

# $k-\varepsilon$ モデルによる DI 型連行現象の 再現性について

銭 新<sup>1</sup>・石川忠晴<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 東京工業大学研究員 大学院総合理工学研究科 (〒226-8502 横浜市緑区長津田町4259)

<sup>2</sup>正会員 工博 東京工業大学教授 大学院総合理工学研究科 (〒226-8502 横浜市緑区長津田町4259)

湖沼や海洋において発生する鉛直混合のうち、風の吹送に伴う混合層内のせん断流によって生じる乱れが支配的な DI 型の連行現象に対して、 $k-\varepsilon$  モデルの適用性を調べた。同モデルによる鉛直一次元の数値シミュレーションを実施し、その結果を DI 型連行則に関する従来の知見と比較し検討した。その結果、躍層の降下速度、流速及び相対密度差の鉛直分布形、エネルギー転換率等に関して、 $k-\varepsilon$  モデルは妥当な結果を与えることが示された。

**Key Words :**  $k-\varepsilon$  model, vertical mixing, dynamic instability, wind-induced current

## 1. はじめに

近年、密度乱流場の数値解析に  $k-\varepsilon$  モデルが用いられるようになってきた<sup>1), 2), 3), 4)</sup>。今後のコンピュータの大型化、高速化に伴い、このレベルの乱流モデルが成層水域の流動及び物質移動の計算に用いられる機会が増えてくると考えられる。

このような状況において、密度乱流現象に対する同モデルの適合性とその限界性を検討しておくことは重要であろう。ひとつの検討方法は詳細な水理実験結果との照合であり、最近のいくつかの事例は肯定的な結果を与えている<sup>3), 4)</sup>。もうひとつの方法は、比較的単純な(理想的な)条件下における数値解の挙動を調べ、既存の流体力学的知見との整合性を検討することである。

成層乱流現象に対して、従来は連行という概念が広く使用され、連行則の導出と検証が水理学の基本課題のひとつとされてきた<sup>5)</sup>。そこで、従来から提唱されている連行則を  $k-\varepsilon$  モデルで説明できるかどうかを調べておくことは、今後のモデルの適用にあたって有用であると考えられる<sup>1)</sup>。

本ノートでは、成層場の鉛直混合現象のうち DI 型の連行則について、 $k-\varepsilon$  モデルの適合性を調べた結果を報告する。DI 型の連行現象は、湖沼や内湾等の成層水域において、吹送による内部界面のセットアップが完了するまでの時間帯に現れる鉛直混

合現象で、主に混合層内のせん断により発生する乱れが連行速度を規定するものである。一方セットアップが完了した後の連行現象(TE 型の連行現象)では、表層から界面に伝達された乱れの影響が支配的になるが<sup>6)</sup>、DI 型の連行現象に比べると連行速度は小さい<sup>9)</sup>。それゆえ、セットアップに時間を要する広い水域の鉛直混合現象を  $k-\varepsilon$  モデルで数値解析するに際して、同モデルが DI 型の連行則に合致する結果を与えるか否かを予め基礎的に調べておくことは重要であると考えられる。

## 2. 基礎方程式

理想的な DI 型の連行現象は無限に広い水域で生じる。そこで、鉛直一次元現象を対象として、以下の方程式系を用いることとする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial z} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_k \frac{\partial k}{\partial z} \right) = P_r + G - \varepsilon \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = C_1 \frac{\varepsilon}{k} \{ P_r + (1 - C_2) G \} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4)$$

$$\nu = \nu_0 + C_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad P_r = \nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2, \quad G = -g \nu_{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial z} \quad (5)$$

