

密度および拘束応力の変化を考慮した砂の構成モデル

星川拓哉¹・中井照夫²・檜尾正也¹

¹学生会員 工修 名古屋工業大学大学院 社会開発工学専攻 (〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

²正会員 工博 名古屋工業大学教授 システムマネジメント工学科 (〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

これまでに、修正応力 t_y を用いた砂の等方硬化型および移動硬化型の弾塑性構成モデル(t_y -sand model, kinematic t_y -sand model)を提案し、3次元任意応力経路下にあるの砂の応力~ひずみ挙動を妥当に説明できることを確認している。しかし、間隙比や拘束応力が大きく変化する場合には、このモデルでも砂の挙動を十分に説明することは難しい。本研究では、砂にも粘土にみられる限界状態が存在することに着目し、新たな指標として state variable の概念を導入する。さらに、橋口による下負荷面モデルを参考に、従来のモデルを密度・拘束応力の違いも考慮できるモデルに拡張を試みた。また、本モデルの妥当性を、密度や拘束応力を変えた砂の排水・非排水三軸試験結果等を用いて検討した。

Key Words : constitutive model for sand, state variable, t_y -concept, sub-loading surface concept, drained and undrained tests, confining pressure, void ratio

1. まえがき

現在まで土の構成式に関する研究は活発に行なわれているが、実際問題への適用という観点からみれば、Cam-clay model¹⁾およびその発展形としての粘土の構成モデルが中心である。粘土に比べて実用的な砂の構成モデルが少ないのは、砂の場合たとえ応力状態が同じであっても間隙比に応じて密な砂・緩い砂が存在し、このときの応力~ひずみ挙動が大きく異なることがその一因である。ところで、中井らはこれまでに修正応力 t_y ²⁾を用いた砂の等方硬化型(t_y -sand model³⁾)および移動硬化型(kinematic t_y -sand model⁴⁾)の弾塑性構成モデルを提案し、このモデルが3次元任意応力経路下にある砂の挙動を妥当に説明できることを示している。しかし、このモデルを含め、多くの砂の構成モデルは、ある限定された密度や拘束応力レベルで行なわれた室内試験結果に基づいて構築されているため、間隙比や拘束応力が大きく変化する場合には、その土質パラメータを変えなければ十分には適用できないという問題を内包している。

本研究では、まず砂にも粘土同様応力状態が決まれば一義的に間隙比も求まる限界状態(critical state)が存在

するという実験事実^{5),6)}に着目し、せん断過程を通して刻々変化する砂の状態を表す指標として state variable の概念を新たに導入する。そして、硬化パラメータに粘土同様塑性体積ひずみを採用しながらも、砂にみられる正負の両ダイレイタンスー特性や一連のひずみ硬化・軟化挙動を説明可能としている橋口の下負荷面モデル⁷⁾を参考に、密度や拘束応力が大きく変化する場合の砂の変形・強度特性を同一のパラメータを用いて評価できる構成モデルを提案する。また、本構成モデルの妥当性を、豊浦標準砂を用いた間隙比や拘束応力を変えた排水および非排水三軸試験結果を用いて検証する。

2. 修正応力 t_y と砂の弾塑性構成モデル

砂の構成モデルが備えているべき特徴として、次のものが挙げられる。

- ①変形・強度特性に及ぼす中間主応力の影響
- ②塑性流動方向の応力経路依存性
- ③繰返し載荷時や主応力軸の回転時にみられる応力誘導異方性
- ④正負の両ダイレイタンスー特性

⑤ひずみ硬化・軟化挙動

すでに提案されている砂の等方硬化型弾塑性構成モデル(t_{ij} -sand model³⁾)は、SMP^{*}の概念に基づく修正応力 t_{ij} を導入することで①を、塑性ひずみ増分を流動則に従う成分と等方的な圧縮成分とに分解することで②を説明可能としている。また、移動硬化型モデル(kinematic t_{ij} -sand model⁴⁾)ではさらに通常の応力(σ_{ij})空間ではなく修正応力 t_{ij} に基づく応力比 x_{ij} 空間において、移動硬化則を仮定することにより③を表現している。

ここで簡単に、修正応力 t_{ij} とこの t_{ij} の概念で用いられる応力パラメータについてふれておく。表-1に、通常概念で用いられる応力パラメータと t_{ij} の概念で用いられる応力パラメータの比較を示す。表中の σ_{ij} および s_{ij} は通常用いられる応力テンソルおよび偏差応力テンソルであり、 p, q および η は多くの構成モデルで用いられている平均応力、偏差応力および応力比パラメータを表している。また、 η_{ij} および η^* は関口・太田⁹⁾によって導入された応力比テンソルおよび応力比パラメータである。これに対して、モデルで用いている修正応力 t_{ij} は次式で与えられる。

$$t_{ij} = a_{ik} \sigma_{kj} \quad (1)$$

式中の a_{ij} は、主応力方向に対する空間滑動面(SMP)¹⁰⁾の法線の方向余弦($a_i, i=1,2,3$)を主値とする対称テンソルであり、次式で与えられる。

$$a_{ij} = \sqrt{J_3/J_2} \sigma_{ij}^{-1/2} \quad (2)$$

ここに、 J_2, J_3 は σ_{ij} の2次、3次の不変量を表す。このことから、テンソル a_{ij} は応力比の関数形で表されることが理解できる。また、硬化パラメータとして、次式で与えられる塑性仕事相当量 W^{*P} を採用することで、砂にみられる正負の両ダイレイタンシー特性(④)も表現可能なモデルとなっている(詳細は文献4)を参照のこと)。

$$W^{*P} = \int t_{ij} d\varepsilon_{ij}^P \quad (3)$$

さて、これらのモデルでは通常の応力パラメータ($p, \eta=q/p$)の代わりに、 t_{ij} に基づく応力パラメータ(t_N :平均応力 $X=t_S/t_N$:応力比)を用いて、降伏関数 f を次式で与えている。

$$f = \ln t_N + \zeta(Z) - c = 0$$

$$\text{ここに、} \begin{cases} Z = X & (t_{ij}\text{-sand modelの場合)} \\ Z = X^* + n & (\text{kinematic } t_{ij}\text{-sand modelの場合)} \end{cases} \quad (4)$$

