

# 鉛直不飽和浸透流計算における飽和域・ 不飽和域の接合に関する数学的処理について

鈴木伴征<sup>1</sup>・入江光輝<sup>2</sup>・石川忠晴<sup>3</sup>

<sup>1</sup>学生会員 東京工業大学大学院総合理工学研究科 (〒226-8502 横浜市緑区長津田町4259 G5 棟 210)

<sup>2</sup>学生会員 工修 東京工業大学大学院総合理工学研究科 日本学術振興会研究員

<sup>3</sup>正会員 工博 東京工業大学教授 東京工業大学大学院総合理工学研究科

鉛直不飽和浸透流の数値計算において、時空間アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法により飽和・不飽和境界が要素境界と常に一致する計算法を提案した。また、その特殊な場合として、三角形要素を裏返して計算をおこなうことにより、浸潤面位置を未知数に含めて完全陰解法が構成できることを示した。次に、地表での給水及び地盤下端での給排水が与えられる条件下で上記解析法を適用し、時間ステップ、空間ステップの変化に対する計算精度の評価をおこなった。その結果、時間ステップ及び空間ステップをかなり粗くしても高い精度が得られることがわかった。

*Key Words : unsaturated seepage flow, finite element method, joint with saturated region, iso-parametric element in T-Z plane*

## 1. はじめに

近年、開発の著しい大都市近郊の丘陵地において、地下水保全・涵養と地域水循環再生の問題がクローズアップされてきている。地下水の保全・涵養を定量的に計画するためには、雨水の鉛直不飽和浸透から飽和浸透に至る一連の過程の数値シミュレーションが有効である。このような地下水流動シミュレーションについては、既に多くの研究がなされ、広域でのシミュレーションに供される汎用モデルも作成されようとしている。

しかし、不飽和域から飽和域に至る過程の物理的・数学的記述方法には、依然として不明確な点もある。その最大のもの、給水過程と排水過程のヒステリシスの問題である。ヒステリシス現象の記述方法には、土壌パラメータ関数の多価関数化によるもの<sup>1)</sup>・<sup>2)</sup>運動方程式にヒステリシス項を加えるもの<sup>3)</sup>とがある。いずれの方法においても基礎実験等で得られる流動特性をある程度再現可能であるが、一般性のある結論はまだ得られていないようである。ただし空間的広がりを持った地盤の数値シミュレーションにおいては、ヒステリシス現象を考慮すると

計算過程が煩雑になるため、これを無視した(通常の)計算の行われることが多い。

不飽和域から飽和域に至る流れの取り扱いにおける今ひとつの問題は「離散化手法」である。不飽和浸透流と飽和浸透流を記述する方程式は、ダルシー則の形式で書けば同一である<sup>4)</sup>。しかし、不飽和域では圧力ポテンシャルと土中水分量が関係付けられるのに対し、飽和域では土中水分量は圧力ポテンシャルに依存しない。つまり、ふたつの領域では物理法則が(少なくとも我々が持っている現状の方程式系では)実質的に不連続である。したがって方程式を離散化する場合に、計算メッシュ内の接合点位置によって内挿方法や平均化手法を変化させねばならないはずだが、従来の研究ではこの点に関する注意は必ずしも十分は行われていない。その理由は、おそらく、飽和・不飽和境界の物理特性がヒステリシス現象等のために曖昧であるゆえに、数値計算だけを厳密化しても仕方ない、ということであろう。しかし、物理法則の曖昧さと数値計算上の曖昧さとは別の問題であるから、与えられた方程式をできるだけ正確に解くための工夫は必要である。本研究では、この点について、鉛直一次元浸透流を対象として基

礎的に検討する。

鉛直浸透流計算は固定された差分メッシュないし有限要素に対して定式化されることが多い。その場合、計算精度を向上させるためには差分メッシュを細密にして、飽和・不飽和境界近傍の“曖昧領域”を局所に限定するしかない(方程式系がメッシュ内で変化する場合には、高次の差分を用いたとしても、差分メッシュが粗い限り精度向上を望めない。)しかしメッシュを細密にするとメモリーや計算時間が増大する。

そこで本論文では、時空間アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法によって、飽和・不飽和境界が要素境界と常に一致する計算法を提案する。また、その特殊な場合として、三角形要素を“裏返して”計算することにより効率的な数値計算が可能であることを示す。

近年、Miller<sup>5), 6)</sup>の提案したMFE (Mooving Finite Element Method)を用いて鉛直不飽和浸透流を計算する試みがなされている<sup>7), 8)</sup>。この手法は、圧力ポテンシャル勾配の大きな降雨フロント部分を精度良く計算するために節点を移動させるものであり、節点を移動させるという点では本研究の手法と類似している。しかし、MFEでは計算領域内部の節点を移動させるのに対して、本研究の手法は不飽和浸透流計算を行う領域の境界を移動させるものであり、この点で基本的に異なっている。