表-1 計算条件及び計算結果一覧

No.	$U_*(\text{m/s})$	$B(\times 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}^2)$	$Ri[U_*]$	$We(\times 10^{-4} \text{m/s})$	$E[U_*]$	$\Delta u(\text{m/s})$	$Ri[\Delta u]$	$E[\Delta u]$
1	0.0058	6.480	192.6	2.3	0.040	0.175	0.212	0.00131
2	0.0070	6.480	132.2	3.5	0.050	0.179	0.202	0.00196
3	0.0080	6.480	101.3	4.5	0.056	0.174	0.214	0.00259
4	0.0090	6.480	80.0	5.8	0.064	0.177	0.207	0.00325
5	0.0095	6.480	71.8	6.2	0.065	0.189	0.181	0.00328
6	0.0030	6.480	720.0	6.9	0.023	0.162	0.247	0.00043
7	0.0040	4.766	297.9	1.4	0.035	0.148	0.218	0.00095
8	0.0040	5.189	324.3	1.4	0.035	0.154	0.219	0.00090
9	0.0058	5.189	154.3	2.8	0.048	0.149	0.234	0.00188
10	0.0097	5.342	57.4	6.3	0.065	0.157	0.217	0.00398
11	0.0064	5.342	130.4	3.2	0.051	0.051	0.214	0.00203
12	0.0058	5.342	158.8	2.8	0.048	0.048	0.211	0.00176
13	0.0070	8.241	168.2	3.1	0.044	0.189	0.231	0.00164
14	0.0040	8.241	515.1	1.1	0.028	0.179	0.257	0.00061
15	0.0030	8.241	915.7	6.5	0.022	0.167	0.295	0.00039
16	0.0090	8.241	101.7	5.1	0.057	0.198	0.210	0.00257
17	0.0140	8.241	42.1	1.1	0.078	0.213	0.182	0.00516
18	0.0160	8.241	32.2	1.4	0.089	0.216	0.177	0.00662
19	0.0045	8.241	406.9	1.3	0.029	0.181	0.252	0.00072

ここに  $z$  は鉛直上向きの座標,  $t$  は時間,  $u$  は水平流速,  $\delta$  は相対密度差 (通常は  $\varepsilon$  で記されるが, ここでは散逸率と区別するため  $\delta$  とする),  $k$  は乱れエネルギー,  $\varepsilon$  は散逸率,  $\nu_0$  は動粘性係数である.  $\nu_k, \nu_\delta, \nu_\varepsilon$  は各々  $k, \delta, \varepsilon$  の渦動拡散係数で, 以下のように置く.

$$\nu_k = \nu, \quad \nu_\delta = 1.2 \nu, \quad \nu_\varepsilon = 0.77 \nu \quad (6)$$

ここで  $\nu_k$  と  $\nu_\varepsilon$  については  $k-\varepsilon$  モデルの標準的設定に従っている. また  $\nu_\delta$  については密度と運動量の渦拡散速度の違い<sup>9), 14)</sup>を考慮した. また  $C_1, C_2, C_3, C_u$  は  $k-\varepsilon$  モデル固有の係数であり, これらは標準的な値に設定する.

$$C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad C_3 = 1.0, \quad C_u = 0.09 \quad (7)$$

ここで  $C_3$  を 1 と置くと式 (4) の右辺第一項中の浮力の影響を消去することになる. エネルギー散逸に浮力が及ぼす効果については議論があるところだ, 本ノートでは既往の研究<sup>2), 3)</sup>と同じ設定で, DI 型の連行現象の再現性を検討することとする.

### 3. 計算条件

水面付近に密度の小さな流体があり, 初期状態では全体が静止しているとする. そこに一定の風応力が作用して吹送流が発達し, 鉛直混合によって躍層が下降する. その間, 総浮力は保存されるものとする.

境界条件を以下のように設定する.

[水面において]

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial u}{\partial z} &= U_*^2 \\ \nu_\delta \frac{\partial \delta}{\partial z} &= 0, \quad \nu_k \frac{\partial k}{\partial z} = 0, \quad \nu_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここに,  $U_*$  は風による水面の摩擦速度である.

[底面において]

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \nu_\delta \frac{\partial \delta}{\partial z} = 0, \quad \nu_k \frac{\partial k}{\partial z} = 0, \quad \nu_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

このうち水面における  $k$  と  $\varepsilon$  の境界条件については種々の議論があるかもしれない. すなわち, 風応力下の水面近傍の現象は複雑で且つ未知な要素が多いから, これを数値計算で表現するには,  $k$  及び  $\varepsilon$  に対してある程度便宜的な境界条件を与えざるを得ない. 最近の計算例では, 水面を Moving Screen とみなした上で, 壁法則を適用するか Patel ら<sup>6)</sup>の実験関数を適用している<sup>2), 3)</sup>. また, 自由水面の乱れ減衰を考慮した新しい試みもある<sup>7)</sup>.