式(4)中の n は降伏曲面の中心を表し、背応力比テンソル n_{ij} を用いて次式で与えられる。

表-1 通常概念で用いる応力パラメータと t_{ij} の概念で用いる応力パラメータの比較

通常概念	t_{ij} の概念
σ_{ij}	$t_{ij} = a_{ik} \sigma_{kj}$
δ_{ij} (unit tensor)	a_{ij}
$p = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$	$t_N = t_{ij} a_{ij}$
$s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$	$t'_{ij} = t_{ij} - t_N a_{ij}$
$q = \sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}}$	$t_S = \sqrt{t'_{ij}t'_{ij}}$
$\eta_{ij} = s_{ij}/p$	$x_{ij} = t'_{ij}/t_N$
$\eta = q/p = \sqrt{(3/2)\eta_{ij}\eta_{ij}}$	$X = t_S/t_N = \sqrt{x_{ij}x_{ij}}$
$\eta_{ij}^* = (s_{ij} - s_{ij0})/p$	$x_{ij}^* = x_{ij} - n_{ij}$
$\eta^* = \sqrt{(3/2)\eta_{ij}^*\eta_{ij}^*}$	$X^* = \sqrt{x_{ij}^*x_{ij}^*}$

$$n = \sqrt{n_{ij}n_{ij}} \quad (5)$$

また背応力比テンソル n_{ij} は、応力比 x_{ij} 空間での移動硬化を表現する応力比量として X^* を位置づけるために、

$$X^* = \sqrt{(x_{ij} - n_{ij})(x_{ij} - n_{ij})} = \xi \quad (\xi: \text{パラメータ}) \quad (6)$$

を満足しながら、応力状態の変化に伴って移動するものと定義している。

一方、塑性ポテンシャル g も通常 σ_{ij} 空間ではなく、 t_{ij} 空間において関連流れ則が成り立つとして、次式で与えている。

$$g = \ln t_N + \zeta(Z)$$

$$\text{ここに、} \zeta(Z) = \frac{-\alpha}{1-\alpha} \ln \left| 1 - (1-\alpha) \frac{Z}{M^*} \right| \quad (\alpha \neq 1)$$

(7)

以上の結果、 t_{ij} -sand model や kinematic t_{ij} -sand model は修正応力 t_{ij} の概念に基づいた、3次元任意応力経路下にある砂の応力～ひずみ挙動(①～④)を妥当に評価できるモデルとなっている。しかし、これらのモデルでも密な砂にみられる一連のひずみ硬化・軟化挙動(⑤)を表現することはできない。また、これらのモデルはある限られた密度・拘束応力内で規定されたものであり、間隙比や拘束応力が大きく変化するような場合には、土質パラメータの設定が難しい。

3. state variable (Δe) の概念

粘土とは違って過圧密履歴等を与えなくても砂の場合には、同じ材質の砂でも自然状態において、いくつ

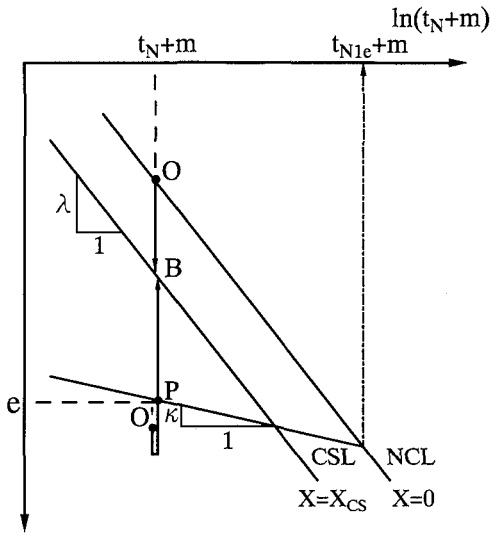


図-1 豊浦砂の $e \sim \ln(t_N+m)$ 関係

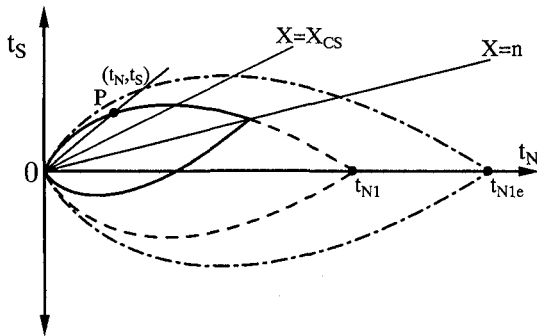


図-2 $t_s \sim t_N$ 空間で示した降伏曲面

もの初期状態を取りうる。つまり砂では、たとえ応力状態が同じであってもその間隙比に応じていわゆる密な砂や緩い砂が存在する一方、間隙比が同じであっても、拘束応力に応じてその体積変化特性が変化するため、相対的に密な砂・緩い砂というものも存在する。

砂の密度を表す尺度として、一般的には相対密度 D_r が用いられるが、低拘束応力下における初期状態については問題ないとしても、圧密とともに拘束応力が増加する場合や、せん断に伴う間隙比の変化を統一的に説明することは難しい。また、砂には正規圧密粘土に対応する基準状態が存在しないため、これまでは任意の密度・応力状態にある砂が密な砂なのか緩い砂なのかという絶対的な規定が困難であった。ここでは、砂の限界状態(critical state)の概念に着目して、密な砂・緩い砂の定義を考える。

これまでの研究で、砂でも粘土にみられるのと同様

に限界状態線(CSL)が存在することが実験的に確認されている^{9,10)}。すなわち、砂をせん断し続けると、応力状態も体積ひずみも変化しないが、せん断ひずみだけが進行しつづける「限界状態」に達することが知られている。この状態は、初期状態(密度や応力状態)に拘わらず存在し、応力状態と間隙比が一对一に決まる状態である。ただし、砂の CSL は拘束応力の増加に伴い、砂粒子の破碎等の影響により、通常用いられる間隙比(e)~拘束応力($\ln p$ あるいは $\ln t_N$)関係が直線にはならない。

Been and Jefferies^{11,12)}は初期間隙比と限界状態線(本文中では steady state line)上の間隙比の基準応力状態($p=98\text{kPa}$)に投影した差分 ψ を state parameter と名付けて、数多くの砂を対象に三軸圧縮試験の強度がこの ψ によって関係付けられることを示している。これに対して、Wood¹³⁾は state parameter をせん断時の間隙比の変化も説明できるように拡張して、現在の間隙比 e と現在の拘束応力に対応する限界状態線上の間隙比 e_{cs} の差($e - e_{cs}$)をとって state variable と呼んでいる。