## 2. 本論文で対象とする問題

本論文では、図-1に示すような鉛直一次元不飽和浸透流を取り扱う。給水は地表面と地盤下端から行われるものとする。したがって流れは双方向に生じ得る。また排水は地盤下端で行われるものとする。なお、図-1において  $q_s$  は地表面の鉛直下向き流量、 $q_B$  は不飽和層下端の鉛直下向き流量、 $\psi_{cr}$  は飽和状態であり得る最大吸引圧を示している。

解析の基礎方程式として Richards の式を用いる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ K_s(\psi) \left( 1 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} \quad (1)$$

ここに、 $\theta$  は含水率、 $\psi$  は圧力ポテンシャル (サクション)、 $K_s(\psi)$  は不飽和透水係数である。鉛直座標  $z$  は地表面を原点とし鉛直下向きを正としている。

次に、 $\theta$  と  $\psi$  の関係として Brooks & Corey の表示式を、また不飽和透水係数に Campbell の表示式を導入する<sup>9)</sup>。

$$C(\psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = (\theta_s - \theta_r) \lambda \frac{\psi_{cr}^\lambda}{\psi^{\lambda+1}} \quad (2)$$

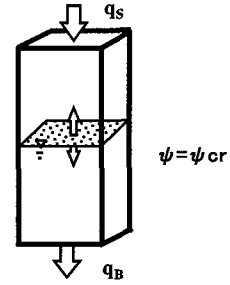


図-1 対象とする問題(一次元鉛直不飽和浸透流)

$$K_s(\psi) = K_{s0} \left( \frac{\psi_{cr}}{\psi} \right)^\gamma \quad (3)$$

ここに、 $\theta_s$  は飽和体積含水率、 $\theta_r$  は最小体積含水率、 $\gamma$ 、 $\lambda$  は定数、 $K_{s0}$  は飽和透水係数である。

式(2),(3)を用いて式(1)をサクション  $\psi$  の方程式で表すと次式となる。

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ K_s(\psi) \left( 1 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} \quad (4)$$

さらに、 $\psi_{cr}$  により  $\psi$  を無次元化し  $u = \psi / \psi_{cr}$  と置くと式(4)は次式となる。

$$A \frac{1}{u^\beta} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{u^\gamma} \left( 1 + \psi_{cr} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} = 0 \quad (5)$$

ここに、 $\beta = \lambda + 1$ 、 $A = (\theta_s - \theta_r) \lambda / K_{s0}$ 、 $\gamma$ 、 $\lambda$  は定数である。また、境界条件は次の通りである。

地表面において

$$q_s(t) = \text{given}$$

飽和域と不飽和域の境界において

$$\begin{cases} q_B(t) = \text{given} \\ u = 1 \end{cases}$$

なお、以降においては、飽和域の上端 ( $\psi = \psi_{cr}$  となる位置) を浸潤面と呼ぶことにする。

さて、上記の問題自体は既に古典的な部類に入り、通常の差分法でも種々の条件下で解かれている。したがって、著者らは何か特に新しい計算結果を出そうと考えているのではない。本研究の目的は、以下に述べる新しい計算手法の開発であり、それを検討するための題材として図-1に示す単純な条件を選んでいる。

## 3. 計算式の導出

### (1) Galerkin方程式と時空間アイソパラメトリック要素

さて式(5)は、 $z$  と  $t$  に関する  $u$  の偏微分方程式である。通常の有限要素法では、空間を有限要素に分割して空間積分することにより要素方程式を作成し、時間については別途積分を行うことが多い<sup>1)</sup>。

しかし、式(5)のように物理法則がひとたび定式化された後は純然たる数学の問題であるから、 $z$ と $t$ をあえて区別して取り扱う必要はないであろう。そこで本研究では $[z, t]$ を二次元空間座標とみなして有限要素法を適用する。

まず、式(1)に重み関数 $W(z, t)$ を乗じて時空間積分し、さらに右辺の空間積分に部分積分公式を適用すると次式を得る。

$$\iint \left[ A \frac{1}{u^\beta} \frac{\partial u}{\partial t} W + \frac{1}{u^\gamma} \left( 1 + \psi_{cr} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial W}{\partial z} \right] dz dt - \frac{1}{K_{s0}} \int q_B W|_{z=h} dt + \frac{1}{K_{s0}} \int q_S W|_{z=0} dt = 0 \quad (6)$$

