりの進展は本質に変化している。比較的低い付着強度の場合、コンクリート内部クラックは中央スパンの一本のみ進展し、付着すべりは非常に速く梁の端部まで急速に進展していく。また、比較的小さいクラック間隔ではコンクリート曲げクラックは発生・進展しているが、中央スパンの付着すべりの発生が少しは認められたが、ほとんど進展しない(図-16)。より直感的に破壊変形状を検証するため、図-17は仮定された各付着強度に関して、終局荷重時におけるコンクリート梁の変形状態を示している。

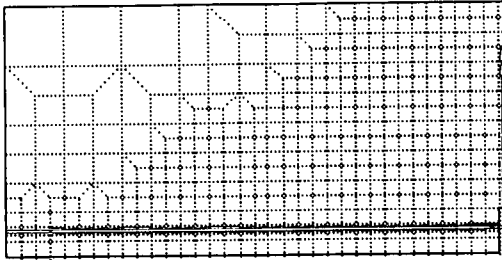
以上の数値シミュレーション結果から分かるように、コンクリート曲げクラックや付着すべりなどの複合不連続性状が、本解析手法を用いることによって非常に合理的に表現できると思われる。なお、定量的な検討は今後の発展に期待されたい。

5. まとめ

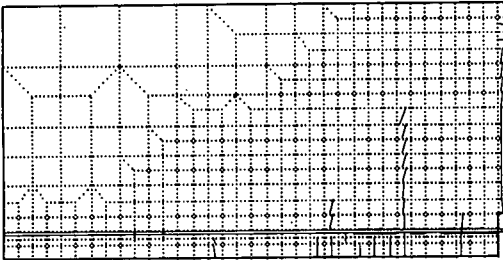
本研究は、内部接着・付着・接触面、断層およびさ

まざまな巨視的クラックなどの複合不連続性状を有する複合構造や地質構造の大型構造解析をより一般的に、そして忠実に行うため、内部複合不連続変形を含んだ混合有限要素解析法の開発を目指したものであり、現段階で得られた結論を含め、以下のように要約する。

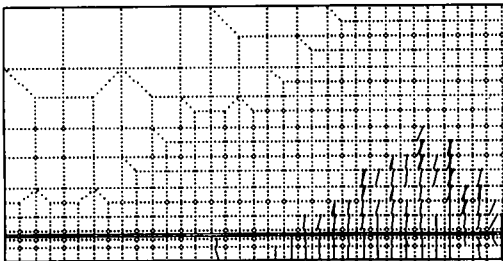
- 1) 不連続固体システムに関する一般化された仮想仕事原理を整理し、不連続変位場と連続変位場が分けられた有限要素離散化過程を経て、応力・歪み補正型の混合型有限要素ならびに応力場および歪み場に関する適合条件を、予め導入した通常の不連続変位と連続変位の2ブルード問題に関する有限要素支配方程式として統一的に定式化した。さらに、通常要素の節点変位に関する剛性方程式は、不連続変位に関して導入された変数と全く独立した形になっており、有限要素解析における自由度の増加やメッシュの変更の必要性がないと考えられる。
- 2) 数値シミュレーションを行うための二次元アインパラメトリック要素に関する不連続補間関数は、局所不連続変形モードの設計を通じて、変形の適合条件によって一意に導かれている。
- 3) 準脆性摩擦型材料のような各種不連続性状を統一的に取り扱うため、不連続面におけるopening(分離)モードおよびsliding(せん断すべり)モードに関する剛性変化は、非線形破壊力学の破壊エネルギー G_{ic} および G_{ic} による指数関数の適用を試みた。数値シミュレーションの結果や近年の実験観察から、その妥当性を有するものと考えられる。なお、連続体部分の材料構成則に関して、通常非線形弾性モデルや弾塑性などが通常有限要素連続体解析と同様に適用できる。
- 4) 極限值およびポストピーク後の破壊性状や不連続性状を追跡するために導入されているCrisfieldの修正弧長法に関しては、本解析においてその安定性と有効性が十分であると検証されている。
- 5) プレーンコンクリート梁の二次元クラック進展解析を通じて、本解析法のメッシュ依存性の解消、純モードI破壊におけるクラック断面でのせん断剛性による応力ロッキング現象の改善に関する効果が確認された。
- 6) コンクリート曲げクラックと鉄筋コンクリート付着すべりが同時に存在する複合不連続問題を適用するため、鉄筋コンクリート梁モデルをシミュレーションした結果、不連続変位を忠実に算定するなどの点に関して非常に合理的な構造解析ができることが明らかになった。鉄筋コンクリートにおける付着特性による構造体の破壊メカニズムをより緻密に解明できると思われる。