そこでいま、CSL の直線性を実現するパラメータ m を導入することにより、図-1 に示すように CSL が間隙比(e)~拘束応力 $\ln(t_N+m)$ において直線関係が成立し、また砂の正規圧密状態線(NCL)がこれと平行して存在すると考える。たとえば、図中に示す O 点(正規状態)から単調にせん断した場合には、体積圧縮のみを示して最終的に、CSL 上の B 点に至る。これに対して、O' 点のように初期に密な砂をせん断した場合には、初め体積圧縮したのち体積膨張に転じ、最終的には緩い砂と同じ CSL 上の B 点に達することになる。このような間隙比の違いが砂の変形・強度特性に与える影響を評価するために、刻々と変化する砂の状態を表す指標として、次式で与える state variable(Δe)を新たに導入する。

$$\Delta e \equiv -(\lambda - \kappa) \ln \left(\frac{t_{N1} + m}{t_{N1e} + m} \right) \quad (8)$$

図-2 は現在の応力状態が図-1 の点 P(t_N, t_s)にある場合の、対応する降伏曲面(実線)を $t_s \sim t_N$ 空間で示したものである。図に示すように、式(8)中の t_{N1} は降伏曲面と t_N 軸上の交点を表しており、次式で与えられる。

$$t_{N1} = (t_N + m) \exp\{\zeta(Z)\} - m \quad (9)$$

一方、 t_{N1e} は現在の塑性体積ひずみ ε_p^p に対応する正規圧密線(NCL)上の等価な (NCL 上で $t_N = t_N$ から等方圧縮して ε_p^p を生ずるのに必要な) 平均応力として、次式で与えられる。

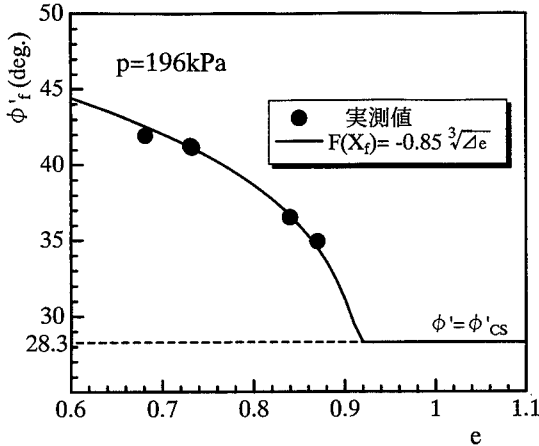


図-3 破壊時の内部摩擦角(ϕ_f)～間隙比(e)関係で示した実測値と式(11)の破壊強度式を用いた解析結果

$$t_{Nle} = (t_{N0} + m) \exp\left\{\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \varepsilon_v^p\right\} - m \quad (10)$$

ここに、 t_{N0} は正規状態の基準時での t_N 値である。図-2をみると、 t_{Ni} が現在の応力状態(t_{Ns} , t_{S})を t_N 軸上に投影した値であるのに対して、 t_{Nle} は図-1に示すように現在のひずみ状態(間隙比： e)を等方除荷勾配に沿ってNCL上に投影して代表しているのがわかる。従って、式(8)中に示す $t_{Ni}+m$ と $t_{Nle}+m$ の比は、正規圧密状態では1となり、過圧密状態では1以下となる。これらのことから、式(8)で定義した Δe は正規降伏曲面(ひずみ状態)に対する現在の負荷曲面(応力状態)の大きさを表し、初期状態($\Delta e \geq 0$)からせん断を通して減少を続け、遂には $\Delta e = 0$ となって最終的に限界状態へと至る過程を表す指標となっていることがわかる。なお、 Δe は現在の間隙比と応力状態から求められ、実際に式(8)～(10)によってせん断中を通じて算出される。

図-3は豊浦標準砂を用いた平均主応力一定($p=196\text{kPa}$)三軸圧縮せん断試験結果について、破壊(ピーク強度)時の内部摩擦角(ϕ_f)～間隙比(e)関係で整理したものである。図中のプロットは初期間隙比を変えて行なった実験結果の実測値である。横軸を間隙比の代わりに Δe を用いて整理すれば、この ϕ_f ～ Δe 関係は拘束応力 t_N の大きさに依らず成立する(Wood¹³⁾は実験結果を用いて、 ϕ_f と前述の($e-e_{cs}$)の間に同様の一意性が存在することを示している)。このことから、次式で示す破壊強度式を仮定する。

$$F(X_f) = -a\sqrt[3]{\Delta e} \quad (F(X_f) \leq 0) \quad (11)$$

ここに、 a は土質パラメータであり、この強度式によ

る解析結果を図-3中に実線で示す。また、 $F(X)$ は次式で定義されるが、本質的に応力比 X の関数であり、 $F(X_f)$ は破壊時の応力比 X_f に対応する $F(X)$ の値である。

$$F(X) = \frac{\partial g}{\partial t_{kk}} \left\| \frac{\partial g}{\partial t_{st}} \right\| \quad (12)$$

式中の $\| \cdot \|$ はテンソルのノルムを表す。なお、式(12)からわかるように $F(X)$ は応力比～ひずみ増分比関係と関連して砂のダイレイタンスーを表す関数となっている。すなわち、 $X \leq X_{cs}$ (X_{cs} :限界状態の応力比)にて $F(X) \geq 0$ となって体積圧縮を、 $X > X_{cs}$ において $F(X) < 0$ となり体積膨張を生じることを表す。

4. 密度および拘束応力の変化を考慮した砂の構成モデルの定式化

従来のモデルを橋口による下負荷面モデル⁷⁾の考え方を参考として、密度および拘束応力が大きく変化する砂の挙動を妥当に説明できるモデルへと拡張する。下負荷面モデルでは、塑性負荷(変形)とともに現在の応力状態を表す負荷曲面が、正規降伏面に漸近する過程の発展則を規定している。以下、その具体的な定式化を行なう。

まず、通常のように全ひずみ増分は弾性成分と塑性成分の和の形に分解されるとする。

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (13)$$

ここで、砂の弾性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^e$ は従来、増分形でのHookeの等方弾性式に従うと仮定してきたが、たとえば平均主応力(p)一定条件下でせん断時に実測値の示す体積膨張現象を表現できないなどの問題がある。そこで、従来の弾性式において応力増分 $d\sigma_{ij}$ に代わり修正応力 t_{ij} の増分 dt_{ij} を用いて、次式で砂の弾性ひずみ増分を算定する¹⁴⁾。