ここに、 $z=h$ は浸潤面の座標、 $z=0$ は地表面の座標を表している。なお、式(6)の導出過程から明らかのように、 $q_B$ は"下端の単位幅流量"であり、浸潤面の移動によってキネマティックに生じる通過量とは異なる。本論文では浸潤面移動の計算に主眼をおいているので、 $q_B$ を外部から与える変数(すなわち給排水量)とする。その結果、浸潤面位置が未知(従属)変数となる。なお、 $q_B$ と浸潤面位置の両方を変動させる計算式を導出することもできるが、別の機会に発表する予定である。

要素分割には、図-2に示すアイソパラメトリック一次要素を用いる。要素の時間長は一定( $\Delta T$ )とする。要素の空間長も最下端の要素以外は一定( $\Delta Z$ )とし、以後これらの要素を一般要素と呼ぶ。最下端の要素は、不飽和浸透域(すなわち式(5)の適用範囲)が変動することから台形となり、寸法は図中に示す $\Delta Z_1$ 、 $\delta z$ で表記する。また台形の斜辺は浸潤面位置に相当するから、斜辺上では $u=1$ である。なお、一般要素の要素数を $N$ とし、台形要素も含めて全要素数を $N+1$ とする。

図-2の要素に対応する一次補完関数は次式で表される。

$$u = \sum_{m=1}^4 U_{(m)} \phi_m(\xi, \eta) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi, \eta) &= (1-\xi) \cdot (1-\eta) \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \xi \cdot (1-\eta) \\ \phi_3(\xi, \eta) &= (1-\xi) \cdot \eta \\ \phi_4(\xi, \eta) &= \xi \cdot \eta \end{aligned}$$

ここに、 $\xi, \eta$ は図-3に示す要素内座標である。また、この空間軸上の第 $i$ 節点における $u$ の値を $U_i(t)$ と書けば、 $U_{(m)}$ と $U_i$ には以下の対応関係がある。

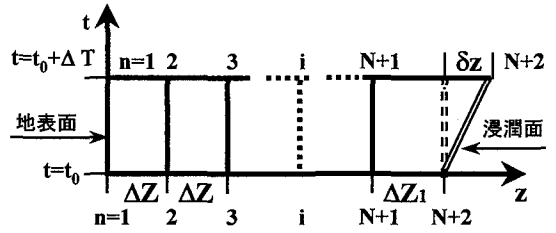


図-2 時空間アイソパラメトリック要素

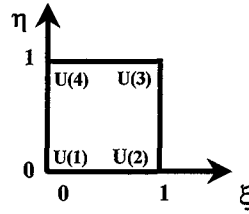


図-3 要素内座標

$$\begin{aligned} U_{(1)} &= U_i(t_0) \\ U_{(2)} &= U_{i+1}(t_0) \\ U_{(3)} &= U_{i+1}(t_0 + \Delta T) = U_{i+1} + \Delta U_{i+1} \\ U_{(4)} &= U_i(t_0 + \Delta T) = U_i + \Delta U_i \end{aligned} \quad (8)$$

ここに $\Delta U_i$ は $\Delta T$ 時間での $U_i$ の増分である。

さて、式(7)はアイソパラメトリック四辺形要素であり、要素内座標は次式で表される。

$$\begin{aligned} z &= \sum_{m=1}^4 Z_{(m)} \phi_m(\xi, \eta) \\ t &= \sum_{m=1}^4 T_{(m)} \phi_m(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、 $Z_{(i)}$ は要素角点の $z$ の値、 $T_{(i)}$ は要素角点の $t$ の値である。

以上より、 $z$ と $t$ に関する $u$ の偏微分は次のように求まる。

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta z} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \dots \text{一般要素} \\ \frac{\Delta T}{|J|} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \dots \text{最下端要素} \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta T} \frac{\partial u}{\partial \eta} & \dots \text{一般要素} \\ \frac{1}{|J|} (\Delta Z_1 + \delta z \cdot \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} & \dots \text{最下端要素} \end{cases} \quad (11)$$

ここに $|J|$ はヤコビアンであり、以下のように書かれる。

$$|J| = \begin{cases} \Delta Z \Delta T & \dots \text{一般要素} \\ \Delta Z_1 \Delta T + \Delta T \cdot \delta z \cdot \eta & \dots \text{最下端要素} \end{cases} \quad (12)$$

さて、 $u$ の現在値を既知として $\Delta T$ 後の $u$ の値を求めるわけだから、図-3の要素内表記を用いれば、未知数 $U_{(3)}$ 、 $U_{(4)}$ は、既知数 $U_{(1)}$ 、 $U_{(2)}$ と時間 $\Delta T$ 間の増分 $\Delta U_{(1)}$ 、 $\Delta U_{(2)}$ を用いて $U_{(3)} = U_{(2)} + \Delta U_{(2)}$ 、 $U_{(4)} = U_{(1)} + \Delta U_{(1)}$ と表すことができる。

