

断面変形を考慮した箱桁の高次せん断遅れ理論

白木恒雄¹・澤田利明²

¹正会員 工博 東京理科大学教授 理工学部土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

²正会員 工修 日本道路公団 四国支社 高知工事事務所 (〒780-0088 高知県高知市北久保 17-1)

橋梁形式は二主けた橋に代表される広幅員化と鋼コンクリート複合橋に代表される薄肉軽量化が大きな課題となっている。これらの結果、けたの平面保持および断面形保持の仮定は、境界状態設計法の適用も考慮すると、もはや守られ難い状況になっている。そこで、本研究では古典的はり理論の二大前提「断面の平面保持」および「断面形不変」を除き、板の曲げ変形効果も考慮した一般性および汎用性の高い弾性理論式を誘導した。せん断遅れは高次の項まで考慮することができる理論のため、高い精度を得ることが可能である。さらに、多室箱桁の例題を解き、得られた数値より本理論の妥当性を検討した。解析には修正伝達マトリックス法も用い、構造系および支配方程式に離散化を行わない厳密性の高い解を得た。

Key Words : shear lag, cross-sectional distortion, multi-cell box girder

1. まえがき

曲げを受けるはりは断面の水平軸まわりの回転により、内部に垂直応力を生じる。この応力は、通常、簡便な『工学曲げ理論』により計算される。しかし、広幅員のフランジをもつ薄肉はりでは、せん断遅れ現象の影響は大きく、工学曲げ理論の計算結果とは大きな差異を生じる。特に、フランジとウェブの結合位置の垂直応力は数十パーセント大きくなるため、これを無視して設計すると、危険である。それを避けるため、各国の示方書等では、有効幅の概念を導入している。すなわち、せん断遅れ現象の顕著な位置の断面を過小に見積ることにより、応力を大きめに評価させるわけである。

せん断遅れ現象を考慮して、構造系の応力を求める方法は、離散化解析、弾性論解法、はり理論などがある。離散化解析は解のメッシュ依存性、演算時間、演算費用、入力データ作成手間などの問題がある。歴史的に古く、弾性論に基づく厳密解が得られるのは、『応力関数を用いる方法』である。この方法はたわみ変位をフーリエ正弦関数で近似するため、原則的に両端単純支持のはりにのみ適用可能である。したがって、この方法で連続桁を扱うには、通常、はりをモーメント零になる位置で切断し、それぞれの区間ごとに単純はりとして解く。

はりの理論に基づく方法は、通常、工学曲げ理論にせん断遅れによる反りの補正を加える方法である。

他の解法と比較して、断面力での力の流れが把握しやすく、境界条件や中間条件の制約が少なく、汎用性に富み、計算規模が小さく、入力データの作成も容易である。求められた支配微分方程式を離散化操作無しに解くため、はり理論の仮定内で厳密解が得られる。しかし、3次元挙動を1次元に変換する過程で採用条件式を限定するため、計算精度が低く、複雑な応力分布に追従しにくいなどの難点がある。

以上の考察より、基礎的な理論であるはりの理論を複雑な応力分布に対応可能なように発展させることは大きな意味をもつ。特に降伏条件より塑性開始の判別などに役立つことが期待されるため、他への波及効果も大きいと思われる。

最初の発案者である Reissner^{1),2)}は簡単な二軸対称長方形中空断面のはりを扱い、上下のフランジに2次放物線型の補正項を加えた。幅員のあまり大きくないI型断面および箱型断面のはりでは、2次放物線型の補正項で十分良い結果が得られるが、広幅員になるとともに実験結果や応力関数法による解析結果とかなり離れてくる。

Moffatt・Dowling³⁾はフランジの有効幅算定のための応力分布を4次放物線で仮定することを提案し、それが実験結果とも良く一致することを示した。Schmidt⁴⁾はある広幅員のI型断面はりのフランジを応力関数法で解いて垂直応力の厳密解を得たが、その軸方向分布は4次放物線によって良い近似を与えることを示した。この結果をふまえて、最新のドイ

ツ工業規格 (DIN18809⁵⁾) はフランジの垂直応力分布を従来の2次から4次の放物線に変更した。中井・田井戸・林⁶⁾もこのフランジの垂直応力分布に4次放物線を仮定して、扁平多室箱桁の有効幅算定式を導いた。Chang・Yun⁷⁾も一室長方形断面をもつ変断面張り出しはりのフランジ垂直応力分布を4次式で仮定している。このように、曲げを受けるフランジの垂直応力分布は、Reissnerの2次式から近年の4次式へと高精度化してきている。

従来、曲げを受けるウェブの垂直応力分布は通常の工学曲げ理論と同様に1次式で仮定されてきた。しかしながら、フランジのせん断変形を考慮し、ウェブのそれを無視するのは理論の整合性より問題がある。ウェブをシャイベとみなし、応力関数法で解析すると、3次曲線に類似の応力分布が得られる。そこで、倉西・宮川⁸⁾および小松⁹⁾はフランジに2次式、ウェブに3次式の垂直応力を仮定してReissner形の理論を組み立てている。

周知のごとく、Timoshenkoはりとは、断面の平面保持の仮定を守るべく、ある断面の各板ごとに一定のせん断ひずみを与えたはりである。はりのせん断遅れにこのTimoshenkoはりの概念を付け加えて、精度の改善が計れる。Reissner形せん断遅れにTimoshenkoはりを組み合わせたDezi¹⁰⁾およびFoutch¹¹⁾の報告がある。

扱う断面形もReissner^{1),2)}の二軸対称の一室長方形断面から、張り出しフランジをもつ1軸対称の台形断面¹⁰⁾、二軸対称の四室長方形断面⁶⁾などへと徐々に複雑な形に理論の適用範囲を広げつつある。

以上は変形パターンとして、断面の水平軸まわりの回転による曲げを扱ったものであるが、ねじりによってもせん断遅れは発生する。Hyca¹²⁾はこのねじりのせん断遅れをReissner形に扱い、フランジ、ウェブともに3次式を仮定して、二軸対称長方形中空断面をもつ張り出しはりの例題を解いた。

水平軸まわりの曲げを受ける二軸対称長方形中空断面のはりにおいては、せん断遅れによる単位反り関数として、Reissner²⁾のごとく簡単な2次関数を仮定できる。しかし、水平軸に関する断面对称性が失われたり、フランジが左右に張り出したりすると、フランジごとに2次関数を仮定しなければならず、単位反り関数はフランジの枚数だけ必要となる。

一方、Cowper¹³⁾はTimoshenkoはりの高精度せん断補正係数を計算する必要から、Loveの弾性論¹⁴⁾の演算結果を利用して、充実断面および薄肉断面のせん断応力による軸方向反りの補正項を求めている。こ

の薄肉断面に対する反りの補正項は、Poisson比の影響を無視すると、曲げのせん断応力関数を断面輪郭線座標で積分した関数に比例することが解る。

稼農・薄木・堀江は、工学曲げ理論におけるせん断ひずみとせん断応力の矛盾を徐々に補正する『逐次近似理論¹⁵⁾』を提案した。微小要素の応力の釣合条件とせん断ひずみの定義式を交互に用いて、せん断応力(またはひずみ)を徐々に真の値に近づけるわけである。ここでも、反りの補正項はせん断応力関数を断面輪郭線で積分した関数に比例している。この理論は断面形不変の仮定のもと、4種類の断面剛の変形パターンを並列に扱う形式となっている。

Hjelmstad¹⁶⁾は水平軸まわりの曲げをうける薄肉はりに対し、CowperのPoisson比を無視した単位反り関数を用い、『Gram-Schmidtの直交化』により、工学曲げ理論の単位反り関数との直交化を図っている。仮想仕事の原理を用いて定式化を行い、Timoshenkoはり形の板ごとに平面保持のせん断変形とせん断遅れによる反り効果を同時に考慮している。Koo and Chung¹⁷⁾は断面形不変の仮定のもとに、変分原理を用いてせん断遅れを考慮した薄肉はりの理論の定式化を試みた。せん断遅れにともなう反りの補正関数は、文献15)同様に逐次近似法により求めている。