しかし実際の水面現象を考えれば, 砕波等による乱れの生成もあるから, Moving Screen とみなせるかどうか難しいところである. 水面境界条件の正確な表記は, それだけで大きな研究テーマになるであろう.

DI 型の連行現象では, 流体内部 (特に混合層下部) におけるせん断に伴う混合が支配的であると考

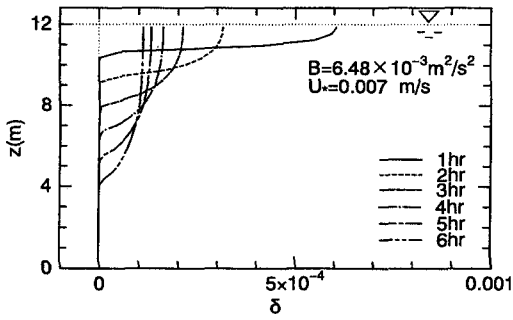


図-1 鉛直混合に伴う相対密度差分布の変化

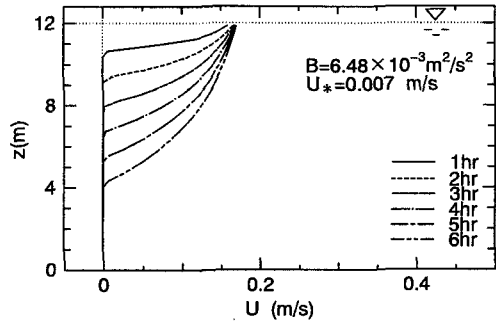


図-2 鉛直混合に伴う流速分布の変化

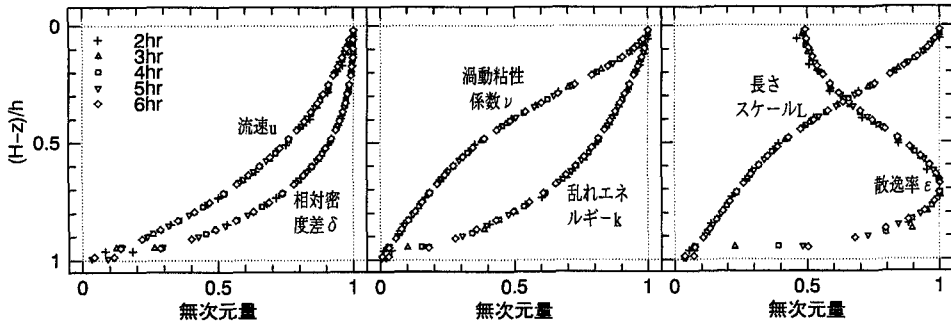


図-3 混合層内の諸量の無次元分布

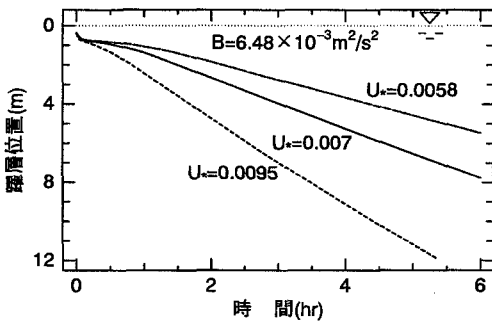


図-4 鉛直混合に伴う躍層位置の変化

えられている<sup>8)</sup>。また、水面近くの複雑な運動を除外したエネルギーバランスでも混合層内の状況がある程度説明できるとされている<sup>9)</sup>。そこで本ノートでは、坪野ら<sup>4)</sup>と同様に、式(8)の簡単な境界条件のもとで  $k-\epsilon$  モデルの解の振る舞いを調べることとする。

なお、前記の条件下におけるDI型の連行現象の場合には、後の計算結果が示すように、躍層下部の流体は静止したままなので、底面の境界条件については式(9)で問題ないと考えられる。