本研究では Galerkin 法を用いることとするが、未知数に対する補完関数は式(7)のうちの $\phi_3$ と $\phi_4$ であることから、式(6)に含まれる重み関数は次式で与える。

$$W(z, t) = \begin{cases} \phi_3(\xi, \eta) = (1 - \xi)\eta \\ \phi_4(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta \end{cases} \quad (13)$$

ただし $(z, t)$ と $(\xi, \eta)$ の関係は式(9)で与えられている。

ここで、 $\sigma_1(\xi) = (1 - \xi)$ 、 $\sigma_2(\xi) = \xi$ とおき、上記の一連の関係式を式(6)に代入すると、次のような要素方程式を得る。

一般要素について：

$$\begin{aligned} A\Delta z \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{u^\beta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \sigma_i \eta \, d\xi d\eta + \Delta T \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{u^\gamma} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \xi} \eta \, d\xi d\eta \\ + \frac{\Delta T}{\Delta z} \psi_{cr} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{u^\gamma} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \xi} \eta \, d\xi d\eta + \frac{\Delta T}{2K_S} \cdot q_S \Leftrightarrow 0 \end{aligned}$$

表面要素のみ

最下端要素について：

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 A \frac{1}{u^\beta} \left\{ -\delta z \cdot \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + (\Delta z_1 + \delta z \cdot \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\} \sigma_i \eta \, d\xi d\eta \\ + \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{u^\gamma} \Delta T \frac{\partial \sigma_i}{\partial \xi} \eta \, d\xi d\eta + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\psi_{cr} \Delta T^2}{u^\gamma |J|} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \xi} \eta \, d\xi d\eta \\ - \frac{\Delta T}{2K_S} \cdot q_B \Leftrightarrow 0 \end{aligned} \quad (14)$$

なお、要素方程式における右辺と左辺は実際には等しくない(全ての要素方程式を重ね合わせると等号が成立する)ので、等号の代わりに $\Leftrightarrow$ としている。

さて式(14)は、図-2に示す $\delta z$ (浸潤面変動量)を未知数として含んでいるが、第3項の分母のヤコビアンに含まれている $\delta z$ 以外は積分の外に出すことができるので数値計算上問題ない。第3項だけは未定パラメータ $\delta z$ を非線形の形で含んでいるので、そのままでは直接積分できない。したがって $\delta z$ についての収束計算を行わねばならず、時空間アイソパラメトリック要素を用いることのメリットが無くなる。しかし式(12)の中の $\Delta Z_i$ がゼロの場合のみは、最下端要素のヤコビアンが簡略化され、その結果として式(14)の第3項の分母・分子の $\eta$ が約分でき、 $\delta z$ を積分の外に出すことができる。その場合、図-2の台形要素が三角形要素になる。

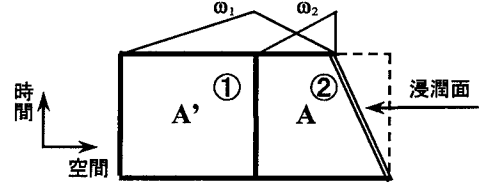


図-4-a 通常のGalerkin法

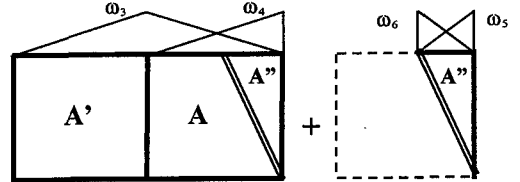


図-4-b 裏返し要素を用いたGalerkin法

## (2) 裏返し要素法

三角形要素を用いる場合、浸潤面が下降する際には要素が正の方向に伸びるだけであるから、台形の場合との数学的差異は生じない。ところが浸潤面上昇する際には、その時間ステップのはじめで設定した四辺形要素の中に三角形要素が食い込んでいくことになる。そこで、このことが数学上の問題を生じないかどうかを調べておく。

図-4-aは、本来の Galerkin 法(つまり計算したい状況)の積分領域を、最下端の2つの要素について示したものである。ここにAは浸潤面上昇により四辺形が欠けて生じる台形要素を指す。またA'はその直上の要素である。節点①の空間補完関数を $\omega_1(\xi)$ 、節点②(浸潤面上の節点)の空間補完関数を $\omega_2(\xi)$ とする。ただし図が煩雑にならないように補完関数を上辺のみに描いている。すなわち、 $\omega_1(\xi)$ は面的に広がっている。