近年のコンクリート構造物への限界状態設計法の導入は従来より大きな荷重に対する静的あるいは動的検討が不可欠となっており、鋼構造物への導入も時間の問題である。他方、橋梁等の構造物製作コスト低減化の社会的要求から、広幅員の少主桁橋およびウェブをトラスあるいは鋼波板などで軽量化した複合橋梁が注目を集めている。このため、従来の断面の平面保持と断面形不変の仮定を楛に設定することに無理があり、これらの仮定を取り去ったはり理論の確立が望まれる。

以上の歴史的経過をふまえて、本論文はReissnerによるはりの理論の精度を高めるとともに、従来せん断遅れ解析で無視されていた断面変形を板の曲げ変形も含めて考慮することを目的とした。筆者はすでに長大多室箱桁橋の断面変形挙動に関する理論^{18),19)}を与えているので、ここではこれらをせん断遅れに拡張することになる。閉断面はりにおいて、ねじりと断面変形の反りは連成するため、ここでは逐次近似によりせん断遅れの単位反り関数を求めた。そして、Timoshenkoはり理論が逐次近似の第1近似として位置づけられることを示した。また、断面変形に伴う断面構成要素の曲げ変形効果をSchardt²⁰⁾の手法で導入している。はりの軸方向の解析には伝達

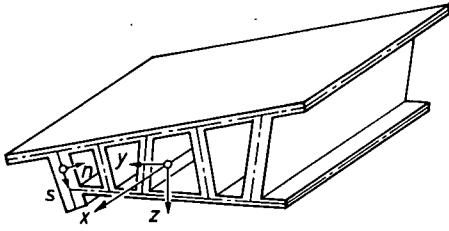


図-1 座標系

マトリックス法を用いた。ただし、従来の伝達マトリックス法を長いはりに適用しようとする、桁落ち誤差の累積により解析不能となるので、この点を改良した修正伝達マトリックス法²¹⁾を用いた。若干の計算例を解き、得られた軸方向垂直応力分布を他の解析方法による値と比較検討し、理論の妥当性および近似段階ごとのせん断遅れの収束状況を調べた。

2. 座標系と仮定

断面図心を通る橋軸方向の座標を x 軸とし、それに直角に断面主軸 y, z を選ぶ。また、 x 軸に直角の断面において、上記の断面主軸の他に、各板の板厚中心線を通る輪郭線座標 s および板厚方向の座標 n を図-1 に示すごとく用意しておく。構造要素のある点の x, y, z, s, n 方向の変位成分をそれぞれ順に u, v, w, f_s, f_n と表すものとする。

本論文で使用した主な仮定を以下に記す。

- 断面は板厚中心線が直線となる板を組み合わせた中空閉断面とする。
- 構造系を構成する板の厚さ t は一定とし、その板幅 b に比して十分小さい。
- 構造材料は Hooke 則を満足する。
- 輪郭線座標方向の伸縮ひずみは零とする。
- 断面の変形による図心 S およびせん断中心 M の変位は微小とみなし無視する。

3. 支配方程式の誘導

(1) 基礎条件式

平面応力状態におけるひずみと変位 u, f_s の関係は Membrane の頭文字 M を用いて、次のごとくなる。

$$\varepsilon_x^M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_s^M = \frac{\partial f_s}{\partial s}, \quad \gamma_{xs}^M = \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \quad (1)$$

二次せん断ひずみを考慮しないときの軸方向変位を U とすると、式(1.c)は次のごとく分解表示できる。

$$\gamma_{xs}^M = \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial(u-U)}{\partial s} \quad (2)$$

右辺の第1, 2項の和を初等せん断ひずみ $\gamma_{xs,pr}$ 、第3項を二次せん断ひずみ $\gamma_{xs,se}$ とよぶことにする。

板曲げ状態の板のひずみと板のたわみ f_n の関係は Bending の頭文字 B を用いて、次式で与えられる。

$$\varepsilon_x^B = -\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} n, \quad \varepsilon_s^B = -\frac{\partial^2 f_n}{\partial s^2} n, \quad \gamma_{xs}^B = -2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial s} n \quad (3)$$

縦弾性係数を E 、横弾性係数を G そして Poisson 比を ν と書くならば、Hooke 則は次のごとくなる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_s) \\ \sigma_s &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_s + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xs} &= G \gamma_{xs} \end{aligned} \quad (4)$$

この Hooke 則式(4)に式(1)を代入して、平面応力と変位 u および f_s の関係は次のごとく表せる。

$$\begin{aligned} \sigma_x^M &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial f_s}{\partial s} \right) \\ \sigma_s^M &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial f_s}{\partial s} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{xs}^M &= G \left(\frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

また、板曲げ応力とたわみ f_n の関係は次式である。

$$\begin{aligned} \sigma_x^B &= -\frac{En}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 f_n}{\partial s^2} \right) \\ \sigma_s^B &= -\frac{En}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial s^2} + \nu \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xs}^B &= -2Gn \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial s} \end{aligned} \quad (6)$$

物体力の x 方向および s 方向の成分をそれぞれ p_x および p_s と表すならば、はりを構成する板の微小要素の応力のつりあい条件は、次のごとく与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^M t}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}^M t}{\partial s} + p_x t &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xs}^M t}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_s^M t}{\partial s} + p_s t &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

曲げねじり理論の断面力を形成するせん断応力 τ_{xs}^M は初等成分 $\tau_{xs,pr}^M$ と二次成分 $\tau_{xs,se}^M$ からなり、

$$\tau_{xs}^M = \tau_{xs,pr}^M + \tau_{xs,se}^M \quad (8)$$

である。垂直応力 σ_x^M とつり合うのは二次成分だけであるから、条件式(7.a)は次のごとく分解される。

$$\frac{\partial \tau_{xs,pr}^M t}{\partial s} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \sigma_x^M t}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xs,se}^M t}{\partial s} + p_x t = 0 \quad (10)$$

せん断応力の分離式(8)の両辺を縦弾性係数 G で除してHooke則を適用すれば、せん断ひずみの分離式

$$\gamma_{xs}^M = \gamma_{xs,pr}^M + \gamma_{xs,se}^M \quad (11)$$

を得る。二次せん断ひずみはひずみの定義式(2)からも求められた。これらを波印の有無で区別している。

二次せん断応力の仮想仕事の等価性の条件とは、これら2種類の二次せん断ひずみの仮想仕事は構造系全体で等しくなると設定することである。具体的には次の構造系の体積 V に関する積分式となる。

$$\int_V \delta \tau_{xs,se}^M \tilde{\gamma}_{xs,se}^M dV = \int_V \delta \tau_{xs,pr}^M \tilde{\gamma}_{xs,pr}^M dV \quad (12)$$

ただし、仮想成分という意味で記号 $\delta(\cdot)$ を用いた。

(2) 第0段階のせん断遅れ補正

Timoshenkoはり形の理論を本理論の出発点とするため、その概略のみ記述する。断面剛の変形と断面変形を同時に考慮し、せん断遅れを無視するならば変位関数は以下のごとくなる¹⁹⁾。

$$\begin{aligned} f_s(x, s) &= r^T(s)V(x) \\ f_n(x, s) &= b^T(s)V(x) \\ u(x, s) &= -w_{SLO}^T(s)\theta_{SLO}(x) \end{aligned} \quad (13)$$