方程式(1)～(4)を有限体積法により完全陰形式

で離散化した<sup>10)</sup>。鉛直のメッシュ間隔  $\Delta z$  は30cm、時間ステップ  $\Delta t$  は10sec、全水深  $H$  は12mとした。初期流速は全層にわたってゼロとし、相対浮力は水面に接した第1層に集中して与えた。また  $k$  と  $\epsilon$  の初期値は試行計算の結果を参考にして、計算が不安定にならない範囲で十分小さな値とした。

水面の摩擦速度  $U_*$  と相対総浮力  $B (= \int \delta \, g dz)$  は、表-1の条件で与えた。

#### 4. 計算結果及び考察

##### (1) 鉛直分布の相似性

相対密度差分布と流速分布の時間変化の一例を図-1と図-2に示す。 $t = 1$  hrの場合には混合層が数メッシュ分の厚さしかないため初期状態の影響が現れているが、それ以降はほぼ相似な形状を保ったまま概ね一定の速度で下方に伝播していることがわかる。

そこで  $k-\epsilon$  モデルで用いられる物理量 ( $u$ ,  $\delta$ ,  $k$ ,  $\epsilon$ ,  $\nu$ ) 及び  $k$  と  $\epsilon$  から構成される長さスケール  $L (= k^{3/2} / \epsilon)$  とを各々の断面最大値で無次元化し、また鉛直座標を混合層厚  $h$  で基準化して、異なる時刻の無次元値を重ねてプロットすると図-3を得る。すなわち、経過時間にかかわらず、各々の物

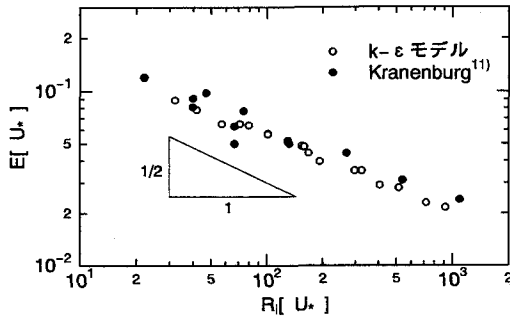


図-5 連行則 ( $E [U_*] \sim Ri [U_*]$ )

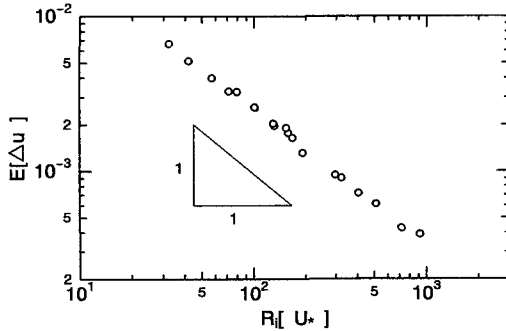


図-6 連行則 ( $E [\Delta u] \sim Ri [U_*]$ )

理量が相似な分布形に従っている。

### (2) 連行則

躍層位置の時間変化を図-4に示す。混合層が数メッシュ分しかない初期の時間帯を除けば、躍層位置の降下速度はほぼ一定である。

そこで、各ケースの躍層降下速度を  $U_*$  で無次元化した連行係数  $E [U_*]$  とリチャードソン数  $Ri [U_*]$  ( $= B / U_*^2$ ) の関係をプロットすると、図-5の○のようになる。一方、●はKranenburg<sup>11)</sup>の実験結果である。両者はほとんど同一直線上にあり、また次式で示されるDI型の連行則(-1/2乗則)<sup>12)</sup>に従っている。

$$E [U_*] \propto Ri [U_*]^{-1/2} \quad (10)$$

この図からわかるように、 $k-\epsilon$ モデルはDI型の連行則をよく再現すると言える。

### (3) 力学的相似性

$k-\epsilon$ モデルから得られる諸量の鉛直分布は概ね相似分布形を保っている。(図-3) このことは力学的相似性(またはエネルギー変換の相似性)の成立を示唆している。