補完関数 $\omega_1(\xi)$ に関する Galerkin 方程式と $\omega_2(\xi)$ に関する Galerkin 方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} \iint [L\{u, \xi, \eta\} \omega_1(\xi) \cdot \eta] (dA + dA') = 0 \\ \iint [L\{u, \xi, \eta\} \omega_2(\xi) \cdot \eta] dA = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ここに $L\{u, \xi, \eta\}$ は解くべき方程式であり、 $\iint [X](dA + dA')$ は $X$ を領域AとA'に関して面積分することを示す。要するに式(15)を解くのが本来の Galerkin 法である。

しかしこのままでは台形要素であるために、前述した数値積分上の問題が生じる。そこで、図-4-aの状況を以下のような変則の手順で計算する。まず

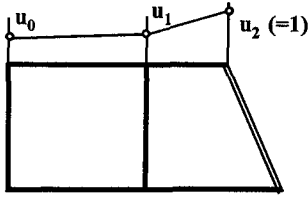


図-5-a 通常の Galerkin 法の補完

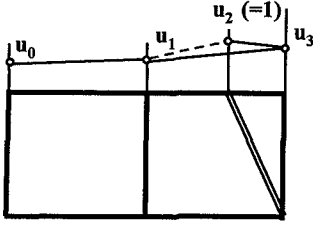


図-5-b 裏返し要素による補完

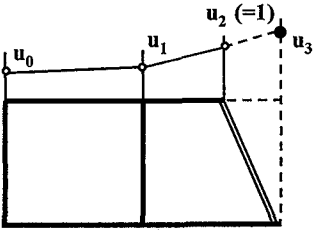


図-5-c 裏返し要素法の解が満たすべき条件  
( $u_3$ は $\overline{u_1 u_2}$ の延長上にある。)

図-4-bのように、完全な矩形要素 ( $A + A''$ ) に対しての補完関数  $w_3(\xi)$  について Galerkin 方程式を立てる。領域  $A'$  においては  $w_1(\xi) \equiv w_3(\xi)$  であるから、

$$\iint [L\{u, \xi, \eta\} w_3(\xi) \cdot \eta] (dA + dA'') + \iint [L\{u, \xi, \eta\} w_1(\xi) \cdot \eta] dA' = 0 \quad (16)$$

一方、反対側の補完関数  $w_4(\xi)$  は、もし浸潤面が下降していれば右に伸びているはずの三角形要素 (上昇する場合は裏返しになって左の要素の上にかぶさっている) の補完関数  $w_5(\xi)$  につながっている。したがって下降する場合と同じ計算をすれば、この2つの関数を合成した関数についての Galerkin 方程式を立てることになる。すなわち、

$$\iint [L\{u, \xi, \eta\} w_4(\xi) \cdot \eta] (dA + dA'') - \iint [L\{u, \xi, \eta\} w_5(\xi) \cdot \eta] dA'' = 0 \quad (17)$$

ただし要素が裏返しになっているので、 $w_5(\xi)$

に関する積分には負の符号が付く。また、浸潤面を頂点とする補完関数  $w_6(\xi)$  についての Galerkin 方程式は次式となる。

$$- \iint [L\{u, \xi, \eta\} w_6(\xi) \cdot \eta] dA'' = 0 \quad (18)$$

さて、ここで用いている補完関数は全て一次式であるので、幾何学的に次の関係が成立する。

$$w_3(\xi) = \begin{cases} w_1(\xi) + \frac{\delta z}{\Delta z} w_2(\xi) & (u = 1 \text{ より左側において}) \\ \frac{\delta z}{\Delta z} w_6(\xi) & (u = 1 \text{ より右側において}) \end{cases}$$

$$w_4(\xi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\delta z}{\Delta z}\right) w_2(\xi) & (u = 1 \text{ より左側において}) \\ \left(1 - \frac{\delta z}{\Delta z}\right) w_6(\xi) + w_5(\xi) & (u = 1 \text{ より右側において}) \end{cases} \quad (19)$$

そこで、式 (18), (19) を式 (16), (17) に代入して整理すると式 (15) と全く同じ方程式を得る。つまり、図-4-a と図-4-b のふたつの状況に対して、被積分関数  $L\{u, \xi, \eta\}$  が同一であれば、積分手順の違いは問題にならないことになる。

そこで次に  $L\{u, \xi, \eta\}$  の同一性が問題になるが、そのためには  $u$  の内挿関数が等しくなければいけない。ところが、図-4-a の状況に対しては図-5-a のように  $u_0 \sim u_1 \sim u_2 (=1)$  を通る折線で補完するのに対し、図-4-b の裏返し要素法では図-5-b に示すように、 $u_0 \sim u_1$  から一旦  $u_3$  を通り  $u_2 (=1)$  を結ぶように折線補完する。すなわち両者が一致するためには、図-5-b において、 $u_3$  が  $u_1$  と  $u_2 (=1)$  を結ぶ直線の延長上に位置していなければならない。