上式中の輪郭線座標 s のベクトル関数はすべて既知であり、面内変位を規定する関数 $V(x)$ および軸方向変位を規定する関数 $\theta_{SLO}(x)$ は未知関数である。これらのベクトル関数の内容を列記すると、

$$\begin{aligned} r^T &= [0 \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha \quad r_T \quad r_{P1} \quad \cdots \quad r_{PM}] \\ b^T &= [0 \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad b_T \quad b_{P1} \quad \cdots \quad b_{PM}] \\ w_{SLO}^T &= [1 \quad y \quad z \quad w_T \quad w_{P1} \quad \cdots \quad w_{PM}] \\ V^T &= [\xi \quad \eta \quad \zeta \quad \varphi \quad \gamma_{P1} \quad \cdots \quad \gamma_{PM}] \\ \theta_{SLO}^T &= [\theta_\xi \quad \theta_\eta \quad \theta_\zeta \quad \theta_\varphi \quad \theta_{\gamma1} \quad \cdots \quad \theta_{\gamma M}] \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ただし、 α は断面主軸 y と断面を構成する板の輪郭線座標 s とのなす角、 r_T および b_T はそれぞれせん断中心より板断面着目点までの垂直距離、および s 方向距離である。他の添字 P の量も断面変形の板回転中心より同様に測った距離である²²⁾。添字 P の次の数字 $1, 2, \dots, M$ は断面変形のモード番号を意味し、 M はその総数となる。面内変位を規定するベクトル関数 $V(x)$ の要素 $\xi, \eta, \zeta, \varphi, \gamma_{pm}$ は順に x 軸方向伸縮変位の積分関数、 y, z 方向たわみ、断面の剛体回転角、変形モード m での断面変形角を意味する。ベクトル関数 $\theta_{SLO}(x)$ の要素も同じ順にTimoshenkoはり理論の軸方向関数となっている。参考までに、この

軸方向変位関数 $u(x, s)$ を古典はり理論の軸方向変位関数 $U(x, s)$ に変更するには、式(13.c)の軸方向関数 $\theta_{SLO}(x)$ を $V'(x)$ に置き換えればよく、次式となる。

$$U(x, s) = -w_{SLO}^T(s)V'(x) \quad (15)$$

これらの変位式(13)をひずみ式(1), (3), 応力式(5), (6)に代入して次式群を得る。

$$\varepsilon_x^M(x, s) = -w_{SLO}^T(s)\theta'_{SLO}(x) \quad (16)$$

$$\gamma_{xs,pr}^M(x, s) = \frac{\psi^T(s)}{t(s)}V'(x) \quad (17)$$

$$\gamma_{xs,se}^M(x, s) = \frac{\bar{E}(S_0(s) - \Phi_0(s))^T}{G} \theta''_{SLO}(x) \quad (18)$$

$$\varepsilon_x^B(x, s, n) = -n b^T(s)V''(x) \quad (19)$$

$$\varepsilon_s^B(x, s, n) = -n \dot{b}^T(s)V(x) \quad (20)$$

$$\gamma_{xs}^B(x, s, n) = -2n \dot{b}^T(s)V'(x) \quad (21)$$

$$\sigma_x^M(x, s) = -\bar{E}w_{SLO}^T(s)\theta'_{SLO}(x) \quad (22)$$

$$\tau_{xs,pr}^M(x, s) = G \frac{\psi^T(s)}{t(s)}V'(x) \quad (23)$$

$$\tau_{xs,se}^M(x, s) = \bar{E} \frac{(S_0(s) - \Phi_0(s))^T}{t(s)} \theta''_{SLO}(x) \quad (24)$$

$$\sigma_x^B(x, s, n) = -\bar{E}n \left(\dot{b}^T(s)V''(x) + \nu \dot{b}^T(s)V(x) \right) \quad (25)$$

$$\sigma_s^B(x, s, n) = -\bar{E}n \left(\dot{b}^T(s)V(x) + b^T(s)V''(x) \right) \quad (26)$$

$$\tau_{xs}^B(x, s, n) = -2Gn \dot{b}^T(s)V'(x) \quad (27)$$

ただし、 ν 印および \cdot 印はそれぞれ x および s に関する微分を意味する。Poisson比を含めた縦弾性係数は

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

である。面内変位関数 $r(s)$ は板ごとに一定値をとるから、輪郭線座標方向の平面垂直応力 $\varepsilon_s^M(x, s)$ は零になる。平面せん断応力 $\tau_{xs,pr}^M(x, s)$ および $\tau_{xs,se}^M(x, s)$ はそれぞれ応力のつり合い条件式(9)および(10)より求め、せん断ひずみはこれらを縦弾性係数 G で除して求めている。式(17), (23)に現れる $\psi(s)$ は単位初等せん断流関数、式(18), (24)に現れる $(S_0(s) - \Phi_0(s))$ は単位二次せん断流関数である。

ひずみ変位関係より定まる二次せん断ひずみは、現在の軸方向反り $u(x, s)$ と古典はり理論の反り $U(x, s)$ の差を輪郭線座標 s で偏微分したものの¹⁹⁾,

$$\tilde{\gamma}_{xs,se}^M(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} (u(x, s) - U(x, s)) \quad (28)$$

となるから、式(13.c)および(15)を代入して

$$\tilde{\gamma}_{xs,se}^M(x, s) = w_{SLO}^T(s) \left(\frac{dV(x)}{dx} - \theta_{SLO}(x) \right) \quad (29)$$

となる。総合せん断ひずみ $\gamma_{x_s}^M$ は式(17)と式(29)の和をとって、総合せん断応力 $\tau_{x_s}^M$ は式(23)と式(24)の和をとって次のごとく与えられる。

$$\gamma_{x_s}^M(x, s) = r^T(s)V'(x) - \dot{w}_{SL0}^T(s)\theta_{SL0}(x) \quad (30)$$

$$\tau_{x_s}^M(x, s) = G \frac{\psi^T(s)}{t(s)} V'(x) + \bar{E} \frac{(S_0(s) - \Phi_0(s))^T}{t(s)} \theta_{SL0}''(x) \quad (31)$$

二次せん断応力式(24)および2種類の二次せん断ひずみ式(18), (29)を二次せん断応力の仮想仕事の等価性の式(12)に代入すると、

$$\frac{\bar{E}}{G} \mathbf{R}_{00} \theta_{SL0}''(x) + \mathbf{F}_{SL0} (V'(x) - \theta_{SL0}(x)) = \mathbf{0} \quad (32)$$

を得る。ただし、 N 段階までのせん断遅れ補正を考慮した反り抵抗マトリックス \mathbf{F}_{SLi} および二次せん断抵抗マトリックス \mathbf{R}_{ij} は断面積 F に関する積分として次のごとく定義する。

$$\mathbf{F}_{SLi} = \int_F w_{SLi} w_{SLi}^T dF \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (33)$$

$$\mathbf{R}_{ij} = \int_F \left(\frac{S_i(s) - \Phi_i(s)}{t(s)} \right) \left(\frac{S_j(s) - \Phi_j(s)}{t(s)} \right)^T dF \quad (34)$$

上式(32)の両辺に前から $\dot{w}_{SL0}^T(s) \mathbf{F}_{SL0}^{-1}$ を掛けて移項すると、次の補正で用いる関係式

$$\dot{w}_{SL0}^T(s) V'(x) = \dot{w}_{SL0}^T(s) \theta_{SL0}(x) - \frac{\bar{E}}{G} \dot{w}_{SL0}^T(s) \mathbf{F}_{SL0}^{-1} \mathbf{R}_{00} \theta_{SL0}''(x) \quad (35)$$

となる。以上がTimoshenkoはり形の理論であり、軸方向反り変位は輪郭線座標 s の1次関数となっている。そこで、せん断遅れを考慮していないこの状態を「第0段階のせん断遅れ補正」とよぶことにする。

(3) 第1段階のせん断遅れ補正

第1段階のせん断遅れ補正に入る。せん断ひずみの式(18)は要素の応力のつり合い条件(9), (10)およびHooke則(4.c)より求められた。したがって、つり合い条件は満足するが、ひずみ変位関係式(1.c)は満足していない。そこで面内変位関数 $f_s(x, s)$ および $f_n(x, s)$ は固定したままで、ひずみ変位関係式(1.c)を満足させるように軸方向反り変位関数 $u(x, s)$ を修正する。式(1.c)に式(13.a), (17), (18)を代入し、式(35)から $V'(x)$ の項を消去すると、軸方向変位は

$$u(x, s) = -w_{SL0}(s)\theta_{SL0}(x) - w_{SL1}(s)\theta_{SL1}(x) \quad (36)$$

と修正される。ただし、新しい単位反り関数 $w_{SLi}(s)$ および軸方向の関数 $\theta_{SLi}(x)$ は次のごとく定義した。

$$w_{SLi}(s) = \int_0^s \left(\frac{S_{i-1}(s) - \Phi_{i-1}(s)}{t(s)} \right) ds + \mathbf{R}_{i-1, i-1} \mathbf{F}_{SLi-1}^{-1} w_{SLi-1}(s) + \mathbf{R}_{i-1, i-2} \mathbf{F}_{SLi-2}^{-1} w_{SLi-2}(s) \quad (37)$$

$$\theta_{SLi}(x) = -\frac{\bar{E}}{G} \theta_{SLi-1}''(x) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (38)$$