(a) $\tau_{bs} = 7.0 \text{ kgf/cm}^2$

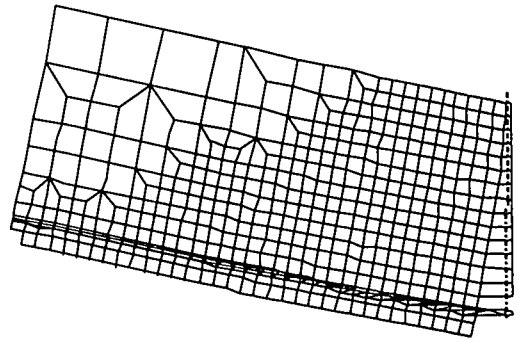


(b) $\tau_{bs} = 40.0 \text{ kgf/cm}^2$

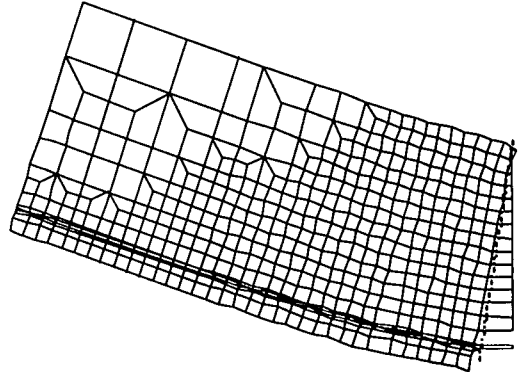


(c) $\tau_{bs} = 150.0 \text{ kgf/cm}^2$

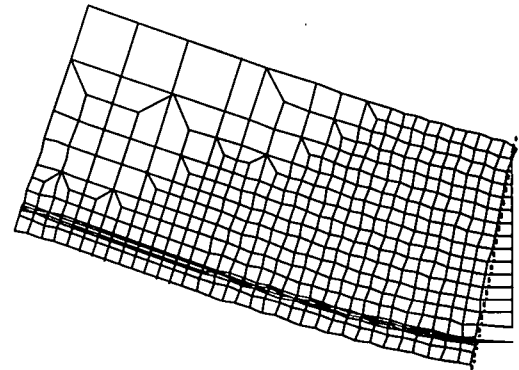
図-16 クラック分布



(a) $\tau_{bs} = 7.0 \text{ kgf/cm}^2$



(b) $\tau_{bs} = 40.0 \text{ kgf/cm}^2$



(c) $\tau_{bs} = 150.0 \text{ kgf/cm}^2$

図-17 終局破壊時の変形状態

7) 本研究で行った二次元問題に関する不連続面における局所不連続変形モードの設計を三次元的に発展し、定式化された有限要素方程式に導入することによって、一般的な三次元構造解析を行うことは十分可能になっている。

今後、開発した二次元解析法を用いてより広範な実験結果と比較することによって、各種パラメーターの同定を行い、実問題への適用が十分期待されている。また、一般的な三次元不連続体解析モデルとしての有限要素プログラムを開発し、より複雑な破壊メカニズムを徹底的に究明できる実用的な大型構造解析法を提供することを目指すことは、本研究に残されている課題である。