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu_e^*}{E_e^*} dt_{ij} - \frac{\nu_e^*}{E_e^*} dt_{kk} \delta_{ij} \quad (14)$$

ここに ν_e^* はポアソン比、 E_e^* は弾性係数を表し、 δ_{ij} はKroneckerのデルタである。また、等方応力状態において $dt_{kk} = \frac{1}{\sqrt{3}} d\sigma_{ii} = \sqrt{3} dp = \sqrt{3} dt_N$ が成り立つことから、その時の弾性体積ひずみ増分 $d\varepsilon_v^e$ は

$$d\varepsilon_v^e = \frac{1-2\nu_e^*}{E_e^*} dt_{kk} = \frac{\sqrt{3}(1-2\nu_e^*)}{E_e^*} dt_N \quad (15)$$

となる。一方で、等方圧縮除荷時には図-1に示すように間隙比(e)～拘束応力($\ln(t_N+m)$)が勾配 κ の直線関係を満足することから、弾性体積ひずみ ε_v^e は次式で与えら

れる。

$$e_v^e = \frac{\kappa}{1+e_0} \ln \frac{t_N + m}{t_{N0} + m} \quad (16)$$

上式から弾性体積ひずみ増分 $d\varepsilon_v^e$ は

$$d\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{dt_N}{t_N + m} \quad (17)$$

となり、その結果等方圧縮状態における弾性係数 E_e^* は式(15),(17)より次式で与えられることになる。

$$E_e^* = \frac{\sqrt{3}(1-2\nu_e^*)(1+e_0)}{\kappa} (t_N + m) \quad (18)$$

ここでは、等方応力状態に限らず異方応力状態においても E_e^* は式(18)で評価できるものとする。

これに対して、塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^p$ は通常の応力 (σ_{ij}) 空間ではなく t_{ij} 空間において塑性流れ則を仮定して、次式で求める⁴⁾。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial t_{ij}} \quad (19)$$

ここに、塑性ポテンシャル g は、砂では密度・拘束応力が大きく変化しても応力比 ($X=t_g/t_N$) と塑性ひずみ増分比 ($-d\varepsilon_{SMP}^{**}/d\varepsilon_{SMP}^{**}$) の間にユニークな関係が成り立つことから、従来のモデル⁴⁾と同様に式(7)で与える。

一方、降伏関数 f は図-1に示したように、間隙比 (e) $\sim \ln(t_N+m)$ に直線関係が成り立つとして次式で与える。

$$f = \ln(t_N + m) + \zeta(Z) - c = 0 \quad (20)$$

ところで、従来のモデルでは、砂が示す正負の両ダイレイタンスー特性を表現するために、 t_{ij} に基づく塑性仕事相当量 η^{**} を硬化パラメータとして用いている。これに対して、橋口は下負荷面モデルにおいて Cam-clay model¹⁾と同様、硬化パラメータとして塑性体積ひずみ ε_v^p のみを採用しながら、砂が示す正負の両ダイレイタンスー特性や砂がひずみ硬化・軟化を示しながら最終的に完全塑性(限界状態)へと変化していく様子を表現可能としている。

下負荷面モデルでは、現在の応力点を通して正規降伏面に相似な f を下負荷面と称して、式(20)を次のように変形する。

$$f = \ln(t_N + m) + \zeta(Z) - \left\{ \ln(t_{N1e} + m) + \ln \frac{t_{N1} + m}{t_{N1e} + m} \right\} = 0 \quad (21)$$

上式を微分して、次の後続負荷条件式を得る。

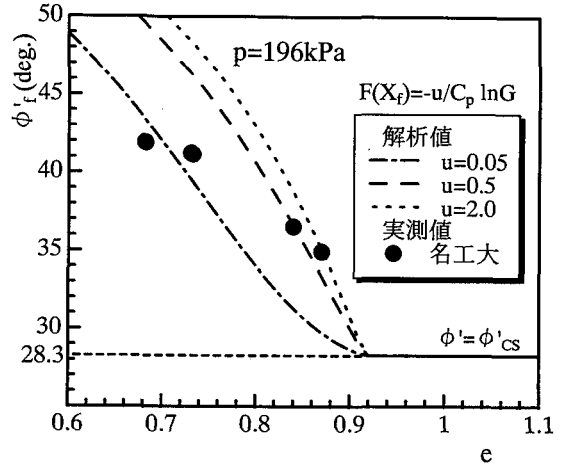


図-4 破壊時の内部摩擦角(ϕ_r)～間隙比(e)関係で示した実測値と式(26)を用いた解析結果

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial t_{ij}} dt_{ij} - \left\{ \frac{1}{C_p} d\varepsilon_v^p + \frac{\dot{G}}{G} \right\} = 0, \quad (22)$$

$$\text{ここに、} C_p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0}$$

式(22)中の G は、前節で述べたように粘土の過圧密比 (OCR) に対応するものであり、state variable (Δe) を用いて式(8)から逆に次式で表される。

$$G = \exp \left\{ -\Delta e / (\lambda - \kappa) \right\} \quad (0 \leq G \leq 1) \quad (23)$$

また、式(22)が塑性係数を決定するための適応条件式として機能するためには、 \dot{G} と塑性ひずみ増分との間に関係式が必要となる。そこで、橋口は塑性負荷状態においては、下負荷面は正規降伏面に漸近するものと仮定して、次のように G の発展式を与えた。

$$\dot{G} = U \left\| d\varepsilon_{ij}^p \right\| \quad (24)$$

ここに、 U は次の関係を満足する G の単調減少関数であるとした。

$$\begin{cases} G = 0 & \text{のとき } U = \infty \\ G = \infty & \text{のとき } U = 0 \end{cases} \quad (25)$$