式(38)左辺の軸方向関数 $\theta_{SLi}(x)$ は新しい未知関数とみなす。式(37)中の二次せん断抵抗マトリックス \mathbf{R}_{ij} の添え字 ij は0または正の整数であるから、負になるときは零マトリックスとして扱う。ここで新しく定義した単位反り関数はそれ以前の単位反り関数と直交していること、すなわち

$$\int_F w_{SLi}(s) w_{SLj}^T(s) dF = \mathbf{0} \quad (i \neq j) \quad (39)$$

となることが簡単に証明できる。二次せん断抵抗マトリックス \mathbf{R}_{ij} は添え字 i と j の差が2以上のとき直交することが証明できる。すなわち次式となる。

$$\mathbf{R}_{ij} = \int_F \left(\frac{S_i(s) - \Phi_i(s)}{t(s)} \right) \left(\frac{S_j(s) - \Phi_j(s)}{t(s)} \right)^T dF = \mathbf{0} \quad (|i - j| \geq 2) \quad (40)$$

第1段階のせん断遅れ補正を施した反り変位 $u(x, s)$ を軸ひずみの定義に代入すれば、第1段階の平面応力状態の垂直ひずみ $\varepsilon_x^M(x, s)$ が求まる。それをHooke則(5.a)に代入し、垂直応力 $\sigma_x^M(x, s)$ を得る。その応力をつり合い条件式(10)に代入し、積分すれば二次せん断応力 $\tau_{x_s}^M(x, s)$ が求められ、それにHooke則(4.c)を適用すれば、二次せん断ひずみ $\gamma_{x_s, se}^M(x, s)$ となる。このときのひずみの定義より求まる二次せん断ひずみは

$$\tilde{\gamma}_{x_s, se}^M(x, s) = \dot{w}_{SL0}^T(s) V'(x) - \dot{w}_{SL0}^T(s) \theta_{SL0}(x) - \dot{w}_{SL1}^T(s) \theta_{SL1}(x) \quad (41)$$

となっている。この式を式(12)に代入すると、第1段階の二次せん断ひずみの仮想仕事式が求められる。この仕事式を式(35)同様に変形すると、次の段階の補正に用いられる関係式となる。

(4) 第N段階のせん断遅れ補正

以上の操作を N 段階まで繰り返すと最終補正後の変位、ひずみ、応力成分が次のごとく与えられる。

$$u(x, s) = -\sum_{i=0}^N w_{SLi}(s) \theta_{SLi}(x) \quad (42)$$

$$\varepsilon_x^M(x, s) = -\sum_{i=0}^N w_{SLi}^T(s) \theta_{SLi}'(x) \quad (43)$$

$$\gamma_{xs,se}^M(x,s) = \frac{\bar{E}}{G} \sum_{i=0}^N \frac{(S_i(s) - \Phi_i(s))^T}{t(s)} \theta''_{SLi}(x) \quad (44)$$

$$\tilde{\gamma}_{xs,se}^M(x,s) = \dot{w}_{SL0}^T(s) V' - \sum_{i=0}^N \dot{w}_{SLi}^T(s) \theta_{SLi}(x) \quad (45)$$

$$\sigma_x^M(x,s) = -\bar{E} \sum_{i=0}^N w_{SLi}^T(s) \theta'_{SLi}(x) \quad (46)$$

$$\tau_{xs,se}^M(x,s) = \bar{E} \sum_{i=0}^N \frac{(S_i(s) - \Phi_i(s))^T}{t(s)} \theta'_{SLi}(x) \quad (47)$$

総合せん断ひずみ γ_{xs}^M は式(17) と式(45) の和をとって、総合せん断応力 τ_{xs}^M は式(23) と式(47) の和をとって次のごとく与えられる。

$$\gamma_{xs}^M(x,s) = \tau^T(s) V'(x) - \sum_{i=0}^N \dot{w}_{SLi}^T(s) \theta_{SLi}(x) \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xs}^M(x,s) &= G \frac{\psi^T(s)}{t(s)} V'(x) \\ &+ \bar{E} \sum_{i=0}^N \frac{(S_i(s) - \Phi_i(s))^T}{t(s)} \theta'_{SLi}(x) \quad (49) \end{aligned}$$

せん断遅れの理論は面内変位成分を固定し、軸方向変位成分でその影響を取り入れるため、板曲げのすべての成分および平面応力の初等せん断応力成分はせん断遅れの補正を受けず、第0段階のままである。そして、各段階の単位反り関数 w_{SLi} を輪郭線座標 s で積分して得られる二次せん断流関数 $(S_i(s) - \Phi_i(s))$ の板ごとの定数項 $\Phi_i(s)$ は従来どおり断面の閉じた室 m ごとく反りの閉合条件の連立方程式

$$\oint_{\Gamma_m} \left(\frac{S_i(s) - \Phi_i(s)}{t(s)} \right) ds = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M) \quad (50)$$

を解いて決定される。ただし、 Γ_m は室 m を囲む閉じた輪郭線である。ゆえに、各室ごとに一定値をとる初等せん断流関数ベクトル $\psi(s)$ を式(50)の両辺に掛けて、断面全体で総和をとると、断面内直交条件

$$\begin{aligned} \int_F \frac{\psi(s)}{t(s)} \left(\frac{S_i(s) - \Phi_i(s)}{t(s)} \right)^T dF &= 0 \\ \int_F \frac{\psi(s)}{t(s)} \dot{w}_{SLi}^T(s) dF &= 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, N) \quad (51) \end{aligned}$$

が従来の理論同様に成立する。

(5) 支配方程式と断面力

上記の最終段階の変位、ひずみ、応力の成分を用いて、支配方程式を誘導し、断面力を定義する。仮想変位の原理は次のごとく表現できる。

$$\delta A_i + \delta A_a = 0 \quad (52)$$

ただし、内力の仮想仕事 δA_i および外力の仮想仕事 δA_a は以下のごとく表せる。

$$\begin{aligned} \delta A_i &= - \int_V [\sigma_x^M \delta \epsilon_x^M + \sigma_x^B \delta \epsilon_x^B + \sigma_s^B \delta \epsilon_s^B \\ &+ \tau_{xs}^M \delta \gamma_{xs}^M + \tau_{xs}^B \delta \gamma_{xs}^B] dV \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta A_a &= \int_V [p_x \delta u + p_s \delta f_s + p_n \delta f_n] dV \\ &+ \sum P_x \delta u + \sum P_s \delta f_s + \sum P_n \delta f_n \quad (54) \end{aligned}$$

薄肉部材の仮定より、添え字 n の付いた応力成分はすべて零となっている。また、平面応力と板曲げの連成成分も無視した。変位の式(13.a), (13.b), (42), ひずみの式(19)~(21), (43), (48) を仮想変位の原理に代入し、整理すると、断面力の関係式

$$M'_{SLi}(x) - Q_{SLi}(x) + \int_F p_x(x,s) w_{SLi}(s) t ds = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, N) \quad (55)$$

$$\begin{aligned} Q'(x) + \int_{\Gamma} m''_{xs}(x,s) b(s) ds - 2 \int_{\Gamma} m'_{xs}(x,s) \dot{b}(s) ds \\ + \int_{\Gamma} m_s(x,s) \ddot{b}(s) ds + \int_{\Gamma} p_Q(x,s) \bar{r}(s) ds = 0 \quad (56) \end{aligned}$$