上記の要請が満足されることは、以下のように帰納的に説明できる。通常の Galerkin 法における  $u$  の解 ( $u_0, u_1, u_2$ ) が図-5-a のようであったとする。そこで、図-5-c に示すように  $u_1$  と  $u_2 (=1)$  を結ぶ直線上に  $u_3$  を設定し、これを裏返し要素法の方程式系に代入すると、先に証明した「方程式系の同源性」から、裏返し要素法の方程式は当然満足されることになる。つまり両者は同一解を共有する。

残された問題は「解の一意性」であるが、これは解くべき非線形方程式の性質に依存するので、一般的な証明はできない。しかし非線形方程式を数値的に解く場合には、むしろ、解の多価性に注意しながら収束方法を考えるのが当然のことであるから、ここでは、図-4-a の要素分割と図-4-b の裏返し要素分割が同一の解を持つことを証明すれば十分であろうと考える。

以上の証明の正しさを検証するために、後に5節で示す計算例の中から、最下端要素の部分を拡大し



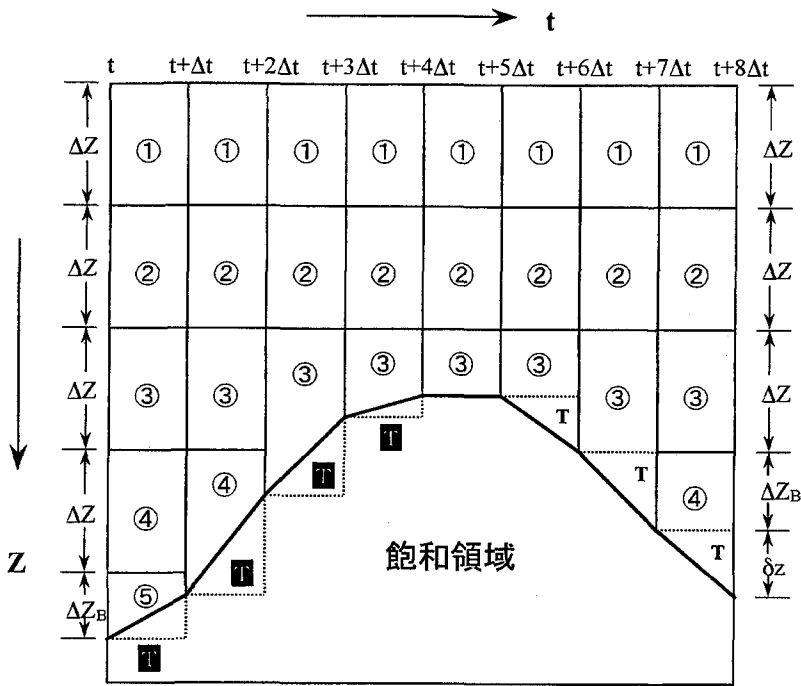


図-7 最下段要素の分割および合体

(図中の数字は要素番号を示す。Tとは浸潤面の移動に伴い作成された三角形要素。■は三角形要素が裏返っている場合。)

#### 4. 計算領域の伸縮に伴う要素数の更新

浸潤面の移動に伴い最下段の要素の長さ  $\Delta Z_B$  が変化する。そこで、 $\Delta Z_B$  が  $\Delta Z$  (一般要素の要素長) に対してある程度大きくなった場合には、最下段要素をふたつに分割し、ひとつの一般要素と新たな最下段要素とする。また逆に、 $\Delta Z_B$  が  $\Delta Z$  に対してある程度小さくなった場合には、その上の一般要素と最下段要素を合体し、新たな最下段要素とする。なお、前者(分割)における新たな節点での  $\psi$  の値は、上下の節点での値を線形補完して与えるものとする。

5節に述べる計算例では、 $\Delta Z_B$  が次式の範囲外になった時に分割または合体をさせている。

$$\alpha \cdot \Delta Z < \Delta Z_B < (1 + \alpha) \cdot \Delta Z \quad (22)$$

なお、 $\alpha$  は計算条件に合わせて設定する定数であるが、単位時間ステップあたりの浸潤面変位  $\delta z$  が  $\Delta Z_B$  を越えないように設定する必要がある。要素の分割および合体の仕方を図-7に例示する。

#### 5. 数値計算例

前節に述べた方法を用いて、表-1に示す Case1, Case2, Case3 の条件により数値計算を行った。計算結果をそれぞれ図-8-1, 図-8-2, 図-8-3に示す。図-8はいずれの場合も  $\Delta Z = 2 \text{ cm}, 10 \text{ cm}, 40 \text{ cm}$  の3通りについて計算を行っており、時間の経過に伴う不飽和層の含水率の変化を示している。