以上の条件を満たす関数 U の具体例として、次のようなものが考えられる。

$$U = -\frac{u}{C_p} \ln G, \quad u: \text{パラメータ} \quad (26)$$

さて、適応条件式(20)に式(19),(24)を代入して、正值の比例定数 Λ は次式で与えられる。

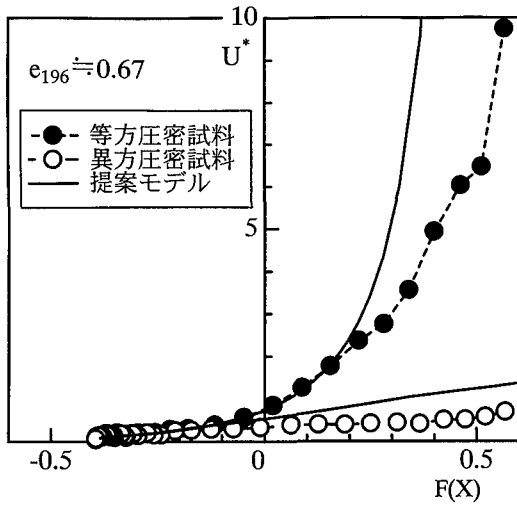


図-5 等方/異方圧密した砂の三軸圧縮せん断時における U^* ~ $F(X)$ 関係

$$\Lambda = \frac{df}{h'} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial t_{ij}} dt_{ij}}{\frac{1}{C_p} \frac{\partial g}{\partial t_{kk}} + \frac{U}{G} \left\| \frac{\partial g}{\partial t_{st}} \right\|} \quad (27)$$

したがって、このとき下負荷面モデルの強度式は、拡張された塑性係数 $h' \geq 0$ として、式(27)より算定されるように表現される。

$$F(X_f) = -C_p \frac{U}{G} \quad (28)$$

式(27),(28)によって、式(12)で定義した関数 $F(X)$ の物理的意味も明確になる。すなわち、 $F(X)$ はせん断とともに初期状態から、 $F(X) \geq F(X_c)$ のとき拡張された塑性係数 $h' \geq 0$ となってひずみ硬化を表し、 $F(X) = F(X_c)$ にて $h' = 0$ すなわちピーク強度(破壊)を迎え、その後 $F(X) \rightarrow F(X_{cs})$ に向かって $h' < 0$ となりひずみ軟化を示しながら最終的に限界状態($F(X) = F(X_{cs})$)に達することを表す関数となっている。

いま、式(28)を用いた具体的な計算例として、前節に示した図-3 に対応する平均主応力一定三軸圧縮せん断時のピーク強度の解析結果を図-4 に示す。ここでは、 G の発展式として式(26)中のパラメータ u を変えて解析計算を行なっている。この図から、初期間隙比 $e_p = 0.67 \sim 0.85$ の実測値に対して、解析曲線ではパラメータ u の値が実に 40 倍以上も変えなければ実測値を説明できないことが確認できる。

さて、上記の方法に代えて式(9)の破壊強度式を導入した定式化を考える。式(21)の降伏関数に立ち返り、 G の代わりに直接 state variable (Δe) を用いれば、 Δe を用いた後続負荷条件式は、式(22)に代えて次のように与

表-2 豊浦砂の土質パラメータ

λ	0.09
κ	0.015
N	1.04
m	5
$R_{CS} \equiv (\sigma_1/\sigma_3)_{f(comp.)}$	2.8
α	0.85
$v_e^* = v_e$	0.3
a	0.85
c	6
d	2

えられる。

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial t_{ij}} dt_{ij} - \left\{ \frac{1}{C_p} d\varepsilon_v^p - \frac{(\Delta \dot{\varepsilon})}{\lambda - \kappa} \right\} = 0 \quad (29)$$

次に、式(29)が適応条件式として機能するべく、式(24)と同様 Δe の発展式を次式で与える。

$$\Delta \dot{\varepsilon} = U^* \left\| d\varepsilon_{ij}^p \right\| \quad (30)$$

式(29)に式(19),(30)を代入した結果、正值の比例定数 Λ は次式で算定される。

$$\Lambda = \frac{df}{h'} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial t_{ij}} dt_{ij}}{\frac{1}{C_p} \frac{\partial g}{\partial t_{kk}} + U^* \left\| \frac{\partial g}{\partial t_{st}} \right\|} \quad (31)$$

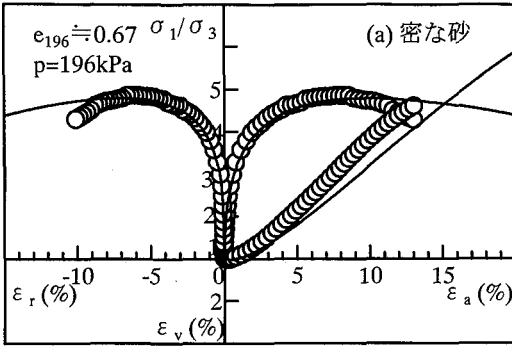
また、式(8)の定義からわかるように Δe の存在域は $\Delta e \geq 0$ で、塑性負荷にともなって $\Delta e = 0$ へと単調に減少していく。従って、 U^* は Δe の単調増加関数として次の条件を満足する必要がある。

$$\begin{cases} \Delta e = \infty & \text{のとき } U^* = \infty \\ \Delta e = 0 & \text{のとき } U^* = 0 \end{cases} \quad (32)$$

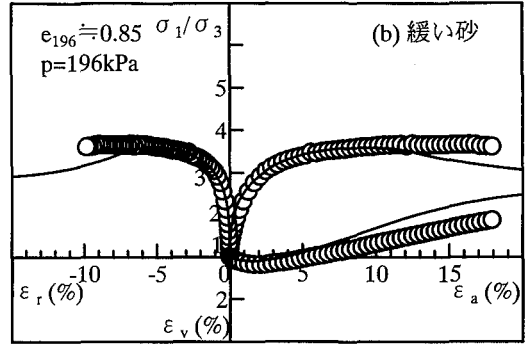
さて、橋口は先に示したように U を G だけの関数形として与えているが、ここでは図-3, 4 に示した実験結果から式(11)で定義した破壊強度式の適用を考慮して、 U^* を Δe と応力比の関数 $F(X)$ の関数として次式で与える。

$$U^* = \frac{c \Delta e}{C_p} \left(\frac{X_f}{X_{max}} \right)^d \left[F(X) - F(X_f) \right] - \frac{1}{C_p} F(X_f) \quad (33)$$