を得る。ただし、 Γ は全断面輪郭線を意味する。上式中の平面応力による断面全体の断面力および板曲げによる板単位幅当たりの断面力は次式で定義した。

$$M_{SLi}(x) = \int_F \sigma_x^M(x,s) w_{SLi}(s) dF \quad (i=0, \dots, N) \quad (57)$$

$$Q_{SLi}(x) = \int_F \tau_{xs}^M(x,s) \dot{w}_{SLi}(s) dF \quad (i=0, \dots, N) \quad (58)$$

$$Q(x) = \int_F \tau_{xs}^M(x,s) r(s) dF \quad (59)$$

$$m_x(x,s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_x^B(x,s,n) ndn \quad (60)$$

$$m_s(x,s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_s^B(x,s,n) ndn \quad (61)$$

$$m_{xs}(x,s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tau_{xs}^B(x,s,n) ndn \quad (62)$$

ここで、せん断遅れに拡張した反りモーメント $M_{SLi}(x)$ は反り関数と組んで曲げモーメントあるいはねじりの反りモーメントを構成する概念となる。同様に拡張された二次せん断力 $Q_{SLi}(x)$ は曲げのせん断力あるいは曲げねじりの二次ねじりモーメントとなっている。一方、せん断力ベクトル $Q(x)$ は曲げ荷重、ねじりの全トルクなど面内荷重とつり合い系をなす第0段階のみの断面力となる。曲げとねじりで次元が異なるが、「せん断力」とよぶことにする。

断面輪郭線 s 方向の荷重および断面厚 n 方向の荷重はそれらの合力の分布荷重 p_Q あるいは断面位置

座標 (\hat{x}, \hat{s}) に作用する集中合力 P_Q でまとめて

$$p_Q(x, s)\bar{r}(s) \equiv p_s(x, s)r(s) + p_n(x, s)b(s)$$

$$P_Q(\hat{x}, \hat{s})\bar{r}(\hat{s}) \equiv P_s(\hat{x}, \hat{s})r(\hat{s}) + P_n(\hat{x}, \hat{s})b(\hat{s}) \quad (63)$$

とおいた。ただし、 $\bar{r}(s)$ は横荷重の方向あるいはせん断中心よりの距離を与えるベクトルである。

せん断遅れの段階ごとの単位反り関数ベクトル、軸方向変位関数ベクトル、反りモーメントベクトルおよび二次せん断力ベクトルをそれぞれまとめてベクトル化し、「総合単位反り関数ベクトル」、「総合軸方向変位関数ベクトル」、「総合反りモーメントベクトル」、「総合二次せん断力ベクトル」とよぶ。そして、

$$\mathbf{w}_{SL}^T(s) \equiv [w_{SL0}^T : w_{SL1}^T : \dots : w_{SLN}^T]$$

$$\Theta_{SL}^T(x) \equiv [\theta_{SL0}^T : \theta_{SL1}^T : \dots : \theta_{SLN}^T]$$

$$\mathbf{M}_{SL}^T(x) \equiv [M_{SL0}^T : M_{SL1}^T : \dots : M_{SLN}^T]$$

$$\mathbf{Q}_{SL}^T(x) \equiv [Q_{SL0}^T : Q_{SL1}^T : \dots : Q_{SLN}^T] \quad (64)$$

と置く。さらに、面内荷重に対応するせん断力ベクトル $\mathbf{Q}(x)$ は板曲げの成分を含む形に拡張する。それを従来のせん断力と区別するため、波印を付して

$$\tilde{\mathbf{Q}}(x) \equiv \mathbf{Q}(x) + \int_{\Gamma} m'_x(x, s)b(s)ds$$

$$- 2 \int_{\Gamma} m_{xs}(x, s)\dot{b}(s)ds \quad (65)$$

と定義する。これから、方程式(55)および(56)は次のごとく書き直せる。

$$\mathbf{M}'_{SL}(x) - \mathbf{Q}_{SL}(x) + \int_{\Gamma} p_x(x, s)\mathbf{w}_{SL}(s)tds = \mathbf{0} \quad (66)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}'(x) + \int_{\Gamma} m_s(x, s)\dot{b}(s)ds + \int_{\Gamma} p_Q(x, s)\bar{r}(s)ds = \mathbf{0} \quad (67)$$

変分計算より境界条件式は次のごとく与えられる。

$$\left[\delta \Theta_{SL}^T(x) \left(\mathbf{M}_{SL}(x) - \sum P_x \mathbf{w}_{SL}(s) \right) \right]_0^l = \mathbf{0} \quad (68)$$

$$\left[\delta \mathbf{V}^T(x) \left(\tilde{\mathbf{Q}}(x) - \sum P_Q \bar{r}(s) \right) \right]_0^l = \mathbf{0} \quad (69)$$

$$\left[\delta \mathbf{V}'^T(x) \left(\int_{\Gamma} m_x(x, s)b(s)ds \right) \right]_0^l = \mathbf{0} \quad (70)$$

せん断応力は式(8)に示すごとく初等成分と二次成分の和であるから、せん断力もそれらの成分の断面積分の和で表現できる。そこで拡張されたせん断力を次のごとくあらわす。

$$\tilde{\mathbf{Q}}(x) = \mathbf{Q}_{pr}(x) + \mathbf{Q}_{se}(x) \quad (71)$$

ただし

$$\mathbf{Q}_{pr}(x) = \int_{\Gamma} \tau_{xs, pr}^M(x, s)r(s)dF - 2 \int_{\Gamma} m_{xs}(x, s)\dot{b}(s)ds \quad (72)$$

$$\mathbf{Q}_{se}(x) = \int_{\Gamma} \tau_{xs, se}^M(x, s)r(s)dF + \int_{\Gamma} m'_x(x, s)b(s)ds \quad (73)$$

と定義した。初等せん断力 $\mathbf{Q}_{pr}(x)$ の式(72)の右辺第1項は閉断面(Bredt)のねじり成分を、第2項は開断面(St.Venant)のねじり成分を与える。断面力の定義式(57)~(62)に応力の式(25), (27), (46), (49)を代入すると次のごとく表現できる。

$$\mathbf{M}_{SLi}(x) = -\bar{E}F_{SLi}\theta'_{SLi}(x) \quad (i=0, \dots, N) \quad (74)$$

$$\mathbf{Q}_{SLi}(x) = -\bar{E}F_{SLi}\theta''_{SLi}(x) \quad (i=0, \dots, N) \quad (75)$$

$$\mathbf{Q}_{pr}(x) = \mathbf{G} \mathbf{J} \mathbf{V}'(x) \quad (76)$$

$$\mathbf{Q}_{se}(x) = -\bar{E}F_{SL0}\theta''_{SL0}(x)$$

$$- \int_{\Gamma} D(s)b(s)b^T(s)ds \mathbf{V}''''(x)$$

$$- \nu \int_{\Gamma} D(s)b(s)\dot{b}^T(s)ds \mathbf{V}'(x) \quad (77)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}(x) = \mathbf{G} \mathbf{J} \mathbf{V}'(x) - \bar{E}F_{SL0}\theta''_{SL0}(x)$$

$$- \int_{\Gamma} D(s)b(s)b^T(s)ds \mathbf{V}''''(x)$$

$$- \nu \int_{\Gamma} D(s)b(s)\dot{b}^T(s)ds \mathbf{V}'(x) \quad (78)$$

$$m_x(x, s) = -D(s) \left(b^T(s)\mathbf{V}''(x) + \nu \dot{b}^T(s)\mathbf{V}(x) \right) \quad (79)$$

$$m_s(x, s) = -D(s) \left(\dot{b}^T(s)\mathbf{V}(x) + \nu b^T(s)\mathbf{V}''(x) \right) \quad (80)$$

$$m_{xs}(x, s) = -\frac{1}{6}Gt^3(s)\dot{b}^T(s)\mathbf{V}'(x) \quad (81)$$

ただし、断面全体のねじり抵抗マトリックス \mathbf{J} は Bredt の成分と St. Venant の成分の和からなる。

$$\mathbf{J} = \int_{\Gamma} \frac{\psi(s)}{F} \frac{\psi^T(s)}{t(s)} dF + \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \dot{b}(s)\dot{b}^T(s)t^3(s)ds \quad (82)$$