参考文献

- 1) Ngo, D. and Scordelis, A. C. : Finite element analysis of reinforced concrete beams, *J. A.C.I.*, 64(3), pp.152~163, 1967.
- 2) Rashid, Y. R. : Analysis of prestressed concrete pressure vessels, *Nuclear Eng. and Design*, 7(4), pp.334~344, 1968.
- 3) Ingraffea, A. R. and Gerstle, W. : Non-linear fracture models for discrete propagation, *Application of Mechanics to Cementitious*

- Composites, S. P. Shah, Ed., Martinus Nijhoff Publ., Dordrecht and Boston, pp.171~209, 1985.
- 4) Rots, J. G. : Computational modeling of concrete fracture, *Doctoral Thesis, Delft University*, 1988.
 - 5) Needleman, A. : Material rate dependence and mesh sensitivity on localization problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 67, pp.69~86, 1988.
 - 6) Belytscho, T., Fish, J. and Engelmann, B. E. : A finite element with embedded interpolated localization zone, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 70, pp.59~89, 1988.
 - 7) Pietruszczk, St. and Mroz, Z. : Finite element analysis of deformation of strain-softening materials, *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 17, pp.327~334, 1981.
 - 8) Ortiz, M., Lorey, Y. and Needleman, A. : A finite element method for localized failure analysis, *J. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 61, pp.189~214, 1987.
 - 9) Wu, Z. : Development of computational models for reinforced concrete plate and shell element, *Doctoral Thesis, Nagoya University, Japan*, 1989.
 - 10) Eduardo N. Dvorkin and Andrea P. Assanelli : 2D finite element with displacement interpolated embedded localization lines, The analysis of fracture in frictional material, *J. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 90, pp.829~844, 1991.
 - 11) Afifuddin, M., Wu, Z. and Machida, A. : Special finite elements with displacement discontinuity across internal interfaces, コンクリート工学年次論文報告集, 第16巻, 第2号, pp.123~128, 1994.
 - 12) Bathe, K. J. : *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood cliffs, NJ, 1982.
 - 13) Simo, J. C. and Kifai, M. S. : A class of mixed assumed strain methods and the method of incompressible modes, *Int. J. Numer. Meth. In Eng.*, 29, pp.1595~1638, 1990.
 - 14) Darwin, D. and Pecknold, D. A. : Nonlinear biaxial law for concrete, *J. Eng. Meth. Div. ASCE*, Vol.103, No.EM2, pp.229~241, 1977.
 - 15) Bazant, Z. P. and Gettu, R. : Rate effect and load relaxation in static fracture concrete, *ACI Material J.*, 89(5), pp.456~468, 1992.
 - 16) Goodman, R. E., Taylor, R. L. and Brekke, T. L. : A model for the mechanics of jointed rock, *Proc. ASCE*, Vol.94, No.SM3, pp.637~659, 1968.
 - 17) Simo, J. C., Oliver, J. and Armero, F. : An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids, *Computational Mechanics*, 12, pp.277~296, 1993.
 - 18) Ragnar, Larsson and Kenneth Runesson : Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.36, pp.2087~2105, 1993.
 - 19) Oliver, J. : Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1 : Fundamentals & Part 2 : Numerical simulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.39, pp.3575~3623, 1996.

(1997. 7. 10受付)

DEVELOPMENT OF MIXED FINITE ELEMENT METHOD FOR COMPOSITE DISCONTINUOUS ANALYSIS

Zhishen WU, Atsuhiko MACHIDA and Dongshao GAO

An identical formulation by using distinctive finite elements with displacement discontinuities across internal surfaces for modeling of cracks in composite material systems and other discontinuous problems in composite structures such as reinforced concrete structures is developed in this paper. First, the governing finite elements equation is derived in a condensed form without increasing any extra degrees of freedom based on an extended principle of virtual work. It can be used easily to incorporate the elements into a general purpose displacement based finite element code, because it does not disturb the basic form of standard nonlinear finite element method. Consequently, a discontinuous interpolation function is designed for numerical analysis. Some examples such as crack propagation and bond-slip interfaces between steel and concrete are tested to demonstrate the effectiveness and versatility of the proposed computational model.