ここに、 X_{max} はこれまでに経験した最大の応力比を表しており、それまでに受けた応力比履歴が砂の変形挙

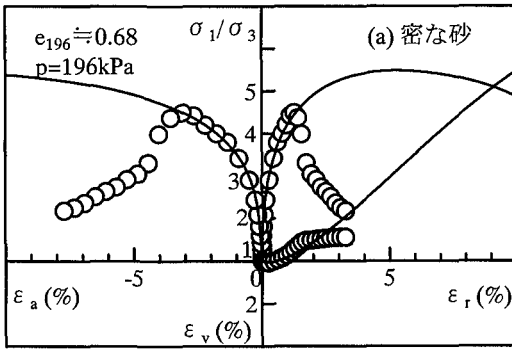


(a) 密な砂

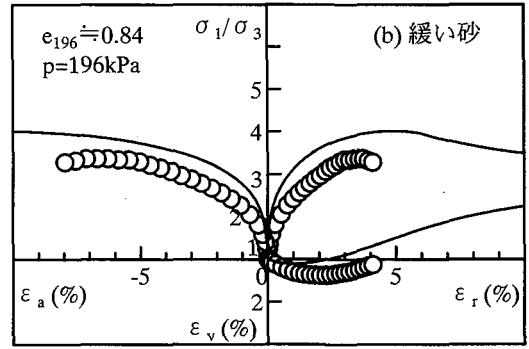


(b) 緩い砂

図-6 密度の異なる砂の平均主応力一定三軸圧縮せん断試験の実測値および解析結果



(a) 密な砂



(b) 緩い砂

図-7 密度の異なる砂の平均主応力一定三軸伸張せん断試験の実測値および解析結果

動に与える影響を表現している。なお、式(33)で与えた v は応力比 X 一定時には確実に Δe の単調増加関数となることがわかるが、一般的な場合にも式(32)の条件を満足することになる(図-5 参照)。なお、式(33)中の X_f / X_{max} の計算にあたっては、 X_f の値が三主応力条件に応じて変化するため、 $F(X)$ の関数として近似的に次式を用いて U^* を算出している。

$$\frac{X_f}{X_{max}} = \frac{F_0 - F(X_f)}{F_0 - F(X_{max})} \quad (34)$$

ここに、 F_0 および $F(X_{max})$ はそれぞれ等方応力状態 ($X=0$) および $X=X_{max}$ における $F(X)$ の値である。

以上、今回提案した砂の弾塑性構成モデルの具体的な定式化を示した。なお、本提案モデルは必ずみ硬化・軟化モデルであるため、応力速度を用いるのではなく、次に示す荷重基準^{(15),(16)}に従うことになる。

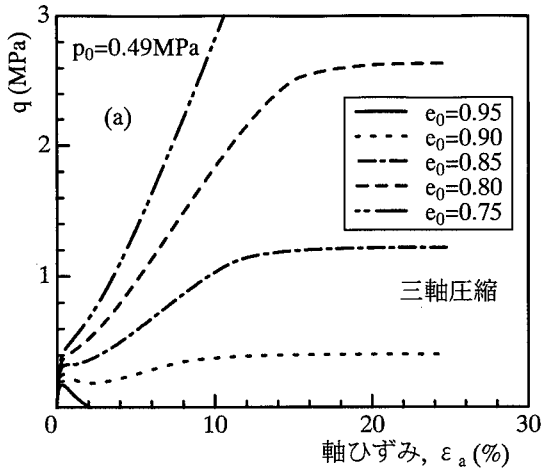
$$f = 0 \text{ and } \frac{\partial f}{\partial t_{ij}} D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl} > 0: \text{loading } (d\epsilon_{ij}^p \neq 0)$$

$$f < 0 \text{ or } \frac{\partial f}{\partial t_{ij}} D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl} \leq 0: \text{unloading / reloading} \\ (d\epsilon_{ij}^p = 0) \quad (35)$$

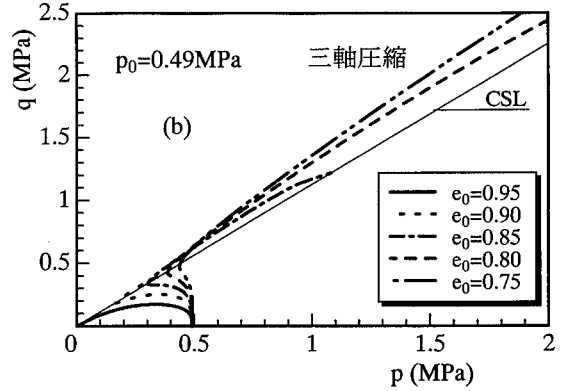
ここに、 D_{ijkl}^e は弾性剛性マトリックスであり、式(14)から求めることができる。

5. 実験データ等による検証

実験は飽和した豊浦標準砂 ($D_{50}=0.2\text{mm}$, $U_c=1.3$, $G_s=2.65$, $e_{max}=0.95$, $e_{min}=0.58$) を用いて行なっている。表-2 に今回の解析で用いた土質パラメータを示す。ここに、 λ および κ は図-1 にも示した間隙比 (e) $\sim \ln(t_N+m)$ 関係における限界状態線 (CSL) および密な砂の等方除荷曲線の勾配である。すなわち提案モデルでは、処女圧縮時の $e \sim \ln(t_N+m)$ 関係の勾配が、正規状態に対応する非常に緩い砂な場合の λ (最大勾配) から、密な砂になるのに従って次第に κ (最小勾配) へと近づいて変化していくことになる。また、 N は CSL と平行に想定し