また、板の曲げ剛性 $D(s)$ およびねじり剛性は次のごとく定義できる。

$$D(s) = \frac{Et^3(s)}{12(1-\nu^2)}, \quad D(s)(1-\nu) = \frac{1}{6}Gt^3(s) \quad (83)$$

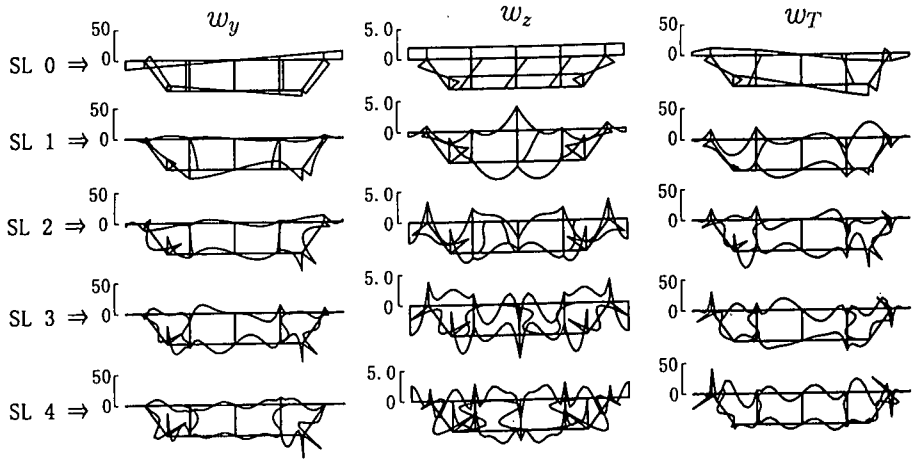
式(75)と(77)を比較すると、板曲げの影響を無視するならば、 $\mathbf{Q}_{SL0}(x) = \mathbf{Q}_{se}(x)$ となることがわかる。上の式(74), (75)から総合反りモーメントベクトルおよび総合二次せん断力ベクトルは

$$\mathbf{M}_{SL}(x) = -\bar{E}F_{SL}\Theta'_{SL}(x)$$

$$\mathbf{Q}_{SL}(x) = -\bar{E}F_{SL}\Theta''_{SL}(x) \quad (84)$$

と表現できる。ただし、 F_{SL} は次式のごとく対角ブロックに反り抵抗マトリックス F_{SLi} ($i=0, 1, 2, \dots, N$) が段階順に入る総合反り抵抗マトリックスである。

$$\mathbf{F}_{SL} = \begin{bmatrix} F_{SL0} & & & 0 \\ & F_{SL1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & F_{SLN} \end{bmatrix} \quad (85)$$



$$\begin{bmatrix}
 \vdots & HL & \vdots & \vdots & \frac{1}{G}H \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{1}{E}F_{SL}^{-1} & \vdots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & GAK_{SL}(1HL - E) & \vdots & \vdots & AK_{SL}1H \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \bar{E}I_K & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{bmatrix}$$

図-2 係数マトリックス A

$$\begin{bmatrix}
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 \dots \\
 -\int_P p_x(x, s)w_{SL}(s)dF \\
 \dots \\
 -\int_\Gamma p_Q(x, s)\bar{r}(s)ds
 \end{bmatrix}$$

図-3 荷重ベクトル b

支配方程式(67)左辺第2項の板の横曲げモーメント $m_s(x, s)$ に式(80)を代入すると,

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}'(x) - \bar{E}I_K V(x) - \nu \int_\Gamma D(s)\ddot{b}(s)b^T(s)ds V''(x) \\
 + \int_\Gamma p_Q(x, s)\bar{r}(s)ds = 0 \quad (86)
 \end{aligned}$$

となる。左辺のラーメン抵抗 I_K は次式で定義した。

$$I_K = \frac{1}{12} \int_\Gamma \ddot{b}(s)\ddot{b}^T(s)t^3(s)ds \quad (87)$$

二次せん断応力式(47)および2種類の二次せん断ひずみ式(44), (45)を二次せん断応力の仮想仕事の等価性の式(12)に代入すると, 式(32)にアナロジーな式(88)となる。

$$\frac{\bar{E}}{G} R_{SL} \Theta_{SL}''(x) + F_{SL} (1V'(x) - \Theta_{SL}(x)) = 0 \quad (88)$$

R_{SL} はマトリックス R_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, \dots, N$) をブロック要素としてもつ「総合二次せん断抵抗マトリックス」である。式(40)に示したごとく, マトリックス R_{ij} は添え字 i と j の差が2以上になると零マトリックスとなるから, 帯マトリックスとなる。そして, 新しく導入したマトリックス 1 は第0段階のみ単位マトリックス I で第1段階から第 N 段階まで零マトリックスとなる自然基底のごときものである。

$$1^T \equiv [I \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (89)$$

単位マトリックス I および零マトリックス 0 の次数は共に変形パターン数の総数に等しい。

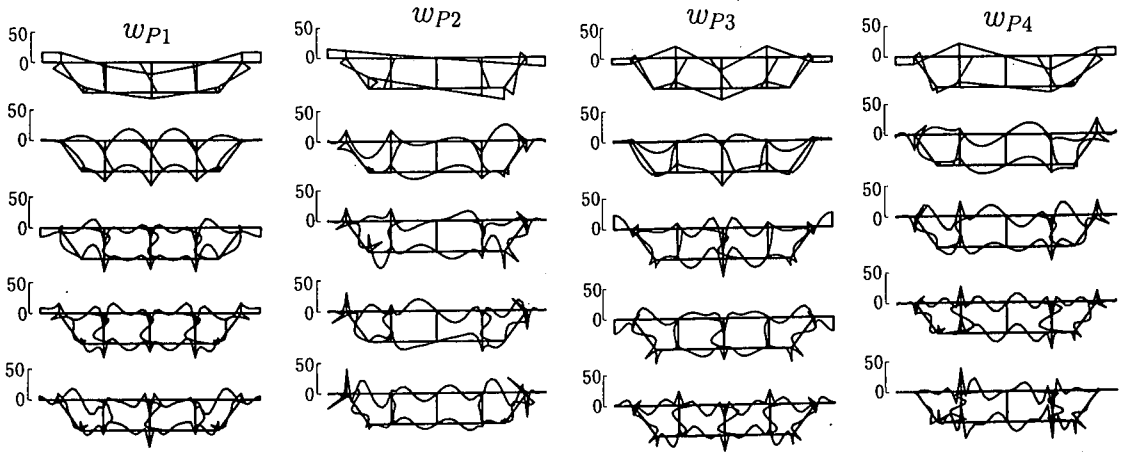


図-4 四室断面の単位関数

式(88)の前から $GF_{SL}R_{SL}^{-1}$ を掛け、式(84.b)に代入すると、せん断遅れに拡張された Timoshenko はり形のせん断力式

$$Q_{SL}(x) = K_{SL}GA \left(1 \frac{dV}{dx} - \Theta_{SL} \right) \quad (90)$$

となる。断面形状に依存する係数 K_{SL} は

$$K_{SL} = \frac{1}{A} F_{SL} R_{SL}^{-1} F_{SL} \quad (91)$$

と定義した。ただし、ダミーの A は部材断面積である。第0段階の二次せん断力は上記のブロック抜き取りのマトリックス 1^T を式(90)の前から掛けて求められる。ゆえに、板曲げ成分を省略した式(78)は

$$Q(x) = GJV' + 1^T K_{SL} GA \left(1 \frac{dV}{dx} - \Theta_{SL} \right) \quad (92)$$

と書き直しても等価である。

(6) 連立1階常微分方程式

求められた支配方程式(66), (86), 断面力の定義式(84.a), (90), (92)を用いて連立1階常微分方程式を作成すると、式(93)となる。

$$\frac{d}{dx} z(x) = A z(x) + b(x) \quad (93)$$

状態量ベクトル $z(x)$ は次のごとく定義してある。

$$z^T(x) \equiv [V : \Theta_{SL} : M_{SL} : Q] \quad (94)$$

係数マトリックス A および荷重項ベクトル $b(x)$ を図-2, 図-3に与える。上式中のマトリックス E は「総合単位マトリックス」であり、次数は(変形パターンの総数) \times (せん断遅れの段階数+1)となる。また、マトリックス L , k および H は表記を簡略化する