なお、表-1以外のパラメータとして式(22)の  $\alpha$  は、 $\Delta Z = 2 \text{ cm}, 10 \text{ cm}$  の場合には0.2、 $\Delta Z = 40 \text{ cm}$  の場合には0.01としている。

これらの図からわかるように、 $\Delta Z$  がかなり粗い場合でも細密メッシュを用いて計算した結果とよく一致していることが分かる。最も粗いメッシュ(40cm)の場合は、計算初期におけるメッシュ数は5であり、浸潤面が上昇するとメッシュ数はさらに減少しているが、節点における値は細密メッシュの場合とほとんど同じになる。図-8-1は境界条件として地表面から  $q_s = 2.0 \text{ (cm/h)}$ 、飽和・不飽和層境界において  $q_B = 0.0 \text{ (cm/h)}$  を3時間連続して与え続けた場合の計算結果であるが、時間の経過に従い地表面から水分が浸透していく様子がわかる。また、水分の浸透に伴って要素境界(最下端節点)が上方へ

表-1 計算条件

Parameter	unit	Case.1	Case.2	Case.3
$\theta_s - \theta_r$		0.4	0.4	0.4
$\psi_{er}$	cm	20.0	20.0	20.0
$K_{So}$	cm/s	0.001	0.001	0.001
$\lambda$		0.1	0.1	0.1
$\gamma$		2.3	2.3	2.3
時間増分	sec	10.0	10.0	10.0
計算時間	hour	8.0	8.0	8.0
全土層厚	cm	200	200	120
$q_s$	cm/hr	2.0	-	-
$q_B$	cm/hr	-	-0.5	0.5
給水時間	hour	3.0	8.0	8.0

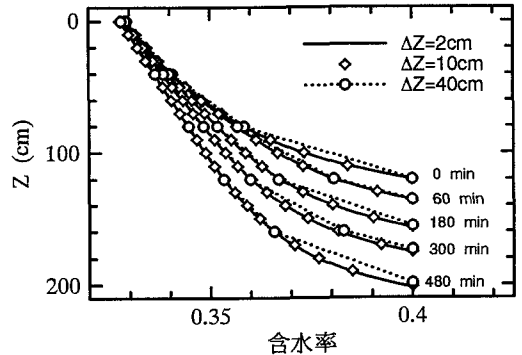


図-8-3 地盤下端で排水した場合

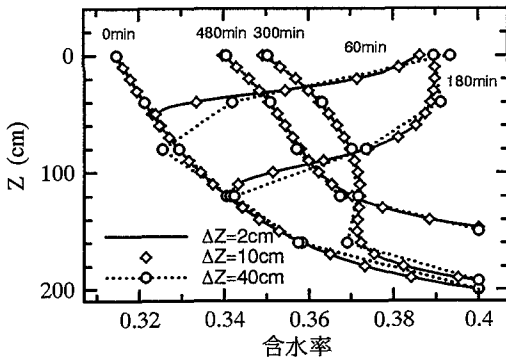


図-8-1 地表からのみ給水した場合

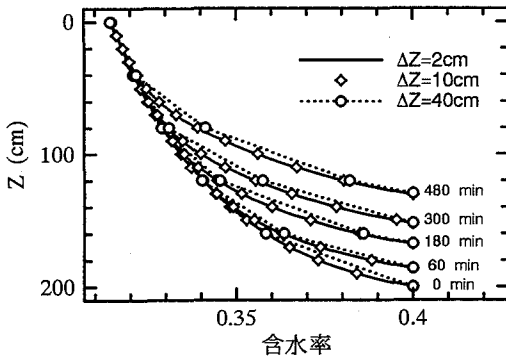


図-8-2 地盤側からのみ給水した場合

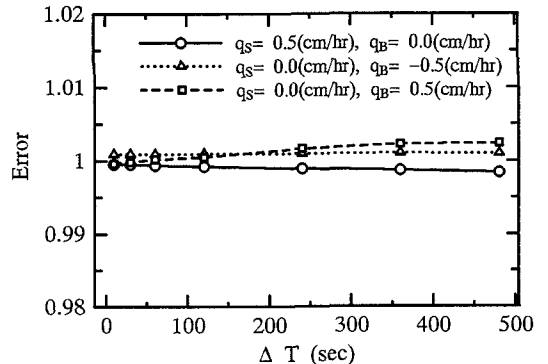


図-9-1 水分量の保存性の誤差率(ΔT)