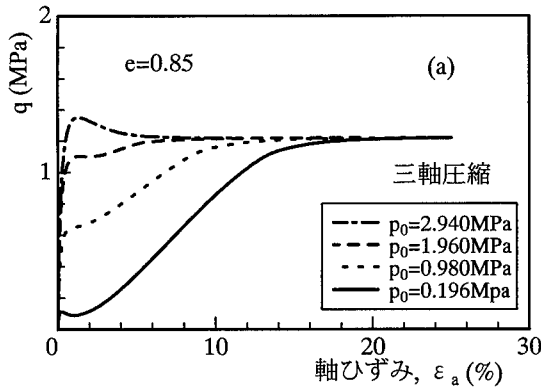


(a) 偏差応力(q)～軸ひずみ(ϵ_a)関係

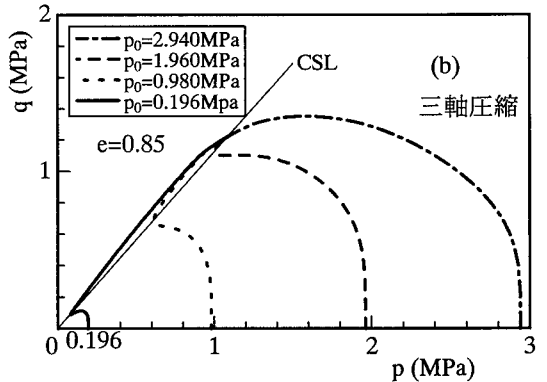


(b) 有効応力経路

図-8 初期拘束応力が同じで間隙比が異なる砂の非排水三軸圧縮せん断試験の解析結果



(a) 偏差応力(q)～軸ひずみ(ϵ_a)関係



(b) 有効応力経路

図-9 間隙比が同じで初期拘束応力が異なる砂の非排水三軸圧縮せん断試験の解析結果

た正規圧密状態線(NCL)上の基準応力($t_N=p=98\text{kPa}$)における間隙比を表している。 m は前述したようにCSLの $e \sim \ln(p)$ 関係での非直線性を修正し、図-1に示すような直線関係を実現するために導入したパラメータである。このパラメータ m の導入により後述するように、非常に緩い砂の単調非排水せん断時の液状化現象が表現可能となる。 R_{cs} は三軸圧縮せん断時の限界状態における主応力比である。 α は砂の応力比～塑性ひずみ増分比関係の直線勾配である。弾性式で用いたポアソン比 ν_p^* は従来のものと同じ値を用いている。

今回新たに導入したパラメータ a は図-3に示したように初期間隙比の異なる砂の三軸圧縮せん断強度から求めることができる。具体的には、実験結果を式(11)に示すようにstate variable(Δe)～ピーク強度 $F(X_p)$ 関係で整理し、実測値に適合するように決定する。また、式(33)中の c, d も新たに導入したパラメータであり、図-5に示す $U^* \sim F(X)$ 関係の実測値に適合するように決

める。なお、図-5は平均主応力一定条件($p=196\text{kPa}$)におけるやや密な砂($e_p=0.67$)を等方応力状態から単調に三軸圧縮せん断した場合(●プロット)と三軸伸張条件のもと主応力比($R=4$)で異方圧密された状態から三軸圧縮側にせん断した場合(○プロット)について、 $U^* \sim F(X)$ 関係で整理したものである。図中の実線が表-2に示した c, d の値を用いた解析曲線である。この図から、式(33)による U^* の定式化が、実測値が示す応力履歴の違いによる U^* の変化の仕方をうまく表現していることがわかる。なお、このパラメータ c, d は独立ではなく相互に影響しあうため、まず異方圧密試料(○プロット)を用いた実測値から c を求め、次いで等方圧密試料(●プロット)との整合から d を決定することになる。

(1) 密度を変えた砂の排水せん断試験

図-6(a), (b)は、密度の異なる試料について平均主応力一定条件($p=196\text{kPa}$)のもと三軸圧縮せん断した場

合の、実測値(プロット)および提案モデルによる解析結果(実線)を主応力比($R=\sigma_1/\sigma_3$)～主ひずみ(ϵ_a, ϵ_v)～体積ひずみ(ϵ_v)関係で整理したものである。ここに、(a)は初期間隙比(e_0)=0.67 のやや密な砂試料で、(b)は(e_0)=0.85 の緩い砂試料について整理したものである。提案モデルによる解析結果は、密な砂・緩い砂ともに同じ土質パラメータを使って解析しているのにも拘わらず、間隙比の異なる砂の応力～ひずみ関係にみられる剛性の違いやピーク強度の差をうまく表現しており、実測値とよい対応を示している。また、硬化パラメータとしては塑性体積ひずみ ϵ_p^v ひとつだけを用いながらも、ひずみ硬化・軟化・完全塑性とスムーズに変化していくようすも表現できている。

図-7(a), (b)は、密度の異なる試料に対して、平均主応力一定条件($p=196\text{kPa}$)のもと三軸伸張せん断した場合の、実測値(プロット)および提案モデルによる解析結果(実線)を図-6(a), (b)と同様の関係で整理したものである。(a)の密な砂試料では(e_0)=0.68, (b)の緩い砂試料では(e_0)=0.84 となっている。ここでも解析に用いたパラメータは図-6(a), (b)と同じものを用いているが、提案モデルは三軸伸張条件でも実測値の応力～ひずみ挙動を妥当に評価していることがわかる。

ところで、図-7(a)の実測プロットをみると、応力～ひずみ曲線がピーク強度に達したのち急激に折れるような形になっている様子がみられるが、これはピーク強度付近において供試体にひずみの局所化が生じ、せん断帯を形成して滑り破壊するためであると考えられる。この段階に至っては、供試体はすでに要素としての意味を成さない。こうしたピーク後挙動を、構成式だけで説明するのは難しく、「ひずみの局所化」や「変形に分岐問題」等を考慮した境界値問題をして取り扱う必要がある。

また、三軸圧縮条件(図-6(a), (b))と比べて三軸伸張条件(図-7(a), (b))では、解析曲線のピーク強度が実測値よりも比較的大きめの強度予測をする傾向を示している。これは、ひずみの局所化に伴う塑性変形モードの分岐問題と考えられる。三軸伸張せん断試験では、最大主応力方向が側方の2軸方向となり、供試体が握りつぶされるようにせん断変形をする。このため、三軸圧縮試験と比べても、ピーク強度付近で急激に変形の局所化が進行し、実験ではせん断帯の形成が顕著にみられる。このような変形に分岐問題については、浅岡ら¹⁷⁾が三軸試験を境界値問題として捉える観点から、有限要素解析による数値解析の中で考慮することにより、その挙動を説明している。

(2) 密度・拘束応力を変えた砂の非排水せん断試験

図-8は、間隙比を変えた砂の非排水三軸圧縮せん断

時の(a)偏差応力(q)～軸ひずみ(ϵ_a)関係および(b) p ～ q 平面に示した有効応力経路の提案モデルを用いた解析結果である。解析は、初期拘束圧 $p_0=0.49\text{MPa}$ として、間隙比 $e=0.95\sim 0.75$ の5ケースについて行なった。解析結果によれば、密な砂の場合せん断を通じてひずみ硬化し続け、最終的にはそれぞれの間隙比に応じた限界状態に達していくようすが説明できている。一方、 $e=0.95$ のケースでは、単調にせん断しているにも拘わらず平均主応力が減少し続け、遂には有効応力経路が原点に突っ込み液状化に至るといふ、非常に緩い砂にみられる単調載荷時の液状化現象をも表現できている。また、 $e=0.90$ の解析結果では、一端ピーク強度に達した後 q が減少し、変相状態に至ったのち再び強度が上昇していくようすも表現されている。