目的で次のごとく定義した。

$$L \equiv A 1^T K_{SL} \quad (95)$$

$$k \equiv 1^T K_{SL} 1 \quad (96)$$

$$H \equiv (J + Ak)^{-1} \quad (97)$$

なお、せん断遅れの考慮段階数 N を零と置くと、文献19)で得られた連立1階常微分方程式に一致する。

(7) 状態量の無次元化

支配方程式の正しい解を得るため、種々の前処理が必要となる。変位と断面力の状態量のオーダーは明らかに弾性係数倍の違いをもつ。そのため、桁落ち誤差を発生し安定した解を得るのが難しくなる。そこで、状態量の無次元化のマトリックス P_c および大きさを揃えるマトリックス F_c を用いて、状態量 $z(x)$ を次のごとく無次元化状態量 $\bar{z}(x)$ に変換する。

$$P_c \bar{z}(x) = F_c z(x) \quad (98)$$

P_c は任意の基準荷重 P_0 と基準長さ l_0 の積 $P_0 l_0$ から、 F_c は基準断面抵抗 I_0 および縦弾性係数 E などから構成される対角要素をもつ対角マトリックスである。当初の状態量 $z(x)$ と無次元化状態量 $\bar{z}(x)$ の関係は

$$z(x) = X \bar{z}(x) \quad (99)$$

とあらわせる。ただし、無次元化マトリックス X は

$$X = F_c^{-1} P_c \quad (100)$$

と定義した。式(99)を微分方程式(93)に代入すると

$$\frac{d}{dx} \bar{z}(x) = \bar{A} \bar{z}(x) + \bar{b}(x) \quad (101)$$

と書き直せる。

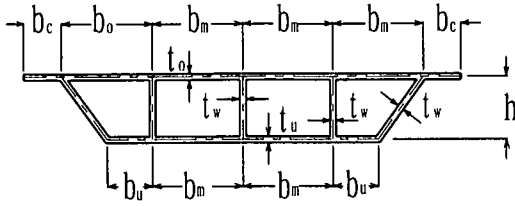


図 - 5 四室箱桁の断面形状

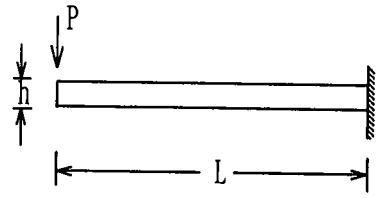


図 - 6 構造系

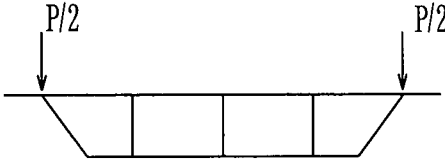


図 - 7 対称荷重

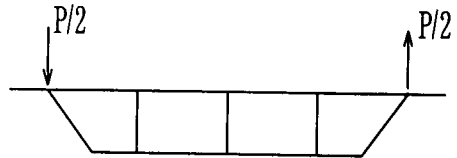


図 - 8 逆対称(ずり)荷重

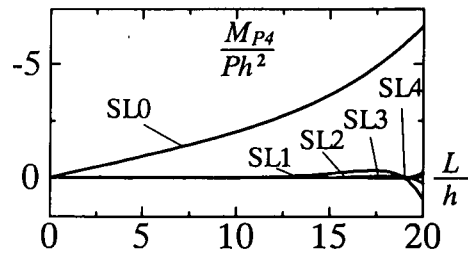
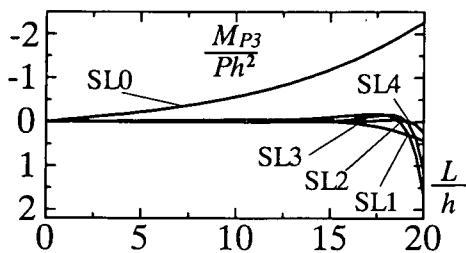
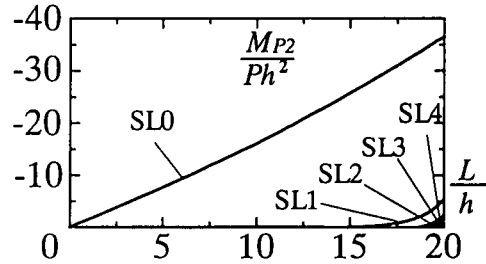
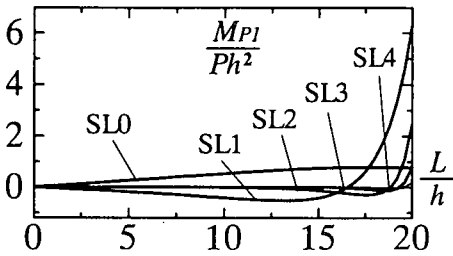
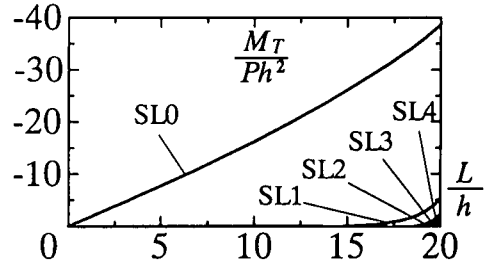
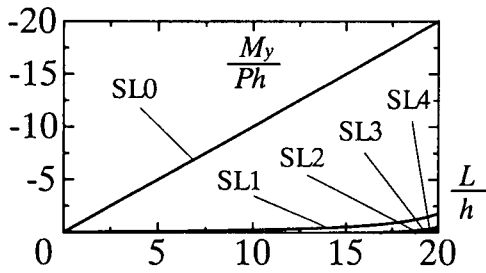


図 - 9 対称荷重により発生する断面力の軸方向分布

図 - 10 逆対称荷重により発生する断面力の軸方向分布

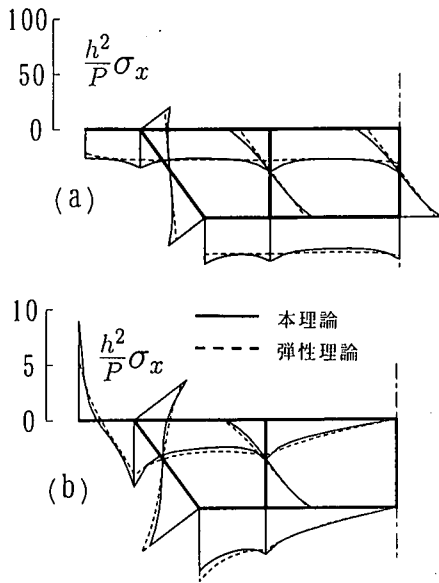


図-11 埋込み端の垂直応力分布
(a) 対称荷重 (b) 逆対称荷重

4. 数値計算例

本理論の妥当性を調べる目的で、簡単な片持ちはり解き、弾性論の解との一致を比較検討する。鉛直軸に対称な四室の断面形状(図-5)の箱桁をとりあげる。断面は上下フランジ間距離 h を基準長さとし、他の断面寸法もこれを基準に表す。ここでは、断面変形の起こり易い比較的板厚の薄い部材を用いることとし、以下のごとく設定した。

$$b_c = h, b_o = (3/2)h, b_m = (3/2)h, b_u = (3/4)h$$

$$t_o = (3/40)h, t_u = (1/10)h, t_w = (3/20)h$$

この断面形の8種類の基本変形について、0段階から4段階までのせん断遅れの断面諸量を求めた。このうち、図心軸の伸縮を除いた7種類の単位反り関数を計算した結果を前々ページ下の見開きの図-4で与えた。横方向に7つの変形パターン種別、縦方向に0から4までのせん断遅れの段階数を表示した。断面変形の変形モード図は文献19)に与えてあるのでここでは省略する。変形パターンの列ごとに、輪郭線座標 s で2回積分して次の段階の単位反り関数が得られる。大きさをそろえる目的で、変形パターンごとに反り抵抗値が等しくなるように正規化してある。ねじりと断面変形の反りのみ互いに連成するが、それ以外はすべて直交するように作成した。