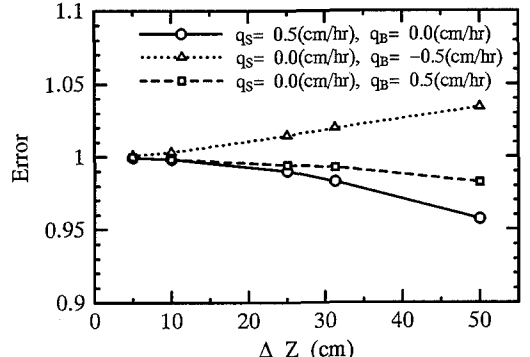


図-9-2 水分量の保存性の誤差率(ΔZ)

移動している様子が表れているが、これは水分の浸透によって不飽和層が下方から順次飽和して、その結果飽和・不飽和層の境界が上昇するからである。図-8-2、図-8-3についても飽和・不飽和層境界における吸水・排水の結果、要素境界が領域境界の変動とともに変化していることがわかる。

次に、計算精度を調べるため水分量の保存性の誤差率(計算領域の全水分量の変化/給水または排水量)を計算した。結果を図-9に示す。図-9-1は不飽和層の厚さ $L_o=250$ cmに対し $\Delta Z=5$ cmとして時間ステップ $\Delta T$ を様々に変化させ、図に示す $q_s$ 、 $q_B$

の条件で24時間計算させた場合の誤差率を表している。また、図-9-2は $\Delta T=10$ secとして $L_o=250$ cmに対し $\Delta Z$ を様々に変化させて、図に示す $q_s$ 、 $q_B$ の条件で24時間計算を行った場合の誤差率を表している。図-9-1より $\Delta T$ をある程度粗くしても誤差率を0.5%以内で計算できることがわかる。また、図-9-2より $\Delta Z$ を50cmとしても誤差率5%以内で計算できることが分かる。ここで特に重要なのは、浸潤面が大幅に移動する場合においても計算精度が高いことである。これは、本計算法が浸潤面移動量も含めた完全陰解法であるためである。



## 6. おわりに

本論文では、不飽和域と飽和域の境界部分を合理的に取り扱う計算スキームについて検討し、「時空間アイソパラメトリック要素」に「裏返し技法」を組み合わせた新しい計算法を提案した。この方法は積分時間  $\Delta T$  の間で浸潤面が常に要素境界に一致した完全陰解法であり、要素長をかなり大きくとつても、浸潤面が移動する場合の鉛直不飽和浸透流を精度良く計算できる。

今回の計算では、下端での給水・排水量  $q_B$  を外部から与えて浸潤面変位  $\delta z$  を求めているが、両方も変動量として取り扱うように変形することも可能であり、別の機会に発表したいと考えている。

### 参考文献

- 1) 赤井浩一, 大西有三, 西垣 誠: 有限要素法による飽和-不飽和浸透流の解析, 土木学会論文集, 264, pp. 87-96, 1977.
- 2) 例えば, 盛谷明弘, 安藤義久, 高橋 裕: 雨水の鉛直不飽和浸透による地下水面上昇のモデル化, 第32回水

理講演会論文集, pp.95-100, 1988.

- 3) 山田 正, 小林 稔: 不飽和浸透の基本的特性とヒステリシスを考慮した新しい不飽和浸透理論, 第32回水理講演会論文集, pp.83-88, 1988.
- 4) 土木工学ハンドブック I, pp.527, 1989
- 5) Christopher L.Cox and Walter F.Jones, Virgil L.Quisenberry and Frans Yo: One-dimensional infiltration with moving finite elements and improved soil water diffusivity, *Water Resour.Res.*, 30(5), 1431-1438, 1994.
- 6) Gottardi, G. and Venutelli, M.: Moving Finite Element Model for One-Dimensional Infiltration in Unsaturated Soil, *Water Resour.Res.*, 28(12), 3259-3267, 1992.
- 7) Miller, K.: Moving finite elements, II, *SIMA J.Numer. Anal.*, 18, 1033-1057, 1981.
- 8) Miller, K.: Moving finite elements, I, *SIMA J.Numer. Anal.*, 18, 1019-1032, 1981.
- 9) 虫明功臣, 石崎勝義, 吉野文雄, 山口高志: 水環境の保全と再生, 山海堂, 1987.

(1997. 2. 3 受付)

## A NUMERICAL METHOD TO JOINT THE SATURATED AND THE UNSATURATED GROUND WATER FLOW

Tomoyuki SUZUKI, Mitsuteru IRIE and Tadaharu ISHIKAWA

A numerical model for a simulation of unsaturated ground water flow in vertical is developed with a special attention to the strict formulation of the motion of a boundary between the saturated region and the unsaturated region: An iso-parametric element on T(time)-Z(space) plane is introduced so that the boundary is always coincident with a nodal point of finite element method. As a result, the numerical errors caused by the coexistence of saturated and unsaturated regions in one element is eliminated. The model produces a ground water flow field with high accuracy even with a space increment far larger than that of the existing models.