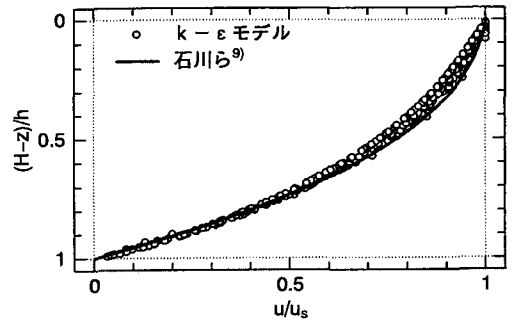


図-7-1 混合層内流速分布(局所相似性仮説との比較)

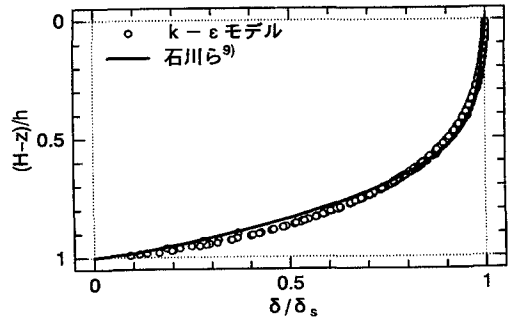


図-7-2 混合層内相対密度差分布(局所相似性仮説との比較)

図-6の○は、連行速度を断面最大流速で無次元化した連行係数  $E [\Delta u]$  と  $Ri [U_*]$  の関係を示している。計算結果は次式で表される-1乗則に概ね従っている。

$$E [\Delta u] \propto Ri [U_*]^{-1} \quad (11)$$

さて、式(11)を変形すると次式を得る。

$$\Delta \rho g h We \propto \rho U_*^2 \Delta u \quad (12)$$

ここに  $\Delta \rho$  は代表密度差、 $g$  は重力加速度、 $h$  は混合層厚、 $We$  は連行速度、 $\rho$  は代表密度である。式(12)は「ポテンシャルエネルギーの増加率が風応力のなす仕事率に比例する」ということを意味している<sup>8)</sup>。すなわち  $k-\epsilon$ モデルの解では、マクロな(混合層の平均的な)エネルギー変換の相似性が成立していることになる。

ところで石川ら<sup>9)</sup>は、混合層内の各点におけるエネルギー変換の相似性を仮定して混合層内の流速及び相対密度差の分布形を求めている。(彼らは「局所相似仮説」と呼んでいる。)それによると、ポテンシャルエネルギー生成項  $G$  と乱れエネルギー生成項  $P_r$  の比が混合層内で一定であれば ( $G/P_r$  の値には関係なく比が一定であれば)、乱流プラントル

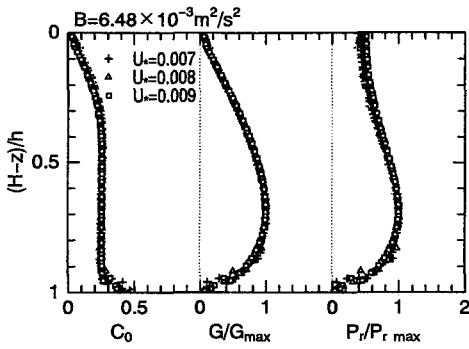


図-8 ポテンシャルエネルギー生成率  $G$  と  
乱れエネルギー生成率  $P_r$  の比較

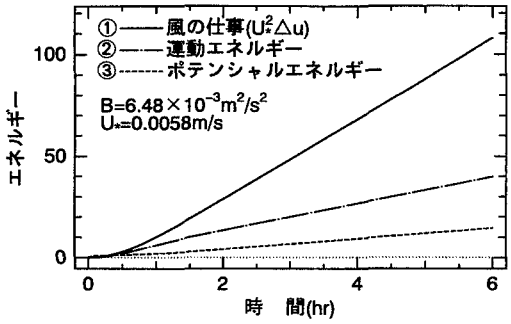


図-9 鉛直混合に伴う各エネルギー成分の変化

数 ( $\nu/\nu_s$ ) に応じて流速  $u$  と相対密度差  $\delta$  の相似分布が唯一に定まる。

そこで、 $k-\epsilon$ モデルの計算結果を、局所相似仮説に基づく  $\nu_s = 1.2\nu$  の場合の相似分布解<sup>9)</sup>と比較した。その結果を図-7に示す。この図から、 $k-\epsilon$ モデルの解は局所相似仮説に基づく解とよく一致していることがわかる。