図-9は、同じ間隙比($e=0.85$)のもとで初期拘束圧を変えた砂の非排水三軸圧縮せん断時の(a)偏差応力(q)～軸ひずみ(ϵ_a)関係および(b) p ～ q 平面に示した有効応力経路の提案モデルを用いた解析結果である。(a), (b)両図から、提案モデルは間隙比が同じ砂を単調に非排水せん断した場合、たとえ初期拘束応力が異なってもせん断ひずみの進行とともに最終的にはCSL上の同じ一点の応力状態(限界状態)に達することを示している。また、間隙比は同じでも、初期拘束応力が大きいとき($p_0=2.94\text{MPa}$)は正規状態に近い砂すなわち相対的に緩い状態にあると考えられるが、初期拘束圧が小さくなるのに従い、密な砂の挙動に近くなってくることがわかる。図-8, 9に示した、非排水条件下における砂のせん断特性は、Verdugoら¹⁸⁾によって実験的に示されており、提案モデルによる解析結果はこれらの実験結果とよい対応を示すことを確認している。

6. 結論

本論文では、砂でも粘土と同様に限界状態が存在することに着目し、間隙比や拘束応力が大きく変化する砂の状態を表す指標として、state variable(Δe)の概念を導入した。そして、従来の砂の弾塑性構成モデルにこの Δe を導入した上で、橋口の下負荷面モデルにおける降伏曲面の発展則を参考に構成モデルの拡張を行なった。提案モデルは、粘土のモデルと同様に塑性体積ひずみをただ一つの硬化パラメータとしながら、砂にみられる正負の両ダイレイタンシー特性や、一連のひずみ硬化・ひずみ軟化・完全塑性挙動をスムーズに表現できることをその特徴とする。

また、提案モデルの妥当性に関して、密度や間隙比の異なる砂の排水および非排水挙動について提案モデルを用いた解析を行ない、併せて行なった三軸せん断試験結果などを用いて比較・検討した。その結果、本

提案モデルが、密度や拘束応力が大きく変化する3次元応力下の砂の変形・強度特性を、統一した土質パラメータを用いても評価できることを示した。

謝辞：本研究は浅岡顕名古屋大学教授らのグループによる、下負荷曲面モデルを用いた Cam-clay model の拡張に啓発された。ここに、記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Schofield, A. N. and Wroth, C. P. : Critical State Soil Mechanics, McGraw-Hill, London, 1968.
- 2) Nakai, T. and Mihara, Y. : A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, *Soils and Foundations*, Vol. 24, No. 2, pp.82-94, 1984.
- 3) Nakai, T. : An isotropic hardening elastoplastic model for sand considering the stresspath dependency in three-dimensional stresses, *Soils and Foundations*, Vol. 29, No. 1, pp.119-137, 1989.
- 4) Nakai, T., Fujii, J. and Taki, H. : Kinematic extension of an isotropic hardening model for sand, *Proc. NUMOG III*, 36-45, 1989.
- 5) Been, K., Jefferies, M. G. and Hachey, J. : The critical state of sands, *Géotechnique*, Vol. 41, No. 3, pp.365-381, 1991.
- 6) Ishihara, K. : Liquefaction and flow failure during earthquakes, *Géotechnique*, 43(3), pp.351-415, 1993.
- 7) Hashiguchi, K. : Constitutive equation of elastoplastic materials with elasto-plastic transition, *J. Appl. Mech., ASME*, Vol. 102, No. 2, pp.266-272, 1980.
- 8) 中井照夫, 松岡元 : 3主応力下の土のせん断挙動に関する統一的理解, *土木学会論文報告集*, 第303号, pp.65-77, 1980.
- 9) Sekiguchi, H. and Ohta, H. : Induced anisotropy and time dependency in clays, *Constitutive equations of soils, Proc. Speciality Session 9, 9th ICSMFE*, Tokyo, pp.229-238, 1977.
- 10) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stress, *Proc. of ISCE*, No. 232, pp.59-70, 1974.
- 11) Been, K. and Jefferies, M. G. : A state parameter for sands, *Géotechnique*, Vol. 35, No. 2, pp.99-112, 1985.
- 12) Been, K. and Jefferies, M. G. : Discussion : A state parameter for sands, *Géotechnique*, Vol. 36, No. 1, pp.127-132, 1986.
- 13) Wood, D. M. : Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- 14) 星川拓哉, 檜尾正也, 中井照夫 : 修正応力を用いた地盤材料の弾性式, *土木学会論文集*, 第589号, pp.295-304, 1998.
- 15) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. : Soil-water coupled behavior of clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, No. 34(1), pp.91-105, 1994.
- 16) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. : Soil-water coupled behavior of heavily overconsolidated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, No. 37(1), pp.13-28, 1997.
- 17) Asaoka, A. and Noda, T. : Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and Foundations*, No. 35(1), pp.83-100, 1995.
- 18) Verdugo, R. and Ishihara, K. : The steady state of sandy soils, *Soils and Foundations*, Vol. 36, No. 2, pp.81-91, 1996.

(1997. 7. 15 受付)

A CONSTITUTIVE MODEL FOR SAND WITH DIFFERENT VOID RATIOS AND DIFFERENT CONFINING PRESSURES

Takuya HOSHIKAWA, Teruo NAKAI and Masaya HINOKIO

Elastoplastic models for sand named t_y -sand model and kinematic t_y -sand model have been proposed which can describe properly the stress-strain behavior of sand under three dimensional stresses. These models can take into account the influence of intermediate principal stress on the deformation and strength of sand by using modified stress t_y . However, they can not sufficiently describe the deformation and strength characteristics of sand by using unified soil parameters, when the change in confining pressure and void ratio are involved.

In the present study the previous models are extended to one which can describe not only the influence of the change of void ratio and confining pressure but also strain hardening and softening behavior by introducing a concept named "state variable" based on critical state of sand and Hashiguchi's sub-loading surface concept. The present model is confirmed to be valid by analyzing some triaxial compression and extension tests under drained and undrained conditions on Toyoura sand with different void ratios and different confining pressures. It is shown that the present model can predict well these influences.