片持ちはり(図-6)の軸方向長さを $L = 20h$ とした。自由端断面の端ウェブと上フランジの交点に大き

さ $P/2$ の集中荷重を鉛直軸に関して左右対称に載荷する(図-7)ならば、対称変形の断面力として断面剛の y 軸回りの曲げモーメント M_y および2種類の対称断面変形のモーメント M_{P1} と M_{P3} が発生する。断面力の一般的な定義は式(57)に示す。具体的には、垂直応力 σ_x と図-4の単位反り関数の縦の列 w_y, w_{P1} および w_{P3} の各々との積の断面積分である。

せん断遅れの収束速さを見るために4段階までのこれらの断面力の軸方向分布を求めた(図-9)。正規化された単位反り関数に対し、十分速い速度で収束しており、この構造系においてせん断遅れは4段階までで十分といえる。先端荷重の曲げ変形により埋込み端に大きな垂直応力が発生する。これを弾性論解(破線²³⁾と併記したのが図-11(a)である。本理論は一次元理論にする目的で面内垂直応力 σ_s を無視し、そのためPoisson比 ν の扱いが統一的ではない。それにもかかわらず、両者の計算結果は比較的良く一致しており、本理論の正当性を裏付けている。

次に、鉛直軸に関して左右逆対称に載荷する(図-8)場合を扱う。逆対称変形の断面力として断面剛のねじり反りモーメント M_T および2種類の逆対称断面変形のモーメント M_{P2} と M_{P4} が発生する。せん断遅れの収束速さを見るために4段階までのこれらの断面力の軸方向分布を求めた(図-10)。この場合も良好な収束速さである。埋込み端の垂直応力はこれらの断面力による応力の重ね合わせである(図-11(b))。張り出しフランジの先端および下フランジ左端を除けば、おおむね良好な結果である。なお、弾性論解は単純はりの換算系で求めたため、埋込み端での反力の分散状況を正確に把握できず、この程度のずれ発生はやむをえないと考えられる。

5. まとめ

従来の「工学曲げ理論」を断面変形にまで拡張したのが「拡張曲げ理論」である。これに断面変形時の断面を構成する板の曲げを考慮したのが「一般化曲げ理論²⁰⁾」である。一方、筆者の一人は文献19)において拡張曲げ理論をTimoshenkoはり形の面内せん断変形に拡張した。今回、この理論をせん断遅れ形の軸方向せん断変形に拡張した。周知のごとく、閉じた断面では、ねじりと断面変形の反りが連成する。せん断遅れの段階数を上げるに伴い、連成度合(特異性)はさらに高くなり、数値的困難が増大する。解析は修正伝達マトリックス法²¹⁾を用いた。数値的

困難を回避するため (1) 状態量の適切な無次元化 (2) 反り連成項の準対角化 (3) 適切な格間長の選択 (4) 適切なノルム低下 などの処置をほどこした。数値計算例として Reissner²⁾ 同様に片持ちはりを取りあげ、大きなせん断歪れを発生させる目的で、短い1軸対称の四室断面箱桁を解いた。弾性論解と比較して良好な一致を得たため、本理論の正当性を確認できた。本理論の有用性は弾性論解法では得難い種々の中間格点条件を多くもつ変断面連続桁の解析を、離散化解析のごとき手間と時間をかけずに行えることである。伝達マトリックス法は正確に連立1階常微分方程式を解くことに対応するため、本理論から得られた結果は理論仮定の範囲内において厳密解を与えている。複雑な構造系に対する解析結果、数値計算技術等に関しては別の機会に報告する予定である。

参考文献

- 1) Reissner, E.: Least work solutions of shearlag problems, *J. Aeron. Sci.*, Vol.14, pp.284-291, 1941.
- 2) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy, *Quart. Appl. Math.*, Vol.4, No.3, pp.268-278, 1946.
- 3) Moffatt, K.R. and Dowling, P.J.: Shear lag in steel box girder bridges, *The Structural Engineer*, Vol.53, No.10, 1975.
- 4) Schmidt, H.: Das Problem der mitwirkenden Gurtbreite im Stahlbrückenbau aus der Sicht neuer Erkenntnisse, *Berichte aus Forschung und Entwicklung* 6/1979, Beiträge zur Berechnung und Ausführung von Stahlkonstruktionen, DAST, Stahlbau-Verlag, pp.30-34, 1979.
- 5) DIN 18809: Stahlerne Strassen- und Wegbrücken. Bemessung, Konstruktion, Herstellung. September 1987.
- 6) 中井 博, 田井戸米好, 林 秀侃: 偏平多室箱桁のシアラグ解析と有効幅の一算定法, *土木学会論文報告集*, No.340, pp.77-85, 1983.
- 7) Chang, S.T. and Yun, D.: Shear lag effect in box girder with varying depth, *J. of Structural Engineering*, Vol.114, pp.2280-2292, 1988.
- 8) 倉西正嗣, 宮川松男: 薄肉筒体の曲げ理論 (断面不変としての略近解), *日本機械学会論文集*, Vol.16, No.55, pp.109-113, 1950.
- 9) 小松定夫: 連続箱桁の Shear Lag について, *土木学会論文集*, No.58, pp.1-9, 1958.
- 10) Dezi, L. and Mentrasti, L.: Nonuniform bending-stress distribution (Shear lag), *J. of structural Engineering*, Vol.111, pp.2675~2690, 1985.
- 11) Foutch, D.A. and Chang, P.C.: A shear lag anomaly, *Proc. of ASCE*, Vol.108, No.ST7, pp.1653-1658, 1982.
- 12) Hyca, M.: An improved approximate method to determine axial constraint stresses in closed section beams under torsion, *ZAMM*, Vol.63, pp.T171-T174, 1983.
- 13) Cowper, G.R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *J. of Appl. Mech.*, vol.33, pp.335-340, 1966.
- 14) Love, A.E.H.: A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover Publications.
- 15) 椽農知徳, 薄木征三, 堀江 保: せん断変形を考慮した薄肉断面直線ばりの理論, *土木学会論文報告集*, No.282, pp.1-13, 1979.
- 16) Hjeltnstad, K.D.: Warping effects in transverse bending of thin-walled beams, *J. of Eng. Mech.*, Vol.113, pp.907-924, 1987.
- 17) Koo, K.K. and Cheung, Y.K.: Mixed variational formulation for thin-walled beams with shear lag, *J. of Eng. Mech.*, Vol.115, pp.2271-2286, 1989.
- 18) Usuki, T.: Ein Beitrag zur Theorie dünnwandiger prismatischer Stäbe mit offen-geschlossenem Profil aus vier Scheiben, *Die Bautechnik*, Vol.60, pp.14-23, 1983.
- 19) 白木恒雄: 断面変形を考慮した変断面直線多室箱桁橋の一解析法, *土木学会論文集*, No.368/I-5, pp.265-274, 1986.
- 20) Schardt, R.: Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, Springer, 1989.
- 21) 白木恒雄, 中村秀治: 伝達マトリックス法における中間格点条件の効率的処理, *土木学会論文集*, No.374/I-6, pp.409-417, 1986.
- 22) Usuki, T.: Rotational Centers of Plates Regulating Distortion of Box Girders, *Journal of Structural Engineering*, Vol.120, No.9, pp.2602-2622, 1994.
- 23) 白木恒雄, 野口彰宏, 山田正人: 1次せん断変形を許す板よりなる折板構造の弾性解法, *土木学会論文集*, No.584/I-42, pp.277-286, 1998.

(1997. 7. 8 受付)

HIGHER ORDER SHEAR LAG THEORY OF BOX GIRDERS WITH DEFORMABLE CROSS SECTIONS

Tsuneo USUKI and Toshiaki SAWADA

A modification of the engineering beam theory for static problems of thin-walled box girders is presented that accounts for cross-sectional distortion and the shear lag effect. The shear lag effect is considered using the Timoshenko beam theory, which can be regarded as an equation of any order. A cantilever constructed of a 4-cell box girder is examined as a numerical example. The results obtained using the proposed theory are compared with known results from elasticity theory and are found to be in good agreement.