そこで  $k-\epsilon$ モデルの計算結果から、最大値で基準化した  $G$  と  $P_r$  及び両者の比 ( $C_0 = G/P_r$ ) の鉛直分布をプロットすると図-8を得る。この図から、 $G$  ないし  $P_r$  が有意な大きさを持つゾーン (すなわち混合層の下部) では、計算条件によらず  $C_0$  が一定の値を保持することがわかる。ただし  $C_0$  の値そのものは、石川ら<sup>9)</sup> が設定したもうひとつの仮説 (最大効率の混合) から推定される値 (0.5) のほぼ 1/2 になっている。すなわち、最大効率の混合の仮説は適当でないと思われる。

#### (4) エネルギー転換率

さて、鉛直混合速度を予測するという実用的見地からすると、 $C_0$  の空間分布よりも、混合層全体のエネルギー転換率が重要である。そこで、 $k-\epsilon$ モデルの計算結果から各時刻におけるエネルギー成分を求めた一例を図-9に示す。すなわち、初期条件の影響の残っている最初の 1 hr を除けば、各成分は直線的に増加する。

ところで図-2からわかるように、躍層下部の流体は静止しているから、上層が下層になす仕事は無視できるので、混合層内のエネルギーの流れは図-10のように比較的単純なフローで近似できる。その場合、マクロな  $G/P_r$  は、図-9における3成分を用いて  $[\textcircled{3} / (\textcircled{1} - \textcircled{2})]$  と表される。そこで全ての計算条件における計算結果について、図-9の各成分の増加率を求めて  $G/P_r$  を求めた結果を図-11に示す。

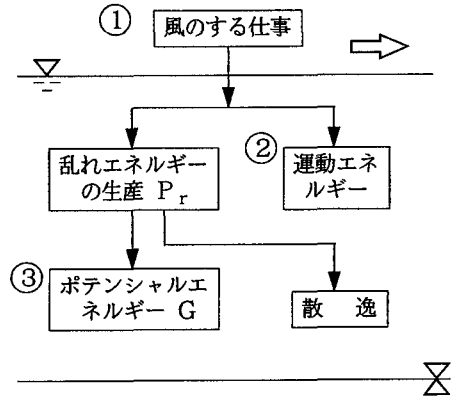


図-10 エネルギーの流れ

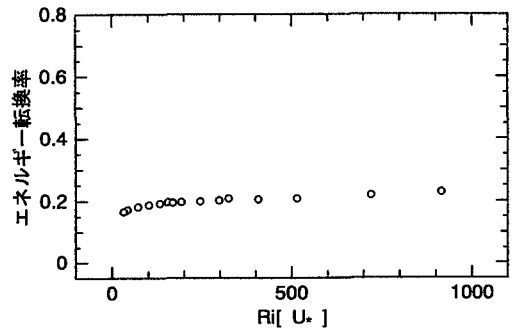


図-11 エネルギー転換率

計算結果はリチャードソン数によってわずかに変化するものの、概ね 0.2 である。この値は Imberger<sup>13)</sup> が現地観測とモデル計算から推定している値とほとんど一致している。

## 5. おわりに

$k-\epsilon$ モデルによる数値計算が DI 型の連行現象を再現できるかどうかを単純な外部条件のもとで基

礎的に検討したところ、以下の結果を得た。

- (1)  $k-\varepsilon$ モデルにより得られる混合層内の諸量の分布形は概ね相似形である。
- (2) Kranenburg<sup>11)</sup>が実験から求めたDI型の連行則と $k-\varepsilon$ モデルから得られる連行則はよく一致する。
- (3)  $k-\varepsilon$ モデルから求まる混合層内の流速及び相対密度差の分布は、石川ら<sup>9)</sup>が局所相似仮説から求めた分布と概ね一致する。
- (4) 剪断乱れエネルギーがポテンシャルエネルギーに転換する率( $G/P_r$ )に関する $k-\varepsilon$ モデルの計算結果は、Imberger<sup>13)</sup>が推定した値と概ね一致する。

以上の結果は、 $k-\varepsilon$ モデルがDI型の連行現象を含む流体運動のシミュレーションに適用できることを示唆しているものと考えられる。

ところでDI型の連行現象は主に内部界面のセットアップが終了するまでの時間帯で発生するものであるから、室内水槽の規模の実験で測定することは一般に難しい。(Kranenburg<sup>11)</sup>の実験は、下流端上層の排水を上流端にふたたび給水してセットアップを生じさせない特殊な実験であった。)したがって、モデル適用性のさらなる検討は現地観測によるのが適当と思われる。近年、種々の計測器の発達により現地観測の可能性が急速に広がっており、数値シミュレーションと現地観測のコンビネーションによる研究が以前にも増して重要になるものと考えられる。

#### 参考文献

- 1) 福嶋祐介：乱流モデルによる傾斜壁面密度噴流の解析，土木学会論文集，第399号/II-10，pp.66-74，1988。
- 2) 道奥康治，辻本剛三，宮本仁志：吹送密度流の流動・混合特性，水工学論文集，第37巻，pp.293-298，1993。

- 3) 尹 鐘星，中辻啓二，村岡浩爾：風応力作用下の成層水域における密度界面の挙動及び混合特性—水理実験と数値実験—，水工学論文集，第39巻，pp.811-818，1995。
- 4) 坪野考樹，仲敷憲和，松梨史郎，坂井伸一，丸山康樹：複数管から放出された水平重力噴流に関する数値シミュレーション，水工学論文集，第41巻，pp.295-302，1997。
- 5) 玉井信行：連行概念の統一化と連行係数の評価法，土木学会論文集，No.381/II-7，pp.1-11，1987。
- 6) Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G.: Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows, A review, *AIChE J.*, Vol. 23, No. 9, pp. 1308-1319, 1985.
- 7) 祢津家久，中川博次：修正 $k-\varepsilon$ 乱流モデルによる開水路乱流の数値計算，土木学会論文集，No.387/II-8，pp.125-134，1987。
- 8) Niller, P. P. and Kraus, E. B.: One-dimensional models of the upper ocean, *Modelling and prediction of the upper layers of the ocean*, E. B. Kraus, pp. 143-172, Pergamon Press, 1977.
- 9) 石川忠晴，田中昌宏：DIM型の連行現象に関する理論的研究，土木学会論文集，No.417/II-13，pp.99-108，1990。
- 10) 荒川忠一：数値流体工学，東京大学出版会，1994。
- 11) Kranenburg, C.: Wind-induced entrainment in a stably stratified fluid, *J.F.M.*, Vol.145, pp.253-273, 1984.
- 12) Pollard, R. T., Rhines, P. B. and Thompson, R. O.: The deepening of the wind mixed layer, *Geophys. Fluid Dynam.*, Vol. 3, pp. 381-404, 1973.
- 13) Imberger, J.: The diurnal mixed layer, *Limnol. Oceanogr.*, Vol. 30(4), pp. 737-770, 1985.
- 14) 椿東一郎，小松利光：2次元表面密度噴流における流れの特性と連行現象，土木学会論文報告集，No. 273，pp.69-81，1978。

(1997. 5. 13 受付)

## EXAMINATION OF $k-\varepsilon$ MODEL FOR THE APPLICATION TO THE DEEPENING OF SURFACE MIXED LAYER OF DI-TYPE ENTRAINMENT

Xin QIAN and Tadaharu ISHIKAWA

It is fundamentally examined if  $k-\varepsilon$  model can reproduce the deepening of surface mixed layer with DI-type entrainment caused by wind induced shear flow in a water body of horizontally infinite. Numerical results are compared with theoretical and experimental evidences shown by existing studies. Major conclusions are as follows:  $k-\varepsilon$  model successfully reproduces the DI-type entrainment law which was previously proposed by Kranenburg. Velocity and density profiles in mixed layer agree very well with those obtained by a dynamic similarity theory. The coefficient of energy transfer from external work to potential energy agrees with a result obtained by Imberger et al.